



Title	永久磁石を封入した“ウキ”を用いて液体の比重の温度変化を測定する電磁的方法
Author(s)	大野, 武敏; ONO, Taketoshi
Citation	低温科学. 物理篇, 13, 1-10
Issue Date	1954-12-30
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/17885">https://hdl.handle.net/2115/17885</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	13_p1-10.pdf



## 永久磁石を封入した“ウキ”を用いて液体の 比重の温度變化を測定する電磁的方法\*

大野 武 敏

(低温科學研究所 純正物理部門)

(昭和29年12月受理)

### 装 置

第1図に於て、Gは比重を測ろうとする液体を容れたガラス容器で、内径約1.5cm、長さ約13cmである。ガラス製のウキBは、Gの内壁よりやや小さく作られており、Bに封入した磁石一斜線を施した部分一は、その底部が糊で固定されている。用いられた磁石は「アルニコ」と称する軟かくてナイフで任意の形に加工することが出来るものである。Mは磁場を与えるための電磁石、Sはガラス管に刻まれた線で、ウキの尖端がSに一致して静止していることを確認するための目印である。以上の装置に防水を施し、適当な支持具に固定して、水恒温槽に入れたところを示したのが、第2図である。恒温槽内にはこの外に水銀・トルオール温度調節器、温度計、電熱器、攪拌器など恒温装置に必要な道具が入っているが、これ等は図示されていない。ウキの尖端が刻線Sに一致して静止していることを正確に観測するためには、倍率10倍程度の水平顕微鏡を用いたが、それも図示されていない。

### 測定方法

液体の温度が $t^{\circ}\text{C}$ に保持された時、ウキに働く力は垂直方向に

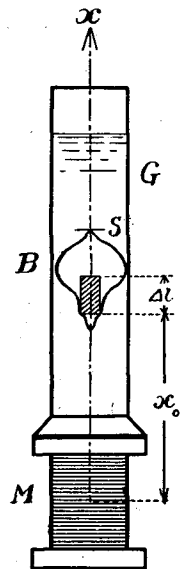
上向きに 浮力;  $\sigma Vg$  ダイン

( $\sigma$ : 液体の密度,  $V$ : ウキの体積)

下向きに 重力;  $mg$  ダイン

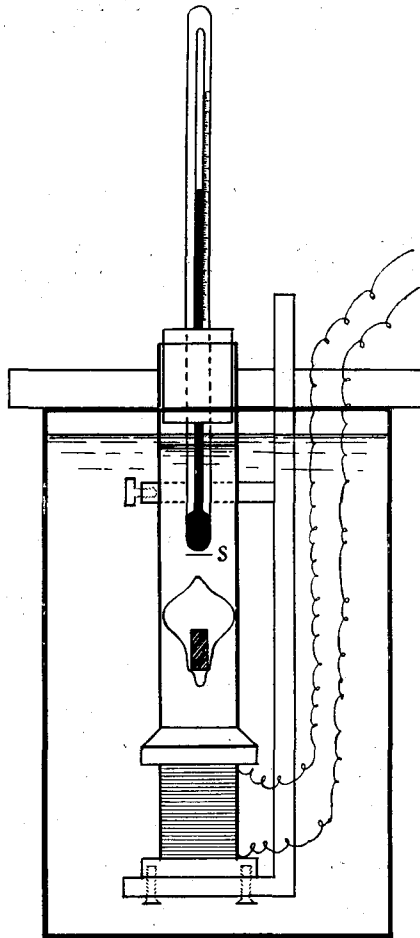
( $m$ : ウキの全質量)

である。もし

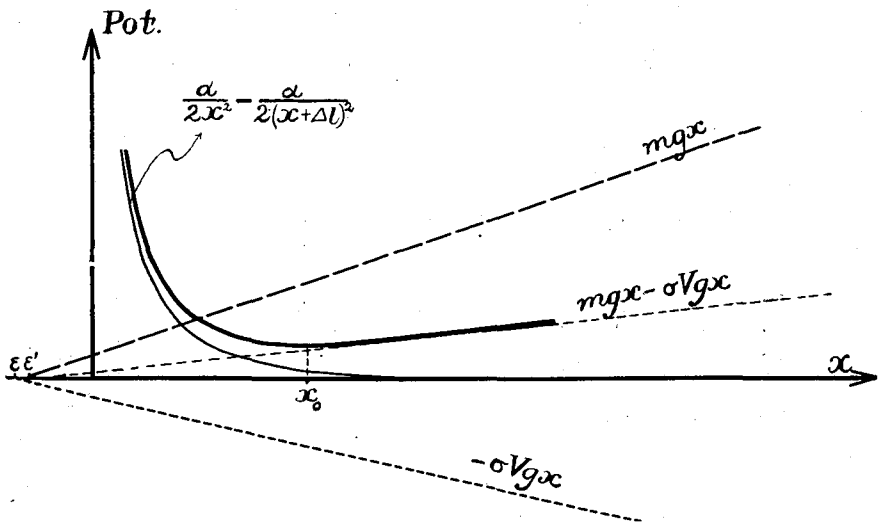


第1図

\* 北海道大學低温科學研究所業績 第226號



第 2 圖



第 3 圖

$$\sigma Vg = mg$$

ならば、ウキは液中任意の位置に静止するはずである。今この温度で

$$mg > \sigma Vg$$

であるとすると、ウキは底へ沈むが、この時電磁石に適当な大きさの電流を、磁石に対して斥力を及ぼすような方向に、流してやるならば、ウキを再び上昇せしめ、その尖端が刻線 S と一致して静止するような状態までもつてくる事が出来る。この位置が安定な平衡の位置であることは、ウキに作用する三つの力（浮力、重力、磁場による斥力）のポテンシャル曲線を書いてみればたやすく了解出来る。即ち上向きの力を正に、下向きの力を負に、且つ  $x$  軸（鉛直方向）の原点を電磁石の中心にとると

$$\text{浮力} = \sigma Vg: \text{ポテンシャル} = -\sigma Vg(x + \epsilon)$$

$$\text{重力} = -mg: \text{ポテンシャル} = mg(x + \epsilon')$$

$$\begin{aligned} \text{磁力} &\cong \frac{a}{x^3} - \frac{a}{(x + \Delta l)^3} \text{**}: \text{ポテンシャル} \cong \frac{a}{2x^2} - \frac{a}{2(x + \Delta l)^2} \\ &\cong \frac{a}{x^3} \cdot \Delta l \quad (\Delta l \ll x) \end{aligned}$$

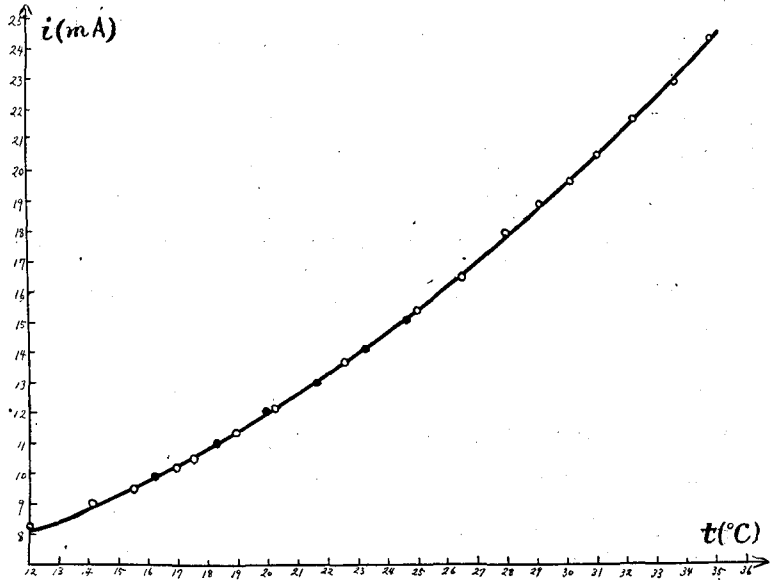
$\epsilon$  は磁石の底面と浮力作用点との間の距離。 $\epsilon'$  は磁石の底面とウキの重心との間の距離。 $a$  は正の比例定数で電流  $i$ , 封入された磁石の強さなどに関係する。 $\Delta l$  は磁石の長さ。

これらのポテンシャルを加え合せた合ポテンシャル曲線を作ると  $x = x_0$  で極小を生ずる。 $x = x_0$  が安定の位置に外ならない\*。

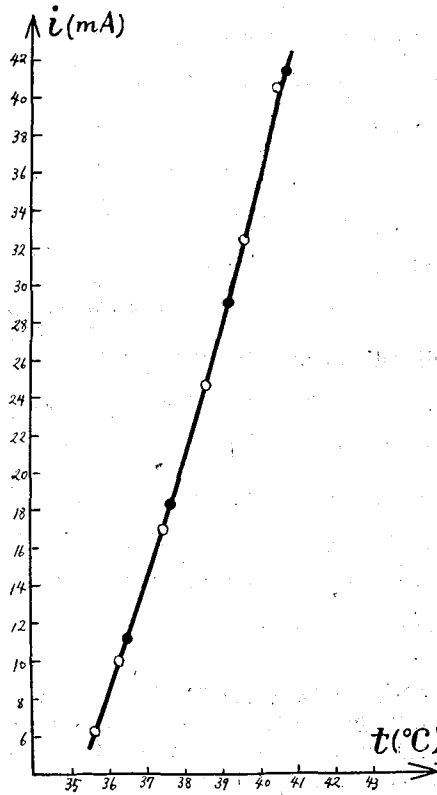
次に温度を  $t_1^\circ\text{C}$  ( $> t_0^\circ\text{C}$ ) に上げると、浮力が減少（液の密度が減少する場合には）するので、ウキは刻線 S の位置よりも下つて新しい位置で静止する。これを再び S まで持上げるためには更に磁場を強くしなければならない。このようにして、温度と電流を順次変化してゆけば、両者の間の関係が求められ、更に標準液体として既知の比重をもつた（例えば）水を使えば、比重と電流との間の calibration curve を求める事が出来る。従つて、比重と電流とが直線的な関係で結ばれ、且つ再現性が良ければ、感度に対する適当な考慮のもとに、比重計としてならびに比重の温度変化測定用として使用出来るのである。実例を第 4~7 図に示す。液体は水。第 4 図、第 5 図は異つたウキを用いて測つた結果で、何れも横軸は温度、縦軸はウキを所定位置に静止せしめるに要した電流である。第 6 図、第 7 図は第 4 図、第 5 図をそれぞれ電流-比重の曲線に書き直したもので、これは完全に直線的な関係で結ばれている。図中黒丸と白丸は日を変えて測定した値を示している。

\* 電磁石に鉄心が入っている場合は、磁石と鉄心との間の引力ポテンシャルも考慮に入れなければならないが、本質的には第 3 圖の關係に變化はなく、ただこの時は  $\sigma Vg = mg$  の場合でも電磁石に一定の電流を流してウキを安定な位置に静止せしめる事が出来るという點にちがいがあつた。

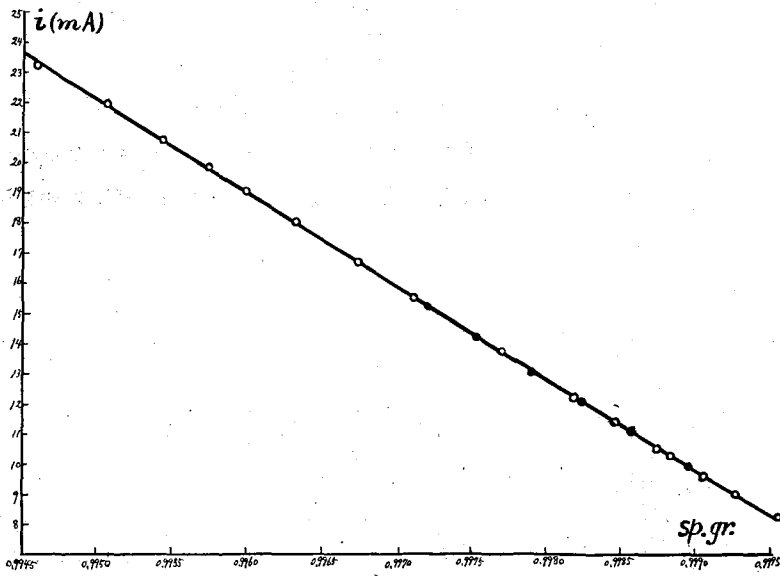
\*\* 電磁石による磁力は厳密には（中心軸上で） $a \left( \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x + \Delta l)^3} \right) + \frac{a\alpha^2}{4} \left( \frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x + \Delta l)^5} \right)$  —但し  $a$  は電磁石の高さ—である。しかし、この第 2 項は考慮に入れなくても議論に本質的影響は及ぼさない。



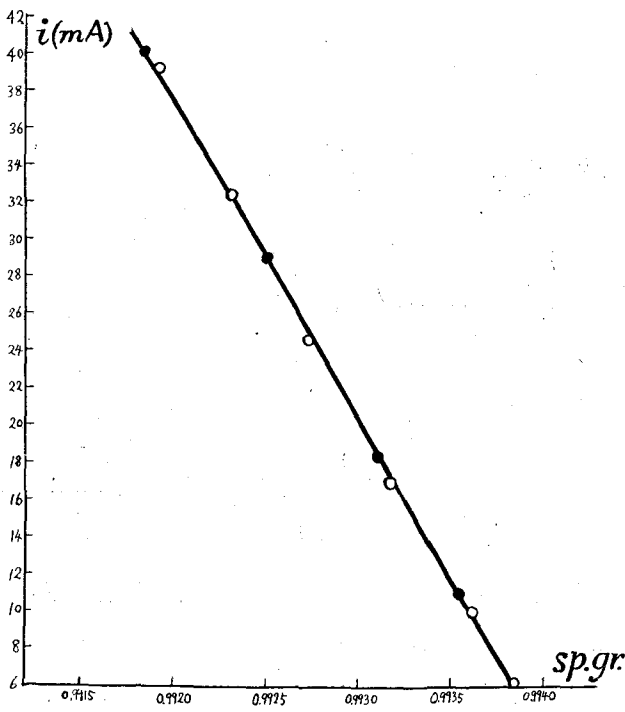
第 4 圖



第 5 圖



第 6 圖



第 7 圖

## 感 度

感度は密度の変化  $\Delta\sigma$  に伴つて、ウキが S の位置から下つて、新しい平衡位置に到達するまでの変位  $\Delta x$  の大きさに支配される。ところが  $(mg - \sigma Vg)$  が大きくなるにつれて、S の位置にウキを静止させるために必要な電流が大きくなり、従つて  $\Delta x$  が小さくなるから、感度は低下する。即ち、本法で比重を測定する時、感度は一定でなくて  $(m - \sigma V)$  の函数になる。数式的に簡単な説明を試みると：

ウキに働く力は

$$F = -mg + \sigma Vg + \frac{\alpha}{x^3} - \frac{\alpha}{(x + \Delta l)^3}.$$

平衡状態 ( $x = x_0$ ) に於ては  $F = 0$  であるから、

$$0 = -mg + \sigma Vg + \frac{\alpha}{x_0^3} - \frac{\alpha}{(x_0 + \Delta l)^3} \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore \alpha = \frac{mg - \sigma Vg}{\frac{1}{x_0^3} - \frac{1}{(x_0 + \Delta l)^3}} \cong \frac{(m - \sigma V)gx_0^4}{3\Delta l} \quad (\Delta l \ll x) \dots\dots\dots (2)$$

( $\alpha$  は電流  $i$  に比例するから、電流計の読みが  $\sigma$  と直線的な関係で結ばれていることはこれから明らかである)。

(1) 式から  $\frac{\partial x_0}{\partial \sigma}$  を求める。(即ち磁場を一定にしたまま、温度従つて密度を変化した時の平衡位置の変化を求める) と

$$0 = Vg + \left( -\frac{3\alpha}{x_0^4} + \frac{3\alpha}{(x_0 + \Delta l)^4} \right) \cdot \frac{\partial x_0}{\partial \sigma},$$

$$\therefore \frac{\partial x_0}{\partial \sigma} = \frac{Vg}{3\alpha \left( \frac{1}{x_0^4} - \frac{1}{(x_0 + \Delta l)^4} \right)} \cong \frac{Vg}{12\alpha} \cdot \frac{x_0^5}{\Delta l}$$

となる。

これに、(2) 式の  $\alpha$  を入れると

$$\frac{\partial x_0}{\partial \sigma} = \frac{V \left( \frac{1}{x_0^3} - \frac{1}{(x_0 + \Delta l)^3} \right)}{3(m - \sigma V) \left( \frac{1}{x_0^4} - \frac{1}{(x_0 + \Delta l)^4} \right)} \cong \frac{V \cdot x_0}{4(m - \sigma V)} \dots\dots\dots (3)$$

即ち、感度は  $m - \sigma V$  に反比例するのである。(与えられた条件の下に於ける実験では感度は  $i$  に反比例するけれども、条件  $(x_0, \Delta l)$  が異つても常に  $i$  そのものに反比例するという事にはならない)。

実例を第 4 図の場合にとると

13°C 近傍では  $\frac{1}{30}^{\circ}\text{C}$  即ち  $\Delta\sigma = 0.000004$

30°C 近傍では  $\frac{1}{6}^{\circ}\text{C}$  即ち  $\Delta\sigma = 0.00006$

の程度の variation が、明瞭にキャッチし得る最大限度のウキの変位に対応するものであつた。感度を増すためには、(3)式から推定されるように、

i) ウキの体積  $V$  を増すこと

ii) 電磁石による磁場の inhomogeneity の成るべく小さい処でウキが平衡を保つようにする (即ち  $x_0$  の値をなるべく大きくすること)

が必要である。使用する電流計、磁石の強さが与えられれば、おのずから適当な  $x_0$  の値がきまつてしまうが、なるべく  $x_0$  を大きくして測定出来るような十分強力な磁石並びに電磁石 (及びそれに応じた電流計) を選ぶ方が望ましいのである。なお(3)式の近似式では、感度は  $4l$  に無関係になるが、厳密には  $4l$  を小さくする程感度は増すのである。

### 精 度

密度の変化  $\Delta\sigma$  に応じて生じたウキの変位  $\Delta x_0$  をもとの位置、刻線  $S$  までひきもどすに必要な電流の変化を  $\Delta a$  ( $a$  は  $i$  に比例する) であらわす。一方  $S$  線にウキの尖端が一致することを見定める時に伴う測定誤差  $\delta x_0$  に対応する  $a$  の範囲を  $\delta a$  とすれば、この実験の測定の精度は

$$\frac{\Delta a}{\Delta\sigma} \bigg/ \frac{\delta a}{\delta x_0}$$

に比例する (まだ他にあり得る誤差の原因は一応考慮外に置いて)。なぜなら、精度は単位の密度変化に対する電流の変化が大きいほど大きく、またウキの位置測定に附随する電流誤差が小さいほど大きいからである。この量を計算すると

$$\frac{\partial a}{\partial\sigma} \bigg/ \frac{\partial a}{\partial x_0} = \frac{\partial x_0}{\partial\sigma} \cong \frac{Vx_0}{4(m-\sigma V)}$$

即ち、今の場合には精度と感度とが完全に一致するのである。

$\frac{\delta a}{\delta x_0}$  を別箇に計算してみると

$$\frac{\delta a}{\delta x_0} \cong \frac{4x_0^3(m-\sigma V)g}{34l}$$

となり、 $\delta x_0$  に伴う電流誤差  $\delta a$  は  $x_0$  を大きくすることによつて著しく増大するように思われるけれども、同時に単位の密度変化に伴う電流の変化

$$\frac{\Delta a}{\Delta\sigma} \cong \frac{x_0^4 V g}{34l}$$

の方が  $x_0$  の増加によつて、もう一桁大きく増大するから、測定誤差は  $x_0$  と共に ( $x_0$  に反比例

して)却つて小さくなるのである。要するに測定の精度を増すには、測定しようとする液体の密度範囲を適当にせまい部分範囲 ( $\sigma_0 \sim \sigma_1, \sigma_1 \sim \sigma_2 \dots$ ) に分け、各々の部分範囲について、それぞれ適当なウキ (体積  $V$ ) を用いること、電磁石と所定のウキの平衡位置  $S$  との距離  $x_0$  をなるべく大きくすること、ウキの平衡位置測定の精度を高めること、及び以上の条件に適応した精密電流計並びに可変抵抗器を用いることが要請せられるのである。

### 補 正

液を入れる容器もウキも石英ガラスで出来ていれば問題はないが、ガラス製である場合には温度の変化による膨張収縮が測定値に及ぼす影響を考慮しなければならぬ。先ず、ウキの体積変化  $dV$  及び電磁石の表面から磁石の下端までの距離の変化  $dx_0$  が電流の読みに及ぼす影響  $da$  は (2) 式を微分して、

$$da = -\sigma V g \frac{x_0^4}{3\Delta l} \cdot \frac{dV}{V} + g(m-\sigma V) \frac{x_0^4}{3\Delta l} \frac{4dx_0}{x_0} \dots\dots\dots (4)$$

となる。この誤差  $da$  は密度の真の値  $\sigma$  に  $d\sigma$  の誤差を与えるが、その量は、同じく (2) 式を微分して得られる

$$da = -Vg \frac{x_0^4}{3\Delta l} \cdot d\sigma \dots\dots\dots (5)$$

で与えられる。(4)式と(5)式とを等しいと置いて、 $d\sigma$  と  $dV$ ,  $dx_0$  との関係の求めると、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{\sigma} &= \frac{dV}{V} - \frac{4(m-\sigma V)}{V\sigma} \frac{dx_0}{x_0}, \\ \frac{\sigma+d\sigma}{\sigma} &= 1 + \frac{dV}{V} - \frac{4(m-\sigma V)}{V\sigma} \frac{dx_0}{x_0}, \\ \sigma &\cong (\sigma+d\sigma) \left\{ 1 - \frac{dV}{V} + \frac{4(m-\sigma V)}{V\sigma} \frac{dx_0}{x_0} \right\} \end{aligned}$$

となる。即ち、密度の真の値  $\sigma$  を求めるには、測定値  $\sigma+d\sigma$  に  $\{ \}$  だけの因子を乗じてやらなければならない。ところで、普通のガラスの場合には線膨脹係数が  $1 \times 10^{-5}$  程度であるから  $\frac{dV}{V}$  は温度変化  $\Delta t$  を  $10^\circ\text{C}$  として  $3 \times 10^{-4}$  程度となり、密度の値には小数点以下4桁目にひびいて来る。従つてこの補正は無視することが出来ない。しかし  $\frac{4(m-\sigma V)}{V\sigma}$  の方は  $\Delta t = 10^\circ\text{C}$  として  $1 \times 10^{-2}$  程度であるから、第2の補正項は  $1 \times 10^{-6}$  程度となり、測定精度が小数点以下6桁迄進まない以上は完全に無視してかまわないのである。かくて真の密度 = 測定値  $\times (1 - 3\beta\Delta t)$  (但し  $\beta$  はガラスの線膨脹係数) が得られる。

実際問題としては、比重既知の標準液体 (例えば水) について実測の  $i-\sigma$  曲線が得られていれば、その曲線から他の液体の  $\sigma$  を求めようとする際に、同一の  $i$  の値に対する、その液体の温度と標準液の温度との差を  $\Delta t$  と置いて補正を加えればよいのである。

### 測定上の注意

ウキが真の平衡状態に近づくと共に、その動きは多少緩慢になつて来る(第3図のポテンシャル曲線が **minimum** の近所でややゆるやかであることに対応して)。このためウキの尖端と刻線 S とが一致した状態が、水の場合でいうと、少くとも 40 sec 程度以上継続したとき、始めて電流の読みをとる必要がある。さもないと誤差が伴い易い。又実験継続中に液中に溶けている空気がウキの表面に気泡となつてつくことがあるので、気泡は丹念に取り除かなければならないことは云うまでもない。

### 結 語

この実験は本来、常温或はそれ以下の温度で過冷却する液体の比重の温度変化をピクノメーターを用いることなく、簡便且つ精密に測定したい目的で始めたもので、上述の如く永久磁石を封入したウキを利用する方法によつて第一段の目的は完全に果された。出来るだけ大きなウキを用い、これと下方に置かれた電磁石との距離を適当に大きくしさえすれば、原理的には感度並びに精度をいくらでも増すことが出来るので、今後この方法を微少な温度範囲(例えば、融点をはさんだ)に於ける比重の **anomaly** (もしあるとすれば)、種々の溶質の溶解に伴う密度の微小変化などの測定に、応用する予定である。

本法と類似の方法は Honick<sup>1)</sup>によつて発表されているが、それによると、本法の磁石の代りに軟鉄片を封入したウキを用いており、安定な釣合いの位置は存在せず、測定の精度も  $\pm 0.003$  (sp. gr.) 程度である点で、本法よりも劣つている。

この試みに当つて、終始堀健夫教授の御指導御援助を頂いた。ここに厚く感謝の意を表する。

### 文 献

- 1) Honick, K. R. 1954 An Electromagnetic Method of Measurement of Density or Specific Gravity of Liquids. J. Sci. Instr., 31, 1.

### Résumé

The instrument described accurately determines the temperature variation of specific gravity of liquids by measuring the electromagnetic force in terms of current required to maintain the immersed float at a fixed level in the liquid. The float contains a permanent magnet and its specific gravity is arranged slightly greater than the upper extreme of the range of specific gravity to be measured, so that the float may be driven upwards by the repulsive force from an electromagnet, which is put beneath the liquid container.

The accuracy as well as the sensitivity involved in the measurement decreases with the increasing difference between gravity and buoyancy, but can be made to increase by increasing the distance between the float and the electromagnet and by using as large a float as possible.

The method may conveniently be applied to the accurate measurement of temperature variation of density e. g. of supercooled liquids by the use of a suitable float for each selected temperature range.