



Title	調和解析による長期予報（Ⅱ）
Author(s)	今堀, 克巳; IMAHORI, Katsumi
Citation	低温科学, 9, 33-44
Issue Date	1952-12-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/17521
Type	departmental bulletin paper
File Information	9_p33-44.pdf



調和解析による長期豫報 (II)*

今 堀 克 巳

前稿「調和解析による長期予報 (I)」——以下 (I) として参照する——では、N. Wiener によつて展開された新しい prediction theory の序論的な紹介と、本質的にはこれと同様な筆者の理論、並びにその近似的計算法についての一般的考察を述べた。本稿ではこれを具体的に實際問題に適用する方法について、計算の順序を追つて、それに附随する諸注意を述べようと思う。

III. 時系列の定常性と長期傾向の問題

理論を實際問題に適用するに當つて、先ず問題になること——而もこれは基礎的に重要な問題なのであるが——は、理論で取扱われる時系列は定常的であつて、且つその値は無限の過去から現在に亘る無限個の系列として與えられているとされているのに反し、実際には観測値は必然的に有限であり、従つて又この有限個の観測値をもとにしてこの時系列が定常的であるか否かを判定するための普遍的な方法というものとは原理的にあり得ない、ということである。非常に簡単な場合、例えば調和振動子の Brown 運動や、電気回路に起る熱雑音の様な例——更に一般には (I) の取扱いで考えた物理系の自由度 M が比較的小さい場合——では各基準振動の減幅時定数に比較して充分長い時間に亘る観測値が考えられれば、有限個の観測値でも近似的には無限の場合と同様に取扱うことが出来、定常性の吟味も容易であるが、氣象現象の様に關係する要素が極めて複雑なものでは、かかることは到底望まれないのである。

この様な事情は然しながら決してその儘にしておくことは許されない。よくいわれる様に、例えば北海道の気温は漸次上昇の傾向にあるといつた時には、それは非定常的であると考へているのであるが、一方更に長年月に亘る觀察をすると、この上昇傾向も或非常に長い周期の定常的な変動の一部かも知れないという立場も認めないわけには行かない。即ち定常とか非定常とかいつても、それは観測期間の長さに関係するものであつて、この間の事情を明確にしておかないと、折角の理論も何の役にも立たなくなる。

まず長期傾向といわれる現象の物理的意味を簡単な模型によつて考察して見よう。ここに一つの閉じた物理系 A があるとす。この系の内部に起る現象は、系が作られてから適当な時間の

* 予報研究ノート、第3巻、第2号。

後には定常状態になると考えられる。従つて若しこの現象が実際に非定常であつたとすると、それは系の外から他の物理系 B が何等かの作用を及ぼしているためと解釋しなければならない。即ち B の影響によつて A の現象に長期傾向が現われると考えるのである。A 及び B が夫々一つの単振子である場合には、よく知られた結合振動を生ずる。所で考え方を變えて、A 及び B を一緒にした大きな系を考えると、これが全体として閉ぢている限り、この内部に起る現象は定常的と考えられるのである。この様に同一の現象でも、考え方によつて定常的にも非定常的ともすることが出来るのであつて、これは時系列を取扱う場合でも全く同様である。

既に述べた様に、氣象現象は極めて複雑であつて、關係する要素は、これを何処まで擴げて行けばすべてを盡し得るか、その限界を指定することは不可能である。従つて氣象現象は本質的に非定常と考えなければならないのであつて、そうすると定常時系列論による予報は實際の役に立たないということになりそうであるが、これは次の様に考えることによつて、必しもそうではないことを知り得るのみならず、實際に得られる觀測値が有限であることに起因する困難をも同時に解決することが出来る。

今有限値の觀測値の系列

$$x_0, x_1, \dots, x_{N-1} \quad \dots \quad (1)$$

が與えられたとする。これは更に大きな系列の中から取り出された一部であつてもよい。なお又この個數 N については、以下の所論では何等の制限はなく、全く任意であるが、實際の問題を取扱う場合には、取扱いが可能な範囲で大きな數とする。この與えられた觀測値の系列 (1) に對し吾々は或仮想的な定常時系列を考え (1) はその中から取り出された一部であるとする。この様な時系列が必ず存在することは、簡単な例として (1) と同じ系列を前後に何回も繰返したものを挙げることから了解されるであろう。この仮想的な定常時系列は、標本論における母集団と本質的に同様と見做すことも出来よう。それでこれを簡単に母系列と稱することにする。

この母系列の考えを用いると、非定常有限時系列の予報の問題は次の様に定式化することが出来る。

(i) 與えられた觀測値の系列を、適当に選んだ N 個宛の系列に区劃する。

(ii) 各々の区劃に屬する (1) と同様な時系列に對應する母系列の性質、特にその自己相関係數又はその周波數スペクトルを求める。これは後に述べる如く、一義的に確定することは原理的に不可能であつて或程度の不確定性を伴なうものである。

(iii) この様にして得られた母系列の性質が区劃毎に如何に変化するかを見ることによつて、現象の長期傾向を知ることが出来、一方母系列の與己相関係數又はその周波數スペクトルから、それ等の信頼度に應じた予報を (I) に述べた理論を適用することによつて行うのである。

V. 有限時系列の自己相関係數及び周波數スペクトルにおける不確定性

有限個の觀測値の系列 (1) が與えられたとき、これから求められる自己相関係數は

$$X_R = \frac{1}{N-R} \sum_{n=0}^{n+R=N-1} x_{n+R} x_n \quad \dots\dots (2)$$

で與えられる。所でこの値は N が有限であるために、特に $N-R$ が小さくなると、相當に大きな分散を示す。従つてこの値から (1) の母系列に関する自己相関係数を推定することが問題になるわけであるが、ここでは普通の標本論の方法とは異つた方法で論じて見る。

まず (1) の Fourier 係数を

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \frac{2}{N} \sum_{R=0}^{N-1} x_R \cos \frac{2\pi m}{N} R, \\ B_m &= \frac{2}{N} \sum_{R=0}^{N-1} x_R \sin \frac{2\pi m}{N} R, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (3)$$

とすると、

$$x_R = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{(N-1)/2} \left(A_m \cos \frac{2\pi m}{N} R + B_m \sin \frac{2\pi m}{N} R \right). \quad \dots\dots (4)$$

但し便宜上 N を奇数とした場合の公式を用いた。(4) を (2) に代入すると、

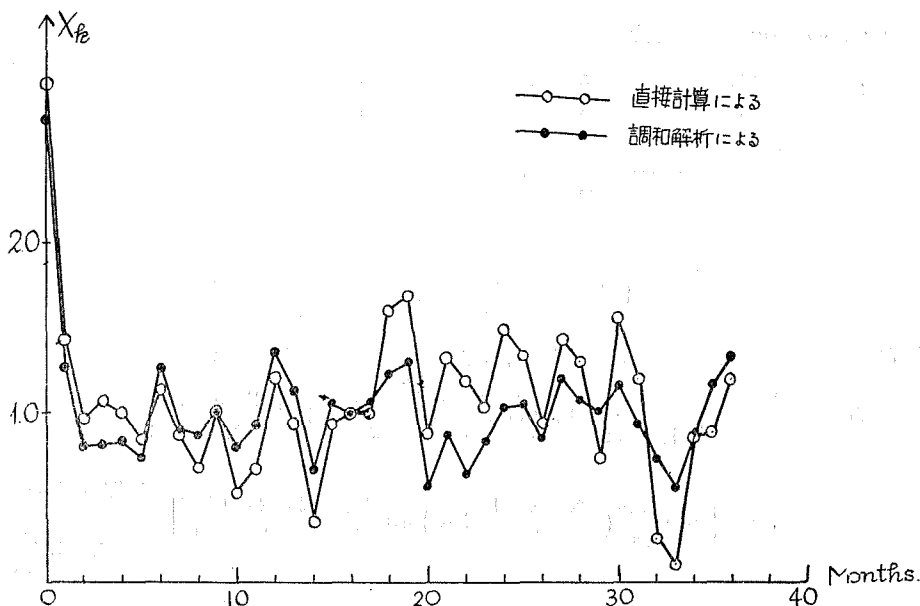
$$\begin{aligned} X_R &= \frac{A_0^2}{4} + \frac{A}{2} \left[\sum_{m=1}^{(N-2)/2} A_m \left\{ \cos \frac{2\pi m}{N} \left(\frac{N-R-1}{2} + R \right) \frac{2\pi m}{N} \frac{N-R-1}{2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + B_m \left\{ \sin \frac{2\pi m}{N} \left(\frac{N-R-1}{2} + R \right) \sin \frac{2\pi m}{N} \frac{N-R-1}{2} \right\} \right] \frac{\sin \frac{\pi m}{N} (N-R)}{(N-R) \sin \frac{\pi m}{N}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m, m'=1}^{(N-1)/2} \left[\left\{ (A_m A_{m'} - B_m B_{m'}) \cos \frac{2\pi}{N} \left((m+m') \frac{N-R-1}{2} + mR \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (B_m A_{m'} + A_m B_{m'}) \sin \frac{2\pi}{N} \left((m+m') \frac{N-R-1}{2} + mR \right) \right\} \frac{\sin \frac{\pi(m+m')}{N} (N-R)}{(N-R) \sin \frac{\pi(m+m')}{N}} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (A_m A_{m'} + B_m B_{m'}) \cos \frac{2\pi}{N} (m-m') \frac{N-R-1}{2} + mR \right\} \right. \\ &\quad \left. + (B_m A_{m'} - A_m B_{m'}) \sin \frac{2\pi}{N} \left((m-m') \frac{N-R-1}{2} + mR \right) \right\} \frac{\sin \frac{\pi(m-m')}{N} (N-R)}{(N-R) \sin \frac{\pi(m-m')}{N}} \end{aligned}$$

となり、 $N-R$ が充分大きい場合にはこれは

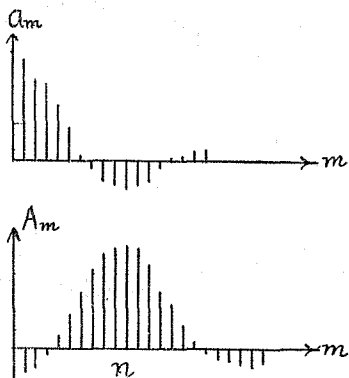
$$X_R = \frac{A_0^2}{4} + \sum_{m=1}^{(N-1)/2} \frac{1}{2} (A_m^2 + B_m^2) \cos \frac{2\pi m}{N} R \quad \dots\dots (5)$$

とすることが出来る。即ち X_R の平均値は x_R の平均値の自乗に等しく、又その Fourier 係数は x_R の相當する調和項の振幅自乗の $1/2$ に等しいという非常に簡単な關係が得られる。従つて (2) を計算する代りに、観測された時系列を Fourier 級数に展開して、その係数から所謂自乗振幅スペクトラムを求めてもよい。一例として札幌の月別平均気温の 1946-51 年における 7

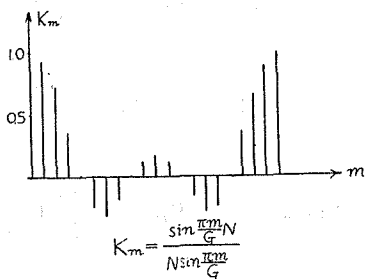
個の値——但し平均値からの偏差で表わしたもの——を用いて(2)及び(5)の兩者から求めた値を比較すると第1圖の如く殆ど一致していることが見られる。なお N の値がそれ程大きくない場合にも、この場合には(2)の値それ自身が相当の誤差を含むものであるから、(2)の代りに(5)を以て自己相関係数を表わすものと考えても何等差支えないことを注意しておく。



第1圖 札幌月別平均気温偏差の自己相関係数 (1946~54)



第 2 圖



第 3 圖

さて観測された有限の時系列に関する自己相関係数(2)が、その母系列の自己相関係数に對して、如何なる偏差を示すかを知る一つの方法として、吾々はこれを周波数分析の立場から考えて見る。無限に続く定常時的な時系列の Fourier 展開の可能性に関する数学的な困難を避けるために、母系列として N に比べて充分大きい数 G 個の値からなる時系列を考え、観測された時

系列 (1) はその一部であると考え。この有限で打切つた母系列の Fourier 係数を A^0_m , B^0_m とする。 ($m=0, 1, 2, \dots, G/2$ 又は, $(G-1)/2$)。次にこの系列の中で, (1) に相当する項以外の値を 0 とおいて, 同じく G 項調和解析を行い, 係数, A'_m , B'_m をえたとする。この兩者の間には $m \ll G/2$ に對して次の様な關係がある。

$$\left. \begin{aligned} A'_0 &= \frac{1}{2} A^0_0 a_0 + \sum_m (A^0_m a_{m'} + B^0_m b_{m'}), \\ A'_m &= \left\{ A^0_m a_0 + A^0_0 a_m + \sum_{m'+m''=m} (A^0_{m'} a_{m''} - B^0_{m'} b_{m''}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m'-m''=m} (A^0_{m'} a_{m''} + B^0_{m'} b_{m''}) \right\}, \\ B'_m &= \frac{1}{2} \left\{ B^0_m a_0 + A^0_0 b_m + \sum_{m'+m''=m} (B^0_{m'} a_{m''} + A^0_{m'} b_{m''}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m'-m''=m} (B^0_{m'} a_{m''} - A^0_{m'} b_{m''}) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに, a_m , b_m は (1) の x_R をすべて 1 とした時の A'_m , B'_m の値であつて, それは時系列 (1) の項数 N に固有な性質を表わすものである。(6) 式は一般にスペクトル A'_m , B'_m はもとのスペクトル A^0_m , B^0_m から一種の重値平均によつて得られることを意味し, そのためにスペクトルの微細構造は平滑化される。例えば最も簡単な場合として A^0_m が m の唯一つの値 n に對してのみ 1 で, その他の A^0_m 及び B^0_m はすべて 0 とすると,

$$\left. \begin{aligned} A'_0 &= a_n \\ A'_m &= \frac{1}{2} (a_{m-n} + a_{m+n}) \\ B'_m &= \frac{1}{2} (b_{m-n} - b_{m+n}) \end{aligned} \right\} \quad \dots (7)$$

となり, その代表的な場合を図示すると, 第 2 図の如く, A'_m は $m=n$ を中心として a_m と略同じ分布を以て兩側に擴がる。 A^0_m , B^0_m の他の項についても全く同様のことがいえるから, これ等を重疊して得られる (6) は結局 a_m , b_m で與えられる重みを附した重値平均と解釋することが出来るのである。従つて母系列のスペクトル A^0_m , B^0_m における微細構造は平滑化され, スペクトル A'_m , B'_m における周波数成分は, それだけの不確かさを含んでいることになる。

この様に有限の時系列の周波数スペクトルは, その構造に原理的にさけることの出来ない不確定性を有するものであつて, 宛も有限の aperture をもつたレンズによる像が, 廻折現象に歸因するだけを作なうのと全く同様である。このぼけの程度は今の場合スペクトル a_m , b_m における分布によつて與えられるわけで, 参考のためにこれを計算しておく,

$$\left. \begin{aligned}
 a_m &= \frac{\sin \frac{\pi m}{G} N}{\sin \frac{\pi m}{G}} \cos \frac{\pi m}{G} (N-1), \\
 b_m &= \frac{\sin \frac{\pi m}{G} N}{\sin \frac{\pi m}{G}} \sin \frac{\pi m}{G} (N-1), \\
 a_m^2 + b_m^2 &= \frac{4}{G^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi m}{G} N}{\sin^2 \frac{\pi m}{G}}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

となる。この式で

$$K_m = \frac{\sin \frac{\pi m}{G} N}{N \sin \frac{\pi m}{G}} \dots\dots (9)$$

は第3図に示す様な分布をもつから、(8)で與えられるスペクトルは大体において

$$A_n = \frac{G}{N} \dots\dots (10)$$

なる擴がり有し、従つて(7)に含まれるだけは大体この二倍と見積ることが出来る。(10)

式は又

$$\left(\frac{A_n}{G} \right) \cdot N = 1 \dots\dots (11)$$

と書くことが出来るが、これは一般の周波数分析における分析時間と周波数の間に成立する不確定關係に他ならない。*

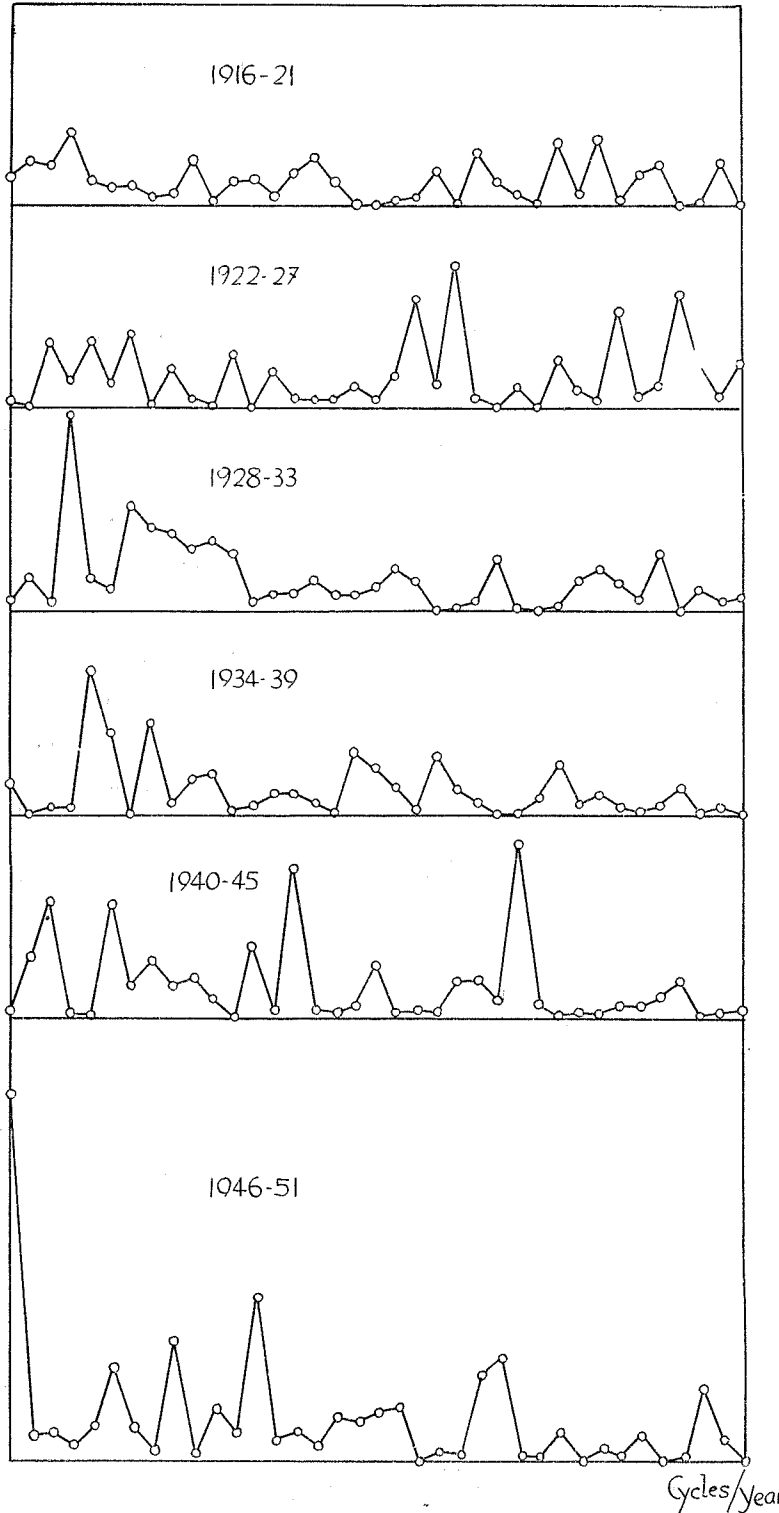
さて問題は時系列(1)の Fourier 係數(3)が母系列の周波數スペクトル A_m^0, B_m^0 と如何なる關係にあるかということであつた。これは A'_m, B'_m の定義から明らかな様に、次の如く考えられる。即ち $G=pN$ として

$$\left. \begin{aligned}
 A_m &= p A'_{pm}, \\
 B_m &= p B'_{pm}.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

もともと A'_m, B'_m におけるスペクトル構造においては、相隣る p 個の項を區別することが、上記不確定性によつて物理的に意味を有しないのであるから、これを同一と見做して重疊すると、(12)で與えられるスペクトルが得られる。この様な意味において、與えられた時系列の Fourier 係數は、母系列の周波數スペクトルを近似的に——換言すれば、不確定律(11)の要求する条件をおかさな範囲で——代表するものと考えることが出来るのであるが、逆にこれをそのまま合成して、母系列を求めることが如何に無意味であるかについても了解出来るであろう。

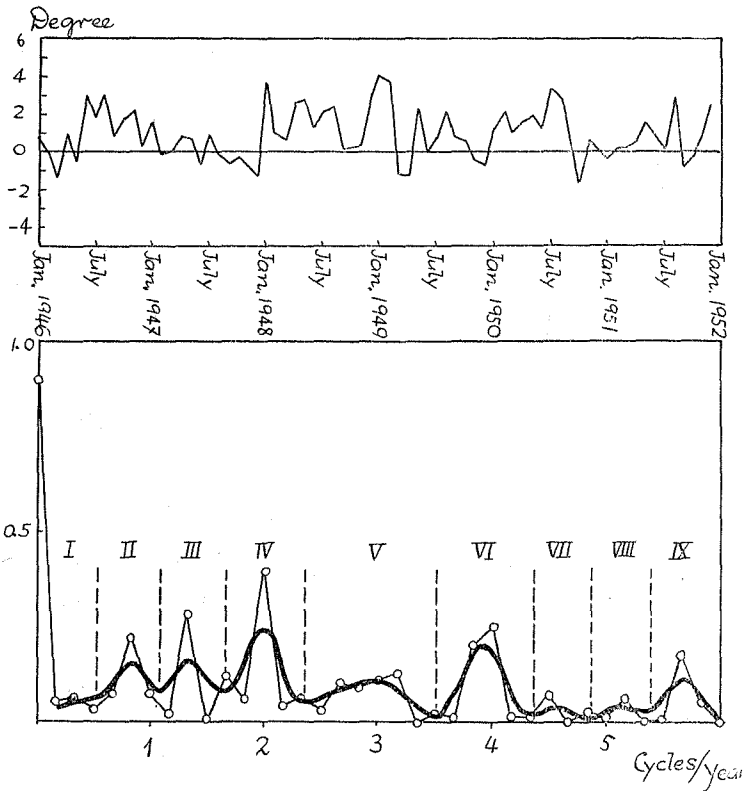
以上によつて、有限時系列の調和解析に関する物理的意味を大体明らかにした。最後に上に述

* 拙著：音響分析（小山書店）参照。



第4圖 札幌月別平均気温の周波数スペクトルに於ける長期傾向

べた考え方と、長期傾向との関係について附言しておく。今相当に長期間に亘る観測があつて、これを相続くN個宛の区割に分け、その各々について調和解析を行つたとする。一例として第4図に札幌の一月平均気温の値—平均値からの偏差—を1940—45, 1922—27, 1928—33, 1934—39, 1940—45, 1945—51の6個の区割に分け、各々について72項調和解析を行つた結果を示す。白丸は計算値で便宜上これを直線で結んだ。各区割のスペクトル構造は、共通な性質もあるが、一般には夫々異つている。これが即ち長期傾向であつて單に平均値の変化のみならず、周期にも相当の変動が見られるのである。このような長期傾向は、勿論上の様な分割を行つた場合に見られることであつて、若し上の6個の区割を一まとめにした全体に



第5圖 札幌月別平均気温の偏差値(1944~51)とそのスペクトラム

何なる分析方法を採用しても、全体として得られる知識量は同一である。なおこの様な考え方における物理的内容については既に述べた。

VI. 時系列の分解と豫報のための初期値の決定

(I) に述べた様に、長期予報の理論を實際問題に適用するための一つの近似的計算法として、筆者が考えた方法は、與えられた時系列を、その母系列の周波数スペクトルによつて適当な数の成分に分けて、例えば

$$x_R = x_{R'} + x_{R''} + \dots + x_R^{(M)} \quad \dots (13)$$

とした時、その各々の成分が、母系列の基準振動の一つ宛を含む様にし、その各々の成分についての予報値を、(I), (49) 及び (I), (63) によつて計算し、最後にこれ等を重疊するのである。

母系列の基準振動を推定するための簡単で然も効果的な方法は、前節に述べた調和解析を用いることである。第5図はその例で、これは第4図の最後の区間 1945—51 のものを分析に用いた時系列の値と共に並べたものである。スペクトル曲線は、縦の破線によつて9個の成分に分けら

ついで調和解析を行つたとすると、この場合の長期傾向については更に長い期間に亘る観測がないと何もいえない。同一の現象をこの様に色々な見方で見ても、結局得られる知識は同じであることは次の様に解釋すると了解される。即ち分割区間が小さいと夫々の区間に相当する母系列に関する知識量は少く、従つてそれが区間毎に如何に変化するかを知ることによつて、全観測期間を一区間と考えた場合の母系列に関する知識量と同じものが得られる。従つて如

れている。この場合前節に述べた不確定律によつて、各成分は必ず2個以上の調和項を含まなければならないことを注意しておく。この例では9個の基準振動の周波数及び減幅常数は夫々次表の如くなる。

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
ω (radian/month)	0	0.42	0.70	1.04	1.52	2.04	2.34	2.65	2.68
β (/month)	0.014	0.038	0.034	0.041	0.061	0.040	0.034	0.042	0.032

これ等の値を求めるには、視察による方法——その爲には第4及び5図に示した様な適当に平滑化した曲線を求めておく——や、その他種々の数値の計算法が考えられるが、方法の違いによる多少の変動は、結果に對して大きな影響を及ぼすことはない。

最も重要な問題は、(13)の様な分解を具体的に定義し、それによつて予報の計算に必要な初期値を決定する方法如何にある。まず誰しも気付く方法は、調和分析の結果を逆に合成することである。即ち例えば(13)の右邊の一項 $x_R^{(n)}$ を代表的に取り出すと

$$x_R^{(n)} = \sum_{m=1}^{n_2} \left(A_m \cos \frac{2\pi m}{N} R + B_m \sin \frac{2\pi m}{N} R \right) \quad \dots\dots (14)$$

の如く表わされる。ここで $R=N-2$ 及び $R=N-1$ とおいたものが(I)の(63)式における x_0 及び x_1 となる。この方法を用いて予報値 \bar{x}_T を計算した結果を第6図に示す。* 曲線 A がそれである。曲線 B は分解を更に簡単にし、前のIと、IIからVまでを合せたもの、及びVIからIXまでを合せたもの、都合三成分として同じ方法で計算した結果である。この場合の ω 及び β としては次表の値を採用した。

	I	II~V	VI~IX
ω (radian/month)	0	0.92	2.38
β (/month)	0.014	0.14	0.13

第6図の A の予報値を、分析に用いた時系列の初めの部分—第5図—と比較すると、両者は殆ど一致した値を示している。即ちこの例では予報値が、その計算に用いた時系列の單なる繰返しとなり、曲線 B においても同様な傾向が認められる。然しながらこの結果のみから、この方法が全然無意味であることは結論出来ないのであつて、得られた結果のうちで何処までが方法方法の欠点による誤差であり、何処までが眞の予報を與えているかを検討してみなければならない。場合によつては偶然に眞の予報値が與えられた系列の繰返しと一致することも考えられるからである。

(14) 式に (8) を代入してこれを書き直すと

* 予報値とは、與えられた初期条件のもとに於ける將來値 x_T の平均値である。更にその variance も同様に計算されるのであるが、本稿では一応考えの外におく。嚴密な意味での予報は勿論この兩者を合せ考えなければならない。

$$\left. \begin{aligned}
 x_R^{(n)} &= \sum_{i=0}^{N-1} K_i x_i, \\
 K_i &= \frac{2}{N} \frac{\sin \frac{\pi(n_2-n_1)}{N} (i-R)}{\sin \frac{\pi}{N} (i-R)} \sin \frac{(\pi n_2-n_1-1)}{N} (i-R)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

となる。即ち $x_R^{(m)}$ は x_i から一種の重値平均として求められるのであるが、その重みは $i=R$ 及びその附近において最大値を取ると同時に、 $i=R \pm qN$ (q は整数) の附近でも最大値を取る。 $R=N-2$ 及び $N-1$ として $\overline{x_r}$ の初期値を求める場合に、 $i=R$ の附近の貢献は、極めて妥当な解釋が與えられるが、 $i=R-N$ の附近の貢献は、時系列 x_R の初期の値が強調されることを意味する。従つてこの方法で求めた予報値にはこの x_R の初期の値による影響が現われるのは当然であつて、これが予報値に繰返しの傾向が現われる理由である。然しながらその全部が單なる繰返しでないことは、次に述べる様に上記の原因を取り除いても、なお同様の傾向が残ることから了解されるのである。

(15) 式における重み K_i が $i=R$ の他に N の整数倍の周期を以て最大値を取る理由は、時系列の分解を (14) いう特殊な形式で定義したことに歸せられる。そもそも一般に任意の與えられた時系列例えば (1) を、種々の周期をもつた正弦の時系列の重疊として表わす方法は、(14) 式の様な調和項のみで合成されるものだけに限らず、更に非調和項を加えることによつて、無限に多くの可能性が考えられる——母系列の周波数分析及びその逆を考えよ。吾々が考えている時系列の分解は單に與えられた観測値の系列を、その区間の内部だけで分解したり合成したりするものではなく、これをその外側に延長した母系列について考えているのである。母系列のスペクトルは、無限に微細な構造をもつている以上、與えられた時系列もたとえその正確な構造はわからないにせよ、原理的にはそれ等の周波数成分を含むものと考えなければならない。そうすると、時系列の分解は (14) 式の代りに

$$x_R^{(n)} = \int_{m=m_1}^{m_2} \{ A(m) \cos 2\pi m R + B(m) \sin 2\pi m \} dm \quad \dots\dots (16)$$

とし、 $A(m)$ 及び $B(m)$ は Fourier 係数 A_m , B_m から適当に推定されなければならぬ。その一つの方法として、 $A(m)$, $B(m)$ を與えられた時系列の periodogram

$$\left. \begin{aligned}
 A(m) &= \sum_{R=0}^{N-1} x_R \cos 2\pi m R, \\
 B(m) &= \sum_{R=0}^{N-1} x_R \sin 2\pi m R
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (17)$$

とすると、(16) 式は

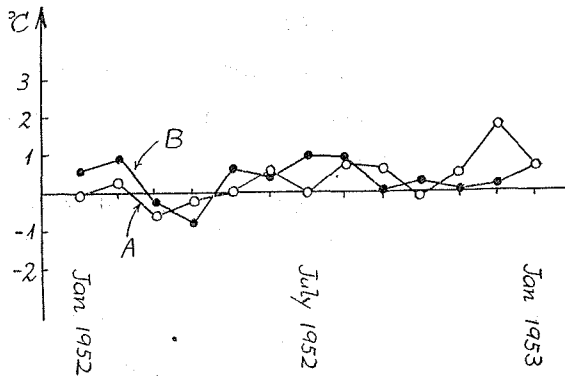
$$\left. \begin{aligned}
 x_R^{(n)} &= \sum_{i=0}^{N-1} K_i x_i \\
 K_i &= \frac{\sin 2\pi n_1 (i-R) - \sin 2\pi n_2 (i-R)}{2\pi (i-R)}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

となり、重みの最大は $i=R$ の附近においてのみ現われる。

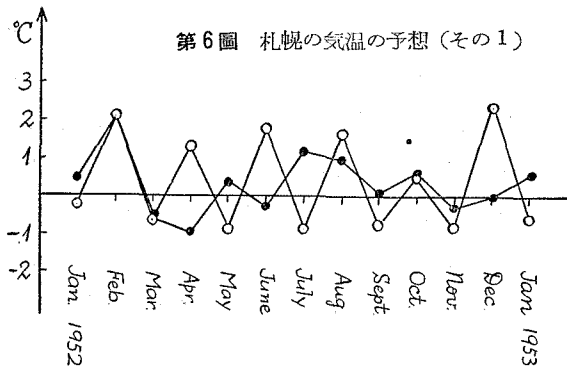
この方式を直接計算に移すことは左程困難ではないが、更にこれを簡略化した方法として次の様な計算法が考えられる。(17) の代りに

$$\left. \begin{aligned} A(m) &= \frac{1}{N} \sum_{R=0}^{N-1} x_R \cos \frac{2\pi m}{N} R, \\ B(m) &= \frac{1}{N} \sum_{R=0}^{N-1} x_R \sin \frac{2\pi m}{N} R, \quad m=0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

を求める。これは時系列 x_R の前に N 個の 0 を加えて、之に $2N$ 項調和解析を行うことに相当す



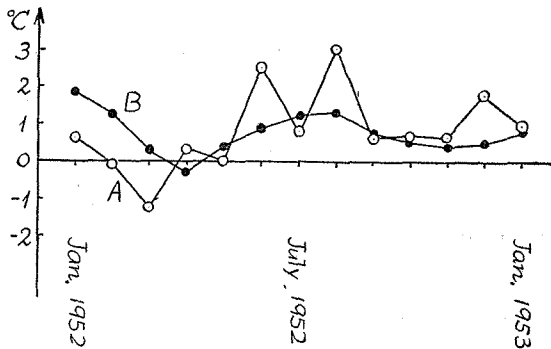
第6圖 札幌の気温の予想(その1)



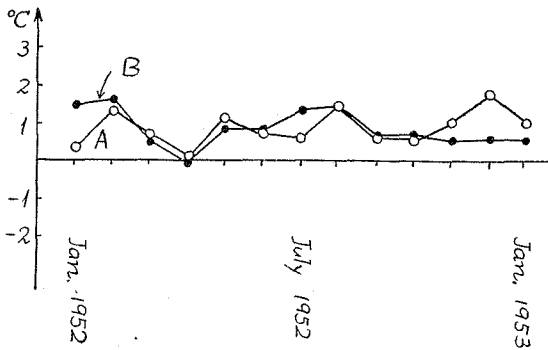
第7圖 札幌の気温の予想(その2)

る。この場合 K_i は (15) の N を $2N$ でおき換えた形となり $x_{\frac{N-1}{2}}$ 及び $x_{\frac{N-2}{2}}$ に對する x_R の初期値の影響はやはり取り除かれる。第7図はこの方法で求めた予報値を示したものであるが、實際の計算では 72×2 項の調和解析は行わず、初めの周波数分析に用いた 72 個の値の後半の 32 個を用い、前半の値を 0 とおいて、 72 項の調和解析を行つて (17) を求め、これから初期値を決定した。この結果は、(19) の調和解析に用いられる非分析系列の値——初めに 0 が並んでいる——から容易に想像される様に、予報値が 0 に近づく傾向があり、特に x_R の区間平均値が大きな値を有する場合には誤差が大きくなる。それでこの様な場合にはあらかじめ x_R の区間平均値 0 がとなる様

にしたものについて予報を行い、後に平均値——又は (I) (49) によるその予報値——を加えた方がよい。第8図はその結果を示す。なお第7図及び第9図における A 及び B は夫々第6図における A 及び B と同じ周波数領域に分解したものである。これらの結果を比較すると、特に B においては方法如何に拘らず殆ど同様な予報値が得られ、従つて第6図の計算に用いた方法も全然無意味ではなかつたことが了解される。 A の方は場合によつて多少異つた性質を示しているが、それでも B に現われる傾向は大体において保有しており、特に B では必然的に不正確になる所の τ の大きい値に對する予報値がよく出ている。例えば (1952年) 12 月の気温が著しく大



第8圖 札幌の気温の予想 (その3)



第9圖 札幌の気温の予想 (その4)

を初期値 x_0 及び x_1 とする方法である。その結果を第9図に示す。A 及び B は前と同様、B は今迄の結果とよく一致しておるが、A の方では2カ月周期が著しく強調されている。この様な結果を見ると、A における周波数の分割は多少細かすぎたのではないかと考えられる。このことは第4図に示されている様に、周波数スペクトルの細かな構造が、区間毎に非常に変化していることに起因するものと考えられ、一つの区間における周波数スペクトルを用いて、次の区間の予報を行うのに、同一スペクトルを仮定することは、近似的な意味においてのみ許されることだからである。

以上で筆者の方法による長期予報の實際を具体的な例を用いて説明したが、細部においては色々検討を要する点が多くあり、目的そのものが厳密さを犠牲にしても簡単な計算で実行出来る方式を見出すことであつたからやむを得ない。それにしてもこの様な近似法によらないで、直接理想的な計算が出来る様な自動計算器の具体化が強く望まれている次第である。今後の研究方針としては、一方においてここで述べたと同様な近似法を multiple prediction ——特に予想天気図の作製——に擴張すること、他方では電子管を用いた迅速自動計算器の製作に進みたいと考えている。

きく予測されている点は何れの方法にも共通である。これ等の結果を総合すると、1952年の札幌の気温は1月及び2月は比較的高く、3月及び4月に極小が現われ、6月、7月、8月は概して高温、12月は特に高いことが予想される。

なお時系列の分解は以上の他に色々考えられる。例えば中田氏の移動平均の方法などもその一つである。これについては筆者の研究室の小林が検討しているが、別の機会に発表される筈である。本稿に用いた材料に對して行つた今一つの方法は

$$x_B^{(n)} = \frac{2}{N} \sum_{m=n_1}^{n_2} \sum_{R'=N-n_1}^{N/2-R} x_{R'-RCOS} \frac{2\pi m}{N} \times (N-1-R') \dots (20)$$

とし、 $R=1$ 及び $R=0$ に對する値