Zyungo YOSIDA 1953 Distribution of Fog Density in a Forest. *Low Temperature Science*, **11**. (With English résumé p. 6)

林のなかの霧濃度の分布*

吉 田 順 五

(低温科學研究所 應用物理學部門)

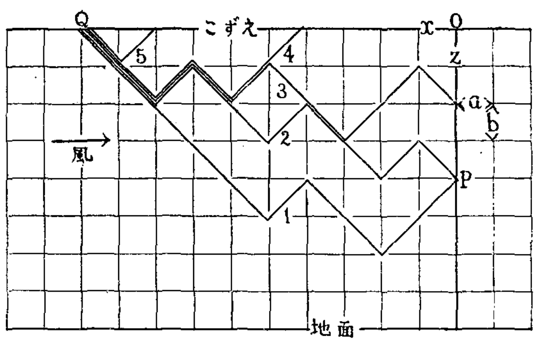
(昭和28年7月受理)

I

霧が風に送られて林のうえを吹きすぎているとき，霧は林の上面から林の内部にむかつて擴散してゆく。定常狀態を假定して，林のなかの霧の濃度の分布を理論的に導いてみる。

林は全体が一様の構造で，その上面は地面に平行なひとつの平面であるとする。第1圖の格子模様はこの林の模型の垂直縱斷面を表わす。林のなかの任意の1點 P での霧の濃度 φ を求めるのがこの論文の目的である。ここで，霧の濃度とは，單位体積のなかにふくまれる霧粒の數を表わすものとする。

P 點のまうえの梢の點を原點 O とし，そこから下にむかつて z，風上にむかつて x の坐標をとる。林が風上の方に充分ながく續いていれば，P 點の霧の濃度は z の函數として求められるはずである。



第1圖 林のなかの霧粒運動の經路

霧粒は，林の上面のある點 Q で林のなかにはいり，林のなかの平均風によつて水平にはこばれるとともに，その風の亂流によつて林のなかの方に移されることによつて P 點に達するわけである。いま，この霧粒の運動をつぎのように簡單にして考える。林のなかの平均風速は，z の値によらず一定で V であるとし，霧粒の水平運動は，つねに，それとおなじ速度 V で風下にむかつて起つているとする。この水平運動とともに霧粒は亂流により上下の方向にも移動するが，その運動は一定時間間隔 τ ごとに，上または下にむかつて一定距離 b だけ，おなじ確率をもつて進むということによつて行われるものとする。いま，このことを第1圖によつて說明する。$V\tau=a$ として，林の縱斷面を，間隔がそれぞれ a, b の鉛直平行線，水平平行線の組で格子にわける。Q 點から林にはいつた霧粒は，まず，すべて Q 點

* 北海道大學低温科學研究所業績 第227號

の右下の點 Q′ (第2圖參照) に達するが，ここで $1/2$ の確率で右上または右下にむかつて進む。右上にむかう路筋5をとるものは，ふたたび梢に達して，その上の大氣のなかに逃れる。5以外の路筋をとるものは，さらに Q′ の右下の點で上または下に向うというようにして進んでいく。そして，そのうちのあるものは，1, 2のような路筋をとつて P 點に達し，3のような路筋をとるものは P 點を通らないで P 點より風下の方に進んでしまう。また4のような路筋をとるものは，梢に達して林のそとえ出ていく。したがつて，Q 點から林にはいつた霧粒は，ある確率 W で P 點に到達することとなる。P 點 Q 點の坐標をそれぞれ $(0, z)$, $(x, 0)$ とし

$$N=(x/a)-1, \qquad m=z/b$$

とする。また，路筋1, 2のように梢にいちども接觸することなくある點から他の點にいたる路筋を「路筋A」ということにして，Q から P にいたる路筋 A の數を $A(m, N)$ で表わすことにすれば，確率 W が

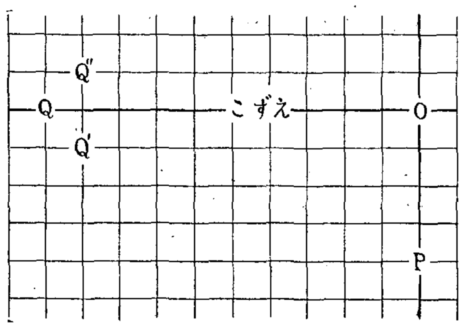
$$W(m, N) = A(m, N)\,(1/2)^N \qquad \cdots\cdots (1)$$

で與えられることは明らかである。

II

$A(m, N)$ がわかれば $W(m, N)$ の値がきまるわけで，$A(m, N)$ は Chandrasekhar[1]) の論文に示された方法をつかつて，次のようにして容易に求めることができる。

第2圖は，第1圖の格子を梢の上にまで擴げてかいたもので，Q′ 點，Q″ 點はそれぞれ，Q の右下，右上の格子點を表わす。さて，Q から P に至る路筋 A の數が，Q′ から P にいたる路筋 A の數にひとしいことは明らかである。そして，それはまた P から Q′ に至る路筋 A の數にひとしい。したがつて，P から Q′ に至る路筋 A の數を求めれば，それが求めようとしている $A(m, N)$ になるわけである。



第2圖 梢の上まで擴張した格子

さて，路筋 A のように梢に接觸してはならないという制限をうけない路筋を「路筋 B」となずけよう。すると，P から Q′ に至る路筋 A の數は

(P から Q′ に至る路筋 B の數) − (P から Q″ に至る路筋 B の數)

にひとしいことが容易に證明される。ところで，m' 個の格子間隔，N' 個の格子間隔をへだてたふたつの點のあいだの路筋 B の數は，一般に

$$B(m', N') = \frac{N'!}{[\frac{1}{2}(N'+m')]!\,[\frac{1}{2}(N'-m')]!} \qquad \cdots\cdots (2).$$

で，表わされる。それ故，Q から P に至る路筋 A の數は

$$A(m, N) = B(m-1, N) - B(m+1, N) \quad \cdots\cdots (3)$$

で與えられることとなる。なぜならば，P 點と Q′ 點とのあいだの格子間隔の數は $(m-1, N)$，P 點と Q″ 點とのあいだの格子間隔の數は $(m+1, N)$ だからである。したがつて，ここで

$$W'(m', N') = B(m', N')\,(1/2)^{N'}$$

とおくと，霧粒が梢に接觸しないで，Q から P に至る確率は

$$W(m, N) = W'(m-1, N) - W'(m+1, N) \quad \cdots\cdots (4)$$

となる。しかるに，m, N が大きいときには

$$W'(m, N) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}}\exp(-m^2/2N)$$

なる關係があるので，(4) 式は

$$W(m, N) = -2\frac{dW'}{dm} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi N}}\cdot\frac{m}{N}\cdot\exp(-m^2/2N) \quad \cdots\cdots (5)$$

とかきあらわされることになる。

III

計算を容易にするために，(5) 式をさらに次のように變更する。P 點をそのなかにふくむように鉛直方向に dz なる長さをとる。dz は鉛直方向の格子間隔 b よりは大きいものとして，dz のなかには P 點以外にもいくつかの格子點が含まれるものとする。すると，Q 點から林にはいつた霧粒が，dz のなかの何れかの格子點に到達する確率として

$$w(z, x)\,dz = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{-2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\cdot z\exp(-az^2/2b^2x)\,dz \quad \cdots\cdots (6)$$

が得られる。これは

$$aN = x, \qquad bm = z$$

なる關係をつかつて (5) 式から容易に導くことができる。

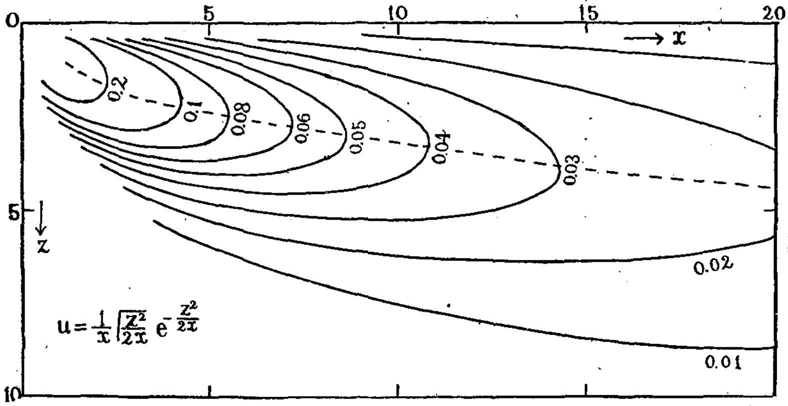
(6) 式がどんな性質をもつたものかをみるために，$a=b=1$ とおき，さらに $\sqrt{\pi}$ をかけると $w(z, x)$ は

$$u(z, x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{z^2}{2x}}\exp(-z^2/2x)$$

となるが，u の値の分布を圖に表わしたのが第 3 圖である。實線は，u の値のひとしい點をつらねたものであつて，これにより梢の面の一點から林のなかにはいつた霧粒が，どのような確率をもつて林の内部の點に到達するかの大体の様子をみることができるであろう。

つぎに，Q 點を含む水平の長さ dx を考え (dx は水平格子間隔 a よりは長いものとする)，dx を通過して時間 dt のあいだに林のなかにはいる霧粒の數は，梢に於ける φ の値を φ_0 とすると，

$$\varphi_0\cdot v\cdot dx\cdot dt$$



第 3 圖 梢の面の一點からはいつた霧が林の内部で示す分布
(木の葉や枝が霧粒を捕捉しない場合)

となる。v は亂流の速度の平均垂直成分で，dt は，亂流の週期にくらべては充分に長くとらなければならない。この霧粒のうち

$$w(z,\ x)\cdot\varphi_0\cdot dx\,dz\,dt$$

だけが，時間 $t=x/V$ ののちに P 點に於ける dz を通過するわけであるが，P に達する霧粒の濃度 φ は梢の面の各點からはいつた霧粒の綜合である。それで，Q 點に於ける dx から林にはいつた霧粒による φ の部分を $d\varphi'$ とすると，

$$w(z,\ x)\cdot\varphi_0\cdot dx\,dz\,dt = V\cdot d\varphi'\cdot dz\,dt$$

がなりたたなければならない。なんとなれば，P 點に於ては，霧粒は水平方向に V なる速度で移動しつつあり，定常狀態の條件により，dx を dt 時間に通過した霧粒のうち P 點に達した霧粒は，おなじ時間 dt のあいだに，(ただし時刻は x/t だけおくれて)，P 點に於ける dz を通過してしまわなければならないからである。かくして，

$$d\varphi' = \varphi_0\frac{v}{V}w\ (z,\ x)\,dx \quad\cdots\cdots(7)$$

がえられる。

いままでは，霧粒は林の木の葉や枝で捕捉されることがないと考えてきた。ここで霧粒は，林のなかを單位長さだけ進むごとに確率 μ でもつて林に捕捉されると假定する。すると，Q 點の dx から林にはいつて，P 點の dz に達する霧粒の數は

$$d\varphi = d\varphi'\exp(-\mu l)$$

で與えられることになる。ここに l は，Q 點から P 點と至る霧粒の路筋の長さである。この路筋は多數あるけれども，いずれも $x\sqrt{a^2+b^2}/a$ にひとしいことは明らかである。それで，

$$\lambda = \mu\sqrt{1+(b/a)^2}$$

とおくと，

$$d\varphi = d\varphi' \cdot \exp(-\lambda x) \quad \cdots\cdots (8)$$

と書くことができる。

IV

P點に於ける霧粒の濃度 φ は，O點より風上にある梢の各點から林にはいつた霧粒のうちP點に到達したものを全部加えあわせたものにひとしい。すなわち，x の函數として表わされた(8)式の $d\varphi$ を0から ∞ まで積分すれば φ がえられる。かくして

$$\varphi = \int_0^\infty d\varphi = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} b^{-2} z \varphi_0 \frac{v}{V} \int_0^\infty x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\lambda x - \frac{az^2}{2b^2 x}\right) dx$$

$$= \varphi_0 \frac{a}{b} \frac{v}{V} \exp\left(-z\sqrt{2a\lambda}/b\right) \quad \cdots\cdots (9)$$

として，林のなかの霧粒の濃度 φ が z の函數としてえられたわけである。

定義により a は $V\tau$ にひとしい。また b はだいたいに於て $v\tau$ にひとしいとしてよいであろう。そうすると，(9)式は

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi \exp(-z/L) \\ L &= \sqrt{v/V}\ \sqrt{v\tau/2\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (10)$$

の形に書きなおされる。

この結果によれば，霧粒の濃度は梢から下の方に進むにつれて，指數函數的に減つていき，梢から L だけ下の點では，梢での値の 1/e になる。もし，林が霧を捕捉するということがないならば $\lambda=0$ で $\varphi=\varphi_0$ となり，林のなかの霧粒の濃度は一様とならなければならない。そして，それは，直接物理的に考えれば當然のことである。

V

巨視的な立場からみれば，林のなかで，霧は(9)または(10)式で與えられる濃度分布を保つたまま水平に V なる速度で移動しているとみなされる。したがつて，單位の斷面積をもつ鉛直な柱のなかにふくまれる葉や枝によつて單位時間のあいだに捕捉される霧粒の數は

$$V\lambda \int_0^\infty \varphi(z)\,dz = \varphi_0 v \sqrt{a\lambda/2} \quad \cdots\cdots (11)$$

で與えられることになる。林の梢の高さに水平な單位面積を考えると，霧はこの面を通して林のなかに入つたり，林から出たりしているわけであつて，入る方が出るものよりは多い。そして，入るものと出るものとの差だけが林に捕捉されるわけで，これが林の上面の單位面積についての霧捕捉能 $\boldsymbol{\Phi}$ を表わすこととなる。いまわれわれの考えているのは定常狀態であるが，このときには $\boldsymbol{\Phi}$ が(11)式にひとしくなければならないことは明らかである。したがつて，林の上面の霧捕捉能として

$$\Phi = \varphi_0 v \sqrt{\frac{a\lambda}{2}} \qquad \cdots\cdots (12)$$

がえられる。

林の霧捕捉能 Φ が襲來する霧の濃度に比例することは當然豫期されることで，そのことは(12)式にも表わされている。しかし，Φ は，霧粒が水平に單位長さを動くあいだに林の葉や枝に捕捉される確率 λ には比例しないで，その平方根に比例することは注意すべきことであろう。

文 献

1) Chandrasekhar, K. 1943 Stochastical Problems in Physics and Astronomy. Rev. Mod. Phys., 15, 1.

Résumé

On the assumption that the vertical motion of a fog particle caused by turbulence of air in the forest is the same as the so-called one-dimensional "random walk", the vertical distribution of fog particles in the forest is deduced theoretically, with the result that the fog density diminishes exponentially downwards.