



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	調和解析による長期予報について (1)
Author(s)	今堀, 克巳; IMAHORI, Katsumi; 小林, 禎作 他
Citation	低温科学, 9, 5-19
Issue Date	1952-12-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/17519
Type	departmental bulletin paper
File Information	9_p5-19.pdf



調和解析による長期豫報について (I)*

今堀克巳, 小林禎作

(昭和27年3月受理)

I. はしがき

定常時系列の予報の理論に對して今まで試みられた定式化の中, 最も系統的なものは, 著者の知るかぎりにおいては, 最近ソ連と米国においてそれぞれ独立に展開された Koimogoroff と Wiener のそれであろう。¹⁾ これらの理論は要するに, 定常時系列の過去及び現在の値に對して作用させたときに, 出来るだけ小さい誤差で, その時系列が將來とるべき値を與えるような1次変換を求めようとする, 1つの極小値問題である。これらは数学的に嚴密であつて, あらゆる分野に應用することのできる一般性をもつている。従つて一寸考えると, あとはこれらをより一般の場合に擴張すること, 及びこれらの理論の示す方式に従つて實際面への應用を試みる以外に, 本質的に予報の問題に對して寄與する余地は残されていないように見える。

ところで, 天気予報に對して気象學で實際に行われている方法は, 2つの指導原理にもとずいており, またこれが今までに存在しているいろいろな予報の方法に共通な特徴となつている。その1つはたとえばある特定の地域の降雨量と, 他の特定の地点における海水の温度の間の相関係数というようなものを用いる統計的な方法であつて, ペリオドグラムによる解析方法などもこのような範疇に分類されるであろう。統計的な方法は, 物理的な機構や, 問題になつている量の間の因果的な關係というようなものを全く度外視して, 機械的に適用することができるという特徴をもつている。ところがこれに反してもう1つの予報の原理では我々は問題になつている現象の中に入つてくる量を支配する何等かの物理的な法則を探し出して, これを予報の目的に有効に利用しようとするのである。しかしながらいまでもなく, この2つの原理は互に無關係なものではない。これらの原理にもとずいて, 天気予報の目的のために提案されたさまざまな“理論”は, それらが問題となつている現象の糸をひいているすべての変量を考察に入れていないという点で, いずれも近似的なものにすぎない。この意味で, 完全な予報を行うためには我々は是非とも統計的方法のみにたよらなければならないのである。

* K.Imahori and T.Kobayashi: On the Long Period Forecasting by Means of Harmonic Analysis (I), 気象集誌 第29卷 第11号 pp.1-14の訳.
訳資は堀淳一にある。

予報の問題の統計論的な定式化は、Kolmogoroff と Wiener によつて殆んど完璧といえるまでに完成されたといつても誤りではないであろう。しかしながらこのような定式化においては、それに含まれるいろいろな数学的な操作の背後にある物理的な基礎或は仮定、及びその中に現れてくるいろいろな函数や式の物理的意味が、ともすれば等閑に附されがちである。気象の資料を統計的にとり扱ふと、確率1の場合に相当して、決定論的な物理法則が結果として現れる場合があり得るが、これらはあまり重要性をもたない特殊の場合にすぎない。しかしながらたとえば Brown 運動の理論においては、観測される粒子の一見不規則な運動は、よく知られた Langevin 方程式で記述されるある統計的な規則性をもっている。従つて我々は一般に、どんな時系列においても、決定論的な意味で正確な予報を行うことは許さないけれども、問題になつている現象に内在している相互関係或は物理的な機構を表現しており、與えられた条件の下でどんな結果が現れるかについて統計的な結論を下すことを可能にさせる、何等かの物理的な法則が存在していることを予測してよいであろう。

脳波の統計的な分析の研究において、著者の一人及び壽原博士は、観測された脳波に作用して、これを完全にでたためな時系列に変換するような線形演算子を求める1つの理論を定式化した。²⁾ このようにして作られた演算子方程式は、Brown 運動の場合には Langevin 方程式に歸するから、一般の場合にも上のべた意味で1つの試験的な物理法則を表わしているものと考えられる。脳波の場合にはその発生の機構に関して現在何も知られていないから、このような純粹に統計的な研究方法が系統的に定式化され得る唯一の方法なのであるが、いろいろな方面からの知識を用いて、ある既知の物理法則によつて支配される物理的な模型を仮定することのできる例も多く存在する。統計的な理論が気象の予報に對して最も有効に應用される点からみて、これらの2つの研究方法をどういう風にして1つにまとめて定式化したらよいかということは、最も興味のある問題である。

今1つの研究分野においても、著者の1人はこの問題に對する方法論的考察を行つたが、³⁾ 同じ方法の気象予報に對する應用は、昨年夏気象研究所の高橋博士が札幌に來られて、その季節予想の研究に用いられたペリオドグラムによる解析法に関する講演をされてから、はじめて實行に移された。著者の理論がある程度定式化され、札幌における次の冬の温度の予想に関する數値的な結果が得られたときに、我々は上のべた Kolmogoroff と Wiener の仕事のことを知つたのである。この論文は1950年の11月に行われた日本気象学会の年會で行つた講演の原稿を改訂したものである。ここに含まれている理論が完全なものであるとは敢ていわないが、物理的な科学としての予報理論の發展に何等かの寄與をすることを期する次第である。

II. 基礎 假 定

問題になつている系の状態を記述するのに用いられる量を、時間 t の函数 $x(t, \alpha)$ で表わそう。但しパラメーター α は連続的或は離散的な値をとり、異なる量を區別するのに用いられる。変

数が完全に決定論的に独立変数 t とともに変る場合には、 $x(t, \alpha)$ に因果的過程であるよばれ、これらが與えられた一組の条件によつて決定されてしまう様子は次のようにして数式的に表わすことができる。

$x(t, \alpha)$ から一組の変換

$$q_i(t) = K_i \{x(t, \alpha)\}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

によつて導かれる、有限個或は可附番無限個の函数系 $q_1(t), q_2(t) \dots q_n(t)$ を導入する。 K_1, K_2, \dots, K_n は函数 $x(t, \alpha)$ をそれぞれ $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ に変換する演算子である。変数 q_1, q_2, \dots, q_n によつて定義される n 次元空間を、系の可能な状態を表現するために用いることができる。これを系の位相空間と呼ぶ。

小さな時間間隔 Δt の間の座標の変化の割合の極限が $\Delta t \rightarrow 0$ に對して存在し、座標の一個函数として定義されるならば、即ち

$$\frac{dq_i}{dt} - F_i(q) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

という方程式がなりたつならば、我々は系のある特定の時刻 $t=0$ における状態に對應する点 $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$ から出発して、時刻が進むにつれてつきつぎにこの代表点が動いてゆく経路を追跡することができる。* 従つて問題は、與えられた初期条件の下でこれらの微分方程式系を解くことに歸着するのである。力学的においてはこれらは Hamilton の正準運動方程式に相当し、 F_1, F_2, \dots, F_n の函数形はその系の力学的構造によつて定まる。今の場合にも (2) をやはり系の運動方程式とよび、函数 F_i で考へている系が特徴づけられるものと考えよう。上にのべたような、系の変化過程が一義的に定まらなければならないという要請をみたすためには、次元数 n もまた系を特徴づけるものでなければならない。それに反して (1) に導入された変換に對して、どんな種類のものを採用しなければならないかということは、ある程度便宜上の問題である。これにはたとえば

$$q_i(t) = x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, y, \frac{dy}{dt}, \text{等々}, \quad (3)$$

或は

$$q_i(t) = x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), \dots, y(t), y(t+\tau), \text{等々} \quad (4)$$

のような線形変換を用いるのが普通である。

以上は因果的な過程の場合であるが、確率的な過程においては、変数が時間の函数として一義的に定まらず、それに関して得られる唯一の知識は十分多数回測定をくり返したときのそれらの

* 函数 F_i が時間をあらわに含むより一般の場合にはここでは考へないが、そのような場合への一般化はさして困難ではないであろう。方程式 (2) においては q_1, q_2, \dots, q_n の代りに q とかいた。以下の略記法を終始用いることにする。

確率分布である。前と同じ変換 (1) を用いるならば、短い時間 Δt の間における各変数の増分 Δq_i が、ある確率の法則に従つて分布するのである。このことは、座標が時刻 t において q_1, q_2, \dots, q_n という値をとつたということが知られた場合に、時刻 $t + \Delta t$ においてこれが q'_1, q'_2, \dots, q'_n と $q_1 + \Delta q_1, \dots, q'_n + \Delta q'_n$ との間にある確率を與える、座標 $q_i, q'_i = q_i + \Delta q_i$ ならびに時間々隔 Δt^* に関する条件付確率函数

$$P(q, q', \Delta t) dq' \quad (5)$$

によつて表現することができる。但しここではこの過程が Markoff 過程であつて、分布函数はそれ以前のこの過程の歴史がどんなものであつても、最初の座標 q にしか関係しないということが仮定されている。この仮定の妥当性は因果的な過程の場合の、 F_i が時間にあらわに関係しないという仮定の妥当性と、同じ地位にあるものとみられよう。

(5) を用いると、座標の短い時間々間隔 Δt の間の変化の 1 次及び 2 次の能率は

$$\left. \begin{aligned} a_i(q, \Delta t) &= \int \dots \int (q'_i - q_i) P(q, q', \Delta t) dq', \\ b_{ij}(q, \Delta t) &= \int \dots \int (q'_i - q_i)(q'_j - q_j) P(q, q', \Delta t) dq', \\ i, j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

で與えられる。極限 $\Delta t \rightarrow 0$ においては、すべての a_i 及び b_{ij} が Δt に比例し、従つて

$$\left. \begin{aligned} A_i(q) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_i(q, \Delta t)}{\Delta t}, \\ B_{ij}(q) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b_{ij}(q, \Delta t)}{\Delta t}, \\ i, j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

が存在するものとする、一般化された Fokker-Planck の方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} [A_i(q)P] + \frac{1}{2} \sum_{k,i} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_i} [B_{ki}(q)P] \quad (7)$$

がなりたつことが證明される。ここでは P は q_1, q_2, \dots, q_n 及び t の函数であつて、座標の初期値はパラメーターとして含まれていると考えられている。従つて、もし A_i 及び B_{ij} の函数形が知られているならば、問題は擴散方程式 (8) を、初期条件

$$P(q_1, q_2, \dots, q_n, 0) = \delta(q_1 - q_{10}, \dots, q_n - q_{n0}) \quad (9)$$

の下で解くことに歸着する。 $\delta(q)$ はいわゆる Dirac の δ 函数である。

函数 A_i 及び B_{ij} の直接の物理的意味は、これらの定義から明らかであるが、座標の時間的变化を記述する物理法則のあり得べき形に関連した、今 1 つの興味ある解釋が得られる。座標 q_i

* 時刻の絶対的な座標への依存性はやはりここでは考えない。前頁の脚註をみよ。

の変化の平均の割合は $A_i(q)$ で与えられるが、実際の変化の割合 dq_i/dt は完全に予測できないある量だけそれと異なっている。従つて我々は

$$\frac{dq_i}{dt} - A_i(q) = p_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

とかくことができる。ここに $p_i(t)$ は t の函数として次のような性質をもつ：

$$\left. \begin{aligned} \overline{p_i(t)} &= 0, & i &= 1, 2, \dots, n, \\ \overline{p_i(t')p_j(t'')} &= B_{ij}\sigma(t'-t''), & i, j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

2番目の式において(7)におけるものと同じ記号 B_{ij} を用いることは、2次の能率を計算することによつて正当化される。即ち(10)から

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= A_i(q) \Delta t + \int_0^{\Delta t} p_i(t) dt, \\ \overline{\Delta q_i \Delta q_j} &= A_i(q) A_j(q) (\Delta t)^2 + \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \overline{p_i(t') p_j(t'')} dt' dt'', \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta q_i \Delta q_j}}{\Delta t} &= B_{ij}. \end{aligned}$$

これは示すべき結果である

方程式(10)が方程式(2)の一般化と見なされる——前者に現われる函数 $A_i(q)$ は後者の $F_i(q)$ に対応する——こと、及び函数 $p_i(t)$ が Brown 運動の理論における外からのためな“力”に類似していることに注目するのは甚だ興味がある。これらは Brown 運動の理論におけるいわゆる Langevin 方程式と同じ役割を演じており、従つてこの系に対する可能な物理的模型を表わしているものと考えられるのである。

III. 線形な豫報理論

我々は $A_i(q)$ が前もつて与えられているか、或は少なくとも問題になつてゐる系の構造が知られていて、それからこれの形を仮定することができないかぎり、これの函数形がある特定の構造をもつていなければならないという理由について何等の先見的な知識をもつていないから、前節の微分方程式(10)が常に線形であると考えすることはできない。現象が非線形の法則によつて支配されていて、その完全な数式的なとり扱ひが未だにできていないような簡単な例を挙げることも困難ではない。しかしながら、このような困難を避ける1つの方法があるように思われる。その鍵となるのは、線形であれ非線形であれ、どんな物理系の統計的な集団も、適当に選んだ線形の系と同等に考えることができるであらうという予想である。この線に沿つた考察を目下進めているが、この報告にはその詳細はのべないで、線形法則が存在するという仮定が許される場合のみを論ずることにする。

$A_i(q)$ が座標に関して線形であることを仮定すると

$$A_i(q) = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

とおけるから、方程式 (10) は

$$\frac{dq_i}{dt} - \sum_j a_{ij} q_j = p_i(t), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (12)$$

となる。係数 a_{ij} は系を特徴づける常数である。これに対応する Fokker-Planck の方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} [q_j P] + \frac{1}{2} \sum_{ij} B_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial q_i \partial q_j} \quad (13)$$

とかくことができる。(12) 或は (13) の解はいろいろな形で得られるが、

$$z_i = \sum_{ij} \bar{c}_{ij} q_j, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

で定義される直交変換から始めるのが都合がよい。但し \bar{c}_{ij} は

$$\sum_j \bar{c}_{ij} a_{jk} = \lambda_i c_{ik}, \quad i, k=1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

を満足する。 λ_i は行列方程式

$$\text{Det. } (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0 \quad (16)$$

の根である。そうすると微分方程式 (10) は

$$\frac{dz_i}{dt} - \lambda_i z_i = \pi_i(t), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

という形に歸着する。但し

$$\pi_i(t) = \sum_j c_{ij} p_j(t), \quad (18)$$

従つて

$$\overline{\pi_i(t') \pi_j(t'')} = \sigma_{ij} \delta(t' - t'') = \sum_{kl} c_{ik} c_{jl} B_{kl} \delta(t' - t'') \quad (19)$$

である。また Fokker-Planck の方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial z_i} [z_i P] + \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial z_i \partial z_j} \quad (20)$$

となる。この最後の方程式の解は M. C. Wang と G. E. Uhlenbeck によつて次のように與えられた：⁴⁾

$$F(\xi, t) = \text{Exp} \left[-i \sum_j \xi_j z_{j0} e^{\lambda_j t} + \frac{1}{2} \sum_{jk} \sigma_{jk} \frac{\xi_j \xi_k}{\lambda_j + \lambda_k} \{ 1 - e^{(\lambda_j + \lambda_k)t} \} \right]. \quad (21)$$

ここに $F(\xi, t)$ は $P(z, t)$ の Fourier 変換、 z_{j0} は z_j の初期値である。従つて確率函数 $P(z, t)$ は平均値

$$\bar{z}_i = z_{i0} e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

及び分散

$$\overline{(z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j)} = -\frac{\sigma_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} [1 - e^{(\lambda_i + \lambda_j)t}], \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

をもつた n 次元の Gauss 分布である。Langevin 方程式 (17) の解が

$$z_i(t) = \int_0^\infty \pi_i(t-t') e^{\lambda_i t'} dt' = \int_{-\infty}^t \pi_i(t') e^{\lambda_i(t-t')} dt', \quad (24)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

であることは容易にわかる。 z_i の自己及び相互相関函数が、確率函数を特徴づける上の表式 (23) 及び (24) と密接に関係していることに注意するのは興味がある。(24) から

$$Z_{ij}(\tau) = [z_i(t+\tau) z_j(t)]_t = \int_0^\infty \int_0^\infty [\pi_i(t+\tau-t) \pi_j(t-t')]_t e^{\lambda_i t' + \lambda_j t''} dt' dt''$$

$$= \begin{cases} -\frac{\sigma_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} e^{-\lambda_j \tau}, & \tau < 0, \\ -\frac{\sigma_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} e^{\lambda_i \tau}, & \tau > 0, \end{cases} \quad (26)$$

が得られる。但しここで λ_i の實数部分が負であることを仮定し、 t に関する平均を $[\]_t$ で表わした。これから函数 $Z_{ij}(t)$ は微分方程式

$$\frac{dZ_{ij}}{d\tau} = \lambda_i Z_{ij} \quad \tau > 0, \quad (26)$$

をみたすことがわかる。この方程式は (17) の右邊を零とおいて得られるものである。この性質は、Langevin 方程式に對して線形性だけが仮定されているもつと一般的な場合にもそのまま擴張される。方程式 (22) によつて與えられる平均の“運動”もやはり同じ性質をもつていことに注意されたい。

上にのべたことから、予報の問題の本質的なことはこれで解決されたことがわかる。初期値 z_{i0} が與えられると、 λ_i が知られているならば t 時間後の座標 z_i の平均値と分散が (22) 及び (23) から計算されるのである。

逆変換を行つて最初の座標へもどすと、次のような表式を得る：

$$\left. \begin{aligned}
 P &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} \sum_{ij} \tilde{D}_{ij} (q_i - \bar{q}_i)(q_j - \bar{q}_j) \right], \\
 A &= \text{Det.} (D_{ij}), \quad (\tilde{D}_{ij}) = (D_{ij})^{-1}, \\
 \bar{q}_i &= \sum_{jk} \bar{c}_{ij} c_{jk} q_{k0}, \quad (\bar{c}_{ij}) = (c_{ij})^{-1} \\
 \overline{(q_i - \bar{q}_i)(q_j - \bar{q}_j)} &= D_{ij} = -\sum_{kl} \bar{c}_{ik} \bar{c}_{jl} \frac{\sigma_{kl}}{\lambda_k + \lambda_l} [1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)t}],
 \end{aligned} \right\} (27)$$

$$q_i(t) = \sum_j \bar{c}_{ij} \int_0^\infty \pi_j(t-t') e^{-\lambda_j t'} dt' = \sum_j \bar{c}_{ij} \int_{-\infty}^t \pi_j(t') e^{-\lambda_j(t-t')} dt', \quad (28)$$

$$Q_{ij}(\tau) = [q_i(t+\tau)q_j(t)]_t$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{kl} \frac{\bar{c}_{ik} \bar{c}_{jl} \sigma_{kl}}{\lambda_k + \lambda_l} e^{-\lambda_l \tau'}, & \tau < 0, \\ \sum_{kl} \frac{\bar{c}_{ik} \bar{c}_{jl} \sigma_{kl}}{\lambda_k + \lambda_l} e^{-\lambda_k \tau}, & \tau > 0 \end{array} \right\} \quad (29)$$

$$\frac{dQ_{ij}}{d\tau} - \sum_k a_{ik} Q_{kj} = 0.$$

この最後の方程式を用いて、実験的に得られた函数 Q_{kl} から n^2 個の常数 a_{ij} を定めることができるであろう。そうするとそれから (15) と (16) を解くことによつて対角変換の係数 c_{ij} 及び固有値 λ_i が求められる。“擴散” 係数 σ_{ij} は (29) から定められる。

上に簡単にのべた形式的な予報の方式は、小河原氏によつて彼の時系列の外挿の理論を応用する際に用いられた方法と一致していることがわかるであろう。⁵⁾ しかしながら上の理論を實際に應用しようとするとき、大多数の場合にはこの中に現われる行列の次数 n を非常に大きくとらなければならないから、このような高次の行列式を含む計算は我々を当惑させるばかりであり、これらの行列式を算出することないし行列方程式 (16) を解くことは不可能に近いであろう。[小河原氏は次元数に對して非常に小さい数 ($n=5$ から 10 の程度) を仮定した。] 一方 Wiener の理論においては、將來の値を予報するためにはすべての現在及び過去の値が必要となる。これらの困難を打開する道は、次のプログラムの中の 1 つまたはいくつかに見出されるであろう。

(i) 自動計算機の考案。

(ii) 氣象現象に對して現在までにたてられているいろいろな理論を、系の常数を定めるために考へに入れること。

(iii) 何等かの近似方式を定式化すること。

この報告では、以下上の第 3 番目の問題に對していくばくかの考案を加えようと思う。

IV. 時系列の分解と調和解折の應用*

n 個の時系列 $q_i(t)$ が、それを 2 つ系列の組 $q_1(t), \dots, q_m(t)$ と $q_{m+1}(t), q_{m+2}(t), \dots, q_n(t)$ とに分割して、おのおのの組に属する函数が互に異なる周波数領域に属するようにすることが可能であるように選ばれているものとする。即ちおのおのの時系列の形式的な Fourier 変換

$$q_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (31)$$

を用いると、

$$f_i(\nu) f_j(\nu) = 0, \quad \begin{cases} i=1, 2, \dots, m \\ j=m+1, \dots, n \end{cases} \quad (32)$$

がなりたつようにするのである。この場合には、異なる組に属する時系列は統計的に互に独立である。とくに、

$$[q_i(t+\tau) q_j(t)] = 0, \quad \begin{cases} i=1, 2, \dots, m, \\ j=m+1, \dots, n, \end{cases} \quad (33)$$

である。更に、特有解

$$\begin{aligned} z_i &= z_{i0} e^{\lambda_i t}, \quad t > 0, \\ &= 0, \quad t < 0, \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (34)$$

の振幅スペクトルが、上の 2 つの周波数領域のいずれかに完全に属することを仮定する。これは實際的にしばしば實現される情況である。 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ を第 1 の組に、のこりを第 2 の組に属する固有値とすると、(28) から

$$\begin{aligned} q_i(t) &= \sum_{j=1}^m \bar{c}_{ij} \int_0^{\infty} \pi_j(t-t') e^{\lambda_j t'} dt', \quad i=1, 2, \dots, m, \\ &= \sum_{j=m+1}^n \bar{c}_{ij} \int_0^{\infty} \pi_j(t-t') e^{\lambda_j t'} dt', \quad i=m+1, \dots, n, \end{aligned}$$

を得る。従つて Langevin 方程式もやはり分離されるであろう：

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \sum_{j=1}^m a'_{ij} q_j = p_i'(t), \quad i=1, 2, \dots, m, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \sum_{j=m+1}^n a'_{ij} q_j = p_i'(t), \quad i=m+1, \dots, n. \end{aligned}$$

これで問題は次数のより低い問題に歸着された。この分解の操作を更に続けてゆくと、しまいに異なる特有解 (34) に相当する振幅スペクトルの重なり合いのために上の議論に用いた仮定が通

* ここでは単一の時系列という最も簡単な場合を考える。多重時系列に対する拡張は容易であろう。

用しなくなる段階に達するであろう。しかしこの段階に達してもなお許され得る近似において我々はなおこの操作を続けることができよう。都合のよい場合にはこの方法で著しい誤差なしに、異なる λ_i をもつ成分をことごとく分離してしまふことができるであろう。この場合にははじめの時系列はしまいにいくつかの互に独立な最も簡単な型の Brown 運動に歸着させられるのである。

ここまでくれば、今の理論を實際に応用する際に、調和解析の方法が重要な役割を演ずることが、容易に理解されるであろう。次にのべる方式は、理論を實際に応用する立場からなされる要求に對して答える意図の下にたてられたものである。まず我々は観測された時系列 $x(t)$ から出発する。その値は十分大きな負の時刻 $-T$ から $t=0$ までその値は知られているものとする。 $x(t)$ の値が時刻の離散的な値の集合に對して與えられている場合には、これを通常の曲線のあてはめ法によつて得られる連続的な曲線でおきかえてもよし、連続的な場合に對する上の理論に現われるいろいろな積分を適当な和におきかえて考えてもよい。これらのことによつて入ってくる誤差の性質は、既に確立された Fourier 積分の方法によつて計算されるが、ここではそれは考えに入れなことにする。

函数 $x(t)$ が與えられると、その Fourier 変換

$$A(\nu) = \int_{-T}^0 x(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

及びその絶対値 $|A(\nu)|$ は容易に計算される。ここで注意しなければならないのは、こうして得られた振幅スペクトルは、その中において $\Delta\nu = 1/T$ という振動数の幅よりこまかい構造を云々することは物理的に無意味であるという意味で、不確定性をもつているということである。 $|A(\nu)|$ で與えられる振幅スペクトルはいくつかの極大と極小とからなつており、しかもそれがある振動数領域の中で多少ともいちじるしく目立つているのがふつうである。これらの 1 つ 1 つが、1 つまたはそれ以上の上記した固有値に對應しているのである。しかしながら、すぐ前にのべた不確定性によつて、 $1/T$ よりもいちじるしく大きいような振動数の差でへだたつていような極大のみが意味があるのであり、従つて振動数にあるきまつた上限があるような場合——たとえば離散的な時系列の場合がそれであるが——には、固有値の数は必然的に $2 \lfloor \nu_{max} T \rfloor$ よりも小さくなる。

そこで、もしスペクトル曲線の極小のあるものが無視し得る程小さく、殆んど零の軸に接觸しているならば、それらを分割点にとつて、固有解 (34) をいくつかの群に完全にわけても差支えないであろう。もう 1 つの極端な場合としては、2 つまたはそれ以上の固有“共鳴”振動数が互に重なり合つて、単一の極大に融合しているような場合を考えることができる。しかしながらある與えられた振動数領域にいくつの共鳴振動が存在するかということが、先見的にわかつていず、むしろスペクトル曲線それ自身のみがそれに関する知識を與えてくれるというのが、實際に

我々が遭遇する状況であつて、我々はスペクトル曲線の1つの極大が1つの共鳴振動数に対応することを“仮定”するのである。この仮定によつて生ずる誤差は、實驗的に得られたスペクトル曲線の代りにある既知の函数形を用いることのできる特殊な場合には、計算して出すことができる。

スペクトル曲線の隣接した極大が不完全にしか分離されていない中間的な場合が、最もあいまいさの生ずる場合である。この場合に對する近似的な手法としては、我々は次の2つの方法のいずれかを採用すればよいであろう：全体として単一の幅の広い極大を作つている副次的な極大の群に對して1つの固有値入が對応するものと仮定するか、またはこのおのおのの不完全にしか分離されていない極大に、1つ1つ異なる固有解を對應させるか。この2つの方法のいずれをとるべきかについて、何等かの數值的な判別法が與えられれば好都合であろうが、それについての詳細は別の論文でとり扱われるであろう。

こうして我々は次の結論に到達する：どんな場合にも、その場合々々に応じた近似度でもつて、問題をいくつかの調和的に束縛された粒子の Brown 運動（自由粒子の Brown 運動はこれの特別な場合として含まれる）のあつまりと同等なものに歸着させることができる。實の変數を用いると、これらに對する Langevin 方程式は

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = p(t), \quad (36)$$

或は

$$\frac{dq}{dt} + \beta q = p(t), \quad (37)$$

という形に歸着させられる。但し

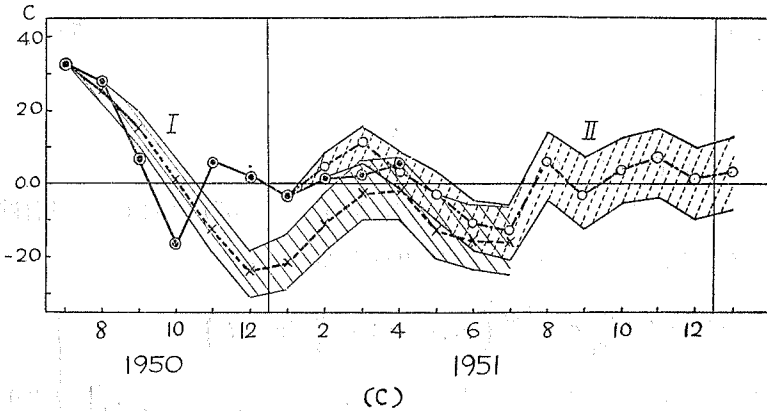
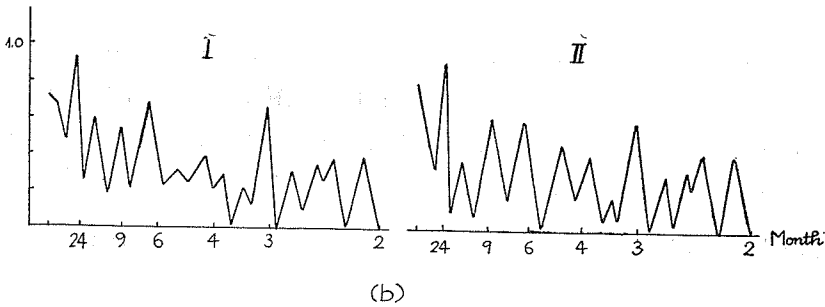
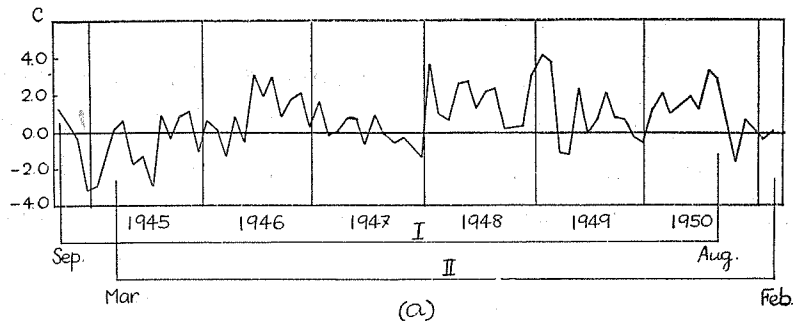
$$\overline{p(t)p(t')}) = 2D\delta(t-t')$$

である。これらの方程式の解はよく知られている。^{*} 即ち (36) 及び (37) に對する条件付確率函数はそれぞれ次のような平均値と分散をもつた Gauss 分布である：

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= \frac{q_0'}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta t} \sin \omega_1 t + \frac{q_0}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta t} \left(\omega_0 \cos \omega_1 t + \frac{\beta}{2} \sin \omega_1 t \right), \\ \overline{(q-\bar{q})^2} &= \frac{D}{\beta} \left[1 - \frac{1}{\omega_1^2} e^{-\beta t} \right] \omega_1^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \sin^2 \omega_1 t - \beta \omega_1 \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t, \\ \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \beta^2/4, \\ \bar{q} &= q_0 e^{-\beta t}, \\ \overline{(q-\bar{q})^2} &= \frac{D}{\beta} [1 - e^{-2\beta t}]. \end{aligned} \right\} (38)$$

^{*} たとえば文献 (4) をみよ。

最初の時系列に対する平均値と分散はそれぞれこうして得られた \bar{q} の線形な重ね合せ及び $(q-\bar{q})^2$ の和によつて與えられる。



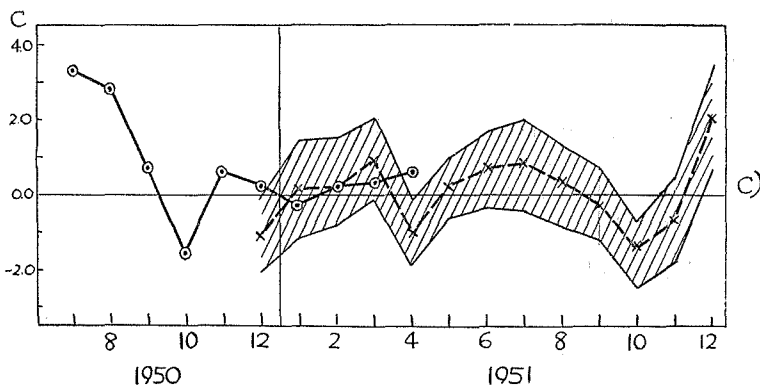
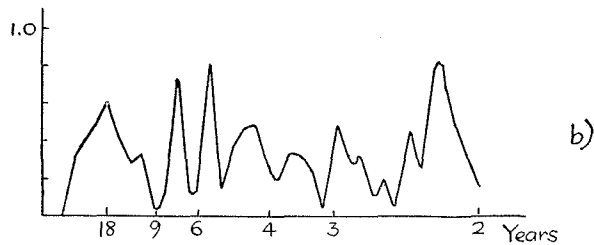
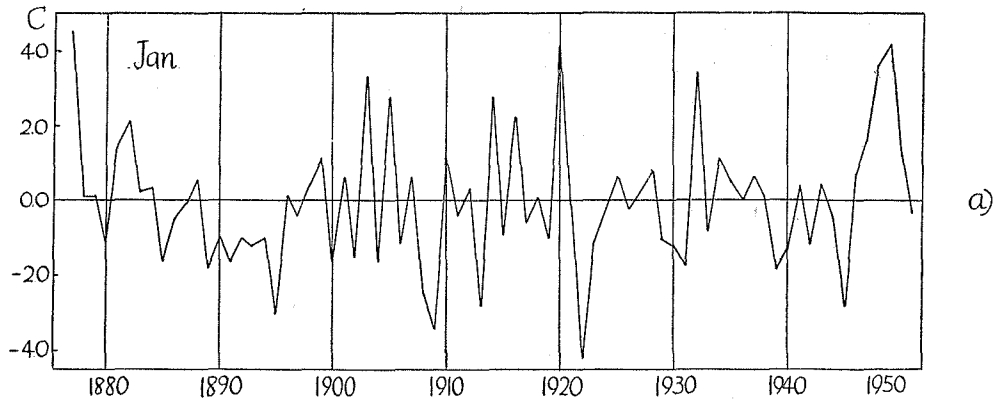
第1圖 a) 札幌における月平均気温のグラフ
 b) 2つの異なる期間に対する振幅スペクトル
 c) 札幌における月平均気温の予報値。◎は観測値

示してある。これらは通常の72等分の調和解析法によつて得られたものである。第1図cはそれの予報値及びその確率誤差(斜線部によつて示される)を示す。◎は観測値である。異なる分析期間にもとずいた2つの予報値がほぼ一致しているのは注目すべきことであろう。

第2図には異なる方法で行われた月平均気温の予報の例である。この場合には第2図aに示

第1—3図に上の方式を實際に應用した二三の例を示しておく、これは日課としての仕事のために意図したのではなく、この方式がいかにも有効で且つ将来性のあるものであるかということを示すために行われたものである。第1図aは平均年変化からの偏差として表わされた、1944年の9月から1951年の2月までの札幌の月平均気温のグラフである。その振幅スペクトルは2つの異なる期間I及びIIに対して第1図bに

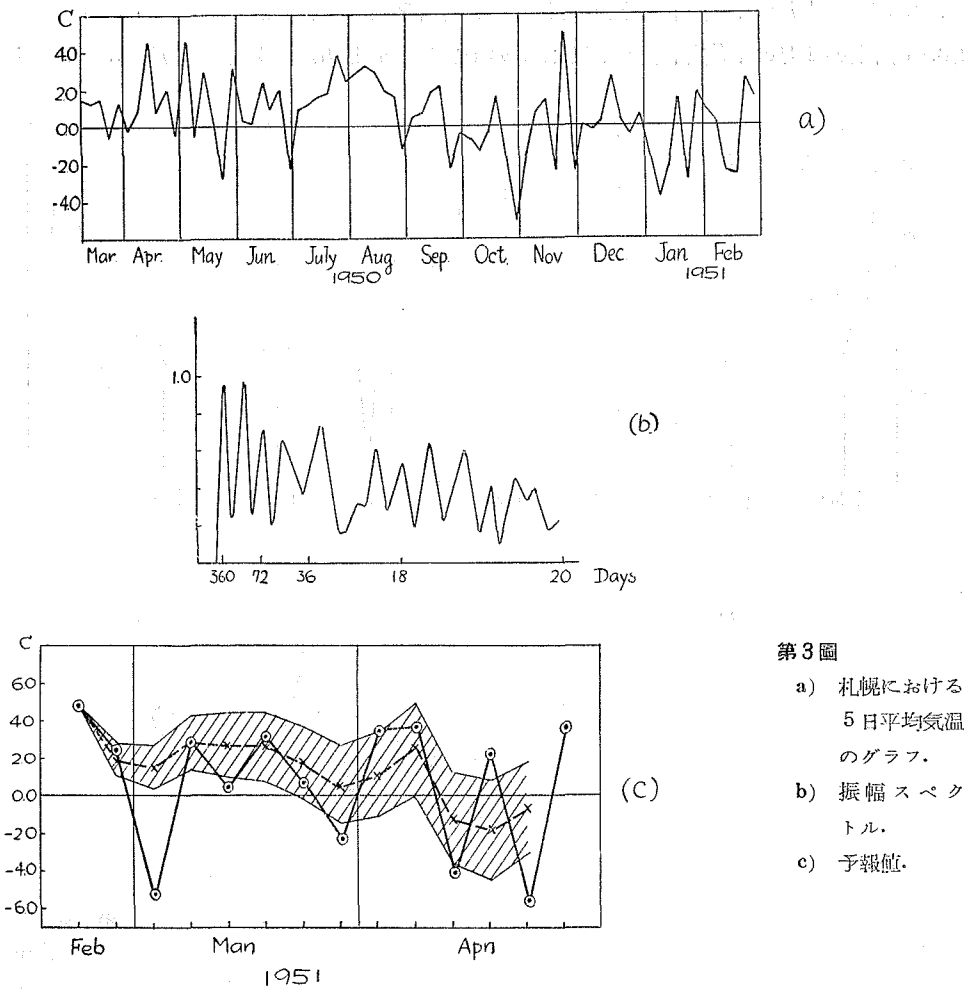
された72個の1月の平均気温の値に対して調和解析を行い、得られたスペクトル(第2図b)を用いて将来の1月の平均気温を予想したものである。同じ方法は2月、3月、... に対してもく



第2圖

- a) 札幌における1月の平均気温のグラフ。
- b) 振幅スペクトル。
- c) 1951年に対する予報値。

り返されたが、その結果は第2図cに示してある。観測値◎との一致はかなり良好である。第3図 a, b, c に示されている最後の例は同様な方法で得られた5日平均気温の予報である。これらの例はすべて72等分の調和分析法にもとずいものであるが、解析の等分の数を増せばもつとよい予報値が得られることが当然期待される。



第3圖
 a) 札幌における
 5日平均気温
 のグラフ。
 b) 振幅スペク
 トル。
 c) 予報値。

最後にこの仕事に対して終始興味をもたれた当研究所長堀健夫教授、及びこの方法について有益な御討論をしていただいた気象研究所の高橋浩一郎博士並に小河原正巳氏に對して深甚なる感謝の意を表す。なおこの論文にあげる計算に用いられた資料は札幌管区気象台の森田康太郎氏から供給されたものであり、同氏に對しても深く感謝する次第である。

文 献

- 1) Wiener, N. 1949 Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, New York.
- 2) Imahori, K. and Subara, K. 1949 On the Statistical Method for Brain-Wave Study. Folia Psych. et Neurol. Japan, No. 3, 2, 137-155.
- 3) Imahori, K. 1949 誘電体の異状分散について. 応用電気研究所彙報 1, 1号 10-20.
- 4) Wang, M.C. and Uhlenbeck, G.F. 1945 On the Theory of Brownian Motion II. Rev. Mod. Phys. 17, 323-342.

- 5) Ogawara, M. 1949 Reports from the Central Met. Obs., No, 24; Ogawara, M. and Fujita, T.
Forecasting of Wolf's Sun-Spot Numbers by Stochastic Extrapolation, 未発表.