



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	熱傳導論の立場からみた馬鈴薯の凍結曲線 I
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科學, 10, 53-68
Issue Date	1953-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/17543
Type	departmental bulletin paper
File Information	10_p53-68.pdf



熱傳導論の立場からみた馬鈴薯の凍結曲線 I.*

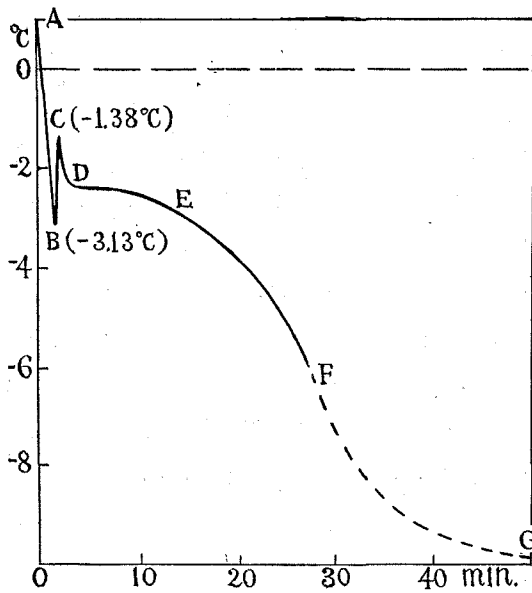
吉田 順五

(低温科學研究所 應用物理學部門)

(昭和27年9月受理)

I. 凍結曲線の例

植物の組織小片を冷却して凍結させるときの温度變化の経過については、いままでにも多くの人々の研究があるが、近年、青木康¹⁾、照本勳²⁾によつて、殊に詳しく、馬鈴薯の凍結の研究が行われた。第1圖は、その際にえられた、温度變化の経過を示す凍結曲線の實例である。馬鈴薯から、直径5mm、長さ15mmの圓筒形の資料をきりだし、その中心に細い熱電對をさし



第1圖
馬鈴薯凍結曲線の實例
(圓筒形資料、直径5mm、長さ15mm)

こむ。これを、外部から -10°C にひやされている太い試験管のなかに入れる。すると、熱電對によつて示れる温度は、第1圖に示したような温度變化の曲線をあたえる。たて軸は温度、よこ軸は時間である。

最初のA點($+1^{\circ}\text{C}$)から出發して温度は速かにくだつてゆく。約 -3°C になつたところで、資料の表面に氷を接觸させると(B點)、過冷却した資料は凍結をはじめ、温度は急にのぼつてC點に達する。C點のあとD點まで、ふたたび、温度は速かにくだるが、D點をすぎると温度の降下は停滯するほどに緩慢になる。しかし、これもしばらくのことで、

* 北海道大學低温科學研究所業績 第169號

やがて降下速度はしだいにまして E 點をすぎ F 點にまで達する。この曲線の例では、F 點から先の實測は行われていない。しかし、他の實測の結果から推して、F 點から先は、破線で示したような曲線になるものと思われる。

いうまでもなく、ここに測定された温度は資料の中心の温度であつて、資料全体がこの中心温度とおなじ温度になつていようかどうかはわからない。それにもかかわらず、この種の凍結曲線についての議論は、資料全体が一様な温度になつていよとの考えに立つて行われているように見うけられる。資料が小さいということから、そのような豫想が立てられるのかとも思われるが、これは一度、検討しておくべき問題であろう。このような意味で、これを熱傳導論の立場から論じてみようとするわけである。

青木²⁾は、第一氷點といわれている第 1 圖の C 點が現われるのは、資料の表層部に流出している稀い細胞液の膜*が凍結するためであるとの考えをだした。この考えによれば -3°C にひやされた資料は、B 點で急にその表層部が細胞液の凍結温度 —— -0.7°C —— にのぼり、熱が資料の表層部から内部に傳わつてゆくことになる。この表層部から傳わる熱によつて、中心の温度が B 點から C 點にあがるわけであるが、熱の傳導には時間がかかる。それで、B、C 間の短かい時間 (第 1 圖の例では 10 sec) に、中心温度を B 點から C 點まで 1.8°C 上昇させるだけの熱が傳わりうるかという問題がおこるが、熱傳導論によれば、この種の定量的問題も取扱うことができるわけである。

II. 數學的取扱いのための假定

實際に使われた資料は直径 5 mm、長さ 15 mm の圓筒形のものであるが、數學的取扱いを簡單にするために、圓筒の長さは無限に長いものと假定する。これは、圓筒の上下の端の影響を無視することである。このため、結果は、實際の測定結果とくいちがうのであるが、ただ、そのくいちがいは、さほど大きいものではないであろうと推定される。熱の傳導については、大ざつばにいつて、2 倍の距離を熱がつたわるのには 4 倍の時間がかかるということがあつた。距離が n 倍になれば n^2 倍の時間がある。それで、じやがいもの資料の中心にまで熱がつたわるのに、圓筒の端の面からつたわるのには、圓筒面からつたわるのにくらべて 3^2 の 9 倍の時間がかかるわけである。それで、圓筒の端の面からの熱の影響は少ないのでそれを無視する。圓筒を無限に長いと考えると、その端の面から熱がつたわるには無限の時間がかかり、端の面の影響は全くないことになる。したがつて、實際の資料の端の面の影響を無視することは、圓筒を無限に長いと考えることと一致するのである。

温度を u で表わすと、 u は資料のなかの場所によつてちがい、また時刻 t とともにかわる。したがつて、 u は場所と t との函數であるが、温度分布はいつでも資料の中心線に對して對稱

* 資料表層の大部分の細胞は、資料がきりとられるときに、切斷されたり、そのときの壓力で破壊されている。したがつて、これらの細胞から流出した細胞液は表層部で連織層をなしていると考えられる。

になつてゐるはずであるから、中心線からその場所までの距離を r とすれば、 u は r と t との函數になつて

$$u(r, t)$$

とかけるわけである。

資料のなかのある場所(中心からの距離 r)に微小な体積 dv を想像する。この微小体積には、熱傳導により、周圍から熱がはいつてきたり、そこから周圍に熱がでていつたりするが、熱がでてゆくときはマイナスの熱がはいつてくると考えることとすると、 dt という微小時間のあいだに

$$dq_1 = dv \cdot dt \cdot \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

だけの熱量がはいつてくるといふことが證明される。 μ は資料の熱傳導率である。 $(u$ は $u(r, t)$ とかくべきであるが、簡單のためにただ u としてある。これからあともおなじ)。

また、この微小体積 dv のなかで凍結が進行中とすると熱が発生する。この熱量を dq_2 とし、それが、

$$dq_2 = dv \cdot dt \cdot q(r, t)$$

の形に書き表わされると假定する。これは dq_2 が微小体積の大きさ、また微小時間の長さに比例するということである。第1圖の D 點以後の凍結に對しては、だいたいこの假定がゆるされそうである。しかし、凍結が、圓筒の周邊部から、はつきりした凍結境界面をもつて内部にむかつて進むというような場合があるとすれば、この假定は許されない。

かくして dv のなかの熱量は、 dt のあいだに、 $dq_1 + dq_2$ だけ増加するわけであるが、そのために dv の溫度はあがる。その溫度上昇は $\frac{\partial u}{\partial t} dt$ で表わされる。そして、 dv の熱容量は、 c, ρ をそれぞれ資料の比熱、密度とすると $c\rho dv$ であるから、この溫度上昇に要した熱量は

$$dq_3 = dv \cdot dt \cdot c\rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

である。そして、いうまでもなく、 $dq_3 = dq_1 + dq_2$ の關係がなりたつので、それから、

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + q(r, t) \dots \dots \dots (1)$$

なる偏微分方程式がみちびかれる。

いまのところ、 u は r, t の函數であることがわかつてゐるだけで、どんな函數であるかはわかつてゐない。しかし、 u がどんな函數であるにしろ、少なくとも(1)の偏微分方程式を満たすような函數でなければならぬ、すなわち、この偏微分方程式の解でなければならぬというわけである。實際に、(1)の偏微分方程式を満たす函數 $u(r, t)$ は無數にある。しかし、別に條件をあたえると、そのうちのただひとつのものが擇びだされる。

たとえば、第1圖の A 點から B 點までのあいだでは凍結がおこつてゐないので、(1)式の

$q(r, t)$ は 0 である。また、最初の A 点では資料全体が $+1^\circ\text{C}$ であつたという条件がある。すなわち、時刻 t を A 点からはかりはじめることにすると、 $u(r, t)$ は、 r の如何にかかわらず

$$u(r, 0) = +1^\circ\text{C}$$

という条件を満たすものでなければならない。この種の条件を初期条件という。また、資料は、それをとりまく -10°C の空気に Newton の冷却法則にしたがつて熱を放出しつつあると考えられる。資料の表面に微小面積 df を考えると、冷却法則によつて、微小時間 dt に

$$a [u(a, t) - U] \cdot df \cdot dt$$

だけの熱量が df から空気ににげてゆく。ここで、 a は資料の半径を、 U は空気の温度を表わしている。したがつて、角括弧のなかは資料の表面温度と空気の温度との差である。 a は資料表面の熱伝達係数である。一方、 df には、資料内部から dt のあいだに、

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial r} \cdot df \cdot dt$$

の熱が流れだしてくる。ここで、 $\frac{\partial u}{\partial r}$ の値としては、資料表面、すなわち $r=a$ の値をとることとする。この熱量は、上の空気ににげてゆく熱量とひとしくなければならない。それで、資料の表面 $r=a$ で、 t の値の如何にかかわらず

$$a(u - U) = -\mu \frac{\partial u}{\partial r} \dots\dots\dots (2)$$

の関係がなりたつていなければならないことになる。この種の条件を境界条件という。以上の条件のために、(1) の偏微分方程式を満たす無数の $u(r, t)$ のうちから、第 1 圖の A 点から B 点までの曲線と興えるべき、ただ一つの $u(r, t)$ が擇びだされる。B 点から C 点までに對しては、初期条件や境界条件がちがうために、別な $u(r, t)$ が擇ばれる。凍結曲線のその他の部分についても同様なことがいわれる。

結局、問題は、熱傳導の現象に内在する性質を示すところの偏微分方程式 (1) を満足し、かつ、その場合場合の特殊な初期条件、境界条件をも満足する函数 $u(r, t)$ を求めることになる。熱傳導論は非常によく發達して、それについての書物もたくさんにでてゐる³⁾。以後、 $u(r, t)$ としてでてくるものは、すべてそれらの書物に示された方法にしたがつて求められるので、それを求める計算の手續きを書くことはいつさい省略する。ただ、 $u(r, t)$ を表すのに、初等的な數學にはでてこない $J_0(x), J_1(x), \dots, J_n(x), \dots$ なる函数がひんばんに用いられるので、それについて簡単な説明を加えておく。これはベッセル函数といわれる一群の函数であつて、そのうちでも $J_0(x)$ と $J_1(x)$ とが重要なので、そのグラフを第 2 圖の左上の方に示した。 $J_0(x)$ は $x=0$ で 1 で、そのあと波動的に減衰してゆく。 $J_1(x)$ は 0 から出發し、やはり、波動的に減衰してゆく。 $J_0(x)$ は $\cos x$ に $J_1(x)$ は $\sin x$ に似た性質をもつてゐるといえるであろう。事實、 $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$ であるが、 $\frac{d J_0(x)}{dx} = -J_1(x)$ という關係さえある。そのほか、ベッセル函数についてはその性質が詳しく研究されているし、三角函数 $\sin x$ や $\cos x$ に對して x の

いろいろな値に対する函数の値の表が三角函数表として出版されていると同様に、ベッセル函数についても同様なベッセル函数表⁴⁾が出版されている。したがつて、 $u(r, t)$ が指数函数 e^{\dots} や三角函数やベッセル函数の組合せとして表わされれば、 $u(r, t)$ の値を現實に計算して出すこともできるわけである。それで、このような形で $u(r, t)$ が表わされたら、 $u(r, t)$ が求められたと考えるわけである。

なお、しばしば、方程式 $J_0(x)=0$ の根 $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots$ がつかわれる。 $J_0(x)$ は波動的にプラス、マイナスの値をとるので、 $J_0(x)$ を0にするような x の値、すなわち、方程式 $J_0(x)=0$ の根は無数にある。それらを、小さい方から順に ν_1, ν_2, \dots としたわけである。この根の値もベッセル函数表にでている。

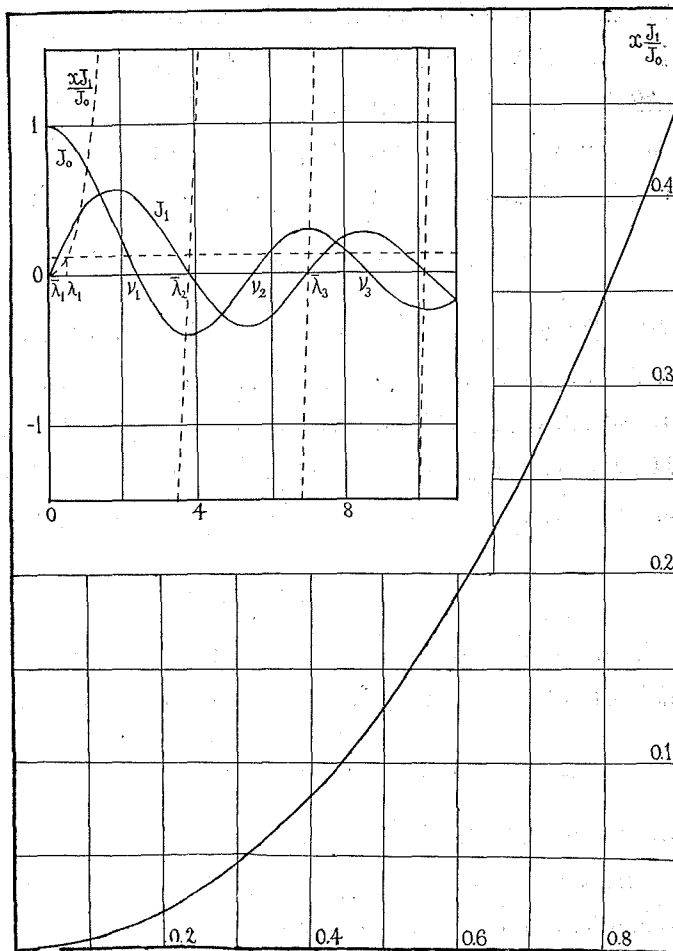
また、方程式

$$xJ_1(x) = hJ_0(x)$$

の根、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ もひんばんにつかわれる。 h は場合場合でちがつた値をとるが、いつでも小さい数である。この方程式は

$$\frac{xJ_1(x)}{J_0(x)} = h$$

とかかれるから、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ は函数 $xJ_1(x)/J_0(x)$ を、ちょうど h にひとしくさせるような x の値である。第2圖に、 $J_0(x), J_1(x)$ のグラフとともに、函数 $xJ_1(x)/J_0(x)$ のグラフを破線で示してある。この函数は、分母の $J_0(x)$ が0になる ν_1, ν_2, \dots でプラスまたはマイナスの無限大になる



第 2 圖
ベッセル函数

ので、圖のような形になるわけである。 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ を求めるには、たとえば h が 0.1 ならば、たて軸 0.1 の點から、よこ軸に平行に直線をひき、この直線と破線との交點のところの x の値をとればよい。その値は無数にあるから、それを小さい方から $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ とするわけである。數値としてもつと正確なものを求めるためには次の便法がある。 $xJ_1(x)/J_0(x)$ は、 $J_1(x)=0$ の根、 $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots$ のところでは 0 になる。そして、 h が小さければ、 λ_1 だけは例外として、 λ_n が $\bar{\lambda}_n$ に非常に近い値であることがグラフからわかる。事實、 h が小さいとき

$$\lambda_n = \bar{\lambda}_n + \frac{h}{\bar{\lambda}_n} \quad n \geq 2$$

という關係が證明される。 $\bar{\lambda}_n$ はベッセル函數表にでているので、この式から λ_n が計算される。 λ_1 だけはこのようにはゆかず、詳しい計算がグラフにたよるほかはない。第 2 圖に、 x の 0 から 0.9 までの範圍に對して $xJ_1(x)/J_0(x)$ のグラフを擴大して書いた。これによつて、 h が 0.45 以下ならば、 λ_1 の値を有効數字 3 桁くらいまで求められるであろう。たとえば、 $h=0.1$ ならば、 $\lambda_1=0.442$ となる。なお、この論文の末尾に xJ_1/J_0 の數値がある。

III. 初期の冷却 (A 點から B 點まで)

第 1 圖の A 點から B 點までは、凍結がおこつておらず、資料は Newton 冷却による自然冷却をしている。したがつて、資料のなかの溫度 $u(r, t)$ は

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

なる偏微分方程式を満足しなければならない。

資料は -10°C の空氣中におかれていながら、この空氣の溫度を U で表わす。そして、計算の便宜のために、溫度をはかるのに、 0°C を基準にしないで U を基準にとることにして、このように基準點をうごかした溫度を表わすのに $v(r, t)$ を使うこととしよう。すると

$$v(r, t) = u(r, t) - U$$

の關係になる。 $u(r, t)$ が 0°C ならば、 $U = -10$ であるから、 $v(r, t) = +10$ となるわけである。

また、この關係によつて、 v は u と全くおなじ形の偏微分方程式

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

を満足することがわかる。初期條件は u が、 r の如何にかかわらず、 $+1^\circ\text{C}$ であること、すなわち v が r の如何にかかわらず $+11$ であることで表わされる。それで、この $+11$ を一般的に v_0 として

$$v(r, 0) = v_0$$

で初期條件を表わす。表面で、Newton 冷却がおこつているという境界條件は、 u の代りに v

をつかつて表わせば

$$-\mu \frac{\partial v}{\partial r} = av, \quad (r=a)$$

となる。

これらの条件を満足する偏微分方程式の解は、 $F(r, t)$ を、つぎのような指数函数とベッセル函数の組合せでなりたつ級數

$$F(r, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\lambda_n t} \frac{h}{h^2 + \lambda_n^2} \frac{J_0(\lambda_n r/a)}{J_0'(\lambda_n)}$$

とすると

$$v(r, t) = v_0 F(r, t) \dots \dots \dots (3)$$

で表わされることが證明される。この式のなかで、 h は常數で

$$h = a \frac{\alpha}{\mu}$$

である。そして、 λ_n は方程式

$$xJ_1(x) = hJ_0(x)$$

の根である。また常數 k は

$$k = \frac{\mu}{a^2 c \rho}$$

を表わす。前節とおなじに、 a は資料の半径、 μ は熱傳導率、 α は Newton 冷却に於ける熱傳達係數、 c は比熱、 ρ は密度である。

もし、 k の値と h の値とがわかれば、それによつて $F(x, t)$ を計算し、—— λ_n の値は h がわかれば求められる —— $v_0 = 11$ とおくことによつて第 1 圖の A 點から B 點までの資料の溫度が、資料の中心のみならず、資料のなかのすべての場所に對して與えられるわけである。それで、まず、 k と h との値をきめる必要がある。

じやがいもについて、 μ, c, ρ の値が測定されていれば、それらの値から k を計算できるのであるが、現在、そのようなデータがない。それで、じやがいもの組成の 80% は水であるということから、 μ, c, ρ に水についての値 $\mu = 0.0014 \text{ cal/cm} \cdot \text{sec} \cdot \text{deg}$, $c = 1 \text{ cal/gr} \cdot \text{deg}$ $\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$ をつかい、資料半径 $a = 0.25 \text{ cm}$ とおいた

$$k = \frac{\mu}{a^2 c \rho} = 0.0224/\text{sec}$$

をもつて、資料の k の値と假定する。これは、もちろん、正しい値ではないので、あとで訂正するが、實際の値に近いものとしていまのところ採用するわけである。

$h = a\alpha/\mu$ であるから、 a の値がわかれば、 h の値もわかる。しかし、熱傳達係數 α は、場合場合によつて變動しやすいものなので、あらかじめ、その値をきめることはむづかしい。それ

で、第1圖に示されている A 點から B 點までの資料の中心温度の變化それ自身を、 h をもつめるための材料として使うことにする。第1圖のグラフは中心温度であるから、(3)式で $r=0$ とおいた

$$v(0, t) = v_0 F(0, t), \quad v_0 = 11$$

で與えられるはずである。それで、この式がグラフを最もよく再現するように h の値をきめるわけである。

$J_0(0)=1$ の關係によつて

$$F(0, t) = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-k\lambda_n^2 t}}{h^2 + \lambda_n^2} \frac{1}{J_0(\lambda_n)}$$

である。 $F(0, t)$ は、このように、すでによく知られた函数の組合せの形として與えられてはいるが、ただ、それが無限に多くの項をもつた級数であるために、その値を計算することができない。しかし、この困難は次のようにして除かれる。

まず、 h は非常に小さい値のものであると假定する。この假定に立つて h の値を現實にもつめた結果、その値が實際に非常に小さかつたとすれば、假定は正しかつたとしてよいわけである。さて、第2圖から直ちにわかるように、 $xJ_1(x)/J_0(x)=h$ の根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ は、 h が小さい場合には、 λ_1 だけが 0 に近い小さい値で、 λ_2 はそれにくらべて遙かに大きい 4 ぐらいの値、 λ_3 以下は更に大きい値をとることがわかる。したがつて、 $F(0, t)$ の各項の分母にはいつている $h^2 + \lambda_n^2$ は、 $h^2 + \lambda_1^2$ をのぞいては皆非常に大きい。 $J_0(\lambda_n)$ の絶對値は、第2圖からわかる通り、 $J_0(\lambda_1)$ がいちばん大きくて、あと次第に小さくはなるけれども、その變動はさほど大きいものではない。したがつて、 $F(0, t)$ の各項の分母の絶對値は、第1項の分母のほかは、みな大きいことがわかる。それから、各項の分子の $e^{-k\lambda_n^2 t}$ は、 t が非常に 0 に近いときだけは別であるが、 t がある程度以上になると、第1項の $e^{-k\lambda_1^2 t}$ をのぞいてはみな非常に小さくなつてしまふ。 e^{-x} が、 x が大きくなるとともに急激に減少することは、よく知られたことである。それで、 t があまり小さくないときは、 $F(0, t)$ の第2項以下は第1項にくらべて非常に小さいので、省略してしまふと $F(0, t)$ は、近似的にその第1項だけをとつた

$$F(0, t) = \frac{2h}{(h^2 + \lambda_1^2) J_0(\lambda_1)} e^{-k\lambda_1^2 t}$$

という簡単な形で表わされることになる。

結局、第1圖の A 點から B 點までのグラフの、 $t=0$ のちかく、すなわち A 點附近をのぞいた部分に、

$$v(0, t) = 11 \frac{2h}{(h^2 + \lambda_1^2) J_0(\lambda_1)} e^{-k\lambda_1^2 t}$$

の式がよくあつたように h をきめればよいことになつたわけである。この式は

$$v(0, t) = \text{常數} \times e^{-k\lambda_1^2 t}$$

の形になっている。ただ、常数の値は、 h がきまらないために、まだわからない。しかし、 λ_1 が實は h によつてきまるものであるから、この式をつかつて λ_1 を求めれば逆に h の値が算出できることになる。第1圖の場合 $+1\text{C}^\circ$ の A 點は $t=0$ に相當するが、 $u(0, t)$ が、 0°C 、すなわち $v(0, t)=10$ のときの t は 25 sec で、すでに t はかなり大きい。したがつて、

$$10 = \text{常數} \times e^{-k\lambda_1^2 \cdot 25}$$

の關係が成立することになる。更に 80 sec たつと、B 點の -3.13°C 、すなわち $v(0, t)=6.87$ に達するので

$$6.87 = \text{常數} \times e^{-k\lambda_1^2 \cdot 105}$$

の關係がえられる。この式を上式の式でわり、まえに求めておいた $k=0.0224$ をつかうと

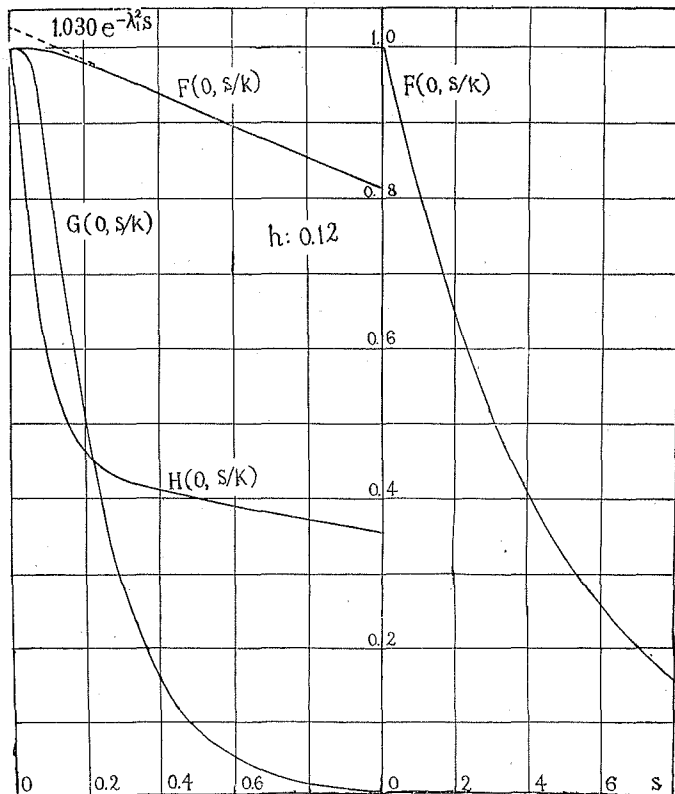
$$0.687 = e^{-0.0224 \times 80 \times \lambda_1^2}$$

がえられる。すなわち、

$$2.303 \log_{10} 0.687 = -0.0224 \times 80 \times \lambda_1^2$$

となり、これを計算して、

$$\lambda_1^2 = 0.209, \quad \lambda_1 = 0.478$$



第 3 圖

函數 $F(0, t)$, $G(0, t)$, $H(0, t)$

がえられる。そして第2圖によると、 $x=0.478$ のところの $xJ_1(x)/J_0(x)$ の値は 0.118 であるが、これが h の値にほかならない。すなわち

$$h = 0.118.$$

はじめに、 h が小さいと假定して、このような h の値が求められたが、實際に h の値は小さい。それで、はじめの假定は正しかつたわけであるが、なお、 t があまり小さくないところで、第1項だけとつて

$$F(0, t) = \frac{2h}{(h^2 + \lambda_1^2) J_0(\lambda_1)} e^{-k\lambda_1^2 t}$$

とおくことが、どの程度に正しいかを第3圖によつてみることにする。第3圖で

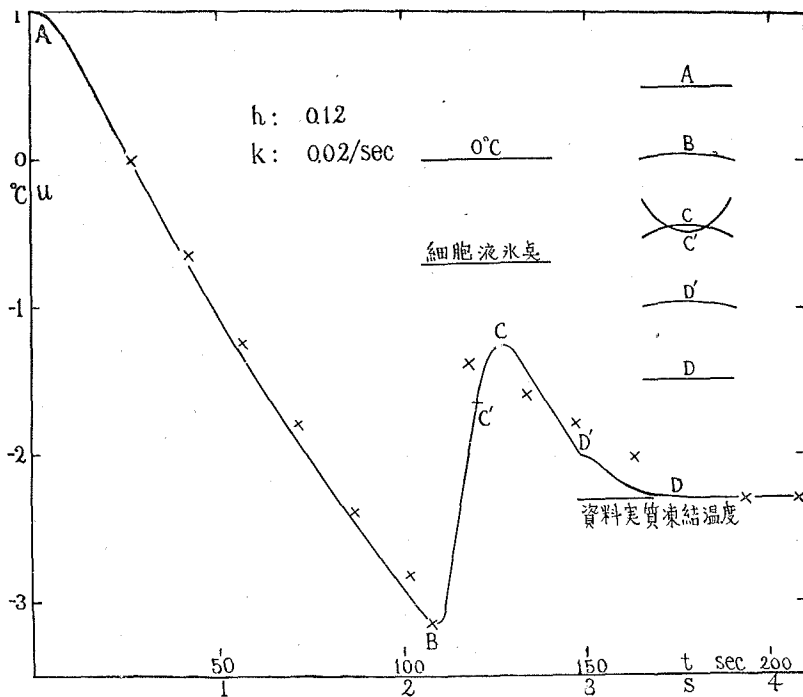
は、 $kt=s$ として s をよこ軸に、 $F(0, s/k)$ をたて軸にとつてかいてあるが、實線は省略なしに詳しく計算して求めた $F(0, s/k)$ の値である。そして、 s が $0\sim 0.2$ の範圍に破線で示してあるのが、第1項だけで $F(0, s/k)$ を表わしたときの値である。この部分でだけこのような差がでるけれども、 s がこれ以上に大きいところでは、差は小さくて圖の上には到底表わすことができない。それ故、上につかつた h を求める方法は近似法であつたとはいえ、その近似度が非常に高いものであつたことがわかる。

h の値として、 0.118 とでたのであるから、第3圖の $F(0, s/k)$ は $h=0.118$ についてのものを書くべきであつた。しかし、實は、 $h=0.12$ としてかいてある。もともと、 h の値をきめるときに k の値をつかつて、しかも k の値が、正確でないことはわかつている。それで、 h の値としても、 0.118 にあまりこだわつても意味がないので、計算の便宜のため、それに近い簡単な數 0.12 をとつたのである。

第4圖の A から B 點までの實線は、 $v(0, t)$ を $u(0, t)$ になおした

$$u(0, t) = 11F(0, t) + 10$$

のグラフで、+字印は實際の測定値である。このグラフでは h の値として 0.12 をつかうとともに、 k としては 0.0224 でなく 0.02 をつかつてある。 h を 0.118 でなく 0.12 にしたために、 k をこのように變更しないと實測とあわなくなるのであるが、もともと 0.0224 というのは假の値



第 4 圖
理論曲線と實測値

であるから、このような訂正が不當であるとはいきれないわけである。測定値の精度を考慮に入れると、 h や k の精度にあまり高い要求をしても無意味になるであろう。

資料のなかの温度分布は (3) 式の $F(r, t)$ を、すでにその値のしられた h, k をつかつて計算すれば求めることができる。この場合にも、 t があまり小さい範囲でなければ、第 1 項だけをとつて

$$v(r, t) = 11 \frac{2h J_0(\lambda_1 r/a)}{(h^2 + \lambda_1^2) J_0(\lambda_1)} e^{-k\lambda_1^2 t}$$

とすることができる。この式によつて、 $r=a$ として資料の表面温度 $v(a, t)$ 、 $r=0$ として中心温度 $v(0, t)$ をきめ、その比をとると

$$\frac{v(a, t)}{v(0, t)} = J_0(\lambda_1)$$

となる。 t の如何にかかわらず、表面の v の値と中心の v の値との比は一定値 $J_0(\lambda_1)$ である。 $\lambda_1 = 0.478$ であるが、 $J_0(0.478) = 0.943$ なることがベッセル函数表からしられる。今、B 点での $v(0, t)$ の値 6.87 をつかうと、上の式から

$$v(0, t) - v(a, t) = 0.39$$

がえられる。すなわち、B 点では、資料の表面の温度は中心の温度よりも 0.39°C ひくい。第 4 圖の右上の方に温度分布のだいたいの様子を示しあるが、A 点では水平な直線で表わされる一様な温度分布が、B 点ではなかだかの分布曲線に變つてくるわけである。

第 1 圖 A 点から B 点までの初期自然冷却では、上に見たように、そのごく初めのところをのぞいては、冷却曲線が時間 t についての簡単な指數函数になる。そしてこの部分は、Newton 冷却に關係する常數 h を決定するのに役だつのであつて、それ以外にはあまり重要な意味をもつていない。しかし、 h がきまらなないと、B 点以後のことを論ずるのに非常に困難を來たすので、その意味では、この自然冷却が重要な意味をもつ。

h は、場合場合で變動するので多くの例をとりあつたとき厄介であるが、 $F(r, t)$ の第 1 項の係数が、 h が 0.2 より小さい場合に、近似的に

$$\frac{2h}{(h^2 + \lambda_1^2) J_0(\lambda_1)} = 1 + 0.25h$$

で代用できるということは、計算を行う上に便利なことである。

IV. 第一次凍結 (B 点から C 点まで)

第 1 圖の B 点から C 点までの温度上昇は、さきにも述べた通り、資料の表層部に流出した細胞液が冷結するためであると青木が説明した。この細胞液の膜の凍結が進行しつつあるあいだは、資料の表面の温度は細胞液の凍結温度 -0.7°C に保たれる。したがつて、B 点から C 点までの経過は、はじめ B 点の温度にあつた資料が、急にその表面を -0.7°C に高められたため

に起るものとして取扱えばよい。

まず、温度の基準点には細胞液凍結温度 -0.7°C をとり、時間 t は B 点からはかりはじめるものとする。 -0.7°C を基準とした温度を $v(r, t)$ とすれば、この場合にも資料内部に凍結はおこっていないから、 v は偏微分方程式

$$c\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

を満足しなければならない。

初期条件。B 点の温度分布がこのときの初期条件を與えるが、前節でのべた通り、資料内の温度は B 点で一様でない。資料表面は中心に比べて 0.39°C 温度がひくいのである。しかし、このことを考慮に入れると數式が複雑になるので、B 点での資料内の温度分布は、一様で、中心温度とおなじであると假定する。したがつて、B 点での中心温度を v_0 で表わせば

$$v(r, 0) = v_0$$

が初期条件を表わすこととなる。いうまでもなく、この v_0 はマイナスである。

境界条件。B 点での時刻を $t=0$ とするのであるが、この時刻以後は資料の表面の温度は細胞液の凍結温度に保たれる。すなわち v は表面で、 t の如何にかかわらず 0 になつていなければならない。したがつて境界条件は

$$v(a, t) = 0$$

で與えられる。

これらの初期条件、境界条件を満たす偏微分方程式の解は

$G(r, t)$ を

$$G(r, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n r/a)}{J_0'(\nu_n)} e^{-k\nu_n^2 t}$$

なる級數とすれば、

$$v(r, t) = v_0 G(r, t)$$

であたえられることが證明される。ここに、 k は前節とおなじ $k = \mu/a^2 c\rho$ で、 ν_n は方程式

$$J_0(x) = 0$$

の根である。

いまの場合は、前節の $F(r, t)$ のときとちがつて、 ν_1 だけが特別に小さいということがない。しかし、 ν_2 以下は ν_1 の 2 倍以上には大きいので、 t が充分に大きくなれば、この場合にも、 $G(r, t)$ をその第 1 項で代表させることはできる。

第 3 圖に、 $kt = s$ として、中心温度に關係のある $G(0, s/k)$ のグラフをかいてある。グラフの形から見ても想像されるように、 s が 0.2 以上になれば、第 1 項だけをとつて

$$G(0, s/k) = 2e^{-\nu_1^2 s} / J_0'(\nu_1)$$

としてだいたいよい。

資料中心の温度は

$$v(0, t) = v_0 G(0, t)$$

で與えられるが、表層部の細胞液が凍結しきつてしまえば、資料の温度はふたたび Newton 冷却によつてくだり始める。資料内部の實質部の凍結温度は、表層部に流出した細胞液の水點よりひくいので、實質部の凍結温度に達するまでふたたび自然冷却が行われるわけである。それで、表層部細胞液が凍結しきつたときの t の値を τ とすれば、上の $v(0, t)$ の式がなりたつのは $t < \tau$ の範囲についてだけで、そのあとに對しては、全く別な式を使わなければならないことになる。ところで、 $t = \tau$ が第1圖の C 點と一致するのなら事情は非常に簡単になるのであるが、次のような理由でそうはならないのである。

表層部細胞液が凍りきつた時でも、資料中心温度は表面温度にくらべて非常に低くなつてゐる。第4圖右上の方の C' と書いたような温度分布になつてゐる筈である。それ故、この時以後、表面温度が降下しはじめても、中心部はしばらくのあいだ、温度の高いその周囲から熱を受けて、なおその温度を高められる。そしてある値に達してから下降しはじめるわけで、その頂點にあたるところが第1圖の C 點になるわけである。つまり、 $t = \tau$ に於て C 點が現われるのではなく、それよりある時間たつてから C 點が現われる。

いまのところ、表層部細胞液が凍りきるころはわからないが、それは第4圖の C' と印したあたりであることにはまちがいない。第4圖の B 點からあと C' までの上昇曲線は $v_0(0, t)$ の曲線である。そして C' 以後は、ふたたび、初期冷却とおなじに、Newton の方則にしたがう自然冷却がはじまるわけである。それ故、C' 以後のことを知るには、温度の基準點を空氣の温度 U に擇んで、

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial v'}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial r} \right) \\ -\mu \frac{\partial v'}{\partial r} &= \alpha v' \quad (r=a) \end{aligned}$$

を満足した上、次の初期條件を満足するような v' をみいだせばよいことになる。

あらためて、時刻 t の原點を C' 點に擇ぶと、初期條件は $v'(r, 0)$ が C' 點の温度分布と一致するということと與えられる。ところで、C' 點の温度分布は、B 點から C' 點のあいだを表わす前掲の式

$$v(r, t) = v_0 G(r, t)$$

に於て、 $t = \tau$ とした $v(r, \tau) = v_0 G(r, \tau)$ によつて示される。この場合、まだ τ の値がはつきりきめられないのはもちろんであるが、第4圖からみてほしい 10 sec はありそうである。すると $s = k\tau$ は 0.2 となり、先ほどのべたことにより、 $G(r, \tau)$ はその第1項だけで代表させてよいことになる。それで C' 點の温度分布は

$$\frac{2v_0 e^{-k\nu_1^2\tau}}{J_0(\nu_1)} J_0(\nu_1 r/a)$$

で表わされる。すなわち、C' 點の温度分布は、細胞液凍結温度を基準點にした場合には、 $J_0(\nu_1 r/a)$ に比例しているわけである。それで、 U を温度基準點とした細胞液凍結温度を U_1' 、資料の中心温度すなわち C' 點で示される温度を v_2' とすると、初期条件を表わす式として、

$$v'(r, 0) = v_1' - (v_1' - v_2') J_0(\nu_1 r/a)$$

と書くことができる。 $J_0(0) = 1$ 、 $J_0(\nu_1) = 0$ であるから、 $v'(r, 0)$ は、中心 $r=0$ で v_2' 、資料表面 $r=a$ で v_1' となり、条件にあつてゐるわけである。

以上の条件を満足する $v'(r, t)$ は、 $H(r, t)$ を、

$$H(r, t) = 2\nu_1 J_1(\nu_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 e^{-k\lambda_n^2 t}}{(h^2 + \lambda_n^2)(\nu_1^2 - \lambda_n^2)} \frac{J_0(\lambda_n r/a)}{J_0(\lambda_n)}$$

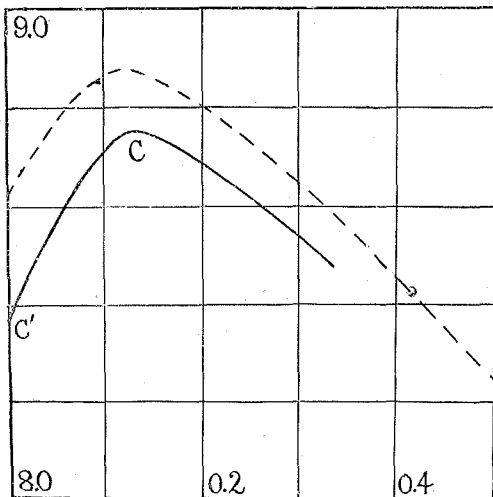
なる級数とすれば

$$v'(r, t) = v_1' F(r, t) - (v_1' - v_2') H(r, t)$$

となることが證明される。 $r=0$ とした H を、 $s=kt$ の函数として第3圖に表わしてある。 $H(0, s/k)$ は、 $s=0$ で1で、 s の増加とともに急激にへつてゆき、 $s=0.3$ のあたりから急にその減少度がゆるやかになる。このことから、この $H(0, s/k)$ と、やはり第3圖に書きいれてある $F(0, s/t)$ と、をむすびあわせて作つた函数

$$v'(0, t) = v_1 F(0, t) - (v_1 - v_2) H(0, t)$$

が、 $t=0$ では v_2' の値をとり、それからしばらくのあいだ上昇して極大値に達し、そのあとは減少しつづけるということがわかる。



第 5 圖

C 點, C' 點の決定

第1圖の實例にこれをあてはめるのであるが、この場合、細胞液凍結温度 v_1' は $10 - 0.7 = 9.3$ とわかるが、C' 點の温度 v_2' は、C' 點自身が不明であるからわからない。それで、 v_2' として、まず、C 點の温度を擇んでみる。すると、 $v_2' = 10 - 1.38 = 8.62$ で、これらの値をいれて $v'(0, t)$ のグラフをかくと第5圖の破線のようなになる。このグラフから、極大値は最初の温度より 0.26 だけ高いことがわかる。それで、C' 點の温度は C 點の温度より 0.26 だけひくいと考え、C' 點の温度 v_2' を、上に採用した 8.62 から $8.62 - 0.26 = 8.36$ に訂正する。この v_2' の訂正值をつかつて、もう一度上の式をつか

つて $v'(0, t)$ を書いてみると第5圖の實線が得られる。

以上のようにして、C' 點をきめて、B 點から出發した曲線を、それが C' 點の温度に達し

たところで打きり、それに今もとめた第5圖の實線のグラフをつぎたしたものを第4圖にかいてある。

C 點をすぎたあとは、資料表面温度は中心温度よりもひくく、ついに、表面温度は資料實質の凍結温度に達し、表面温度の降下はそこで停まる。このときの資料内の温度分布は、B 點のものと似たものになつてゐるはずで、第4圖の右上方に D' と印したような温度分布をもつちがいない。中心温度は、このあとも降下をつづけ、ついに資料全体が資料實質の凍結温度と一致する D の温度分布になる。

第4圖の B 點以後の實線で表わされた理論曲線と、十字印で表わした實測値との一致の程度はあまりよいとはいわれませんが、また全然だめであるともいわれない。上の計算の手續きを見てもわかるように、理論曲線を求めるのには B 點、C 點の温度や時刻にかなり正確な値がいる。しかし、第4圖の實測點は 15 sec おきに観測したものであつて、この實測が正確に B 點、C 點を擷んだかどうか疑問である。したがつて、いまここで、上の結果からはつきりしたことをいうわけにはいかない。しかし、第1次凍結に關しての青木の考えはだいたいに於て正しく、訂正を要するとしても少しの訂正ですむであろうという程度のことは結論して差つかえないものとする。

 $x J_1(x)/J_0(x)$ の 數 値 表

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.00005	0.0002	0.00045	0.0008	0.00125	0.00180	0.00245	0.00321	0.00406
0.1	0.0050	0.0061	0.0072	0.0085	0.0098	0.0113	0.0128	0.0145	0.0163	0.0181
0.2	0.0201	0.0222	0.0243	0.0266	0.0290	0.0315	0.0341	0.0368	0.0396	0.0425
0.3	0.0455	0.0486	0.0519	0.0552	0.0587	0.0622	0.0659	0.0697	0.0735	0.0775
0.4	0.0816	0.0859	0.0902	0.0947	0.0992	0.1039	0.1087	0.1136	0.1187	0.1238
0.5	0.1291	0.1341	0.1373	0.1456	0.1514	0.1573	0.1633	0.1694	0.1757	0.1821
0.6	0.1886	0.1953	0.2020	0.2090	0.2161	0.2232	0.2306	0.2390	0.2457	0.2535
0.7	0.2613	0.2694	0.2776	0.2859	0.2944	0.3031	0.3119	0.3209	0.3300	0.3392
0.8	0.3486	0.3583	0.3678	0.3780	0.3881	0.3984	0.4089	0.4194	0.4303	0.4413
0.9	0.4524	0.4638	0.4702	0.4871	0.4991	0.5112	0.5236	0.5362	0.5489	0.5619
1.0	0.5751	0.5885	0.6022	0.6160	0.6302	0.6444	0.6591	0.6739	0.6889	0.7043
1.1	0.7198	0.7357	0.7519	0.7681	0.7848	0.8017	0.8190	0.8364	0.8544	0.8725
1.2	0.8910	0.9097	0.9288	0.9482	0.9680	0.9882	1.0087	1.0296	1.0508	1.0724
1.3	1.0943	1.1074	1.1396	1.1630	1.1868	1.2108	1.2352	1.2605	1.2858	1.3117
1.4	1.3383	1.3655	1.3932	1.4214	1.4500	1.4793	1.5092	1.5398	1.5708	1.6026

文 献

- 1) 青木 藤 1949 馬鈴薯塊莖の凍結曲線. 低温科學, 2, 185~193.
 ——— 1950 馬鈴薯塊莖の再凍結曲線の型について. 同誌, 3, 207~217.
 ——— 1950 植物組織の凍結曲線の型と凍結様式との關係. 同誌, 3, 219~227.
 ——— 1948 植物組織の凍結曲線上の二つの氷點. 同誌, 4, 59~64.
 ——— 1948 植物凍結曲線分析の一方法. 同誌, 4, 79~84.
- 2) 照本 勳 1951 貯藏馬鈴薯塊莖の過冷却について. 低温科學, 8, 177~178.
 ——— 植物生組織の第一氷點と過冷却. 科學, 21, 596.
- 3) 例えば, 川下研介, 熱傳導論; 小平吉男, 物理數學 第2卷; H. S. Carslaw, Conduction of Heat in Solids.
- 4) 林 圭一, 高等函數表; Jahnke-Emde, Funktionentafeln.

Résumé

Aoki and Terumoto measured the temperature at the centre of a cylindrical potato piece (diameter 5 mm, length 15 mm) as it was cooled and frozen in the environment of cold air at -10°C . The piece was cooled without freezing for some time according to the Newtonian law of cooling before it began to freeze when its temperature was reduced to several degrees below 0°C . Immediately on freezing the temperature was raised to a temperature one or two degrees below 0°C called the first freezing point. Then it was again reduced to a constant temperature called the second freezing point and was kept at this temperature for some time before it decreased further. The second freezing point is without doubt the freezing point of the body of the piece. The appearance of the first freezing point was explained by Aoki as the result of freezing of a layer of sap enveloping the surface of the piece. A number of cells of potato tuber were broken when the piece was cut out of it and the sap flowing out from them formed a thin layer over the surface of the piece.

The heat flow in the interior of the piece after the beginning of freezing of the sap layer was treated mathematically by the heat conduction theory. The theoretical curve and the measured values of temperature (cross marks) were shown in Fig. 4. The sap layer began to freeze at the point B and was completely frozen at the point C'. The time of freezing of the sap layer was not long enough to raise the temperature at the centre of the piece to the freezing point -0.7°C of the sap and it was still 1°C or so below this temperature when the freezing was completed. The surface of the piece which had been kept at the temperature of sap freezing point began to be cooled at the point C' but the heat flow towards the centre of the piece was still going on at this point. The temperature at the centre of the piece was, therefore, raised to the point C after it had reached the point C' and then it began to decrease again. Since the point C' could not be determined experimentally, it was estimated by the method of trial and error.