



# HOKKAIDO UNIVERSITY

|                  |   |
|------------------|---|
| Title            | 海氷の研究（第7報）：気温の週期的變化に伴ふ氷層中の温度分布  |
| Author(s)        | 福富, 孝治; FUKUTOMI, Takaharu; 楠, 宏 他  |
| Citation         | 低温科學, 3, 187-192  |
| Issue Date       | 1950-12-15  |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/17433">https://hdl.handle.net/2115/17433</a> |
| Type             | departmental bulletin paper   |
| File Information | 3_p187-192.pdf  |



# 海水の研究 (第7報)

## 気温の週期的變化に伴ふ氷層中の温度分布\*

福富孝治, 楠 宏

(低温科學研究所 海洋學部門)

(昭和 22 年 11 月受理)

### I. 緒 言

冬季結氷點以下の気温が長期間繼續するやうな地方では静陸水の表面は結氷する。しかし、氷は熱の不良導體であるから一旦水の表面に結氷が張りつめると、氷厚増加の割合はだんだん減少して、冬季の終り頃では結氷の増加は殆んど無視出来るのである。その最大の氷厚も一年氷ではシベリヤのやうな酷寒の地でも 2m を越えない。北海道地方ではせいぜい數十種の程度である。筆者等はこのやうな時期において気温の週期的變化が氷層中の温度分布に及ぼす影響について理論的に研究を行つた。

従來地中温度、積雪温度、氷中温度の問題については厚さが非常に大きく半無限體と考へられる場合が多く論ぜられてゐるが、上に述べた如く數十種の厚さの氷では半無限體とは考へられないので、筆者等は厚さが有限な結氷板の表面温度が気温の週期的變化に伴つて同様な週期的變化を行ひ、下面では常に結氷温度に保たれてゐる場合の問題を取扱つた。又どれ位の厚さになれば半無限體と見做し得るかの問題にも多少觸れた。以下はその研究の概略である。

### II. 理論的考察

厚さが一様な結氷板が水平方向に廣く擴がつてゐてその厚さ  $d$  が餘り薄くないものとする。座標の原点を氷の表面にとり鉛直に下方へ向つて  $z$  軸をとるものとする。結氷板中で  $z$  の深さの所の温度を  $\theta$  (結氷温度を 0 として測るものとする) とすれば熱傳導の方程式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (1)$$

であり、こゝに  $K^2 = \frac{\kappa}{c\rho}$  で、 $K^2$  は氷の温度傳導率、 $\kappa$  は熱傳導率、 $c$  は比熱、 $\rho$  は密度である。

今気温の週期的變化に伴つて結氷板の表面温度も週期的變化を行ふが、その表面温度は一般に次式で表はし得る筈である。

\* 北海道大學低温科學研究所業績 第 60 號。昭和 22 年 5 月 9 日日本物理學會年會において發表。

$$\left. \begin{aligned} [\theta]_{z=0} &= \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varepsilon_n), \quad n=1, 2, 3, \dots \\ \omega &= \frac{2\pi}{T_1} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

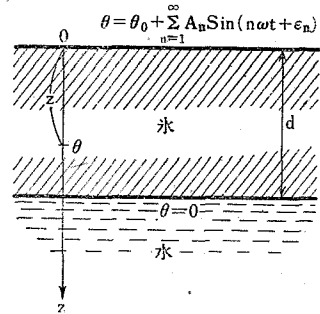
ここに  $\theta_0$  は平均温度,  $A_n$  は週期  $T_n = \frac{T_1}{n}$  位相角  $\varepsilon_n$  なる表面温度変化の振幅,  $T_1$  は基本週期である.

結氷板の下面においては常に結氷温度に保たれてゐるから

$$[\theta]_{z=d} = 0 \quad (3)$$

でなければならない.

氷厚  $d$  はあまり薄くないとし, 気温変化の週期  $T_n$  もあまり長いものは考へないことにすれば, 結氷板の下面での氷の生成の影響は無視出来る筈である.



第 1 圖

このやうな場合には (2), (3) 式の条件を満足すべき (1) 式の解は視察により次の形で與へられる.

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_0 \left(1 - \frac{z}{d}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n e^{-\beta_n z} \sin(n\omega t + \varepsilon_n - \beta_n z) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n e^{\beta_n z} \sin(n\omega t + \varepsilon_n + \beta_n z) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} A_n D_n e^{-\beta_n z} \cos(n\omega t + \varepsilon_n - \beta_n z) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} A_n D_n e^{\beta_n z} \cos(n\omega t + \varepsilon_n + \beta_n z) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

但し,  $B_n, C_n, D_n$  は常數で, また  $\beta_n$  は

$$\beta_n = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{n\omega}{2}} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{n\pi}{T_1}} \quad (5)$$

である. (4) 式において  $z=0$  として表面温度を考へると

$$[\theta]_{z=0} = \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (B_n + C_n) \sin(n\omega t + \varepsilon_n)$$

となり, (2) 式と比較すれば常數の間には次の關係がなければならない.

$$B_n + C_n = 1 \quad (6)$$

又 (4) 式を書き換へると

$$\theta = \theta_0 \left(1 - \frac{z}{d}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ (B_n e^{-\beta_n z} + C_n e^{\beta_n z}) \cos \beta_n z + 2D_n \cosh \beta_n z \sin \beta_n z \right\} \sin(n\omega t + \varepsilon_n)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ (B_n e^{-\beta_n z} - C_n e^{\beta_n z}) \sin \beta_n z + 2D_n \sinh \beta_n z \cos \beta_n z \right\} \cos(n\omega t + \varepsilon_n) \quad (7)$$

となる。(7)式において  $z=d$  と置いた場合に(3)式の條件が  $t$  の總ての値に對して成立するためには

$$\left. \begin{aligned} (B_n e^{-\beta_n d} + C_n e^{\beta_n d}) \cos \beta_n d + 2D_n \cosh \beta_n d \sin \beta_n d &= 0 \\ (B_n e^{-\beta_n d} - C_n e^{\beta_n d}) \sin \beta_n d + 2D_n \sinh \beta_n d \cos \beta_n d &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

でなければならない。よつて(8)式から  $\frac{2D_n}{B_n}, \frac{C_n}{B_n}$  は

$$\frac{2D_n}{B_n} = \frac{-2e^{-\beta_n d} \sinh \beta_n d \cos \beta_n d}{\cosh \beta_n d \sin^2 \beta_n d + \sinh \beta_n d \cos^2 \beta_n d} \quad (9)$$

$$\frac{C_n}{B_n} = \frac{e^{-2\beta_n d} (\cosh \beta_n d \sin^2 \beta_n d - \sinh \beta_n d \cos^2 \beta_n d)}{\cosh \beta_n d \sin^2 \beta_n d + \sinh \beta_n d \cos^2 \beta_n d} \quad (10)$$

又(10)式と(6)式とから

$$B_n = \frac{1}{1 + e^{-2\beta_n d} \frac{\cosh \beta_n d \sin^2 \beta_n d - \sinh \beta_n d \cos^2 \beta_n d}{\cosh \beta_n d \sin^2 \beta_n d + \sinh \beta_n d \cos^2 \beta_n d}} \quad (11)$$

となつて  $B_n, \frac{2D_n}{B_n}, \frac{C_n}{B_n}$  は夫々  $\beta_n d$  のみの函数として與へられる。

今簡単なために

$$\left. \begin{aligned} E_n &\equiv \left( e^{-\beta_n z} + \frac{C_n}{B_n} e^{\beta_n z} \right) \cos \beta_n z + \frac{2D_n}{B_n} \cosh \beta_n z \sin \beta_n z \\ F_n &\equiv \left( e^{-\beta_n z} - \frac{C_n}{B_n} e^{\beta_n z} \right) \sin \beta_n z + \frac{2D_n}{B_n} \sinh \beta_n z \cos \beta_n z \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

とおくと、(7)式は次式の如くなる。

$$\theta = \theta_0 \left( 1 - \frac{z}{d} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n \sqrt{E_n^2 + F_n^2} \sin(n\omega t + \varepsilon_n - \varphi_n) \quad (13)$$

$$\varphi_n = \tan^{-1} \left( \frac{F_n}{E_n} \right) \quad (14)$$

即ち、氷層中の任意の深さ  $z$  の所の温度は(13)式及(14)式により與へられる。よつて深さ  $z$  の所の  $T_n = \frac{T_1}{n}$  週期の温度變化の振幅  $A_z$  は

$$A_z = A_n B_n \sqrt{E_n^2 + F_n^2} \quad (15)$$

となり、又(14)式において  $z=d$  に對する位相のずれ  $\varphi_n$  は(14)式により與へられる。

但し、結氷板の下面  $z=d$  における位相は

$$[\varphi]_{z=d} = \tan^{-1} \left( \frac{\cosh \beta_n d \sin \beta_n d - \sinh \beta_n d \cos \beta_n d}{\cosh \beta_n d \sin \beta_n d + \sinh \beta_n d \cos \beta_n d} \right) \quad (16)$$

である。

## III. 應 用 例

前述の結果から種々の應用が考へられるが、こゝでは氷厚 40cm 又は 100cm の静陸水の結氷の表面温度が日週又は半日週變化をした場合に氷層中の温度分布や位相についての計算例を示すことにする。

氷の物理的常數としては、比熱  $c=0.475$  ( $-10^{\circ}\text{C}$ )、密度  $\rho=0.917$  ( $0^{\circ}\text{C}$ ) を採用する。氷の熱傳導率  $\kappa$  は温度、密度、溶解物質の量等によつてその値が 0.005~0.002 の間で變化してゐるので、この場合何程の値をとるべきか迷ふのであるが、實際河や池の結氷について氷厚係數を求め、これから熱傳導率を逆算してみると少い値が得られることが多い。例へば村上政嗣氏<sup>1)</sup>が滿洲松花江において行つた氷厚觀測の結果から  $\kappa$  を求めると 0.0023 となる、従つてこゝでは  $\kappa=0.0023$  を採用することにした。よつて  $K^2 = \frac{\kappa}{c\rho}$  であるから温度傳導率  $K=0.00528$  となる。勿論これらの常數は温度の函數であるが、その變化は小さいから、此所では上記の値を常數として採用しておく。

この場合は (2) 式において  $n=1$  のみで  $n$  が 2 以上の項の表面温度の振幅を 0 とすれば (但し  $\varepsilon_n=0$  とする)

$$[\theta]_{z=0} = \theta_0 + A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

と書き換へられる。従つて氷層中の温度分布を與へる式は (13) 式の代りに簡単に

$$\theta = \theta_0 \left(1 - \frac{z}{d}\right) + AB\sqrt{E^2 + F^2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi\right) \quad (13)'$$

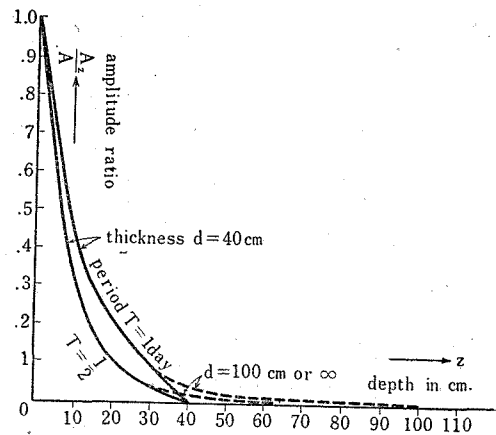
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{F}{E}\right) \quad (14)'$$

で與へられる。但し  $\beta$  の値は  $T=1$  日及び  $\frac{1}{2}$  日に對し (5) 式から  $\beta_1=0.0830$ ;  $\beta_{\frac{1}{2}}=0.114$  となる。よつて深さ  $z$  の所の温度變化の振幅  $A_z$  と表面温度の振幅  $A$  との比は

$$\frac{A_z}{A} = B\sqrt{E^2 + F^2} \quad (15)'$$

で與へられる。

今 (15)' 式により氷厚 40cm 及び 100cm の結氷板内で表面から下面までの各層の温度の振幅比  $\frac{A_z}{A}$  を計算してその深さに對する變化を圖示すれば第 2 圖 (實線) が得られる。

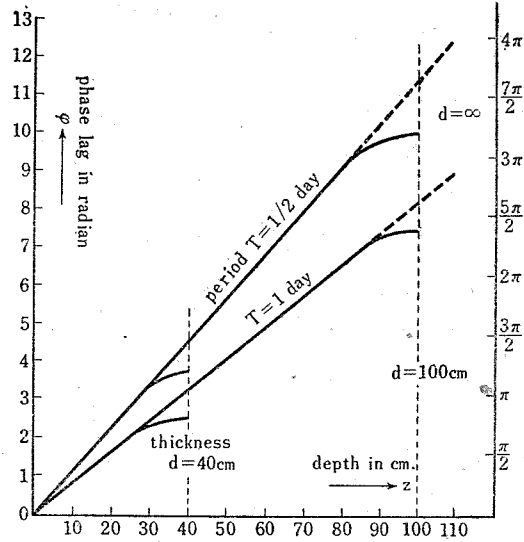


第 2 圖

次に (14)' 式及び (16) 式を用ひて氷層中の温度變化の氷の上面に對する位相の後れ  $\phi$  を計算し、深さ  $z$  に對するその變化を第 3 圖 (實線) に示した。

即ち、温度變化の振幅は深さに對して初めは急激に減少するが漸次一定の減少率を示しつゝ氷の下面で 0 となり、位相の後れは深さとともに最初は直線的に増加するが、漸次増加の割合を減少する。又同じ氷厚の結氷板において、表面温度變化の週期が長ければ長いほど同じ深さの温度變化は大きく位相の後れは小さいことが判る。

氷厚無限大の場合に於ける氷層中の温度及び位相の後れは



第 3 圖

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n z} \sin(n\omega t - \phi_n + \epsilon_n) \\ \phi_n &= \beta_n z \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

で表はされ、従つて温度の振幅比は

$$\frac{A_z}{A} = e^{-\beta_n z} \quad (18)$$

で表はされる。よつて比較のためにこの場合の振幅比及び位相の後れを (17) 式と (18) 式から計算して第 2 圖、第 3 圖中に點線で示した。

即ち、氷厚が約 40cm 以上の結氷板においては氷層の表面附近での問題を論ずる時には半無限體の場合と同様に考へても差支へないが、結氷の底面附近について論議する場合には、上に述べた氷厚有限の場合の式によつて行はなければならないことがわかる。

#### IV. 結 言

有限な氷厚を有つ結氷板についてその表面温度が週期的に變化する場合氷層中での温度分布や位相の變化について理論的に考察を行つた。その應用例として氷厚 40cm 及び 100cm の場合に適用してみた。

この結果靜陸水の結氷板に於いて氷厚が約 40cm 以上のものであれば表層附近における温度分布等の議論には半無限體の場合と同様に考へても差支へないが、結氷板の底面附近につい

て温度變化の様相を調べたり，下面での氷の生成の様子を調べたりするには本論文に述べた氷厚有限の場合の式を用ひなければならぬことが判つた。この應用の一例として，結氷板中の温度分布から逆に温度傳導率や熱傳導率を求めることが出来るが，これらの種々の應用については後報において報告するつもりである。

終りに臨み此の研究に要した費用の一部は文部省科學研究費並に日本學術振興會研究費によつた。此處に記して厚く感謝の意を表する次第である。

## 文 獻

- 1) 河水特に氷上軌道に關する研究 (昭和 16 年 8 月) 舊南滿洲鐵道株式會社 鐵道總局建設局。

---

Takaharu FUKUTOMI and Kou KUSUNOKI: Study of Sea-Ice. (The 7 th Report).  
On the Temperature Distribution in the Fresh Water Ice-Plate,  
when the Surface Temperature changes periodically.

### Résumé

The temperature distribution in any layer was discussed theoretically in the case when the surface temperature of an ice-plate of certain thickness which was formed on the surface of statical fresh water, changes periodically due to air temperature.

The results were compared with the case that the thickness is infinite.