積雪塊の熱傳導率の測定*

吉田順五, 岩井 裕

(低温科學研究所 應用物理學部門)

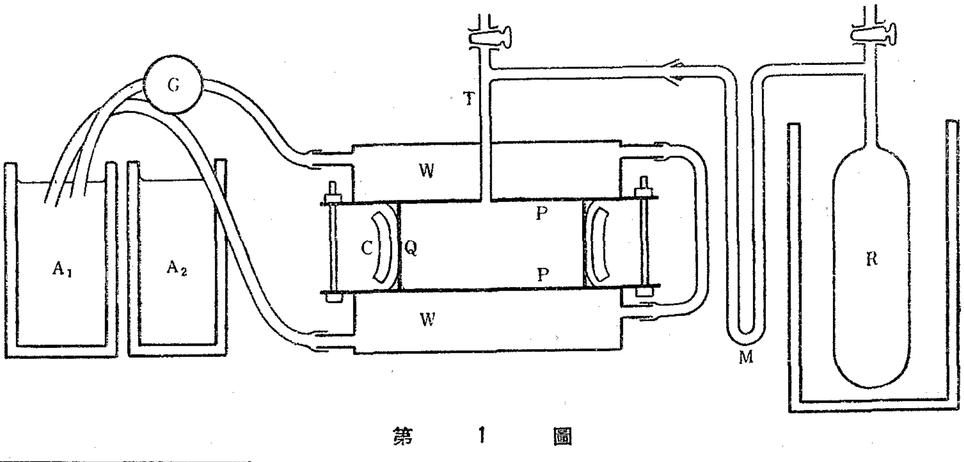
〔昭和 22 年 1 月受理〕

積雪の熱傳導率は，岡田武松博士をはじめいろいろの人[(1)]が測定してゐる．筆者の知るかぎりみな野外に積つたまゝの積雪についての測定である．氣温 t_a の日變化に應じて積雪内部の溫度 t_s も變る．この t_s をいろいろな深さで測定する．t_s の變化は t_a の變化より遲れるので，その遲れをさだめてそれから積雪の溫度擴散率 κ が求められる．密度 ρ と比熱 c とを κ にかければ，熱傳導率 μ になる．

積雪は層をなしてゐて，各層ごとに性質がちがふので，μ も各層でちがふ．上の方法では，ある厚さの積雪層についての μ の平均値が求められるわけである．しかし，積雪の性質をこまかくしらべるには，積雪の各層から一樣な性質をもつた小さい塊をとりだし，それについて μ を測定する必要がある．筆者は，この種の測定を試みた．

I. 測 定 法

第 1 圖が測定裝置の略圖である．P, P は厚さ 1 mm の四角な鐵鈑で，それにトタン鈑の函 W, W がついてゐる．Q は直徑 10 cm, 高さ 5 cm の圓筒で，このなかに雪をすきまなくつめ，その上下を P, P ではさむ．P, P と Q とのつぎめは，眞空用コンパウンドで氣密にする．上の函 W をつらぬいて細い硝子管 T が，P, Q でかこまれた空間に開いてゐる．T は



第 1 圖

* 北海道大學低温科學研究所業績 第 51 號．

壓力計 M につながり，M の他方の腕は，0°C に保たれた空氣だめ R に連絡してゐる．水槽 A_1，A_2 にはエチレングリコールの水溶液が入れてある．A_1 内の液の溫度は -1°C，A_2 内の液の溫度は -6°C 附近に保つてをく．G はギヤポンプで，ゴム管によつて A_1，A_2 内の液を W，W のなかに循環させる．A_1 内の液をしばらく循環させて P，Q 内の雪が全體一樣な溫度 -1°C になるのをまち，急にゴム管の端を A_1 から A_2 にうつす．すると W，W のなかには A_2 内の-6°C の液が循環して，P，P の溫度がかはり，雪は上下から冷される．雪が冷えると，そのなかに含まれてゐる空氣も冷えて，壓力がさがり，それが M に現れる．雪の溫度擴散率 κ が大きいほど，空氣の溫度のくだりかたが速い．それゆえ，壓力降下の速さがわかると κ が求められる．充分に時間がたつて，雪全體が -6°C になれば壓力の變化はとまる．それまでには約 1 時間かゝるが，W，W 内の循環水の溫度は，30秒ぐらいで -1°C から -6°C に變つてしまふ．

循環液の溫度を -6°C から -1°C に戻すと壓力が昇つてはじめの壓力にかへる．このときの壓力計の變化も讀みとる．

圖の C は熱の逸散を防ぐために Q のまはりにつけたマツトである．壓力計 M の液には眞空ポンプ用の油を使つた．

P，P の距離を a とし，熱の移動は上下方向に一次元的に起るものとする．P から x の距離にある點の溫度を θ，時間を t とする．P，P の間を水平に二分する平面に對して上下對稱であるから，x はどちらの P からとつてもかまはない．$t=0$ で P の溫度を θ_1 から θ_2 にかへたとすれば次の式がなりたつ（たとへば佐野靜雄：應用數學 p.102 參照）．κ は雪の溫度擴散率である．

$$\theta-\theta_2=\frac{4(\theta_1-\theta_2)}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2s-1}\sin(2s-1)\frac{\pi}{a}x\cdot\exp\left\{-(2s-1)^2\frac{\pi^2\kappa}{a^2}t\right\}\qquad(1)$$

この級數は收斂がはやいので，t がすこし大きくなれば，第一項だけをとつて

$$\theta-\theta_2=\frac{4(\theta_1-\theta_2)}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}x\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2\kappa}{a^2}t\right)\qquad(2)$$

とすることができる．第 2 圖に，(1) 式の級數部分で $\frac{\pi^2\kappa}{a^2}t=u$, $\sin(2s-1)\frac{\pi}{a}x=1$ とをいた

$$f(u)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2s-1}\exp\{-(2s-1)^2u\}\qquad(3)$$

を實線で表はした．點線は $f(u)$ の第一項 $\exp(-u)$ である．u が少し大きくなれば $f(u)$ は $\exp(-u)$ と一致してしまふ．それ故 t が少し大きくなれば (1) のかはりに (2) をつかつてもさしつかへない．雪のなかの空氣の溫度はその場所の雪の粒子の溫度と同じである．したがつ

て，空氣の溫度も (2) 式で表はされる．

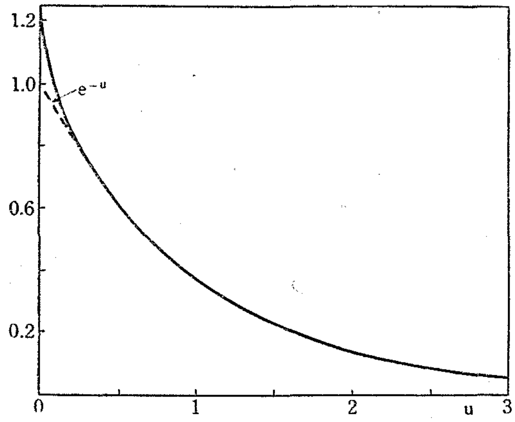
空氣の壓力には水蒸氣の壓力も含まれてゐる．それで，水蒸氣をとりさつた乾いた空氣の壓力を p，水蒸氣の壓力を p' とすれば，$p+p'$ が空氣の壓力である．乾いた空氣の密度を ρ gr/cm^3，絶對溫度を $T=273+\theta$ とすると

$$p(\mathrm{mmHg})=C\rho T,\quad C=2.16\times10^3 \tag{4}$$

の關係がある．雪のなかの水蒸氣は飽和してゐると考へられるから，p' は溫度 θ の氷の飽和蒸氣壓にひとしい．したがつて

$$p'(\mathrm{mmHg})=4.579\,e^{0.08570\theta}\ (\theta<0°\mathrm{C})$$

である．θ がかはると，p も p' もかはつて，それが空氣の壓力の變化として現はれる．1°C の溫度變化に對する p の變化は 760/273=2.8mmHg/°C の一定の値をもつてゐる．p' の變化は一定でないが，0°C～−10°C で考へてみると，だいたい 0.25 mmHg/°C である．すなはち p' の變化は p の變化の 1/10 にすぎない．それ故，空氣の壓力 $p+p'$ の變化を考へるときには，p' の變化に多少の誤差があつても，たいして影響しない．それで，上の p' の式を



第 2 圖

$$\left.\begin{aligned} p'&=4.58+0.262\,\theta=-m+nT \\ m&=67.8,\qquad n=0.262 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

で表はすことにする．實際，まへの式の θ の係數 0.0857 は小さいので，θ をあまり大きい範圍にわたつて變化させないかぎり，p' と θ との關係は一次式で表はされる．

空氣の壓力 $p+p'$ を $\bar{p}$ で表はすと，$\bar{p}$ は雪のなかのどこでも同じ値をもち，それが壓力計 M に現はれる．

$$\bar{p}=C\rho T-m+nT$$

を P, Q の內部の空間全部にわたつて積分すると

$$(\bar{p}+m)\int\frac{dv}{T}=C\int\rho dv+n\int dv \tag{6}$$

となる．$\int\rho dv=M$ は乾いた空氣の全量で一定であり，又 $\int dv=V$ は P, Q 內の空間の體積で一定である．$T=273+\theta$ で，$-1>\theta>-6$ であるから

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{273}\left(1-\frac{\theta}{273}\right)$$

としても誤差は 0.04% にすぎない．それで，θ の平均値 $\int\theta\frac{dv}{V}$ を $\bar{\theta}$ とすると (6) 式は

$$(\bar{p}+m)\frac{V}{273}(1-\frac{\bar{\theta}}{273})=CM+nV$$

となり，k を常數として

$$\bar{p}+m=k(1+\frac{\bar{\theta}}{273})$$

の形にすることができる．すなはち，$\bar{p}$ と $\bar{\theta}$ との關係は直線的である．

測定をはじめる前は，$\bar{\theta}=\theta_1$ で，このときの $\bar{p}$ を $\bar{p}_1$ とする．循環液の溫度をかへてから長い時間たつて，$\bar{p}$ がもはや變化しなくなれば $\bar{\theta}=\theta_2$ である．このときの $\bar{p}$ の値を $\bar{p}_2$ とする．さうすると

$$\bar{\theta}-\theta_2=(\theta_1-\theta_2)\frac{\bar{p}-\bar{p}_2}{\bar{p}_1-\bar{p}_2}$$

と書くことができる．すなはち $(\bar{\theta}-\theta_2)$ は $(\bar{p}-\bar{p}_2)$ に比例する．(2) 式を積分して $\bar{\theta}$ をだすと

$$\bar{\theta}-\theta_2=\frac{8(\theta_1-\theta_2)}{\pi^2}\exp(-\frac{\pi^2\kappa}{a^2}t)$$

となるから，結局

$$\bar{p}-p_2 \propto \exp(-\frac{\pi^2\kappa}{a^2}t) \qquad (7)$$

となる，したがつて，$\log(\bar{p}-p_2)$ と t との關係は直線で表はされ，その傾きから溫度擴散率 κ が求められる．

以上は熱の移動が上下方向に一次元的に起るものと考へた．圓筒 Q がガラスかエボナイトのやうな熱の不良導體で作つてあれば，測定はこの條件にかなふ．しかし，ガラスやエボナイトの圓筒がなかつたので Q も P と同じ鐵鈑で作つた．それ故 Q は P, P とほとんど同じ溫度なり，熱は上下方向のみならず，水平方向にも移動する．したがつて (7) 式は使へない．こにのやうな場合に對する式は次のやうにして求められる．

いま，半徑 b の圓筒のなかに溫度擴散率 κ の物質を入れ，熱の移動は水平方向にのみ起るとする．$t=0$ で圓筒の溫度を θ_1 から θ_2 にかへると，圓筒の中心から r の距りにある點の溫度 θ は

$$\theta-\theta_2=\frac{2(\theta_1-\theta_2)}{b^2}\sum_{s=1}^{\infty}J_0\left(\frac{\lambda_s r}{b}\right)\Big/J_1^2(\lambda_s)\cdot\exp\left(-\frac{\lambda_s^2\kappa}{b^2}t\right)\cdot\int_0^b J_0\left(\frac{\lambda_s r}{b}\right)rdr \qquad (8)$$

で與へられる (佐野 應用數學，p. 391)．J_0，J_1 は第一種のベッセル函數で λ_s は $J_0(x)=0$ の s 番目の根である．この級數も (1) 式と同樣に收斂は早く，t がすこし大きくなれば，その第一項だけをとれば充分である．そして平均溫度 $\bar{\theta}=2\int\frac{\theta rdr}{b^2}$ は

$$\overline{\theta}-\theta_2=4(\theta_1-\theta_2)\cdot 0.1720\cdot\exp(-5.784\frac{\kappa}{b^2}t) \tag{9}$$

となる.

實際の測定では，鈑 P, P と圓筒 Q とが同時に溫度變化を起す．このときの溫度分布は (1) 式と (8) 式との積に適當な常數をかけたもので表はされる．t がすこし大きくなれば (1), (8) 式の第一項だけをとつたものを用ひれば充分で，平均溫度 $\overline{\theta}$ は

$$\overline{\theta}-\theta_2\propto\exp\left\{-\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{5.78}{b^2}\right)\kappa t\right\}$$

となる．a は圓筒 Q の高さで 5.0 cm, b はその半徑で 4.85 cm であるから，これを上式に入れ，且 $\overline{p}-\overline{p_2}\propto\overline{\theta}-\theta_2$ の關係を用ひて

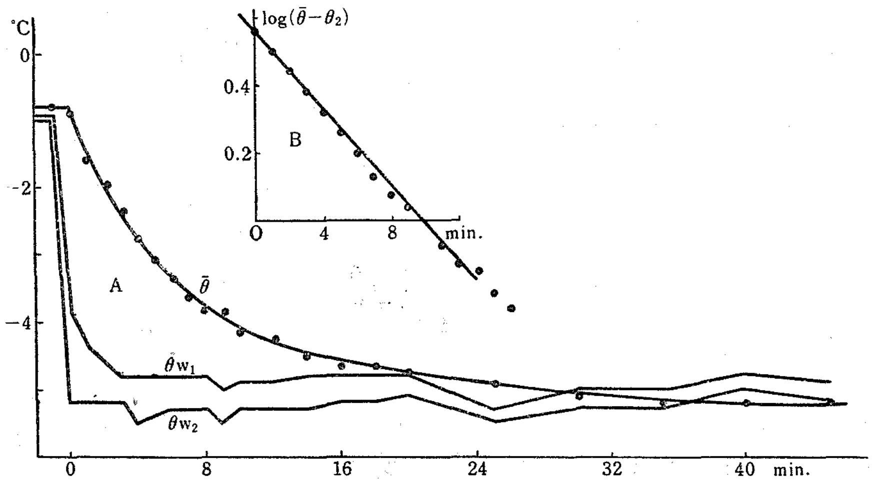
$$\overline{p}-\overline{p_2}\propto\exp(-0.641\,\kappa t) \tag{10}$$

をうる．$\overline{p}-\overline{p_2}$ を測定して，この式から κ を定めるわけである．

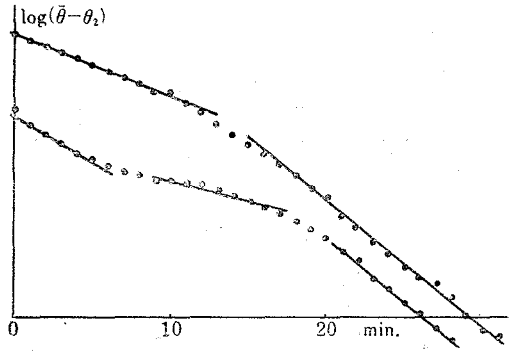
溫度擴散率 κ に雪の比重 ρ と比熱 c とをかければ熱傳導率 μ がえられる．ρ は直接に測定してさだめ，c には氷の比熱 0.487 cal/gr を用ひる．

II. 測定結果

第3圖 A, B に測定の一例を示した．A 圖の横軸は時間 t, 縦軸は W, W の溫度 θ_{w1}, θ_{w2} と雪の平均氣溫 $\overline{\theta}$ とである．θ_{w1} が上の W, t_{w2} が下の W の溫度である．循環液は，まづ下の W に入り，それから上の W にまはるので，その間にすこし暖まるため，θ_{w1} の方が θ_{w2} よりすこしたかい．(10) 式をあてはめるためには，θ_{w1} と θ_{w2} とがよく一致して，且變動がないやうにしなければならない．實際には，二つの溫度は一致せず，且變動してゐる．しかし，この



第 3 圖



第　4　圖

程度のものならばたいした影響は及ぼさないであらう．θ_2 の値としては θ_{w1} と θ_{w2} との平均値をつかつた．B 圖には，A 圖に對する log ($\bar{\theta}-\theta_2$) と t との關係を示したが，log ($\bar{\theta}-\theta_2$) と t とはよく直線にのる．比重 0.39 の古い雪で，粒子の大きい雪である．比重の小さい新しい雪になると log($\bar{\theta}-\theta_2$) と t との關係が，二つ又は三つの直線部分にわかれるやうな場合がある．第 4 圖に二つの例をあげた．測定中，溫度變化をうけると，雪は昇華して變質するからである．實際に顯微鏡でしらべると，測定後では測定前にくらべて雪の粒子は昇華して鋭い角や縁がなくなつてゐる．また雪はすこし收縮して Q の壁との間に 2～3 mm の隙間ができてゐる．古い雪だとこのやうな變化はすくない．

第　1　表

κ：溫度擴散率　μ：熱傳導率　溫度範圍：−1°C～−6°C

番號	密度 gr/cc	採取時の雪溫	$\kappa\times10^3$ cm²/sec	$\mu\times10^4$ cal/°C sec cm
1	0.40	——	6.9	13.2
			2.5	4.9
2	0.39	−6.2°C	3.9	6.4
			3.9	6.4
3	0.28	−1.2°C	1.20 2.49	1.61 3.34
			3.22	4.31
4	0.17	−3.0°C	1.89 0.60 1.84	1.54 0.49 1.50
			6.62	5.39
5	0.085	−4.5°C	3.26 4.53	1.34 1.86
			4.22	1.73
6	0.072	−1.0°C	12.0	4.2
			6.3	2.2
空氣			179	0.52

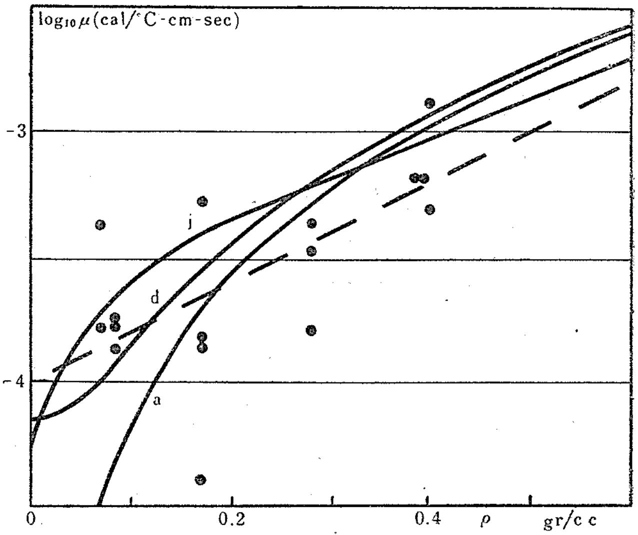
（空氣の値は參考のため表から求めて書入れたものである）

測定結果を第 1 表にまとめて示した．採取時の雪溫とは，戸外の積雪から測定用の雪をとるときのその場所での雪の溫度である．κ は溫度擴散係數で單位は cm²/sec，μ は熱傳導率で單位は cal/°C·sec·cm である．始め循環水の溫度を −1°C 附近にしておき，−6°C 附近にさげ，再びもとの −1°C にかへした．−6°C から −1°C へもどすときにも κ を決定できる．横棒で區切つた下にある値が，−6°C から −1°C に戻したときの値である．同じ雪についていくつもの値があげてあるが，これは先に説明したやうに，測定中 κ，μ がかはるので，それをその順序に示したのである．

測定中雪が收縮して測定容器の壁との間に隙間ができると，熱傳導度の惡い空氣層ができ

る．しかし，第1表の値には，この空氣層の影響は考慮してない．

野外に積つたまゝの雪について，いままでにもとめられた熱傳導率の値はだいたい(1～7)×10^{-4} である[(1)]．密度 ρ と熱傳導率 μ との關係は，はつきり定まつたものではないが，Abels[(1)], Jansson[(1)], Devaux[(2)] が次のやうな關係式をだしてゐる，



第 5 圖

Abels : $\mu=0.0068\rho^2$

Jansson : $\mu=0.00005+0.0019\rho+0.006\rho^4$

Devaux : $\mu=7\times(1+100\rho^2)\times10^{-5}$

(μ: cal/°C. cm. sec, ρ: gr/cm³)

第 5 圖にこの三つの式によつて求めた $\log_{10}\mu$ と ρ との曲線をかいた．圓い點は筆者の測定した値，即ち第1表の測定値である．そして，この測定點の分布を破線で代表した．破線の方程式は

$$\log_{10}\mu=-4+2\rho$$

である．

ρ が大きくなるにつれて μ は急激に大きくなるけれども，筆者の測定によると，ρ が 0.1 以下では ρ が小さくなるほど μ がすこし增加する．その理由として，次のことが考へられる．氷の蒸氣壓は溫度によつてかなりちがふ．それで溫度の高いところで水蒸氣が蒸發し，それが雪のなかを擴散して溫度の低いところへ凝結する．この水蒸氣の蒸發凝結によつても熱が運ばれ，この形による熱の傳播もいつしよに測定される．筆者の一人と黑岩とは，雪のなかの水蒸氣の蒸發凝結を調べ[(3)]，これによる熱の運搬量と，熱傳導率と溫度勾配とから計算した熱の運搬量とが同じ程度の大きさであることを知つた．それ故熱傳導率として測定されるものは，實は水蒸氣によつて運ばれる熱量を溫度勾配で割つたものであるかも知れない．雪の密度が小さくなると水蒸氣の蒸發，凝結，擴散が容易になる．

III. 摘　　要

物質の溫度擴散率を求めるためには，物質の內部の溫度を知る必要がある．それで，寒暖計

を物質のなかに差入れるが，物質が固體の場合には寒暖計と物質との接觸が充分でなく，正しい溫度が測れないことが多い．又外部から寒暖計を傳はつてはいつて來る熱も誤差の原因となる．このほか，寒暖計を差入れるために物質をこはすことがあるが，雪の場合は，その危險が非常に多い．それで筆者は雪のなかに寒暖計を差入れないで，溫度擴散率を測る方法をとつた．測定の原理は次の通りである．二重壁の器の中にすきまなく雪を入れて氣密な蓋をする．細い硝子管を器の內部に差入れて，內部の空氣の壓力を壓力計に導く．するとこの壓力は器のなかの空氣の溫度の平均値 $\overline{\theta}$ に比例するが，$\overline{\theta}$ は又雪の溫度の平均値である．器の壁の間に 0°C 以下の液體を循環させ，その溫度を變へると $\overline{\theta}$ が變り，それが壓力計に壓力の變化として現はれる．$\overline{\theta}$ の變化は液體の溫度の變化よりおくれ，そのおくれから溫度擴散率 κ が知られる．雪の密度 ρ と比熱 c とを κ にかければ熱傳導率 μ となる．つまり，雪の多孔性を利用して空氣を作動物質とする寒暖計を作つたわけである．

この方法は雪にかぎらず，粒狀の物質に廣く用ひられる．たゞその物質の蒸氣壓が低いことを條件とする．

ρ の値が 0.07 から 0.4 にわたるいろいろな雪について μ を測定して，μ と ρ との間に簡單な次の實驗式をえた．

$$\log_{10}\mu\,(\mathrm{cal/^\circ C.\,cm.\,sec}) = -4 + 2\rho\,(\mathrm{gr/cm^3})$$

ρ の小さい雪は測定中に μ の値が變る．しかし ρ は殆んど變化しない．これは，溫度の高い部分から低い部分へ水蒸氣が擴散して，雪の性質が變化するためであらう．實際に筆者の一人と黑岩とは，熱傳導による熱の流れに匹敵する熱がこの水蒸氣によつて運ばれることをたしかめた(3)．

この仕事は文部省科學研究費並びに學術振興會援助金によつて行つた．

文　　獻

(1) 田口龍雄，1940．雪，p. 32.
(2) Joseph Devaux, 1933. L' economie radio-thermique des champs de neige et des glaciers. Ann. de Physique, 20, 5.
(3) 吉田順五，黑岩大助，1947．積雪內部の昇華，低溫科學 3，89.

Zyungo YOSIDA and Yutaka IWAI: Measurement of Thermal Conductivity of a Mass of Snow.

Résumé

The authors devised a method of measuring the thermal conductivity of snow without inserting any thermometer into the sample. A mass of snow is put in a vessel with double wall and it is closed air-tightly. A thin tube of glass, which pierces the wall of the vessel, leads the pressure of air included among the snow to a U-tube oil-manometer. The pressure measured with this manometer gives the mean temperature of the air which is the same as the mean temperature of the snow in the vessel. By circulation of a water solution of ethyleneglycol, the temperature of the wall is kept at about $-1°C$ for a considerable time and then is changed suddenly to about $-6°C$ by circulation of another solution at that temperature. The pressure on the manometer decreases gradually. Plotting the logarithm of the values of pressure against time, we can calculate the thermal diffusivity of the snow. The product of the density ρ, specific heat and thermal diffusivity give the thermal conductivity μ. The authors obtained a simple empirical relation between μ and ρ:

$$\log_{10}\mu = -4 + 2\rho$$

(μ in cal/°C. cm. sec; ρ in gr/cm^3)