Jun-ichi HORI 1952 Reviews on the Fundamentals of Imahori's Theories of Long-Period Forecasting and Statistical Treatment of Brain Waves and Atmospheric Turbulence from the Point of View of their Relation to Kolmogoroff-Wiener's and Wold-Ogawara's Theories of Prediction. *Low Temperature Science*, *9*.

綜 合 抄 録

今堀の長期豫報, 腦波統計, 亂流統計理論の基礎的意味, とくに Kolmogoroff-Wiener の理論並に Wold-小河原 の理論との關連について

堀 淳 一

(低温科学研究所 気象学部門)

(昭和27年8月受理)

I. は し が き

氣象要素, たとえば毎月の平均氣温というようなものを, ある程度長期にわたつて予報するという問題が, 社会的に重要な意味をもつことはいうまでもないが, ことに北海道或は東北地方のような寒冷地では, このいわゆる季節予想が農業或は漁業において非常に重大な意味をもつてくる。この問題に對してはかなり以前からいろいろな試みが行われている。たとえば今までの経験によつて, ある2つまたはそれ以上の氣象現象の間に相互の関連があることを見出して, その片方の現象から他の現象を予想する方法——冬暖いと夏はあまり暑くならないという傾向をいままでの経験から見出して, 冬の氣温からその年の夏の氣温を予想するというような類がこれである——とか, 氣象要素の変化に, いくつかの周期性があることを観測された値の系列から推定して, 適当な方法でそれらをとり出し, そのおのおのについて外挿を行つて, 再びそれを重ねあわせるというような方法がそれである。これらの方法は, それぞれに應じた合理性をもつており, 數学的なとり扱いもなされて, かなりの成果をあげてはいるけれども, 一般的な見地から見ると結局経験的な試みの域を脱せず, 眞に科学的な方法とはいいにくい。*もともと氣象現象はいろいろなこみいつた因子が重なり合つて生じたきわめて複雑なものであり, これを少數の経験的因子や周期にのみ歸して大ざつぱな分析を行つたのではきわめて不十分なのであつて, 精密な眞に客観的な分析を行うためには,ぜひとも問題になつている氣象要素の観測された系列を,統計的な時系列とみなして, これに推測統計学的な意味での嚴密な解析を加えなければならないのである。

---

* この段階におけるいろいろな方法に就いては, 高橋浩一郎 "長期予報" (1951) によくまとめられてある.

この意味での厳密な理論が発展しまた實際に應用されるようになつたのはわりに最近のことである。この意味での時系列論も，いろいろな形式の理論が考えられているが，その中でいちばんよく知られており，實際への應用が試みられているのは，少くとも氣象予報においては，Kolmogoroff-Wiener のいわゆる予報理論[1]と，Wold によつて体系づけられ，小河原氏によつて更に発展させられまた實際への應用も試みられた時系列論[2]（以下 Wold-小河原 の理論とよぶ）であろう。これらは一方において觀測されたデータから統計的にもつとももたしからしい予報を行う方法を與えるとともに，他方現象を支配する自然法則を探究するという意味でも非常にはつきりした基礎的意味をもつている。これらの理論も，與えられた時系列が定常であることを仮定している点で，完全に一般的なものとはいえないのであるが，これは數学的に厳密な理論体系をたてるための必然的な制約であり，むしろこれらを實際に應用する場合には，與えられた時系列を定常なものにひきなおすべきであると考えられるから，本質的な制限とは考えられない[5]。

今堀教授は 1935 年以来，音響分析，腦波の分析，及び誘電体の異常分散の問題に關して，原理的に一貫した考え方にもとずく独創的な研究を続けてこられたが，1950 年低温科学研究所に移られてからは，更に同じ考え方にもとずいた方法を，亂流の統計的なとり扱い及び長期予報の問題に應用することを試みて，いちじるしい成果をおさめられた。これらの研究ははじめ上にのべた Kolmogoroff-Wiener ないし Wold-小河原 の研究とは全く独立に行われたのであつて，その數学的な形はこれらの理論とは一見異なるのであるが，その原理は同一であつて，物理的には全く同じ内容のものであることを示すことができる。今堀の定式化は數学的には Kolmogroff-Wiener ないし Wold-小河原 の理論のような厳密さはもつていないが，物理的な内容をあらわに表現していて理解しやすいことゝ，實際に應用するにあたつて非常に便利な近似方法までを導き出した点に特徴がある。ここでは，上の 3 つの予報理論の内面的な関連，從つてそれらの基礎的意味を明らかにするとともに，音響，腦波，誘電体，及び亂流の問題への同じ方法の應用についてもまとめてのべてみたいと思う。

II. Kolmogoroff-Wiener の 理 論

Kolmogoroff-Wiener の理論は，厳密な數学的立場からたてられたものであつて，そのとり扱いは難解な積分方程式などを含んでおり，これを實際に応用する立場にある人達には理解されがたいうらみがある。Bode と Shannon は，電気回路理論にもとずく物理的な考察によつて同じ結果をより直觀的な，わかりやすい方法で導いた。[7] Wold-小河原 理論も，今堀の理論もそれを物理的に解釋すると結局同じように意味づけることができるのであつて，3 つの理論の基本的な同一性はここに求められるから，ここでは Bode-Shannon の方法に從つて簡単に Wiener の理論を紹介する。

Wiener の理論をせんじつめると，それは結局，觀測された時系列に作用させたとき，その結

果が——最小自乘法の意味で誤差を最小にするような——將来の予報値を與えるような線形演算子を求めることに歸する。それをいいかえると，觀測された時系列を $f(t)$ としたとき，$f(t)$ の τ だけ過去の値 $f(t-\tau)$ に，適當な“重み” $L(\tau)$ をかけて，それを無限の過去 $\tau=\infty$ から現在 $\tau=0$ まで加える，即ち

$$\int_0^\infty f(t-\tau)\,L(\tau)d\tau \qquad \cdots\cdots (1)$$

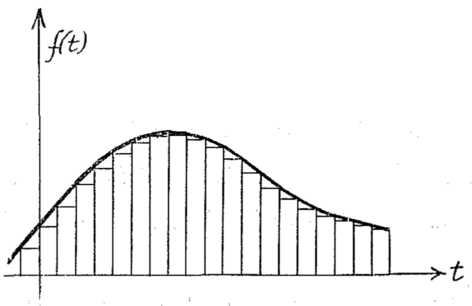
という操作を行うことにほかならない。これの値と α 時間後において實際の時系列がとるべき値 $f(t+\alpha)$ との差の絕對値の自乘平均，即ち

$$E=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|f(t+\alpha)-\int_0^\infty f(t-\tau)\,L(\tau)d\tau\right|^2 dt \qquad \cdots\cdots (2)$$

が最小になるような $L(\tau)$を求めるのである。つまり Wiener の意味での予報とは，觀測された過去の値に，どのような重みをつけて重ね合せれば最も確からしい將来の値が出てくるかということを考えることなのである。

そこで今，このような操作を，電氣的にやるとしよう。それには，觀測された過去の値の列 $f(t)$ を，変化する電圧にかえてやつて適當な電氣回路に入力として入れてやればよい。

勝手な函數 $f(t)$ は，第1圖のように矩形波のあつまりで近似することができるが，この矩形波の幅を無限小にもつていつた極限では，これらは Dirac の δ-函數であらわされ，$f(t)$ はその重ね合せとして精密にあらわすことができる。即ち



第 1 圖

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t')f(t')dt'=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')f(t-t')dt' \quad \cdots (3)$$

從つて電氣回路に $f(t)$ を入力として入れてやるということは，衝擊 $\delta(t-t')f(t')$ を各瞬間 $t-t'$ において次々に入れてやるということである。回路の1つの衝擊 $\delta(t-t')$ に對する応答を $L(t-t')$ とすれば，回路はおのおのの衝擊 $\delta(t-t')$ に對して，それぞれ $L(t-t')f(t')$ という出力を生ずるから，$f(t)$ を入れたときの出力は

$$f_1(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t')L(t-t')dt'=\int_0^\infty f(t-\tau)L(\tau)\,d\tau \qquad \cdots\cdots (4)$$

で與えられる。これは（1）と同じである。即ち重み $L(\tau)$ は電氣回路の衝擊に對する応答にほかならないのである。受動的な回路では応答 $L(t-t')$ は $t<t'$ では零でなければならないから，$L(\tau)$ は $\tau<0$ で零である。從つて（4）は

$$f_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\,L(\tau)d\tau \qquad \cdots\cdots(5)$$

とかいてもよい。この両邊に Fourier 変換

$$F_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)e^{-i\omega t}dt,$$

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}L(t)e^{-i\omega t}dt$$

をほどこすと，（5）はたたみこみの積分であるから，Fourier 変換論のよく知られた定理によつて、

$$F_1(\omega)=F(\omega)\,Y(\omega) \qquad \cdots\cdots(6)$$

となる。これは，この回路の周波数特性が $Y(\omega)$ であつて，しかもそれが衝撃応答の Fourier 変換で與えられることを示している。即ち予報値を與える線形変換は $Y(\omega)$ という特性をもつた"周波数フイルター"とも考えられるのである。$Y(\omega)$ がきまれば $L(\tau)$ がきまることはいうまでもないであろう。

次に表式（2）を周波数 ω による表現にかきなおすと，$f(t+\alpha)$ の Fourier 変換は $Y(\omega)e^{i\alpha\omega}$ であるから，Parcevalの定理によつて，

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)\,|\,Y(\omega)-e^{i\alpha\omega}\,|^2\,d\omega \qquad \cdots\cdots(7)$$

となる。但し $P(\omega)=|F(\omega)|^2$ 即ち $f(t)$ のエネルギー・スペクトルである。從つて結局予報の問題は，（7）を最小にするような周波數特性 $Y(\omega)$ をもつ回路或はフイルターを設計するということに歸着されるのである。以下この回路，或はフイルターを予報フイルターとよぶことにする。

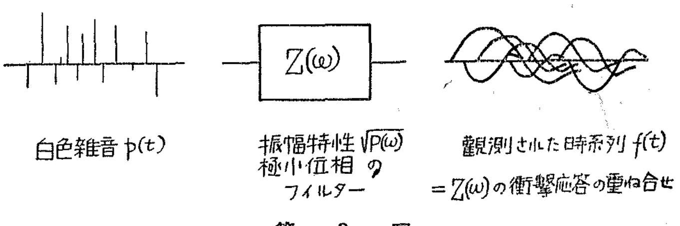
ここで重要なことは，（7）式の中には入力 $f(t)$ の振幅スペクトル $F(\omega)$ は現われず，エネルギースペクトル $P(\omega)$ だけが現われていることである。これは，予報フイルターを設計する際に，入力 $f(t)$ の周波數特性のうちの位相特性は問題にならないことを示している。同じエネルギースペクトルをもつた入力は，位相特性がいかにちがつても，同一のフイルターによつて予報されるのである。したがつて實際に観測された時系列 $f(t)$ を，それと同じエネルギースペクトルをもつ他の勝手な時系列でおきかえても，何の差支えもおこらない。ところが一方，エネルギースペクトルが1であるような，いわゆる白色雜音 (white noise)——これは物理的には，全く亂雜な衝撃の列と考えることができ，また數学的には平均値零でその自己相関函數が δ 函數であり，且つ正規分布をなすような，いわゆる random force $p(t)$ によつて與えられる。このような函數のエネルギースペクトルが常數1であることは容易に證明される——を，その振幅特性函數が $\sqrt{P(\omega)}$ であるようなフイルターを通すと，勝手なエネルギースペクトル $P(\omega)$ をもつ

た正規分布をなす時系列を作り出すことができるから，予報という觀点からみるかぎり，観測された時系列が正規分布をなすという仮定が許されるならば，我々はこれを振幅特性 $\sqrt{P(\omega)}$ をもつフイルター $Z(\omega)$ を通過した白色雑音でもつておきかえてよいことになる。観測された時系列が正規分布であるという仮定は，多くの場合妥当なものであつて，現在のどの理論にも基礎仮定として入つている。このフイルターの位相特性は，それが物理的に實現可能，即ち $Z(\omega)$ が受動的な回路の特性をあらわしているかぎり，更にいいかえれば，$Z(\omega)$ に對応する衝撃応答が $t<0$ で零であるかぎり，どんなものでもよいわけであるが，後の便利のために，これを振幅特性 $\sqrt{P(\omega)}$ に對して極小位相になるように，即ち

$$B(\omega_0)=-\frac{\omega_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\log P(\omega)-\log P(\omega_0)}{\omega^2-\omega_0{}^2}\,d\omega \qquad \cdots\cdots (8)$$

ととる。こうすると，このフイルター $Z(\omega)=\sqrt{P(\omega)\,B(\omega)}$ の逆フイルター $Z^{-1}(\omega)$ もまた物理的に實現可能となるのである。

観測された時系列 $f(t)$（エネルギースペクトル $P(\omega)$）をこの逆フイルターに入力として入れてやると，出力として白色雑音 $p(t)$ が出てくる。上にのべたことから，観測された時系列 $f(t)$ は $p(t)$ がフイルター $Z(\omega)$ を通過して出てきたものであると考えてよい（第1圖）。観測された現象が，實際にこのような機構によつて現われたものかどうかはわからないのだけれども，Wiener の意味における予報という見地から見る限り，同じエネルギースペクトルをもつた時系列は完全に同等なのであるから，観測された現象はこういう機構で現われたものであると考えて全く差支えないのであつて，機構についてこれ以上たちいたつて考えるのは無意味なのである。同じことはのちにものべるように，Wold-小河原 の理論でも現われるのであり，また今堀の理論の基礎の考え方を正当化する論據ともなるのである。*



第　2　圖

$f(t)$ と $p(t)$ とは互に1:1に對応するから，$f(t)$ に含まれている知識は，そのまま完全に $p(t)$ に含まれている。従つて我々は観測された時系列 $f(t)$ に線形変換をほどこして予報を行うという最初の問題を，$f(t)$ に フイルター $Z^{-1}(\omega)$ を

＊第1図の内容を式でかくと，

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t-\tau)K(\tau)d\tau=\int_0^{\infty}p(t-\tau)K(\tau)d\tau \qquad \text{(A)}$$

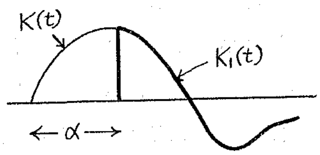
となる。数学的にも，連続的なエネルギースペクトルをもつた任意の正規時系列は，このような積分で表されることが示されている。(たとえば G. Maruyama : "The Harmonic Analysis of Stochastic Processes," Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. Ser. A Vol. IV No.1 (1949) p. 61 を見よ)。のちにのべるように，Wold-小河原 の理論では，これと同じ表現が離散的な形であらわれるのである。

通過させて得られる白色雑音 $p(t)$ に適当な線形変換をほどこして予報を行うという問題におきかえることができる。この問題に對する答は簡單である。第1図に示したように，時系列 $f(t)$ は，$p(t)$ に含まれている1つ1つの衝撃に對するフイルター $Z(\omega)$ の応答 $K(t)$ を重ね合せたものであるから，$f(t)$が今 $(t=0)$ から α 時間後にとるべき値 $f(\alpha)$ は，既に起つた，即ち $t<0$ における衝撃に對する応答と，$1\leqslant t\leqslant\alpha$ の間に起るべき衝撃に對する応答との和であると考えることができる。この第1の部分は，その衝撃応答$K_1(t)$ が $Z(\omega)$ の衝撃応答 $K(t)$ の最初の α 秒間の部分を切りとつた形になつているようなフイルター $Z_1(\omega)$ に，$p(t)$ を入力として入れたときの現在の出力で與えられる。なぜなら，その場合 $Z_1(\omega)$ の現在の応答は，$Z(\omega)$ の同じ入力に對する α 秒後の応答と等しいからである（第2図)。一方第2の部分は，いうまでもなく完全に未知であつて，このようにして計算することは不可能である。しかしながら，將來おこるべき衝撃の平均値は零であり，一方どんな分布に對しても，算術平均値が即ち最小自乗の意味での推定値であるから，結局第1の部分が Wienerの意味でのα時間後の予報値になるのである。

つまり α 時間後の予報値は，観測された時系列 $f(t)$ に，

$$Y(\omega)=Z_1(\omega)Z^{-1}(\omega) \qquad \cdots\cdots (9)$$

という周波數特性をもつ予報フイルターを通過させてやれば，その出力として得られるのである。



第 3 圖

特性函數 $Z_1(\omega)$ が，

$$Z_1(\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega t}dt\int_{-\infty}^\infty Z(u)e^{iu(t+\alpha)}du \qquad (10)$$

で與えられることは容易にわかる。この式の2番目の積分は $K(t+\alpha)$ 即ち，$K(t)$ を負の方向に α だけずらしたものであり，それに $e^{i\omega t}$ をかけて0から ∞ まで積分するということは，$K(t)$ の最初の α秒間の部分をきりとつたもの即ち $K_1(t)$ の Fourier 変換を求めることだからである。從つて求める予報フイルターは

$$Y(\omega)=\frac{1}{Z(\omega)}\int_0^\infty e^{i\omega t}dt\int_{-\infty}^\infty Z(u)e^{iu(t+\alpha)}du \qquad \cdots\cdots (11)$$

となる。これが Wiener の得た結果である。

予報の誤差は $0\leqslant t\leqslant\alpha$ の間におこるべき衝撃によるものである。これらの衝撃は互に独立（相関がない）だから，全体の誤差は1つ1つの衝撃による誤差の和である。1つの衝撃は $K(\alpha-t)$ の2乗に比例する自乗平均誤差を生ずるから，全体の平均誤差は，

$$E^2=\int_0^\alpha K^2(\alpha-t)\,dt=\int_0^\alpha K^2(t)\,dt \qquad \cdots\cdots (12)$$

で與えられる。Wiener は同様な結果を，観測値が連続的でなくて離散的な場合に對して導いているが，その物理的意味は全く同様であるから，ここにはくり返してのべない。(文献3を見よ)。

III. Wold-小河原の理論

Wold-小河原 の理論は離散的な場合についてのみ立てられているのであるが，これについては文献（2）にまとめてのべられてあるから，ここではその結果とその物理的な解釋だけをのべるに止める。この理論の基本となるのは，平均値零の離散的な正規定常時系列 $X(t)$ が，不連続なスペクトルをもち，從つてそのスペクトル成分の數の2倍の初期値が定まれば，あとは決定論的な函數として一義的に定まるような，いわゆる正規特異時系列 $V(t)$ と，連続なスペクトルをもち

$$U(t)=Y(t)+b_1Y(t-1)+b_2Y(t-2)+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots (13)$$

のようにあらわされる $V(t)$ と相関のない正規時系列 $U(t)$ との和に，一義的に分解される：

$$X(t)=V(t)+U(t) \qquad \cdots\cdots (14)$$

という定理である。但し $X(t)$ は自己無相関で，$X(t-k)$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ とも相関のない平均値零の正規定常時系列であつて，前の場合のでたらめな衝撃の列に相当するものである。とくに $X(t)$ が特異時系列を含まない場合には*

$$X(t)+a_1X(t-1)+a_2X(t-2)+\cdots\cdots \quad =Y(t), \qquad \cdots\cdots (15)$$

$$X(t)=Y(t)+b_1Y(t-1)+b_2Y(t-2)+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots (16)$$

のようにあらわされることが證明される。(15) の右邊の係數 a_i は観測された時系列 $X(t)$ の自己相関函數を分析することによつて求めることができ，(16) の右邊の係數 b_i もそれから計算される。從つて $X(t)$ の現在及び過去の値 x_{t-k} $(k=0,1,2,\dots)$ が與えられれば，(15) によつて $Y(t)$ の現在及び過去の値 y_{t-k} $(k=0,1,2,\dots)$ も算出される。$X(t)$ の過去の値がかわつたという条件の下における条件付確率変數 $X_c(t+k)$は，

$$X_c\ (t+k)=Y(t+k)+b_1Y(t+k-1)+\dots \quad +b_{k-1}Y(t+1)$$
$$+b_k y_t + b_{k+1}\, y_{t-1} + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots (17)$$

であるが，この変數の平均値をもつて k 時間だけ将来に X がとるべき値の予報値とするのである。即ち

$$E\ \{ X_c\ (t+k) \} = b_k y_t + b_{k+1}\ y_{t-1} + \cdots\cdots \quad b_{k+i}\ y_{t-i}\ . \qquad \cdots\cdots (18)$$

また予報の精度は条件付分散

$$E\left[\{ X_c\ (t+k) - E\{X_c\ (t+k)\} \right]^2 = (1+b_1{}^2+\dots \quad +b_{k-1}{}^2)\, D^2(Y) \qquad \cdots\cdots (19)$$

によつてはかられる。但し $D^2(Y)$ は $Y(t)$ の分散である。

---

* 実際問題としては分析時間の有限性のために特異時系列が含まれているかどうかを検出することは不可能であるから，この場合だけを考えれば十分である。

そこで(15)式の意味を考えてみる。この式の右邊を零とおいたものは，通常の線形定差方程式であるから，その解はこの方程式の次數に等しい個數の基準振動の重ね合せで表わされ，その數の2倍だけの初期値がきまれば，それからあとにとる値は決定論的にきまつてしまう。ところが實際は右邊に全くでたらめな“外力”$Y(t)$ が加わつているから，その解はこのような外力によつて起される强制振動になる。いいかえれば，上の初期値が時々刻々に全くでたらめに變化し，したがつて解は決定論的には定まらないことになる。即ち連續なスペクトルをもつ定常時系列は，ある一定の定差方程式によつて支配される物理系が，全くでたらめな外からの擾亂によつて始終かきみだされている結果現われてくるものであると考えることができるのである。係數 a_i は，この定常時系列の自己相關函數

$$\rho_\tau = \frac{E\{X(t)-EX(t)\}\ \{X(t+\tau)-EX(t)\}}{\sqrt{E\{X(t)-EX(t))^2\}E\{(X(t+\tau)-EX(t))^2\}}}$$

が，(15) 式の右邊を零とおいた定差方程式を滿足する，即ち

$$\rho_k + a_1\rho_{k-1} + \cdots + a_{k-1}\rho_1 + a_k + a_{k+1}\rho_1 + a_{k+2}\rho_2 + \cdots = 0,$$
$$(k=1,2,\ldots\ldots;\ \rho_{-k}=\rho_k) \qquad \ldots\ldots (20)$$

であることから求められるものであるから，物理系を支配する定差方程式は，それに相當する時系列の自己相關函數のみによつて完全に定まる。ところが Wiener-Khintchine 定理によつて，自己相關函數はその時系列のエネルギースペクトルと互に Fourier 変換の關係にあるから，これは定差方程式がエネルギースペクトルのみによつて完全に定まることを意味する。このことから，Wold-小河原 の理論に對して，Kolmogoroff-Wiener の理論の場合と全く同樣な物理的の意味ずけをすることができる。(15) の右邊を零とおいた定差方程式に支配される物理系が，前節のフイルター $Z(\omega)$ に，でたらめな外力 $Y(t)$ が前節の白色雜音 $p(t)$ に相當するものであることはもはや明らかであろう。予報という見地からは時系列のエネルギースペクトルのみが本質的役割を演ずることは，物理的に意味のある定差方程式の係數 a_i が相關函數從つてエネルギースペクトルのみから定まることに對應する。上にのべた，初期値が各瞬間においてでたらめに變化するということは，この物理系の基準振動の位相が時々刻々でたらめに變化するということと同じであるから，スペクトルの位相に關する部分が統計的に問題にならないのは當然である。前の場合でいえば，フイルター $Z(\omega)$ の位相特性がどんなものであつても，完全にでたらめな入力 $p(t)$ によつて應答波の位相は完全にでたらめな變化を受けるから，統計的には問題にならないのである。(16) 式は，前の (A) 式に相當するもので，観測された時系列 $X(t)$ が，でたらめな外力即ち白色雜音 $Y(t)$ に對するこの物理系の應答の重ね合せであるということを表わしている。即ち係數 b_i は，i 時間だけ前に加えられた衝擊 $Y(t-i)$ に對する系の現在の應答であつて，前の $K(\tau)$ に相當する。(18) 式ではそれぞれの過去の時刻における衝擊の實現値 y_{t-i} に，b_i のかわりに b_{k+i} がかかつている。

これは y_{t-l} に對する系の現在の応答のかわりに，k 時間先の応答を入れたことを意味するから，前に $K(\tau)$ のかわりに $K_1(\tau)$ を使つたことと全く同等である。観測された自己相關函數から a_i 及び b_i を求めることは，$P(\omega)$から $Z(\omega)$ 及び $Z^{-1}(\omega)$ を求めることに，それから（15）によつて觀測された時系列の過去の値 $x(t)$ に對応する $y(t)$ を求めることは $f(t)$ に Z^{-1} という操作を加えることに，（18）式によつて予報値を求めることはその結果に Z_1 という操作を加えることに，それぞれ對応するのである。これで Kolmogoroff-Wiener の予報方式とWold-小河原 の方式とは，少くとも物理的には全く同等なものであることが示された。

IV. 今 堀 の 理 論

今堀の理論では，観測される時系列が，

$$\frac{dq_i}{dt} - \sum_j a_{ij} q_j = p_i(t), \quad i=1,2,\ldots\ldots, n \qquad \ldots\ldots (21)$$

の形の一次線形微分方程式の系によつて支配されていることを**假定**する。[3),4)] 但し q_i はその時系列を完全に記述する，互に独立であると考えられる n 個の変數（その1つ，たとえば q_1 は實際直接に観測される値），$p_i(t)$ は平均値零で自己相關函數及び相互相關函數が δ 函數になる，即ち

$$\overline{p_i(t')p_j(t'')} = B_{ij}\,\delta(t'-t'') \qquad \ldots\ldots (22)$$

であるような，いわゆる random force である。

$$\mathrm{Det.}\,(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0 \qquad \ldots\ldots (23)$$

の根を λ_i（$i=1$，……n）とするとき，

$$\sum_j c_{ij} a_{jk} = \lambda_i c_{ik}, \qquad i,k=1,2,\ldots\ldots, n \qquad \ldots\ldots (24)$$

であるような1次変換

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_j, \qquad i=1,2,\ldots\ldots, n \qquad \ldots\ldots (25)$$

を変數 q_i に對して行うと，行列 $\| a_{ij} \|$ は對角線化され，（21）は n 個の互に独立な方程式の系

$$\frac{dz_i}{dt} - \lambda_i z_i = \pi_i(t), \qquad i=1,2,\ldots\ldots, n \qquad \ldots\ldots (26)$$

となる。但し

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\pi_i(t)} = 0, \\ &\pi_i(t) = \sum_j c_{ij}\, p_j(t), \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (27)$$

$$\overline{\pi_i(t')\pi_j(t'')} = \delta_{ij}\ \delta(t'-t'') = \sum_{k,l} c_{ik} c_{jl}\, B_{kl}\,\delta(t'-t'') \qquad \ldots\ldots (28)$$

であつて，$\pi_i(t)$ はやはり random forceである。（26）の1つ1つは，最も簡單な Brown 運

動論の基礎となるいわゆる Langevin 方程式であるが，これに對する Fokker-planck の方程式の解は，平均値

$$\overline{z_i} = z_i(0)e^{\lambda_i t} \qquad \cdots\cdots (29)$$

($z_i(0)$ は z_i の初期値) 及び分散

$$\overline{(z_i-\overline{z_i})(z_j-\overline{z_j})} = -\frac{\sigma_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}\left[1-e^{(\lambda_i+\lambda_j)t}\right] \qquad \cdots\cdots (30)$$

をもつ n 次元 Gauss 分布であり，一方 (26) そのものの解

$$z_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\pi_i(t-t')e^{\lambda_i t'}dt' = \int_{-\infty}^{t}\pi_i(t')e^{\lambda_i(t-t')}dt' \qquad \cdots\cdots (31)$$

から z_i の相關函數が次のように求められる：

$$Z_{ij}(\tau) = \overline{[z_i(t+\tau)z_j(t)]} = \int_0^\infty\int_0^\infty \overline{[\pi_i(t+\tau-t')\pi_j(t-t'')]}e^{\lambda_i t'+\lambda_j t''}dt'dt''$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\sigma_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}e^{-\lambda_j\tau}, & \tau<0 \\ -\dfrac{\sigma_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}e^{\lambda_i\tau}. & \tau>0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots (32)$$

(29)，(32) に對して c_{ij} の逆變換を行つて座標をもとの q_i に戻すと，それぞれ

$$\overline{q_i} = \sum_{jk}\bar{c}_{ij}c_{jk}q_k(0)e^{\lambda_i t} \qquad (\bar{c}_{ij}) = (\bar{c}_{ij})^{-1}, \qquad \cdots\cdots (33)$$

$$Q_{ij}(\tau) = \overline{q_i(t+\tau)q_j(t)}$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{k,l}\dfrac{\bar{c}_{ik}\bar{c}_{jl}\sigma_{kl}}{\lambda_k+\lambda_l}e^{-\lambda_l\tau}, & \tau<0, \\ \sum\limits_{k,l}\dfrac{\bar{c}_{ik}\bar{c}_{jl}\sigma_{kl}}{\lambda_k+\lambda_l}e^{\lambda^k\tau}, & \tau<0, \end{cases} \qquad \cdots\cdots (34)$$

となる。また相關函數 $Q_{ij}(\tau)$ が

$$\frac{dQ_{ij}}{d\tau} - \sum_k a_{ik}Q_{kj} = 0 \qquad \tau>0 \qquad \cdots\cdots (35)$$

を滿足することも容易に證明される。この式を利用して，觀測された相關函數から (21) の係數 a_{ij} 從つて變換の係數 c_{ij}，$\bar{c}_{ij}$ を求めれば，時系列の初期値 $q_i(0)$ さえわかつていれば，(33) によつて予報値が求まることになる。

しかしながら，上のような方式では，變數 q_i の性格がはつきりせず，實際に何を用いたらよいのか明瞭でない上に，Kolmogoroff-Wiener ないし Wold-小河原 の理論との比較に不便なので，ここでは結局これと同等なのではあるが，幾分上と異つた形の定式化を行つてみよう。それには (21) 或は (26) のような n 個の 1 階のLangevin 方程式を用いるかわりに，1 個の n 階

の Langevin 方程式

$$\frac{d^n q}{dt^n}+a_{n+1}\frac{d^{n-1}q}{dt^{n-1}}+\cdots\quad +a_1\frac{dq}{dt}+a_0 q=p(t) \qquad \cdots\cdots(36)$$

を用いればよい。q は實際に観測される時系列の値，$p(t)$ は前と同じく random function で，$\overline{p(t')p(t'')}=\sigma\delta(t'-t'')$ である。この方程式は通常“一般化された Langevin 方程式”とよばれるものである。即ち観測された時系列は，このようなLangevin方程式で記述される一般のBrown運動であると考えるのである。q 及び q の $n-1$ 次の微係數までを，n 個の變數 $q_1,\cdots,\ q_n$ と考えて，(36) を

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt}&=q_2,\\ \frac{dq_2}{dt}&=q_3,\\ &\vdots\\ \frac{dq_{n-1}}{dt}&=q_n\\ \frac{dq_n}{dt}+a_{n-1}q_n+a_{n-2}q_{n-1}+\cdots\quad &+a_1q_2+a_0q_1=p(t)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(37)$$

のような形にかき直すと，これは (21) の特殊の場合になり，

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots\cdots\quad +a_1\lambda+a_0=0 \qquad \cdots\cdots(38)$$

の解を λ_i ($i=1,\cdots\cdots,$ n) としたとき，

$$\sum_i c_{ij}\,a_{ik}=\lambda_i\,c_{ik}\,, \qquad \cdots\cdots(39)$$

但し

$$\|a_{ij}\|=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots\cdots&0\\ \cdots\cdots&&&&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots\cdots&&-a_{n-1}\end{pmatrix}, \qquad \cdots\cdots(40)$$

であるような１次變換

$$z_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}q_j\,, \qquad \cdots\cdots(41)$$

によつて，

$$\frac{dz_i}{dt}-\lambda_i z_i=p(t) \qquad \cdots\cdots(42)$$

の形にひき直すことができるから，(21) と (36) の２つの假定は，本質的には同等なものと考

えられる。[8)*] (36) という基礎の式が，Wold-小河原 の理論の (15) 式に對応するものであることは明らかである。ただ今の場合は連続的な時系列を考えているために，定差方程式が微分方程式に変つただけでのことである。** 即ち今堀の理論においては，(36) の右邊を零とおいた方程式に支配される物理系が，$p(t)$ というでたらめな外力によつてかき亂された結果が，我々にとつて1つの時系列として観測されるのだと考えるのである。このことは上にも既にのべたように，時系列を (36) という Langevin 方程式によつて支配される1つの Brown 運動，或はn次元の Markoff 過程と考えるということと同じである。

(42) の解並に z_i の平均値，分散及び相關函数は，前と同様にして求められ，(29)，(30)，(31)，(32) において σ_{ij} を σ に，π_i を p におきかえただけのものが得られる。q_i に對してもやはり前と同じような表式が得られる。たとえば (31) に相当する今の場合の式を c_{ij} の逆変換によつて q_i 座標にもどすと，

$$q_i(t)=\sum_j \bar{c}_{ij}\int_0^\infty p(t-t')e^{\lambda_j t'}dt'=\sum_j \bar{c}_{ij}\int_{-\infty}^t p(t')e^{\lambda_j(t-t')}dt' \qquad \ldots\ldots (43)$$

となる。(35) がなりたつことも明らかであるが，今の場合には q_i が観測された時系列及びその微係数であることがはつきりしているから，Q_{ij} を観測値から直ちに計算することができ，従つてこれから (35) を用いて a_{ij}，従つて (36) の係数 a_i が求められる。

(43) 式が Wold-小河原の理論における (16) 及び Kolmogoroff-Wiener の理論における (A) 式 (48頁脚註) に相当することは明らかである。

$$q_1(t)=q(t)=\sum_j \bar{c}_{1j}\int_0^\infty p(t-t')e^{\lambda_j t'}dt'=\sum_j \bar{c}_{1j}\int_{-\infty}^t p(t')e^{\lambda_j(t-t')}dt' \qquad \ldots\ldots (44)$$

であるが，これは $q(t)$ の値が t よりも前の時刻 t' における衝撃 $p(t')$ に對する系の $t=t$ における応答

$$\sum_j \bar{c}_{1j}e^{\lambda_j(t-t')} \qquad t \geqq t' \qquad \ldots\ldots (45)$$

* もつとも今堀は，より深い物理的考察にもとづいて (21) の第2項が非線形であるような方程式を導き，その特別の場合として，実際上は線形性を仮定して差支えないであろうことを予想して (21) を基礎仮定としたのであつて，[3)] その意味では (21) の形の方がより一般性をもつているといえる。しかしながら線形性を仮定するかぎり (21) と (36) とは同等であり，また統計的には常に線形性を仮定してよいであろうという今堀の予想は以下議論（とくに次の2つの註）によつてたしかめられたとみてよいであろうから，(36) を採用したために一般性が失われることはないと思われる。

** (15) では方程式の階数が無限大であるのに，(36) の階数は有限であるから，厳密にいえば (36) は一般的なものではないが，Wold-小河原 の理論では実際にこれを応用する場合には結局常に有限項のみをとるのだから，このことは実際上制約とはならない。(36) の階数を無限にして於いても，以下の議論はそのままなりたつであろう。

を，すべての t より前の時刻にわたつて重ね合せたものであることを表わしている。* 現在即ち $t=0$ までの q_i の値を知つて，$t=t$ における値を予報するためには，(44) 式を 2 つの部分に分けて考えればよい．即ち

$$q(t)=q_1(t)=\sum_j \bar{c}_{1j}\int_{-\infty}^{0} p(t')e^{\lambda_j(t-t')}dt'+\sum_j \bar{c}_{1j}\int_0^t p(t')e^{\lambda_j(t-t')}dt'. \quad \ldots\ldots (46)$$

$0\leqslant t'\leqslant t$ の間の $p(t')$ の値は全く予測不可能であるから，その平均値は零である。從つて現在までの値を知つたという条件の下における $q(t)$ の条件付平均値は

$$\overline{q(t)}=\sum_j \bar{c}_{1j}\int_{-\infty}^{\infty} p(t')e^{\lambda_j(t-t')}dt' \quad \ldots\ldots (47)$$

である。$p(t')$ の $-\infty<t'<0$ における値は最初の式 (36) によつて q の観測値より求められるから，それを使つて (47) から予報値 $\overline{q(t)}$ を見出せばよいのである。この手続は Kolmogoroff-Wiener ないし Wold-小河原 の理論と全く同一であつて，(47) は Kolmogoroff-Wiener の理論の場合のように，系の衝撃応答の頭を，予報時間 t の長さだけ切りとつた

$$\left.\begin{aligned} K(t)&=\sum_j \bar{c}_{1j}e^{\lambda_j(t-t')} & t'&<0, \\ &=0 & t'&\leqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (48)$$

という応答をもつ物理系の，$p(t')$ に對する現在（$t'=0$）の応答であると解釋することができる。これで今堀の理論が，Kolmogoroff-Wiener ないし Wold-小河原 の理論と本質的に同等のものであることが示された。

しかしながら，(36) 式から $p(t')$ の現在までの値を求める操作は非常に煩雑であつて，實用的でない欠点がある。ところが (31) （の π_i を p にしたもの）によつて (47) 式は著しく簡単になる：

$$\overline{q(t)}=\sum_j \bar{c}_{1j}\, z_j(0)e^{\lambda_j t}. \quad \ldots\ldots (49)$$

座標を最初の系にもどすと，

$$\overline{q(t)}=\sum_{jk} \bar{c}_{1j}\, c_{ik}\, q_k(0)\, e^{\lambda_j t}. \quad \ldots\ldots (50)$$

すなわち現在までの $p(t')$ の値全部のかわりに，q_i の現在の値（初期値）のみを求めればよい

* 即ち今堀の理論は，系の衝撃応答 $K(\tau)$ が $\sum \bar{c}_{ij}e^{\lambda_j\tau}$ という形をもつ特別の場合に相当する。しかしながら物理的に可能な任意の衝撃応答は，$e^{\lambda_j\tau}$ という形の函数の重ね合せとして少くとも近似的には表されるであろうから，このことは実際上の制約とはならない。離散的な場合には Wold-小河原 の理論に於けるように，任意の正規定常時系列が，確率定差方程式 (15) の解であることが数学的に嚴密に證明されるのであるが，連續的な場合に，任意の定常時系列が (36) のような Langevin 方程式の解として表されるかどうかはわからない。しかしながら，実際上は，離散的な場合との類推及び物理的考察から，このことが少くとも近似的にはなりたつと考えてよいであろう。

ことになり，手続が非常に簡単になる。いいかえれば，$p(t')$ の過去の全歴史が，q_i の初期値の中に集積されているといえよう。(49) は上のような面倒な操作を行わなくても，(29) から直ちに得られる：

$$\overline{q_i(t)}=\sum_j \bar{c}_{ij}\overline{z_j(t)}=\sum_j \bar{c}_{ij} z_j(0) e^{\lambda_j t}. \quad \text{...... (51)}$$

ところで (29) は Fokker-Planck の方程式の解から，直ちに得られる式であり，また予報の誤差は，q の条件付分散で與えられるが，これも Fokker-Planck の方程式の解から得られた z_i のそれに對する表式 (30) を，変換 $\bar{c}_{ij}$ によつてもとの座標にもどすことによつて容易に得られる。初期値を導入することによつて，計算が非常に簡単になるのは，今堀の理論の非常に著しい特徴の1つであるが，これは與えられた時系列を1つの Brown 運動と考えたことによるものであつて，これにおいては Langevin 方程式が與えられれば，それに對応する Fokker-Planck の方程式を解くことによつて，最初の値が與えられさへすれば，その後の値の変化を記述する確率函數従つて平均値及び分散が直ちに計算されるという事實にもとずくのである。このことから，Brown 運動的な考え方がいかに有効なものであるかということがわかる。Wold-小河原 による離散的な形式を Brown 運動として意味づけることも可能であろう。

V. 近似的方法

Wiener の理論を厳密に實際の現象に對して適用すると，非常に複雑な計算を必要とし，また Wold-小河原 の理論でも一般の次數の高い場合には係數 a_j 等を求めるための代數方程式を解くのが非常に面倒になる。電子計算機が発達して，どんどん實用化されるようになれば，このようなことはあまり問題にされなくなることが期待されるが，未だ筆算や手まわしの計算器に相当頼らなければならない現状では，この困難を避けて，多少精度は落ちても，計算を簡単にする近似的な方法を考えることが非常に重要な問題となる。今堀の理論はその手段を提供する点で今1つの特徴をもつているのである。

前節にのべたように，観測される時系列は，それが定常且つ正規であるかぎり，(36) のような一般化された Langevin 方程式の解即ち n 次元の Markoff 過程として，十分に近似することができる。(36) は (37) のような n 個の最も簡単な通常の Langevin 方程式の系に分解され，前者の解は後者の解の重ね合せで與えられる。ところがこれらの方程式の解は，それぞれ $e^{\lambda_j\tau}$ という相關函數をもつた単純 Markoff 過程であるから，これは結局 n 次元の Markoff 過程は n 個の単純 Markoff 過程の重ね合せであること，従つて任意の時系列はいくつかの単純 Markoff 過程の重ね合せとして近似されるということを意味している。予報値についても，1つの単純 Markoff 過程 $z_i(t)$ のそれは (29) で與えられ，$q(t)$ の予報値は (50) 或は (51) に

示されているように，それらの單なる重ね合せで與えられる。そこで $z_j'=\bar{c}_{1j}z_j$ を新しい變數として z_i のかわりに用いることにすれば，

$$\overline{q(t)}=\sum_j z_j'(0)e^{\lambda_j t} \qquad \ldots\ldots (52)$$

のようにかけるが，$\bar{c}_{1j}$ というような係數を計算しないで，直接に λ_j と初期値 $z_j'(0)$ とを求めてしまう方法を考える。(31) より，

$$z_j'=\bar{c}_{1j}=\int_0^\infty \bar{c}_{1j}\,p(t-t')\,e^{\lambda_j t'}\,dt' \qquad \ldots\ldots (53)$$

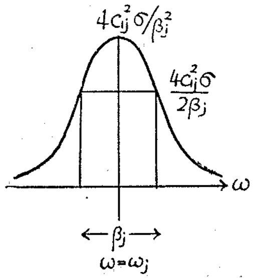
であるから，z_j' は

$$\frac{dz_j'}{dt}-\lambda_j z_j'=c_{1j}\,p(t) \qquad \ldots\ldots (54)$$

という Langevin 方程式の解と考えることができる。そのエネルギースペクトルは，(54) の兩邊を Fourier 變換してみればすぐわかるように，

$$A_j\ (\omega)=\frac{4\,c_{1j}{}^2\,\sigma}{\beta_j{}^2+4\,(\omega-\omega_j\,)^2} \qquad \ldots\ldots (55)$$

である。但し $-\beta_j/2$, ω_j はそれぞれ λ_j の實數部分と虚數部分である。このスペクトルは第4図のような，$\omega=\omega_j$ のところに極大をもち，β_j を半幅とする曲線である。ここで，おのおのの固有値 λ_j に對応する ω_j が，互に十分離れていて，各成分 z_j のエネルギースペクトルを並べて1つのグラフに描いた場合に，おのおのの曲線の裾が非常に僅かしか重なり合わないものとしよう。すなわち



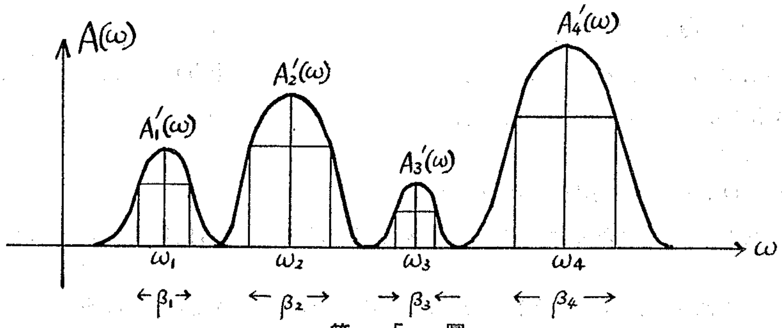
第 4 圖

$$A_j'(\omega)A_i'(\omega)\doteqdot 0 \qquad i\neq j \qquad \ldots (56)$$

とする。そうすると，もちろん振幅スペクトルの積も零であるから，それの Fourier 變換卽ち異なる成分 z_j 間の相關函數も零となる：

$$\overline{z_i'(t+\tau)\,z_j'(t)}\doteqdot 0\,. \qquad \ldots\ldots (57)$$

從つて $q=\Sigma_j z_j'$ の自己相關函數はそれぞれの z_j の自己相關函數 $c^2{}_{1j}e^{\lambda_j t}$ の和となり，そのエ



第 5 圖

ネルギースペクトル $A(\omega)$ は互に共通部分のない分離した第4図のような曲線の列となる（第5図)。このような場合には，観測された時系列からそのエネルギースペクトルを求めれば，そのおのおのの山の中心の位置と幅から固有値 λ_j が求まり，それらの固有値に応じた適当な移動平均をもとの時系列に對して行うことによつてそれぞれの成分時系列 z_j' が求まり，從つて初期値 $z_j'(0)$ が求められる。そうすれば (52) によつて予報値が直ちに求まることになるのである。z_j' の条件付分散は，今の場合の Langevin 方程式が (54) であることから，(30) 式で $i=j$ とおき，σ_{ij} を $c_{1j}{}^2\sigma$ でおきかえたもの，即ち

$$\overline{(z_j'-\bar{z}_j')^2}=-\frac{c_{1j}{}^2\sigma}{2\lambda_j}\left[1-e^{2\lambda_j t}\right] \qquad \text{......} (58)$$

で與えられる。係數 $c_{1j}{}^2\sigma$ はスペクトルのそれぞれの山の高さから直ちに計算されるから，これらの分散の和として與えられる q の予報精度も直ちに計算されることになる。

結局，このような場合には，予報をするためにいる主要な計算は與えられた時系列のエネルギースペクトルを求めることと，初期値 $z_j'(0)$ を求めるためにそれぞれの λ_j に相当する移動平均を行うことの2つに歸することになり，連立方程式をとくための複雑な計算は全く不要になるのである。ところが，實際に觀測された時系列のエネルギースペクトルを求めてみると，それが大体第5図のような山の列になつていることが非常に多いから，上のような一見粗雑な仮定も，あながち亂暴でもないと思われ，實際そういうスペクトルを適当な互に共通部分のない山の列とみなして上の計算を行つた結果は，かなり正確な予報値を與えているのである。これについてこまかいことは原論文を見られたい。*

ここでもう1つ問題になるのは，このようにして求めた λ_j が一般に複素數 $-\beta_j/2+i\omega_j$ になり，このため (58) 式によつて z_j の条件付分散も一般に複素數となることである。これは物理的にみて甚だ不合理であるが，次のように考えればすぐに解釋がつく。

これは最初の (36) 式を，(42) ないし (54) のような，最も簡単な Langevin 方程式に分解してしまつたために起つたのである。なぜならこの場合 Langevin 方程式の摩擦抵抗の項の係數 λ_j が複素數になつて，實際の物理系を記述する方程式であり得ないからである。この困難をさけるのには，スペクトルにおいてわれわれが問題にするのは正の振動數の部分だけであることに注意すればよい。λ_j は代數方程式 (38) の根であるから，實根即ち振動數零の成分を除けば，**必ず互に共軛な値が對になつて現われる筈である。それを $-\frac{1}{2}\beta\pm i\omega$，とすれば，これらの成分に相当するエネルギースペクトルはそれぞれ

$$\frac{4D}{\beta^2+4(\omega+\omega_1)^2},\quad \frac{4D}{\beta^2+4(\omega-\omega_1)^2} \qquad \text{......} (59)$$

（D は常數）である。ところがこの中前者は ω の負の値のところに極大をもつから，我々が實

* なお，この近似の意味は，多重予報の場合を考えるともつとはつきりしてくる。[6]

** これは小河原氏のいわゆる第1種持續性の場合に相当する。[2]

際に計算するスペクトルの中には入つてこない。ところがいま，

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\beta\frac{dy}{dt}+\omega_0{}^2y=p(t) \quad \text{...... (60)}$$

という二次の Langevin 方程式で記述される時系列を考え，これを前と同様にして2つの成分に分解すると，その各々に對する Langevin 方程式は

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt}-\lambda_1z_1&=p(t),\\ \frac{dz_2}{dt}-\lambda_2z_2&=p(t),\end{aligned}\right\} \quad \text{...... (61)}$$

但し，

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1=-\frac{1}{2}\beta-i\omega_1,\quad \lambda_2&=-\frac{1}{2}\beta+i\omega_1,\\ \omega_1{}^2&=\omega_0{}^2-\beta^2/4,\end{aligned}\right\} \quad \text{...... (62)}$$

になることが示される。[9] $\beta_1\omega_0{}^2$ は實數であるから，(60) は物理的な意味をもつている。即ち，互に共軛な λ の2つの値に對して，物理的に意味のある成分が1つ對応するのである。從つて我々の實際に測定するスペクトルの正の振動數の部分の1つの極大に丁度物理的に意味のある1つの Brown 運動が對応することになる。(60) は彈性力によつて束縛された粒子の Brown 運動の方程式であるから，いいかえれば，(36) によつて支配される一般の Brown 運動はいくつかの束縛粒子の Brown 運動の重ね合せと考えられるのである。

以上の議論によつて結局我々は，スペクトルの1つの極大に對応する成分を (60) という方程式によつて記述される Markoff 過程即ち束縛粒子の Brown 運動とみて，極大の位置とその幅とからその固有振動數 ω_0 と減幅常數 β とを計算し，(60) に對応する Fokker-Planck の方程式を解いて得られる[9] 平均値と分散

$$\overline{q(t)}=\frac{\dot{q}(0)}{\omega_1}e^{-\frac{1}{2}\beta t}\sin\omega_1t+\frac{q(0)\,e^{-\frac{1}{2}\beta t}}{\omega_1}\left(\omega_1\cos\omega_1t+\frac{\beta}{2}\sin\omega_1t\right), \quad \text{... (63)}$$

$$\overline{\left(q(t)-\overline{q(t)}\right)^2}$$
$$=\frac{D}{\beta}\left[1-\frac{1}{\omega_1{}^2}e^{-\beta t}\left(\omega_1{}^2+\frac{1}{2}\omega^2\sin^2\omega_1t-\beta\omega_1\sin\omega_1t\cos\omega_1t\right), \quad \text{... (64)}\right.$$

をそれどれの成分に對する予報値及びそれの誤差として採用すればよいことになる。初期値q(0), $\dot{q}(0)$ を求めるには前にのべたようにもとの時系列に適当な移動平均操作を加えてそれぞれの成分をとり出せばよいのである。

以上で，今堀の長期予報の理論と，その實際的方法との基礎的意味が明らかになつた。しかしながら，これを實際に応用するにあたつては，なおいろいろ難しい問題が起つてくる。たとえば，理論に出てくる自己相關函數なり，或はエネルギースペクトルなりは，すべて無限の過去から現

在までの観測値から計算されるものであるのに反して，現實に得られる時系列は有限な長さのものであつて，それから計算される相關函數或はエネルギースペクトルは近似的なものにすぎず，從つてこれを用いてなされる予報の正確度は理論値よりも更に減少するのであるが，この誤差の見つもり方，或はこのような場合のスペクトルの解釋の仕方の問題などがそれである。[4] このような問題を更立ち入つて研究しながら，實際への応用を進めてゆくこと，また上のような近似方法にたよらずに精度の大きな予報をするために，電子計算機を完成することが，今後の課題である。また同様な方法を多重予報（２つ以上の時系列を同時にとり扱う場合）に擴張すること，及び非定常な時系列の場合に對する理論或は實際的方法を研究することも重要な問題であるが，これらについては既に一応の結論が得られている。[4][5][6]

VI．脳波及び亂流の分析及び誘電体の異常分散に對する應用

最後に，脳波，音響，亂流及び誘電体に對する同じ考え方の応用について，簡単にのべておく。脳波や亂流も，やはり時間的に変化する統計的現象であつて，１種の時系列と考えられるから，予報の場合と全く同じ方法がその分析に応用されるのは当然のことである。ただこれらの場合には，脳波として現われてくる電圧或はでたらめに変化している風速というようなものが，將来どんな値をとるかということが問題になるのではなくて，これらの現象を支配している物理法則，いいかえればこういう現象の現われる機構が一体どんなものであるかということを研究するのが目的となるだけである。前にのべたように，上の理論においてはいずれも，観測される時系列はあるきまつた構造，特性をもつた物理系が，完全にでたらめな外力によつてかきみだされた結果現われるものであると考えて，その物理系の特性を或は $Z(\omega)$ というような特性函數として，或は定差方程式や微分方程式の係數として，求めようとする。フイルター $Z(\omega)$ とか，定差または微分方程式というものは完全に因果的な物理法則を表わすものであるから，これはいいかえれば，観測された現象から，われわれにはその原因のわからない完全にでたらめな要素をとり去つて，その現象を支配する完全に因果的な物理法則をさぐり出そうということにほかならない。この完全に因果的なものというのが數学的にフイルターないし方程式として表わされ，完全にでたらめなものというのが白色雜音なり random force によつて象徴されているのであり，相關函數やエネルギースペクトルを求めるということは，観測された現象から完全にでたらめな部分を消去するということである。（たとえば相關函數が random force を零とおいた方程式を満足するということは，これがでたらめな外力の影響をのぞいた平均的な運動を表わすということであつて，相關函數を求めるということは観測された時系列からでたらめな部分を消して因果的な部分をとり出すということである。* またエネルギースペクトルを求めるということも，全くでたらめな変化を受けている位相部分を消去して，因果的な部分だけをとり出すということであつて．フイルターの物理的に意味のある特性，或は方程式の係數が相關函數或はエネルギースペクトルのみから定まるのは当然のことなのである。）** 從つて，上にのべた方法が，

予報ばかりでなく，一般に統計的な現象の機構を探るという目的にそのまま用いられることは，容易に理解されるのである。

大脳皮質或は頭蓋の上に2つの電極をあてると，その間に50μV以下の程度の電位差があらわれ，時間的に絶えず不規則な律動的動搖を示す。これを増幅器によつて擴大して記錄すると，不規則に變動する曲線が得られるが，これを脳波とよんでいる。この中にどんな周波數の波が含まれているかは，大体視察によつて見当がつくのであるが，その中最も普通に現われる8～13サイクルの波を α 波，それより周波數の大きいものを β 波，γ 波などと名づけて分類している。[11)12)] しかしながら，これらの周波數や，その時間的変化から，脳波の発生機構をさぐるためには，このような粗雑な方法では極めて不十分であつて，どういう成分がどの程度に含まれているかということを客観的にくらべることがぜひとも必要になる。この脳波の統計的なとり扱いは本川その他によつて早くから行われており，特に佐藤は α 波がその振幅と位相がでたらめに変化するいくつかの周波數の正弦波からなつていることを仮定して，その振幅分布に對して實験結果と非常によく合致する結果を得，またそれから α 波は2つないし3つの素波からなつていることを結論した。[11)12)] しかしながら上に示したように，最も一般的な時系列は，定差方程式或は微分方程式によつて支配される物理系が，刻々でたらめに変化する外力によつてかきみだされて生ずるもの，即ち時々刻々にその振幅と位相とがでたらめに変化する，これらの方程式の基準解の重ね合せと考えられなければならない。ところがこれらの基準解の固有値 λ_j は一般に複素數であるから，これらは一般に減衰振動であつて，純粋な正弦波でない。したがつて，上の仮定は，一般的な見地からはなお不満足なものとなるのである。

今堀と壽原は，前にのべた時系列解析の一般論を適用し，Wold-小河原の理論におけると同様な自已相關函數の方法によつて脳波を分析し，それを支配するLangevin方程式を求めることによつて α 波が正弦波の重ね合せでなくて，いくつかの非周期振動と減衰振動の重ね合せであ

---

* 平均的な運動は，外力のない場合の運動であるから，いわゆる自由振動にほかならない。これは一般にn個の減幅振動或は基準振動（特別の場合として純粋な正弦運動を含む）の重なり合つたものである。V節にのべたことからわかるように，それらの振動数と減幅常数は，(60)の ω_0 及び β と同じである。いいかえれば，1つの物理的に意味のある最も簡単なMarkoff過程は，でたらめな外力のない場合の1つの成分減幅振動即ち基準振動に対応するのである。このことからMarkoff過程が一般の確率過程論において基本的な役割を演ずる理由が明かになる。

** 時系列の解析に限らず，すべての統計的推理はこのような論理にもとづいている。最も簡単な例をあげれば，ばらついた観測値の平均をとるという操作も，全くでたらめな偶然的誤差を消去して，因果的ないわゆる“真の値”を求めるということであり，一般の推測統計学や実験計画法といわれるものもいかにして偶然的な要因を合理的に消去して，知ろうとする意味のある対象に関する知識を最も能率的にとり出すかということを目的とするのである。通信理論（information theory）というのはこの考えをもつと一般化してあらゆる科学或は技術の分野に及ぼしたものであつて，一般にいかにして偶然的変動にうち勝つて意味のある知識を対象からとり出し，またそれを伝達するかということを研究するのである。この意味で予報理論と推計学とは一般的合理的な通信理論の1部と考えられるのである。

ることを明らかにし，脳波の客観的な研究の基礎を與えたのであるが，[10][11]* これを更におし進め，佐藤の方法をより一般化して，この見地から振幅分布を求めることが重要な問題として殘されている。[14] 今堀－壽原の分析はだいたい１つのサンプルについて行われたものであるが，振幅分布を求めることは，多くのサンプルから知識をひき出すことに相当するから，これによつて α 波の構成要素に對する更に精密な知識が得られ，その生理学的な発生機構をさぐる上に重要な鍵を與えることが期待される。[14]

音響学においても，たとえばささやきの母音のように，その発生機構から考えて不規則な振動によつて起されるとみなされる音に對しては，その機構を明らかにする上にやはり同じような統計的方法が有効な役割を演ずることが予想されるが，實際このような解析が小林によつて行われ，興味ある結果が得られた。[15] ささやき母音は，口腔やその附属管腔等から作られる振動系に，全く不規則な外力即ち呼気がはたらいて発せられるものと考えられるのであるが，上の一般化された Langevin 方程式の $p(t)$ がこの外力であり，$p(t)$ を零とおくとできる方程式が外力のない場合にこの振動系を記述する方程式であると考えることができる。從つて上と同じ方法でささやき母音の自己相關函数ないしエネルギースペクトルを解析して方程式の係數或は固有値 λ_j を求めると，この振動系の自由振動の形並にこれを作つている基準振動の數やその固有振動數及び減幅常數が求められる。このおのおのの基準振動が，１つずついわゆるフオルマントに對応するのであるが，それぞれのフオルマントに對して模型的に１つずつの共鳴器を考えた場合にこれらの共鳴器の性質がこれでわかることになる。これらの各共鳴器が発声にあずかる口腔及び附属管腔のどの部分に對応するかを見出すのが，音響生理学の窮極の目的なのであるが，そのためにはまずこのようにして客観的に各共鳴器の固有常數を求めることが，脳波の構成要素を客観的に求めることがその発生機構をさぐるのに是非必要であるのと同様に，是非必要なのであつて，これによつて音声の発生機構をさぐる上の極めて有力な手がかりが與えられるのである。

大気の亂流現象が，種々の気象学，海洋学的な問題，或は産業上の實際問題において重要な役割を演ずることはいうまでもない。ところが，それの理論的なとり扱いは，非常に理想的な，たとえば一様で等方性をもつた空間における亂流といつたような場合に限られている。最近井上等

---

* 基本方程式 (36) は，次のような演算子方程式とみることもできる：

$$L\{q(t)\}=p(t), \qquad \text{(B)}$$

但し演算子 L は

$$L=\frac{d^n}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\dots\quad+a_1\frac{d}{dt}+a_0 \qquad \text{(C)}$$

という微分演算子である。即ち觀測された時系列からそれを支配する Langevin 方程式を求めることは，いいかえれば $q(t)$ に作用してこれを random force $p(t)$ に變換するような線形微分演算子 L を求めることであるともいえる。文献 (10) では，この觀点を中心にして議論が進められているが，いずれにしても本質は同一のものであることはいうまでもない。後にのべる誘電体のとり扱いの場合には，演算子的な考え方がより直観的な意味をもつてくる。

によつて非等方性亂流場に對する理論が著しく發達してきたけれども，實際上非常に問題となるのは，もつと複雑な空間の中の亂流，たとえば障害物のある地上を吹く風の亂れとか，林の中を吹きぬける風の亂れの性質であつて，このような場合に對しては現存する理論は殆ど無力といつて差支えない。それは，これらの理論の基礎となつている流体力学のいわゆる Navier-Stokes の方程式が非線型であつて，複雑な境界条件の下でのとり扱いが非常に困難なためである。したがつて，少くとも現在では，このような複雑な空間における亂流現象の機構や性質を明らかにするためには，流体力学の方程式による正攻法をあきらめて實際にこのようなところで観測された亂流現象を分析して，その発生機構を支配する物理法則を，たとえば線形微分方程式のようなもので形式的に表現するほかないのである。ところが亂流現象も１つの統計的な現象であつて，それを観測した結果（たとえばある地点における風速の時間的変動）は１つの時系列であるから，このために上にのべた一般の時系列解析法を適用することができることは想像に難くない。今堀は低温科学研究所に課せられた共同研究課題である防霧林の効果の問題をとり扱うのにさいして，林の防霧機構に對しては亂流による霧粒の擴散が非常に重要な役割を演ずることに着目し，そのためには林の周邊における亂流の性質を研究する必要があることを強調して，これに上にのべたような時系列論を応用することに着手した。[16)17)18)19)] ただこの場合には，擴散が問題となるのであるから，風速そのものの変動よりも，むしろ擴散されるものをはこぶ空気の分子の位置が時間的にどう変つてゆくかが問題となる。空気の分子の位置の時間的変化を時系列と考えた場合に，それが定常時系列としてとり扱われ得るためには，それがある平均値を中心として上下にいつまでも同じ程度に動揺していることが必要であつて，もし分子の位置があちこちと移動しながら結局無限に遠くまでいつてしまうならば，これは不可能である。實際，分子の位置の変化に對して上にのべたような理論を適用するということは，分子が一般化された Langevin 方程式によつて記述される Brown 運動を行つていると考えることにほかならない。ところが上にのべたように，この Brown 運動は結局いくつかの (60) のような Langevin 方程式によつて記述される，弾力性によつて束縛された粒子の Brown 運動の重ね合せとして表わされる。このことは，この粒子が無限に遠くまでは決して擴散していないことを意味するのである。今堀は，實際に観測された風速の変動を詳細に吟味して，平均流を除いた亂流の場では，分子が無限の遠くまで逃げていつてしまうことはないということを結論して，分子の位置の変動に對して時系列解析の方法を適用することの妥当性をたしかめ，更に巨視的な擴散係数と，亂流を解析した結果得られる１つ１つの要素 Brown 運動の特性常數即ち Langevin 方程式 (66) の係數との關係を導いたのである。[17)19)] 實際に観測した亂流をこの方法で分析して，擴散係数を計算することは，1951年度の落石における観測で實行されたが，[20)] 今後さらに研究をつゞけて，一様でない空間における亂流の構造を明らかにすることが望ましい。

最後に，これは統計的な現象ではないが，同じ考え方の１つの応用として，今堀が誘電体の異

常分散の機構を解明するために提案した分析方法について，簡単にのべておこう。[21]

誘電物質の電媒常数は，よく知られているように，変位ベクトル D と，電場の強さ E とを結びつける関係

$$D = \varepsilon E \qquad \cdots\cdots (65)$$

によつて定義される。誘電体が分散性をもつということは，この ε がこれに加えられる電圧の周波数 ε によつて変化することで，くわしくいえば周波数 ε の定常的電場 $Ee^{i\omega t}$ によつて変位 $De^{i\omega t}$ を生じたとき，

$$\varepsilon(\omega) = \frac{D}{E} \qquad \cdots\cdots (66)$$

が ω の函数になる場合である。このような場合には，任意の時間的変化をなす電場に對してはもはや (65) のような関係は存在しない。實際 (66) を

$$D(\omega) = \varepsilon(\omega) E(\omega) \qquad \cdots\cdots (67)$$

という形にかき直して，兩邊を Fourier 変換すると，

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t-t') \varepsilon(t') \, dt \qquad \cdots\cdots (68)$$

となつて，(65) のような簡單な関係は現れてこない。即ちこのような場合には，(5) 式と比べてみればわかるように，変位 D は電場 E に對して，ある線形演算子が作用した結果現れるものと考えなければならない。いいかえればこの場合の電媒常数は單なる常数でなくて1つの演算子として考えなければならないのである。從つてまた予報理論の場合と同じように，D は $\varepsilon(\omega)$ で表される特性をもつた物理系の，E という外力に對する応答であると考えることができる。*

誘電体の分散がどのような分子論的機構によつて起るのかということについては，有名な Debye の理論があり，事實をかなりよく説明し，またその機構に関して非常に直観的なイメージを與えてくれる。しかしながらこの理論はすべての場合に嚴密にはあてはまらないのであつて，それを修正するためにいろいろの試みが行われているが，決定的な段階には達していない。これは誘電体の構造が複雑であつて，從つてその内部で起つている分子現象も非常に複雑なものだからである。從つて，Debye その他のやり方のように，まずもつともらしい仮設から出發して理論的に計算を行い，その結果を實験と比較する方法とは別に，観測された事實を分析してそれから歸納して適當な模型を考えることが重要となつてくるのでるある。前節の結果から，これが時系列の解析と全く同様にとり扱われ得ることは明かであろう。即ち

$$a_0 \frac{d^n D}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} D}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots \qquad + a_n D = E \qquad \cdots\cdots (69)$$

という微分方程式がなりたつと考えて（即ち D は (69) の右邊を零とおいた微分方程式で記述

※ 48頁の脚註を見よ。

される物理系の外力 E に對する応答であると考えて)，これの係数 a_i を求めればよい。前と同様にしてこの方程式はいくつかの (60) の右邊を零とおいた形の，減衰振動系を表す2階の微分方程式に分解されるから，この物理系はこのような減衰振動系即ち基準振動系のくみ合せとして解釋される。そのおのおのの基準振動系に對して適当な分子論的機構を考えることは，比較的容易であろう。

(69) の兩邊を Fourier 変換すると，

$$\left(a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots \quad a_n \right) D(\omega) = E(\omega) \qquad \dots\dots (70)$$

となる。即ち

$$\varepsilon\,(\omega) = a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots \quad + a_0 \ . \qquad \dots\dots (71)$$

即ちこの方法を實際に行うのには，誘電体にいろいろの周波数の定常交番電場をかけることによつて ω の函数として測定された電媒常数を，$i\omega$ の巾級数に展開すればよいのであつて，そのときの係数が即ち (69) の係数を與えるのである。

VII. むすび

以上で，広く各方面にわたつて分散しているかのように見える今堀教授の諸業績が，いかにただ1つの原理につらぬかれた統一のある考えの下で展開されていたかということが，大体明かになつたと思う。誘電体への応用に関してのべたことから，この方法が統計的現象に對してだけ用いられるものでなく，もつと一般的な意味をもつたものであることも明かになつたと思うが，今までのべたことに限らず，もつといろいろなあらゆる方面の現象に對して，この考え方が有用な研究方法を提供するのであろうことも容易に推察される。

韮才のため或はあやまりや誤解をおかして，今堀教授の業績を傷つける結果になつていることをおそれる次第であるが，それはひとえに筆者の責任であつて，御指摘御教示を賜われば幸である。この稿をかくことをすすめられた低温科学研究所員の方々，とくに草稿をよんでいろいろ御批評を賜わつた石田，瀬川，田畑，小林，今井の諸研究員に對してあつく感謝の意を表する。

文　　献

1) Wiener N. 1949 Extapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, John Wiley and Sons, Inc., New York.

2) 小河原正巳　応用統計学　第7章.

3) Imahori K. and Kobayashi T. 1951 On the Long-Period Forecasting by Means of Harmonic Analysis. Jour. Met. Soc. Japan, 29, 366; 同上邦訳，低温科学，9，4.

4) 今堀克巳　調和解析による長期予報，I，II．予報研究ノート2,5号,3,2号 及び 低温科学 9,21, 33.

5) 堀 淳一，小林禎作 1952 非定常時系列の予報について．低温科学，9，83.

6) 堀 淳一，小林禎作 1952 多重予報に就いて．低温科学，9，93.

7) Bode H.W. and Shannon C.E. 1950 A Simplified Derivation of Linear Least Square Smoothing and Prediction Theory. Proc. I.R.E. 38, 417.

8) Hori J. 1952 On the Generalization of the Brownian Motion for the Case of Distributed Statistical Phenomena. Contrib. from the Inst. Low Temp. Sci., No.3.

9) Wang M.C. and Uhlenbeck G.E. 1945 On the Theory of the Brownian Motion II. Rev. Mod. Phys. 17, 334.

10) Imahori K. and Suhara K. 1949 On the Statistical Method in the Brain-Wave Study. Part I. Folia Psych. et Neur. Japan. 3, No.2, 137−155.

11) 今堀克巳，諏原健吉 1947 脳波における統計的方法に就いて．科学，17，2号.

12) 佐藤謙助 1951 脳波の統計論概説．脳神経領域，第10，11冊.

13) 佐藤謙助 1950−1951 脳波の発生機序に関する統計論的研究．新潟医学会誌第64年第5号.

14) 今堀克巳，佐藤謙助 脳波の構成要素に就いて．未完成，未発表.

15) 小林禎作 ささやき母音の音響分析に就いて．生体の科学.

16) 今堀克巳，堀 淳一 1950 林の周辺における亂流．防霧林に関する研究，1，117−128.

17) 今堀克巳 1950 亂流による拡散に就いて．防霧林に関する研究，1，107−116.

18) 今堀克巳 1951 移流霧の消散機構と森林の防霧作用について．防霧林に関する研究，2，121−142.

19) Imahori K. and Hori J. 1950 On the Diffusion by Turbulent Motion. Jour. Met. Soc. Japan, 29, 327−335.

20) 石田 完，楠 宏，浅田 宏，今井秀雄 1951 亂流の測定及びその分析．防霧林に関する研究，2，259.

21) 今堀克巳 1949 誘電体の異常分散に就いて．応用電気研究所彙報，1，10.