



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	調和解析による長期予報 (III)
Author(s)	小林, 禎作; KOBAYASHI, Teisaku
Citation	低温科学, 9, 69-82
Issue Date	1952-12-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/17523
Type	departmental bulletin paper
File Information	9_p69-82.pdf



調和解析による長期豫報 (III)*

小林 禎 作

(低温科学研究所 気象学部門)

(昭和27年8月受理)

I. 緒 言

予報理論並びにその計算の具体的方法は、既に前稿一「調和解析による長期予報(その1),¹⁾(その2)²⁾」及び「On the Long Period Forecasting by Means of Harmonic Analysis (I)」³⁾—以下「I」〔II〕〔I〕として参照する—に於て詳しく述べられているが、本稿ではこの方法に基いて、今日まで実際に得られた札幌月平均気温の予想と、その實況とを比較し、その成果を検討すると共に、更に考察を加えた二三の点につき述べようと思う。

II. 時系列の分解と豫報のための初期値の決定

予報を行うに当つては、先づ與えられた時系列を適当な数の成分に分け、その各々が母系列の基準振動を一つ宛含むようにする。この場合、夫々の成分については、調和振動子の Brown 運動の式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= p(t), \\ \overline{p(t')p(t'')} &= 2D\delta(t'-t'') \end{aligned} \right\} \dots\dots (2,1)$$

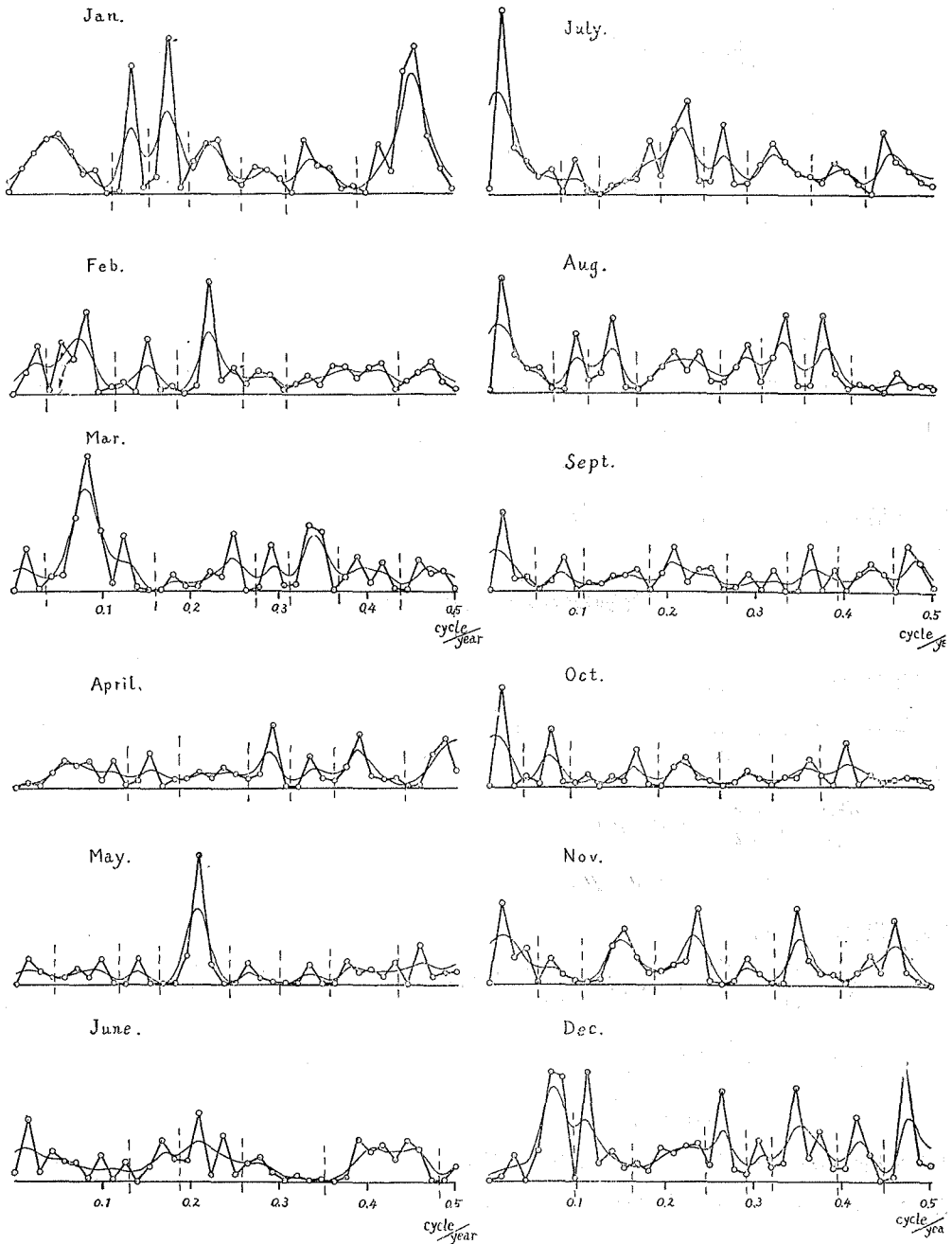
が適用出来、この解は

$$\begin{aligned} X &= \frac{X_0}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta t} \sin \omega_1 t + \frac{X_0}{\omega_1} e^{-\frac{1}{2}\beta t} \left(\omega_1 \cos \omega_1 t + \frac{\beta}{2} \sin \omega_1 t \right), \\ \overline{(X-X)^2} &= \frac{D}{\beta} \left[1 - \frac{1}{\omega_1^2} e^{-\beta t} \left(\omega_1^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \sin^2 \omega_1 t - \beta \omega_1 t \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t \right) \right], \\ \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \beta^2 / 4 \end{aligned} \dots\dots (2,2)$$

として與えられ、最後にこれらを重疊するのであるが、この基準振動を推定するのに調和解析によつて求めた母系列の周波数スペクトルを用いるのである。

* 北海道大学低温科学研究所業績 第149号.

第1図には72項調和分析(1778-1949年)を用いた月別の札幌平均気温-累年平均値偏差-の周波数スペクトルを掲げた。各スペクトル曲線は適当に平滑化されて、縦の破線によつて6乃至



第1圖 札幌月別平均気温の周波数スペクトル

8個の成分に分けられ、夫々の基準振動の周波数及び減衰定数が求められるが、求め方の相違から起るこれらの値の変動は、結果に大きな影響を及ぼすことはなく、視察によるもので充分目的は達せられる。

最も重要な問題は、上述の様な分解に従つて (2,2) の計算を行うに必要の初期値 X_0, \dot{X}_0 を決定する方法如何であるが、詳細は [II] § 6 にあるのでここには繰返ささない。調和分析の結果をそのまま逆に合成する方法、即ち例えば、母系列を適当な成分

$$X_R = X_{R'} + X_{R''} + \dots + X_R^{(M)} \quad \dots (2,3)$$

に分け、その一つ $X_R^{(n)}$ を取り出すと、

$$X_R^{(n)} = \sum_{m=n_1}^{n_2} \left(A_m \cos \frac{2\pi m}{N} R + B_m \sin \frac{2\pi m}{N} R \right) \quad \dots (2,4)$$

但し

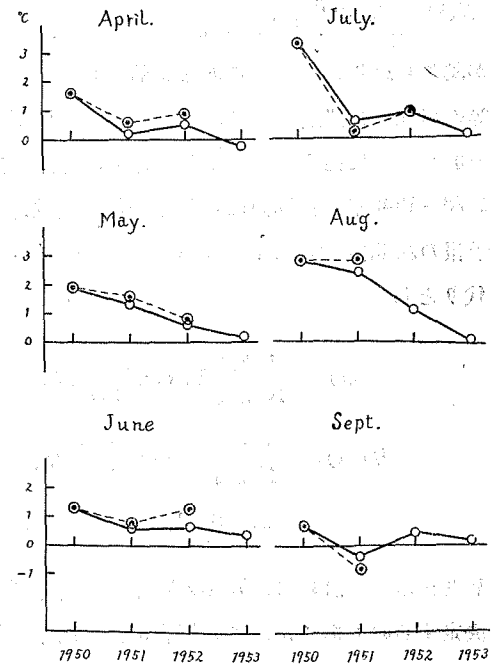
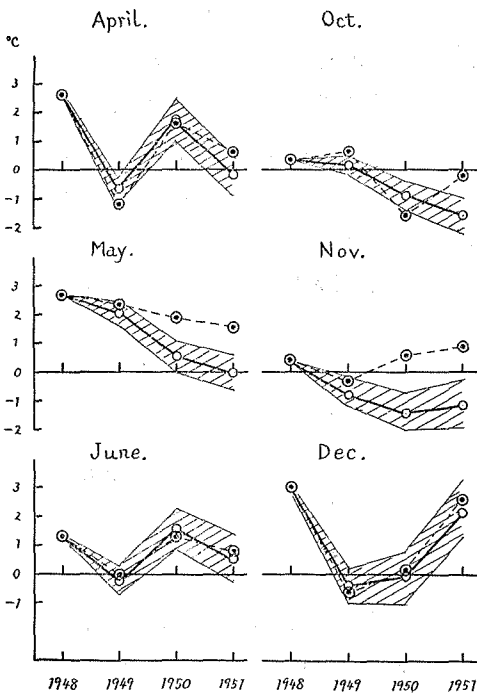
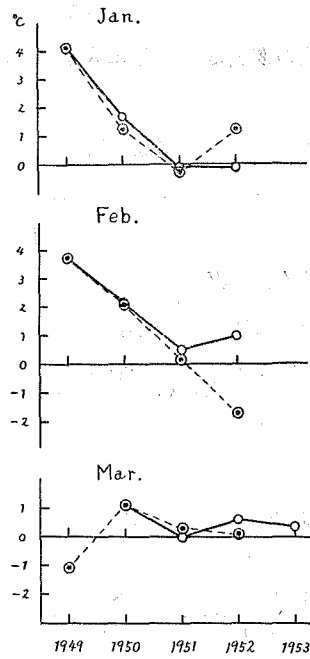
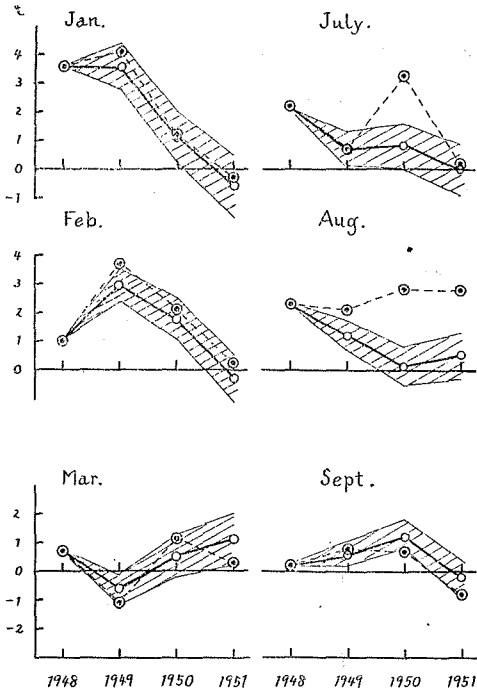
$$\left. \begin{aligned} A_m &= \frac{2}{N} \sum_{R=0}^{N-1} X_R \cos \frac{2\pi m}{N} R, \\ B_m &= \frac{2}{N} \sum_{R=0}^{N-1} X_R \sin \frac{2\pi m}{N} R \end{aligned} \right\} \quad \dots (2,5)$$

の如く表わされるが、この時 $R=N-1$ とおいたものが (2,2) 式の X_0 であり、 X_0 としては $\frac{X_N^{(n)} - X_{N-2}^{(n)}}{2}$ を用いる。この方法によると、予報値が時系列の単なる繰返しになるという傾向が認められるが、このことは前稿 [II] にある通り必ずしも無意味ではないと考えられる。筆者等の研究の初段階に於ては、この方法—以下 [A] の方法という—による初期値が用いられたのであつて次に第1図に基く札幌月平均気温—偏差—の予想と實況とを第2図に示す。分析区間は1878—1949年、初期値は1948年の値、斜線部分は予想誤差である。

予報の初期値 X_0, \dot{X}_0 に對する時系列の初めの部分の影響を除くには (2,4), (2,5) の分解の代りとし

$$\left. \begin{aligned} A(m) &= \frac{1}{N} \sum_{R=0}^{N-1} X_R \cos \frac{2\pi m}{2N} R, \\ B(m) &= \frac{1}{N} \sum_{R=0}^{N-1} X_R \sin \frac{2\pi m}{2N} R, \\ m &= 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \right\} \quad \dots (2,6)$$

を考える。これには、72項の時系列の前半36項を0とおいて調和分析を行い、これから初期値を決定するのであるが、この場合には、前半の値を0とおいたことから容易に想像される様に、予報値が0—平均値—に近づく傾向がある。この方法を [B] として同じく月別の気温予想と實況とを第3圖に示した。第4圖も [B] による1951年度の札幌月平均気温—偏差—の逐月予想 (分析: 1945年3月~1951年2月) であり、気温予想として可成り良い成績と云えようが、又予報値



—○— 観測値
- - -○- - 予報値

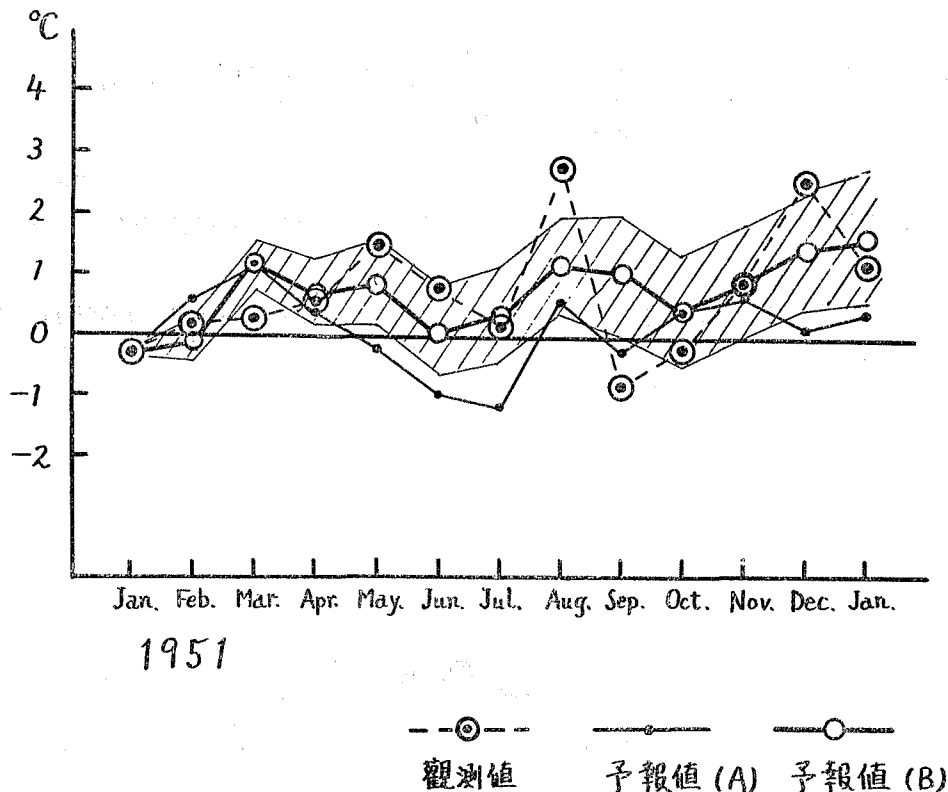
—○— 観測値
- - -○- - 予報値

第 2 圖

第 3 圖

第 2 圖及び第 3 圖 札幌月平均気温の予想

の平均値へ近づく傾向もよく認められるところである。*



第4圖 札幌月平均気温の予想

次にこの「予報値が平均値に近づく傾向」を避けるため、時系列の分解として(2,6)を變形し、

$$A(m) = \frac{2}{N+\alpha} \sum_{R=0}^{N-1} X_R \cos \frac{2\pi m}{N+\alpha} (R+\alpha),$$

$$B(m) = \frac{2}{N+\alpha} \sum_{R=0}^{N-1} X_R \sin \frac{2\pi m}{N+\alpha} (R+\alpha),$$

但し $m=0, 1, 2, \dots, \frac{N+\alpha}{2},$

$\alpha =$ 求むべき豫報値の項数 $\dots (2,7)$

を考える。これは N 項の時系列 X_R の前に α 個の 0 を加えて $N+\alpha$ 項の調和分析を行うことに相当し、一以下この方法を [C] という一 (實際の計算には72項の時系列の中、最初の α だけを 0 とおく) この場合 [II] の (15) は

* 本稿に掲げた図表中、縦軸の 0 としては1878年-1949年の各月平均気温の累年平均値を用いた。従つて第4図の分析区間1945年-1951年に就いての累年平均は 1.1°C になる。尙同図には [A] の方法による予想をも掲げた。

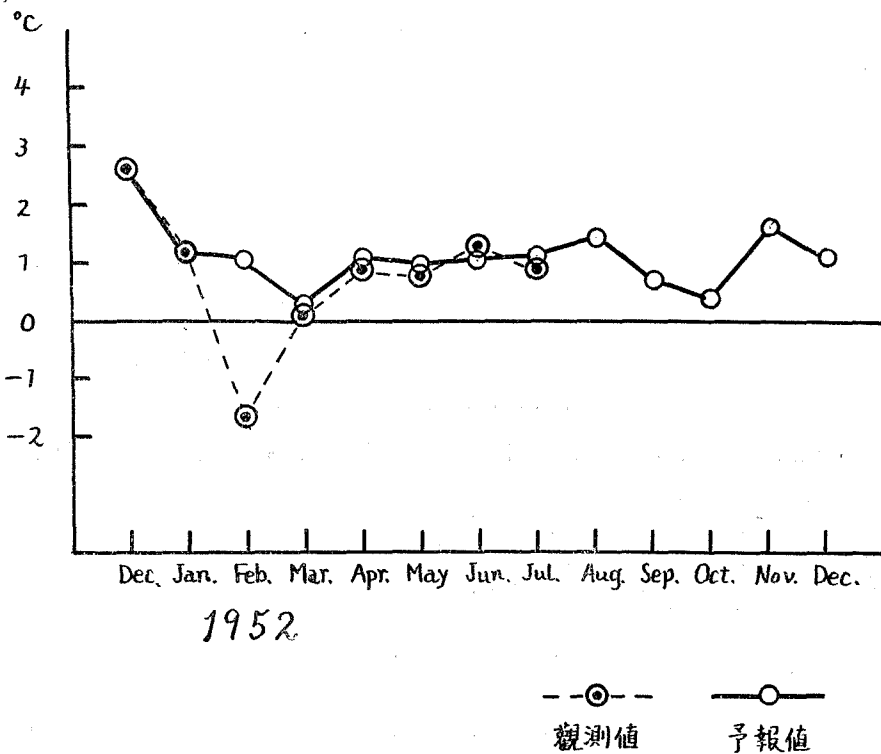
$$X_R^{(m)} = \sum_{i=0}^{N+a-1} K_i X_i,$$

$$K_i = \frac{2}{N+a} \frac{\sin \pi \frac{(n_2 - n_1)}{N+a} (i - R - a)}{\sin \frac{\pi}{N+a} (i - R - a)} \cos \frac{\pi (n_2 - n_1 - 1)}{N+a} (i - R - a)$$

..... (2,8)

であつて、 $X_R^{(m)}$ に対する時系列の初めの部分 $i = (R+a) - N$ 附近の貢献を少く、又予報が平均値に近づくことも少くし得る。

第5圖は1948年、2月—1951年、1月の分析を用いた、この方法〔C〕による1952年度の札幌月平均気温の逐月予想と實況とである。



第5圖 札幌月平均気温の予想

次にある區間に亘つて調和分析を求めて予報を行い、更に又區間をずらして新しい初期條件の下に予報を行おうとする場合、その區間のずれが分析區間に比して小さい時には、そのエネルギースペクトルはもとと同一と假定しても、その位相は次々と變つて行つているので、新しい初期條件を知るためには、矢張 (2,5) 乃至 (2,7) の $A(m)$, $B(m)$ を計算し直さなければならない。

又このずれが相當に大きい時には、時系列の長期傾向の如きも當然考慮に入れなければならず、次の區間に、もとと同一のスペクトルを假定することも許されなくなる。この際、新しい區間について調和分析をやり直すのは非常な手數であるが、これには次の様にして簡単に求められる。

即ち $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{r-1}, (y_0)$

なる等時間隔の時系列に調和分析を行つて

$$\left. \begin{array}{l} A_{\nu}^{(0)} \\ B_{\nu}^{(0)} \end{array} \right\} = \frac{2}{r} \sum_{\rho=0}^{r-1} y_{\rho} \begin{array}{l} \cos \nu \\ \sin \nu \end{array}, \frac{\rho 2\pi}{r} \quad \dots (2,9)$$

が求められている場合、 $m < \frac{r}{2}$ なる m 時間隔だけずれた系列

$y_m, y_{m+1}, \dots, y_{r+m-1}, (y_m)$

の有するフーリエ係数を $A_{\nu}^{(m)}, B_{\nu}^{(m)}$ とすれば

$$\left. \begin{array}{l} A_{\nu}^{(m)} \\ B_{\nu}^{(m)} \end{array} \right\} = \frac{A_{\nu}^{(0)}}{B_{\nu}^{(0)}} \cos \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} \pm \frac{B_{\nu}^{(0)}}{A_{\nu}^{(0)}} \sin \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} \\ + \frac{2}{r} \left\{ \Delta y_r \cos \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} + \dots + \Delta y_{r+m+1} \sin \nu \frac{2\pi}{r} \right\}$$

但し

$$y_r = y_0 + \Delta y, \quad y_{r+1} = y_1 + \Delta y_{r+1} \quad \dots (2,10)$$

と與えられる。*

III. “中田”の方法による時系列の分解

時系列の分解の方法としては、以上の他に色々考えられようが、主として前節〔A〕の方法による欠點を検討する立場から、“中田”の方法を適用した例について述べる。

周期の長さ及び振幅が、時間と共に多少變化する周期的變化を分析する方法として、中田氏の發表されたものがあるが、⁽⁴⁾ これは、等間隔 τ の時系列を次の様に表わし

$$X_n = F(n\tau) + f(n\tau) \sin \frac{2\pi}{T(n\tau)} (n\tau + \theta).$$

但し第1項は第2項に比し相當長い周期の變化か又は非周期變化とし、且

$$\left. \begin{array}{l} 2F(n\tau) = F((n-1)\tau) + F((n+1)\tau), \\ f((n-1)\tau) = f(n\tau) = f((n+1)\tau), \\ T((n-1)\tau) = T(n\tau) = T((n+1)\tau). \end{array} \right\} \quad \dots (3,1)$$

これに $\tau = \frac{T(n\tau)}{2}$ とおいて一種の移動平均

* 補遺参照

$$\left. \begin{aligned} S &= (2X_n - X_{n-1} - X_{n+1}) / 4, \\ L &= (2X_n + X_{n-1} + X_{n+1}) / 4 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3,2)$$

を行い

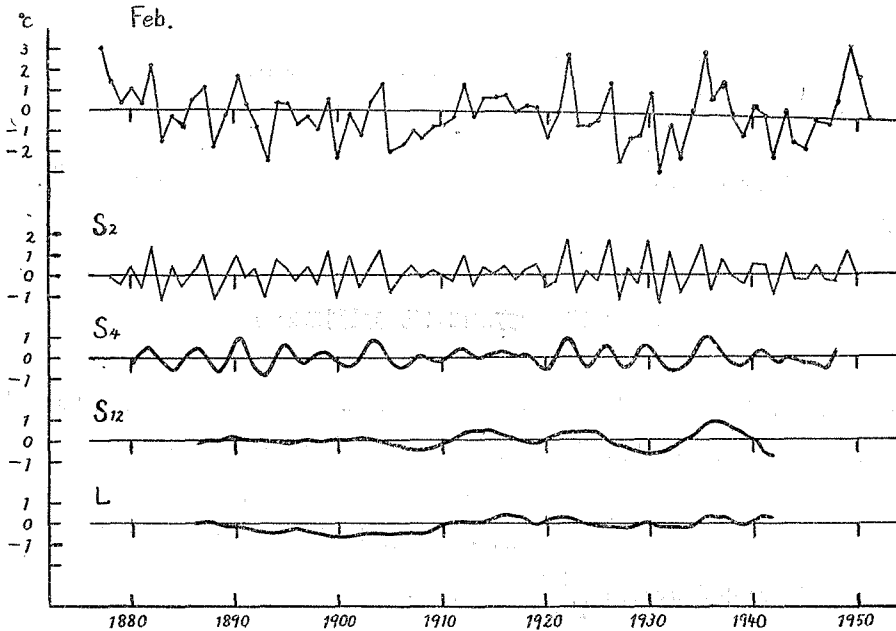
$$S = f(n\tau) \sin \frac{2\pi}{T(n\tau)} (n\tau + Q)$$

$$L = F(n\tau)$$

を抽出するものである。

そこで先ず気温の變化圖から、直接視察によつて最短の周期 T を見出して S を抽出し、更に $X_n - S_n$ の系列につき同様の操作を繰返し行うのであるが、札幌2月の月平均気温—偏差—の經年變化及び、2年、3年、4年、12を周期とする S_2, S_4, S_{12} 、及び $L_n = X_n - (S_{2,n} + S_{4,n} + S_{12,n})$ を描くと第6圖の通りである。

圖から明らかな様に、こうして分離した系列にも尙可成りの變動があり、これからその平均の



第6圖 札幌2月の平均気温の經年變化と、“中田”の方法によるその分解

周期及び減衰率を求めるため自己相関係数を計算すると、

$$X(\tau) = \frac{[X(\tau)X(t+\tau)]_t}{[X(t)^2]_t} X_0 \dots\dots (3,3)$$

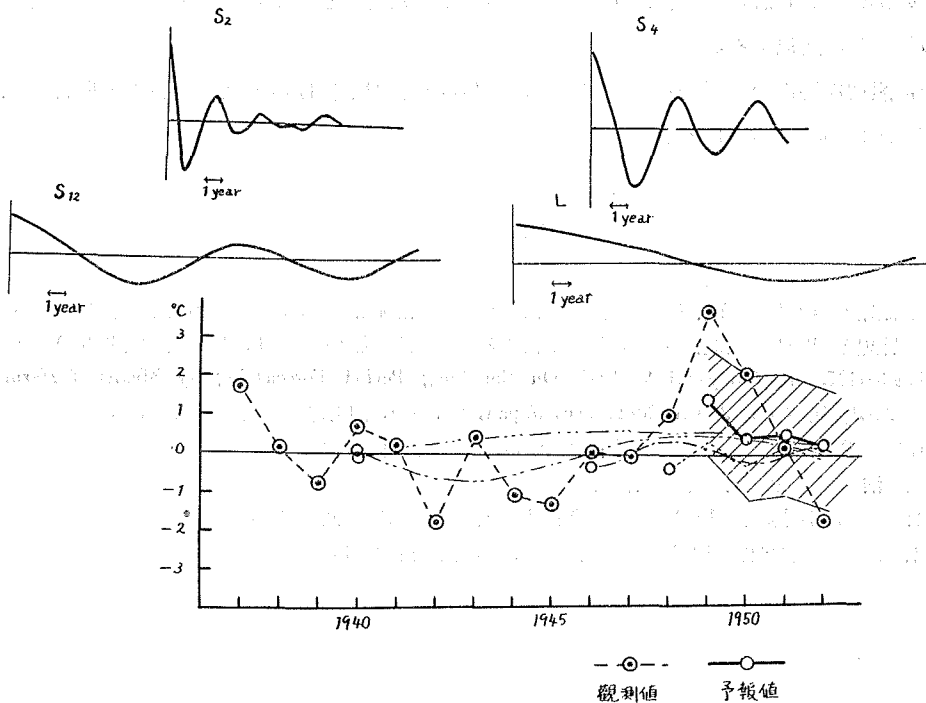
[]_t は t についての平均を表わす

は全く不規則な外力が働く振動系で、初期條件が與えられた場合の、 τ 時間後の平均の運動を表わすから、これにより最小自乗法を用い定差方程式

$$r(t+2\tau) + a_1 r(t+\tau) + a_2 r(t) = 0$$

を解いて周期 $\left(= \frac{2\pi}{\omega} \right)$, 及び減衰率 $\delta \left(= \frac{\beta}{2} \right)$ を求めればよい。

以上によつて得た基準振動から (2,2) を適用して予報を行うのに、初期値としては、 S_2, S_4, S_{12}, L の各系について夫々最後から 2 番目の値を使うが、移動平均の結果、周期の長いもの程もとの時系列に比して末端が打切られるので、同一時点の予報に当つても、長周期の系列程長時間先の予測をしなければならなくなり、従つて、前節の方法に較べて区間の繰返しの影響は除かれるにしても、誤差 (分散) は甚しく大きくなり、予報値が平均値に近づくことも免れられなくなる。



第7圖 “中田” の方法による各要素波の基準振動形と、それによる予想

第7図は札幌2月の月平均気温を予想した例であるが、 S_2, S_4, S_{12}, L の各系の初期値は夫々1948, 1946, 1940, 1940年である。

VI. 摘 要

以上札幌の月平均気温を対象に、いろいろと調和分析による予想を試み、実際の観測と比較、検討し、可成り良好な結果を得たが、前掲の図に見られる通り、1959年, 7月, 1950, 51年, 8月及

び11月、1952年2月等大きく予想を外れる場合もあり、気温予想としてまだ充分満足すべき段階ではないと思う。

例えば、第1図、月別の周波数スペクトルを見ても可成りの差違があり、この種の予報に於ては各月別に独立に夫々の気象要因が働くと考えている譯であるが、この月平均を用いたことは単なる便宜上の問題であつて、平均を求むべき季節の分け方にも考慮の余地があると思う。

又予報の精度を向上するには、色々の方途が考えられるが、(i) 現在の定常的な取扱いで、唯分析区間を更に大きくして近似の度を高める。^{*} (ii) 問題を非定常なものとして取扱いスペクトルの長期傾向を考え、⁽⁶⁾ 或は、(iii) 多くの気象要素との相関をもとり入れて多重予報⁽⁷⁾を行うものかが考えられるが、何れにしても極めて繁雑な計算を要するのであつて、自動計算機の發達の望まれる所以である。

最後に懇切な御指導を賜つた故今堀教授に心からの感謝を捧げると共に、色々と助言を戴いた堀 淳一氏に御禮を申上げる。

文 献

- 1) 今堀克巳 1952「調和解析による長期予報 (I)」予報研究ノート, 2, 5号. 低温科学, 9, 21.
- 2) 今堀克巳 1952「調和解析による長期予報 (II)」予報研究ノート, 3, 2号. 低温科学, 9, 34.
- 3) Imahori K. and Kobayashi T. 1951 On the Long Period Forecasting by Means of Harmonic Analysis, (I) Journ. Met. Soc. Japan, 29, 365. 同上邦訳. 低温科学, 9, 5.
- 4) 中田良雄 1943 気温の過期的変化に関する研究. 気象集誌, II, 21.
- 5) 高橋浩一郎 理研彙報 第14集. 第4号.
- 6) 堀 淳一, 小林禎作 1952 非定常時系列の予報について. 低温科学, 9, 83.
- 7) 堀 淳一, 小林禎作 1952 多重予報に就いて. 低温科学, 9, 93.

^{*} このために m, n 項の解析が夫々可能な場合、一般に $m \times n$ 項の解析を行う重調和解析に就いて検討中である。

非定常時系列において區間をずらした場合の調和分析法

非定時系列のある區間に調和分析を施すと $\Delta\nu\Delta T \sim 1$ なる不確定性のもとに近似的なスペクトルが得られ、この場合には、スペクトルを時間の函数として求めることが重要な意味を持つて来る。ところで、ある區間のフーリエ係数がわかっている際に、 τ 時間隔だけずれた區間のフーリエ係数を求める爲、一々計算をやり直すのは大変な手数であつて、これは次の如くして簡単に求められる。

等時間隔の時系列

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{r-1}, y_r, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+m}, \dots$$

がある時、 y_0, y_1, \dots, y_{r-1} の r 項に調和分析を行つて、

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} A_\nu^{(0)} \\ B_\nu^{(0)} \end{aligned} \right\} &= \left\{ \begin{aligned} \sum_{\rho=0}^{r-1} y_\rho \cos \nu \frac{\rho \cdot 2\pi}{r}, \\ \sum_{\rho=0}^{r-1} y_\rho \sin \nu \frac{\rho \cdot 2\pi}{r}, \end{aligned} \right. \\ &\nu = 1, 2, \dots, \frac{r}{2} - 1, \\ A_0^{(0)} &= \sum_{\rho=0}^{r-1} y_\rho, \quad (\text{平均値}) \\ A_n^{(0)} &= \sum_{\rho=0}^{r-1} (-1)^\rho y_\rho \quad n = \frac{r}{2} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

が夫々求められているとする。

今、時刻を1つづつずらした時系列

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_{r-1}, y_r$$

について同じく r 項調和解析を施し、(1) に対応する各係数を夫々 $A_\nu^{(1)}, B_\nu^{(1)}, A_0^{(1)}, A_n^{(1)}$ とすればこれは次の如く計算される。

今 $y_r = y_0 + \Delta y_r$ と置けば

$$\begin{aligned} A_\nu^{(1)} &= \frac{2}{r} \sum_{\rho=1}^r y_\rho \cos \nu \frac{(\rho-1)2\pi}{r} \\ &= \frac{2}{r} \left\{ \sum_{\rho=1}^{r-1} y_\rho \cos \nu \frac{(\rho-1)2\pi}{r} + (y_0 + \Delta y_r) \cos \nu \frac{(r-1)2\pi}{r} \right\} \\ &= \frac{2}{r} \left\{ \sum_{\rho=1}^{r-1} y_\rho \left(\cos \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} \cos \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} + \sin \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} \sin \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} \right) \right. \\ &\quad + y_0 \left(\cos \frac{\nu \cdot r \cdot 2\pi}{r} \cos \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} + \sin \frac{\nu \cdot r \cdot 2\pi}{r} \sin \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} \right) \\ &\quad \left. + \Delta y_r \cos \nu \frac{(r-1)2\pi}{r} \right\} \\ &= \frac{2}{r} \left\{ \cos \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} \left(\sum_{\rho=1}^{r-1} y_\rho \cos \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} + y_0 \cos \frac{\nu \cdot r \cdot 2\pi}{r} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} \left\{ \sum_{\rho=1}^{r-1} y_{\rho} \sin \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} y_0 \sin \frac{\nu \cdot r \cdot 2\pi}{r} \right. \\
& \quad \left. + \Delta y_r \cos \nu \frac{2\pi}{r} \right\} \\
= & A_{\nu}^{(0)} \cos \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} + B_{\nu}^{(0)} \sin \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} + \frac{2}{r} \Delta y_r \cos \nu \frac{2\pi}{r}, \quad \dots (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{\nu}^{(1)} = & \frac{2}{r} \sum_{\rho=1}^r y_{\rho} \sin \nu \frac{(\rho-1)2\pi}{r} \\
= & \frac{2}{r} \left\{ \sum_{\rho=1}^{r-1} y_{\rho} \sin \nu \frac{(\rho-1)2\pi}{r} + (y_0 + \Delta y_r) \sin \nu \frac{(r-1)2\pi}{r} \right. \\
= & \frac{2}{r} \left\{ \sum_{\rho=1}^{r-1} y_{\rho} \left(\sin \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} \cos \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} - \cos \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} \sin \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} \right) \right. \\
& \quad \left. + y_0 \left(\sin \frac{\nu \cdot r \cdot 2\pi}{r} \cos \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} - \cos \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} \sin \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} \right) \right. \\
& \quad \left. + \Delta y_r \sin \nu \frac{(r-1)2\pi}{r} \right\} \\
= & \frac{2}{r} \left\{ \cos \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} \left(\sum_{\rho=1}^{r-1} y_{\rho} \sin \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} + y_0 \sin \frac{\nu \cdot r \cdot 2\pi}{r} \right) \right. \\
& \quad \left. - \sin \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} \left(\sum_{\rho=1}^{r-1} y_{\rho} \cos \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} + y_0 \cos \frac{\nu \cdot r \cdot 2\pi}{r} \right) \right. \\
& \quad \left. + \Delta y_r \sin \nu \frac{2\pi}{r} \right\} \\
= & B_{\nu}^{(0)} \cos \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} - A_{\nu}^{(0)} \sin \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} + \frac{2}{r} \Delta y_r \sin \nu \frac{2\pi}{r}, \quad \dots (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0^{(1)} = & \frac{1}{r} \sum_{\rho=1}^r y_{\rho} \\
= & \frac{1}{r} \left\{ \sum_{\rho=1}^{r-1} y_{\rho} + (y_0 + \Delta y_r) \right\} \\
= & \frac{1}{r} \left\{ \sum_{\rho=1}^{r-1} y_{\rho} + \Delta y_r \right\} \\
= & A_0^{(0)} + \frac{1}{r} \Delta y_r, \quad \dots (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n^{(1)} = & \frac{1}{r} \sum_{\rho=1}^r (-1)^{\rho+1} y_{\rho} \\
= & \frac{1}{r} \left\{ \sum_{\rho=0}^{r-1} (-1)^{\rho+1} y_{\rho} + (-1)^{r+1} (y_0 + \Delta y_r) \right\} \\
= & - \left\{ A_n^{(0)} + (-1) \frac{1}{r} \Delta y_r \right\}, \quad \dots (5)
\end{aligned}$$

次に一般に $m < \frac{r}{2}$ なる m 時間隔だけずらした系列

$$y_m, y_{m+1}, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_{(r+m-1)}$$

についての各フーリエ係数 $A\nu^{(m)}, B\nu^{(m)}$ を求める。前と同様に

$$\left. \begin{aligned} y_r &= y_0 + \Delta y_r, \\ y_{r+1} &= y_1 + \Delta y_{r+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ y_{r+m-1} &= y_{m+1} + \Delta y_{r+m-1}, \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

と置くと、

$$\begin{aligned} A\nu^{(m)} &= \frac{2}{r} \sum_{\rho=m}^{m+r-1} y_\rho \cos \nu \frac{(\rho-m)2\pi}{r} \\ &= \frac{2}{r} \left\{ \sum_{\rho=m}^{r-1} y_\rho \cos \nu \frac{(\rho-m)2\pi}{r} + (y_0 + \Delta y_r) \cos \frac{\nu(r-m)2\pi}{r} \right. \\ &\quad \left. + (y_1 + \Delta y_{r+1}) \cos \frac{\nu(r-m+1)2\pi}{r} + \dots\dots\dots \right. \\ &\quad \left. \dots\dots\dots + (y_{m+1} + \Delta y_{r+m-1}) \cos \frac{\nu(r-1)2\pi}{r} \right\} \\ &= \frac{2}{r} \left[\cos \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} \left\{ \sum_{\rho=m}^{r-1} y_\rho \cos \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} + y_0 \cos \frac{\nu \cdot r \cdot 2\pi}{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y_1 \cos \frac{\nu \cdot (r+1) \cdot 2\pi}{r} + \dots\dots\dots + y_{m-1} \cos \frac{\nu \cdot (r+m-1) \cdot 2\pi}{r} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sin \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} \left\{ \sum_{\rho=m}^{r-1} y_\rho \sin \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} + y_0 \sin \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y_1 \sin \frac{\nu \cdot (r+1) \cdot 2\pi}{r} + \dots\dots\dots + y_{m-1} \sin \frac{\nu \cdot (r+m-1) \cdot 2\pi}{r} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \Delta y_r \cos \frac{\nu \cdot (r-m) \cdot 2\pi}{r} + \Delta y_{r+1} \cos \frac{\nu \cdot (r-m+1) \cdot 2\pi}{r} + \dots\dots\dots \right. \\ &\quad \left. \dots\dots\dots + \Delta y_{r+m-1} \cos \frac{\nu \cdot (r-1) \cdot 2\pi}{r} \right] \\ &= \cos \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} \left(\frac{2}{r} \sum_{\rho=0}^{r-1} y_\rho \cos \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} \right) \\ &\quad + \sin \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} \left(\frac{2}{r} \sum_{\rho=0}^{r-1} y_\rho \sin \frac{\nu \cdot \rho \cdot 2\pi}{r} \right) \\ &\quad + \frac{2}{r} \left\{ \Delta y_r \cos \frac{\nu \cdot m \cdot 2\pi}{r} + \Delta y_{r+1} \cos \frac{\nu \cdot (m-1) \cdot 2\pi}{r} + \dots\dots\dots \right. \\ &\quad \left. \dots\dots\dots + \Delta y_{r+m-1} \cos \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{\nu}^{(0)} \cos \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} + B_0^{(0)} \sin \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} \\
&\quad + \frac{2}{r} \left\{ \Delta y_r \cos \nu \frac{\nu \cdot m \cdot 2\pi}{r} + \Delta y_{r+1} \cos \frac{\nu \cdot (m-1) \cdot 2\pi}{r} + \dots \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \dots + \Delta y_{r+m-1} \cos \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} \right\}, \quad \dots (7)
\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
B_{\nu}^{(m)} &= B_{\nu}^{(0)} \cos \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} - A_{\nu}^{(0)} \sin \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} \\
&\quad + \frac{2}{r} \left\{ \Delta y_r \sin \nu \frac{m \cdot 2\pi}{r} + \Delta y_{r+1} \sin \frac{\nu \cdot (m-1) \cdot 2\pi}{r} + \dots \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \dots + \Delta y_{r+m-1} \sin \frac{\nu \cdot 2\pi}{r} \right\}, \quad \dots (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0^{(m)} &= A_0^{(0)} + \frac{1}{r} (\Delta y_r + \Delta y_{r+1} + \dots + \Delta y_{r+m-1}), \\
A_n^{(m)} &= (-1)^m \left\{ A_n^{(0)} + (-1)^r \frac{1}{r} (\Delta y_r - \Delta y_{r+1} + \dots + (-1)^{r+m-1} \Delta y_{r+m-1}) \right\}. \\
&\quad \dots (9)
\end{aligned}$$

R é s u m é

Imahori's approximate procedure of the prediction, which has previously been formulated and applied with fruitful results, was improved by the use of somewhat modified methods of determination of the initial values, including Nakata's moving average method, and compared with the previous results. These new methods proved to be more efficient. The relative merits of these methods were also discussed.