



Title	積雪層の粘性圧縮 III
Author(s)	小島, 賢治; KOJIMA, Kenji
Citation	低温科学. 物理篇, 16, 167-196
Issue Date	1957-12-13
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/17934
Type	departmental bulletin paper
File Information	16_p167-196.pdf



積雪層の粘性圧縮 III*

小島賢治

(低温科学研究所 応用物理学部門)

(昭和32年7月受理)

I. 概 説

積雪は降積つた後、日がたつに従つて次第に厚さを減じ、密度は増加する。降つたばかりの新雪の密度は普通 $0.07 \pm 0.03 \text{ gr/cm}^3$ であるが、積雪の下層のしまり雪の密度は、冬の終りに 0.5 gr/cm^3 に近い値に達する。つまり、そのような雪の層の厚さは降り積つた当初の厚さの2割以下にまで圧縮されているわけである。野外の積雪の密度の増加の原因には、融雪、風圧による(新雪の)圧縮或いは水蒸気の凝結等いろいろな現象があるが、積雪自身の重さのために雪の粒子構造が塑性変形を行なつて、雪粒がつまることによる密度の増加が最も主なものである。筆者はこれを積雪層の粘性圧縮と呼ぶことにした。そして筆者は1954-1955, 1955-1956及び1956-1957年の3回の冬期間中、野外の積雪を形成する各層の密度の時間的変化をくわしく測定した。この測定結果と各層の受けていた雪圧とから、粘性圧縮に対する雪の強さ、すなわち粘性係数を計算し、それを雪が自然の積雪状態のままに示す粘性係数の値として決定したのである。

これより前、筆者は積雪の中から切出した雪の柱に一定の圧力を加えたときの雪の柱の縮みを測定し、雪の粘性係数を求める実験を行なつた。荷重を加えてから10分ないし20分後までの雪の縮みは、レオロジーで用いる Maxwell 模型と Voigt 模型とを直列につないだ模型の粘弾性縮みに対応させて説明される。そして、雪の歪時間曲線は測定時間の後半では直線であるとみなされるようになったので、その傾きから Maxwell 模型の粘性係数を求め、それを雪の粘性係数 η としたのである。

実験的測定では測定時間中雪の性質はほとんど不変である。しかし、自然積雪についての上記のような長期にわたる測定に於いては、積雪の性質は測定中に非常に変化してしまう。積雪を構成している氷の粒子は積雪が外部から力を受けていなくとも自発的に変形するし、また外部からの力の作用によつても変形する。実験的測定に於いては自発的変形は存在しなかつたわけであるが、自然積雪の測定に於いては、自発的変形と力による変形とが同時に現われてくるわけである。その結果、積雪各層の歪の増加速度は、積雪が深くなるにつれて圧力が時間と共に増加するにも拘わらず次第に小さくなる。このような場合、積雪をレオロジー模型で代表

* 北海道大学低温科学研究所業績 第377号

しようとするば、積雪を粘弾性係数の異なる多くの Maxwell 模型を組合せた模型を用いてあらわすか、或いは、ひとつの Maxwell 模型であらわすけれども、その粘弾性係数が時間と共に変化するとして取扱うことになる。筆者はこのうちの後者の取扱いかたによることにした。つまり、適当に短い時間間隔 $t \sim t + \Delta t$ の間の或る雪層の密度増加を $d\rho$ とし、この層がそのとき受けている圧力を $P(t)$ とし、 $\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)_t = P(t)/\eta(t)$ によつて与えられる $\eta(t)$ を時刻 t に於けるこの層の粘性係数としたのである。このようにして求めた粘性係数の値は、降つた当日の雪では $1 \sim 5 \text{ gr-wt}\cdot\text{day}/\text{cm}^2$ であるが、2 カ月後には $10^4 \text{ gr-wt}\cdot\text{day}/\text{cm}^2$ の程度に達する。このように粘性係数が大きくなるのは、雪が圧縮されて密度が大きくなることにもよるが、先にものべたように積雪粒子の昇華変形による粒子構造の自発的变化にも起因すると考えた。それで、先ず粘性係数が実際に降り積つてからの経過時間に対してどのように変化して行くかを調べ、次に、粘性係数と密度との関係を一般的な式であらわした。そして粘性係数と密度との関係式をもとにして雪の密度の時間的変化を雪圧と粘性係数とを含めた式であらわし、ひとつの雪の層に作用した積算圧力 $\int_0^t P(t) dt$ とその層の密度との関係をあきらかにした。又、これらの結果を利用して、積雪の密度の垂直分布を、雪の積りかたをいろいろに仮定した場合について計算で導き出すことを試み、その結果を測定値と比較した。

さきにあげた積雪柱の粘弾性的実験的研究¹⁾と、野外の積雪の粘性圧縮に関する測定結果のうち前 2 カ年の分はそれぞれ以前に報告^{2),3)}した。本報告では今年 (1956-1957) の測定結果を主とし、前の報告で述べたことの一部をもあわせて報告する。

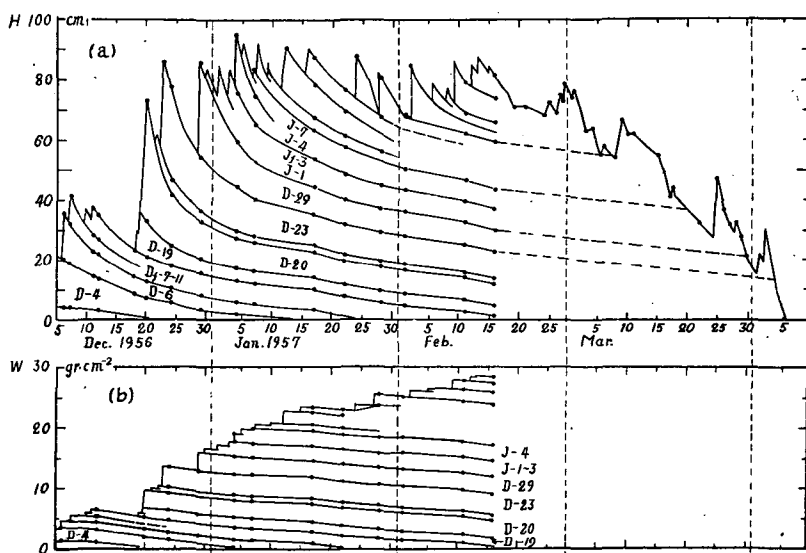
II. 測定法

野外の積雪の中に地面にとどくまでの穴を掘り、穴の鉛直の壁に現われる水平の縞を目印にして地面から雪の表面までを幾つかの層にわけ、各層の厚さと密度とを測定した。層の厚さを測るには、物指の一端を土の表面に立て、層の境界線の高さをよみとり、それらの差を求めて各層の厚さとした。比重を測るための試料は厚さ 3.0 cm、たてよこ $7.0 \times 5.8 \text{ cm}^2$ の直六面体である。試料をとるためのサンプラーは雪の断面に垂直に (水平方向に) さし込んだ。層の厚さと密度の測定と同時に、雪の温度の垂直分布も測り、雪の切口の写真と、各層の雪の粒子の顕微鏡写真をも撮影した。このようないわゆる断面測定を北大構内の積雪について平均 5 日おきに行ない、その間に新雪が降ればその都度新雪部分についての測定を行なつた。測定に用いた場所はあらかじめほぼ水平に地ならしをしてある土地で、昨年 (1955-1956) は裸地であつたが今年 (1956-1957) は草地になつていた。測定のための雪の穴の壁は、測定のためごとに前回切口の影を避けるのに充分なだけの厚さを削りとつた。

上に述べた方法では、凍つたかたい大粒のざらめゆきの密度を測定することは困難である。そこで、このようなざらめゆき層は粘性圧縮の測定の対称としなかつた。ただ、積雪の上層部にあるざらめゆきは、下の層に及ぼす雪圧をきめるためにその質量を測る必要がある。その質量はそれから大塊をきりとつて台秤で測定した。

III. 積雪の成層状況と雪質

第1図は今年(1956-1957)の積雪の成層変化を図示したものである。上の(a)図は各層の厚さの変化を重ねたもので、下の(b)図は各層の水量を gr/cm^2 であらわして重ねたものである。融雪水の滲透がない期間中のひとつの層の水量の測定値はほぼ一定であつたが、場所による違いと層の厚さの測定誤差などにより、測定した日によつて多少の大小があつた。それで水量一定とみなして差支えない期間の水量の測定値の平均を求め、これをもつてその層の水量とした。従つて(b)図の大部分の層の境界線は平行に画かれている。しかし、地面に接している最下層は地中から熱を受けて融けるので水量が次第に減少している。又、雪の表面層に融雪が起ればその水量は急に減少し、その分だけ下の層に貯えられる。このように水量が変化する場合に対しては測定値をそのまま用いてある。



第1図 積雪の成層変化 1956-1957年 北大構内

(a) 各層の厚さと積雪深の時間的変化

(b) 各層の水量(単位面積当りの質量)と全積雪水量の時間間変化

第1図に記入してある層の名称はその層が降積つた月日をあらわす。例えばD-20とは12月20日に形成された層である。ここにひとつの層として画いたものも更に2層或いは3層に区別することが出来ることがあつた。そのような場合には下から順にA, B, Cと名付けた。例えば、後にD-20 Aとあるのは、第1図にD-20と記した層の下半部である。

前の報告²⁾にも第1図と同様な積雪の成層変化の図を掲げてある。これらを比較すると、積雪の成層状況の年による差異が明瞭に認められる。昨年(1955-1956)の2月中旬以前は特に雪の少い例であり、一方その前年1955年1~3月は札幌地方としては非常に雪が多い期間であ

つた。今年(1956-57)はその中間である。雪の積りかたのこのような差異は雪質にも影響した。特に雪の少なかつた昨年(1955-1956)の1月は、前の報告³⁾でくわしく述べたように、積雪の中ほどより下の層に著しい霜ざらめの発達を見た。即ち此の年の1月は雪が少ない上に気温が低く晴れた日が続き、積雪の下層の中に非常に大きい温度の勾配が続いた。その値は特に勾配の大きかつた日を除いても $0.1\sim 0.3^{\circ}\text{C}/\text{cm}$ で、その前年(1954-1955)の雪の下層の温度勾配の2~6倍の大きさであつた。その結果、降つたときの結晶形は札幌で最も普通に見られる結晶(不規則な雲粒の集合及び霰)であつたにも拘わらず、日が経つにつれて雪の内部に霜の結晶の発生が目立ち、普通のしまりゆきとは非常に違つた粒子構造を持つ霜ざらめとなつたのである。これに反し、その前年も今年(1956-1957)も12月下旬から1月上旬までの間に降つた雪は、新雪から典型的なしまりゆきへと変化した。ただ、今冬の12月20日以前の雪は積雪深30 cm前後で20日間も経過したためか、普通のしまりゆきより幾分霜ざらめに近い構造を持つていた。D-4及びD-6層がそれである。

なお、1954-1955年の雪では1月25日以降、今年(1956-1957)の雪では1月10日以降に積つた層は、降積つて後まもなく融雪のためにざらめ化してしまつた。それで、粘性係数を測定したのは何れもそれ以前に積つた雪についてである。

3回の冬の積雪成層変化を比較して気がつくことのひとつに、地面での融雪量が年によりかなり違うということがある。雪が非常に少なかつた昨年(1955-1956)は、成層変化を測定した期間中には地面での融雪が全くみられなかつた。その前年では1月10日までは地面での融雪が起らなかつたが、このころから融雪が始まり、融雪速度は1月下旬の $0.1\text{ gr}/\text{cm}^2\cdot\text{day}$ を最大としてそれ以後3月末にかけて次第に減少した。地面で融雪が起らなかつた時期には土地が凍結していたのである。このような時期には、地中から伝えられる熱は大部分凍土をとかすのに使われていたのであろう。今年(1956-1957)は根雪期間中土地の凍結は一度も起らなかつた。そのため、地面での融雪量は相当な量に達し、融雪速度は12月下旬で最大の $0.13\text{ gr}/\text{cm}^2\cdot\text{day}$ 、1月下旬でも $0.08\text{ gr}/\text{cm}^2\cdot\text{day}$ であつた。12月5日から2月16日までに地面でとけた雪の量は約 $6.5\text{ gr}/\text{cm}^2$ で、これは密度 $0.1\text{ gr}/\text{cm}^3$ とすれば厚さ65 cmの積雪となり、一回の大降雪で堆積する量に相当する。

積雪の下面での融雪は、たいらな地面の上に積つている通常の雪の粘性圧縮には直接関係がない。しかし、雪の中に積雪層の沈降の障害になる物体があると、その附近の雪の圧縮は通常の圧縮とは違つたものになる。

IV. 積雪層の圧縮粘性係数の測定結果

(a) 粘性係数の定義と算出方法

積雪の或るひとつの層の降積つてから t 日後の厚さ及び密度を夫々 $h(t)$ 、 $\rho(t)$ とする。 t 日から $t+dt$ 日までこの層が $h(t)$ から $h(t+dt)$ まで縮めば、雪の層は

$$ds = \frac{h(t) - h(t+dt)}{h(t)} = - \left(\frac{dh}{h} \right)_t \quad (1)$$

の歪を受けたことなる。この dt 時間の歪の増加速度 $\left(\frac{ds}{dt} \right)_t$ が圧力 $P(t)$ に比例するとして

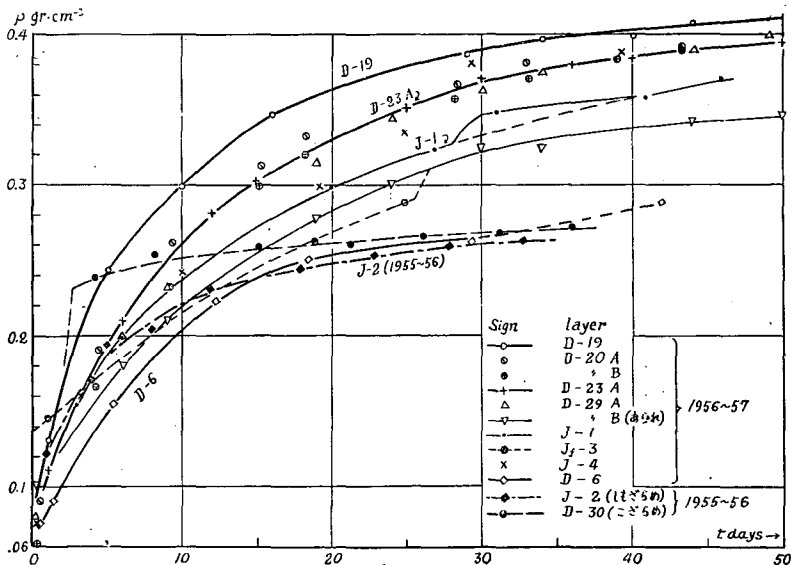
$$\left(\frac{ds}{dt} \right)_t = \frac{P(t)}{\eta(t)} \quad (2)$$

とすれば、 $\eta(t)$ が $t \sim t+dt$ 間のこの層の圧縮粘性係数である。圧力 $P(t)$ はこの層の中央より上に積っている雪の重量にひとしく、積雪水量図第1図(b)からも求められる。測定の対象にしたひとつの層の厚さと水量は、それより上に積っている雪の厚さと水量に対して無視出来るほど小さくないので、層の自重による圧縮量も、特に新雪時にかなり大きい。それで、圧力 $P(t)$ には層の圧縮に有効な自重、つまり自重の $1/2$ をも含めたのである。ひとつひとつの層について $\rho(t) \cdot h(t) = \omega$ が時間的に変化しなければ

$$\frac{P(t)}{\eta(t)} = \left(\frac{ds}{dt} \right)_t = - \left(\frac{dh}{h dt} \right)_t = \left(\frac{d\rho}{\rho dt} \right)_t$$

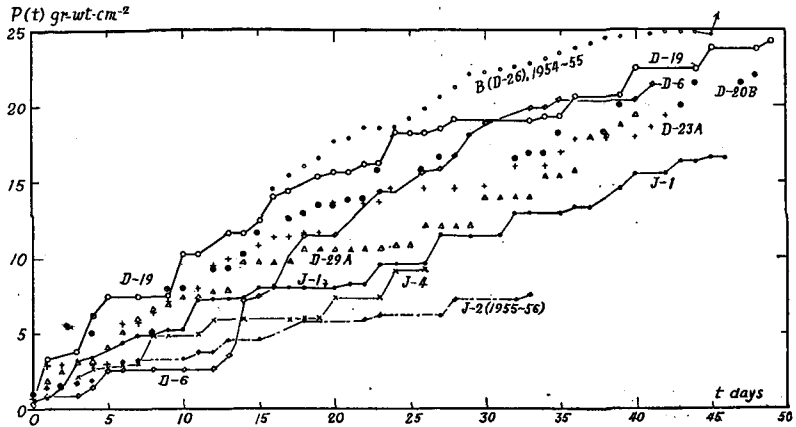
が成立つので、密度の変化によつてでも $\eta(t)$ の値を求めることが出来る。

第2図は今年(1956-1957)の測定で得た積雪各層の密度の時間的変化で、昨年(1955-1956)の霜ざらめ J-2 層と融雪のためにできた霜ざらめゆき D-30 層の密度変化をも書入れてある。一昨年(1954-1955)の積雪層の雪質は今年の雪質に似ているものが多く、その密度変化の曲線も殆んど今年の雪の D-20 層と J-1 層の密度変化の曲線の間の範囲に入つた。第3図は第2図に



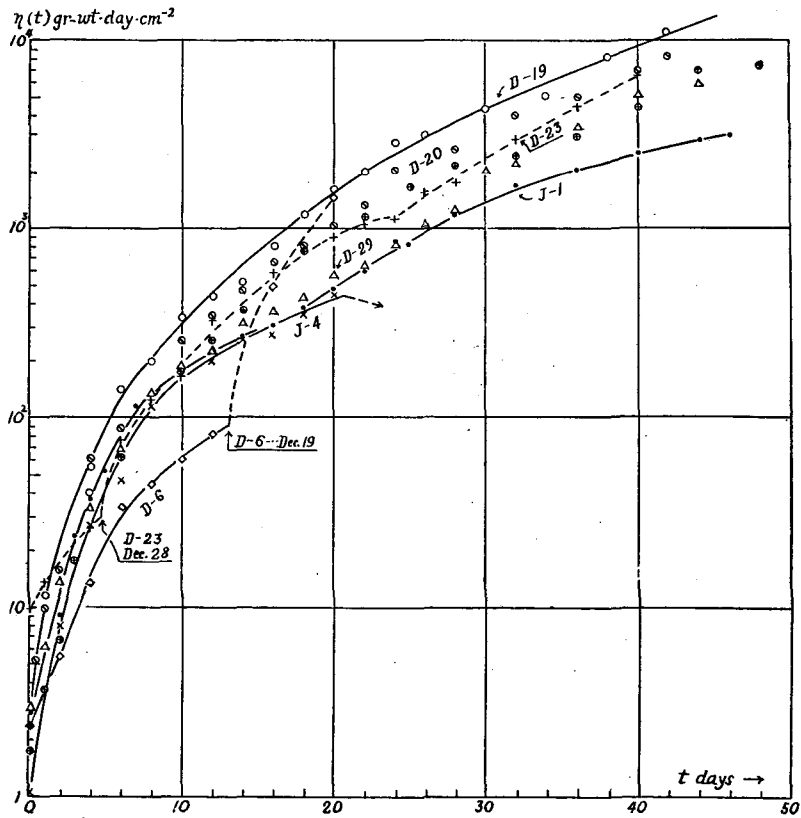
第2図 積雪各層の密度の時間的変化

ρ : 密度 t : 各層が形成されてからの経過時間



第3図 各層に加わつた雪圧の時間的变化

P : 雪圧 (各層の上にもつた雪の重さと層の自重の半分之和)
 t : 各層が降積つてからの経過時間



第4図 積雪各層の圧縮粘性係数の時間的变化

t : 降積つてからの経過時間 η : 粘性係数, 層の記号は第2図と同じ

掲げた各層が受けた圧力 $P(t)$ を第2図(b)から求め、その時間的変化をあらわしたものである。今年の積雪層のなかでは D-19 層が最も大きい圧力を受けつつ経過した層であるが、この層のグラフより更に上に白円印で記したのは、一昨年(1954-1955)の積雪の最下層になつてしまつた雪(D-26)層が受けた圧力 $P(t)$ である。この D-26 (1954-1955) 層は3箇年の間に測定した札幌の積雪のなかでは、受けた圧力が最も大きい値に達した層である。

第2図から $\rho(t)$ と $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_t$ とを求め、第3図から $P(t)$ を求めてそれらの値を(3)式に入れ $\eta(t)$ の値を各層毎に算出した。

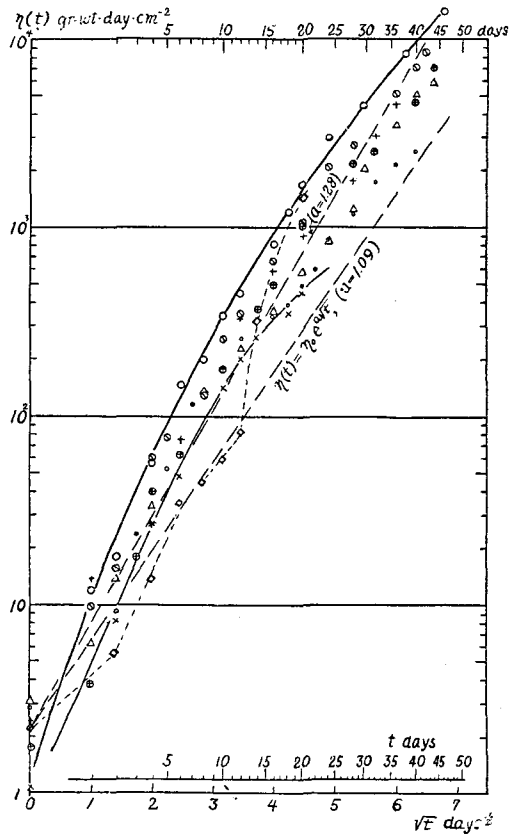
(b) 粘性係数の時間的変化

上に述べたようにして求めた積雪各層の $\eta(t)$ により、 $\log \eta(t)$ と t との関係を示したのが第4図である。粘性係数 η を層が降りつもつてからの経過日数 t の函数として簡単な式で表現できれば便利である。そのために、前の報告²⁾では $\log \eta$ が \sqrt{t} に比例して増大することから

$$\eta(t) = \eta_1 e^{a\sqrt{t}}$$

とした。 η_1 は $t=1$ 日における η の値で、 $t'=t-1$ 日である。 a は $\text{day}^{-1/2}$ の単位を持つ常数である。 η_1 も a も層によつて異つた値をとり、特に a は層が受ける圧力の増加率の大小によつて違つた値になる。ここで時間の原点に降積つた翌日をとつたのは次のような理由による。ひとつの層が形成されるには少なくとも数時間を要するので $t=0$ の時刻を決め難く、又 $t=0$ での ρ 或は h の値を定め難い。それに、降りつもつた当日は雪自身の重さによる粘性圧縮の他に、風圧による圧縮なども加わることがあり、又温度変化のために圧縮速度に時間的なむらが出来ることが考えられた。更に、結晶形の異なる幾つかの層が重つて積つている場合には、ひとつの層の内部で圧縮速度に部分的なむらが起る。そんなことから、前回の報告では翌日になつて或程度雪が落ついた時を時間の原点としたのであつた。しかし、それでは数学的な取扱の上に不便なこともあるので、この報告では降積つた当日を時間の原点として取扱うことにする。

第5図は今年(1956-1957)の測定値について、 $\log \eta$ と \sqrt{t} との関係を示したものであ



第5図 $\log \eta$ と \sqrt{t} との関係

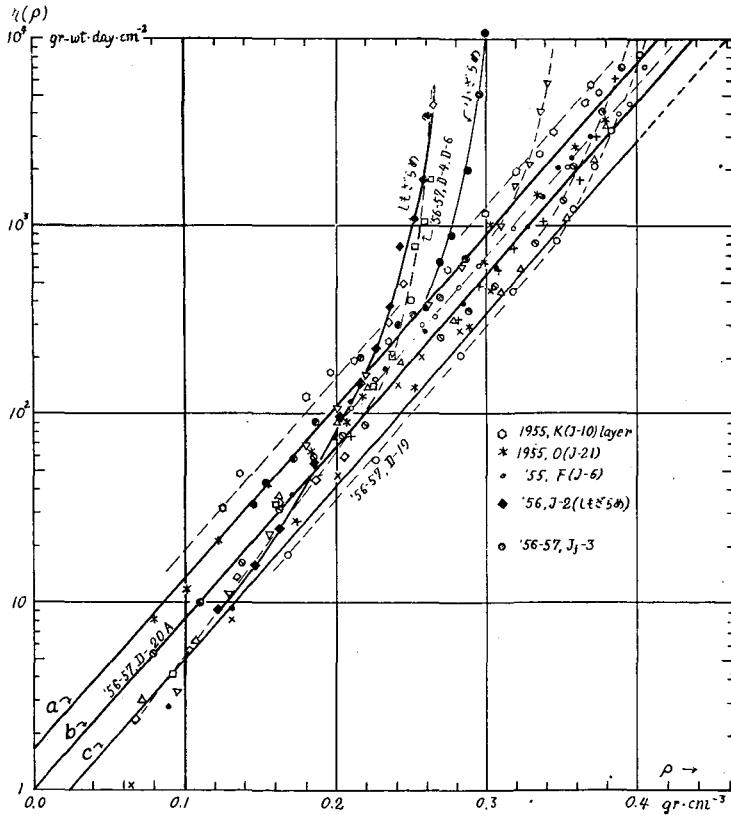
る。この図で明らかなように、すべての層についての関係全部をあわせて考えれば大体 $\log \eta$ は \sqrt{t} に比例して増すと云えるが、ひとつひとつの層についてみると、 $\log \eta$ は必ずしも \sqrt{t} に比例していない。特に D-19 層についての $\log \eta \sim \sqrt{t}$ 関係のグラフは上に凸の曲線になっている。そこで改めて η と t との関係

$$\eta(t) = \eta_0 \exp[at^b] \tag{4}$$

とおき、 $\log \log \eta(t)$ と $\log t$ との関係から常数 b の値を求めると、D-19、D-20、J-1 などの層については $b=0.38 \sim 0.39$ 、又、D-29 層については $b=0.42$ を得た。 η_0 は $t=0$ での η の値で、常数 a は day^{-2b} の単位を持つ量である。すなわち、今年の測定結果に関しては、 $\eta(t) = \eta_0 \exp[a\sqrt{t}]$ とするより、 $\eta(t) = \eta_0 \exp[at^{0.4}]$ とする方が測定結果に忠実である。

(c) 粘性係数と密度との関係

第6図は $\log \eta(t)$ と層の密度 $\rho(t)$ との関係である。この図には今年 (1956-57) 得られた測定結果の他に、第1報及び第2報に報告した昨年と一昨年の測定結果のなかからとり出した数例も一緒に記入してある。3箇年の間に測定されたすべての層についての η と密度 ρ との関係



第6図 各層の粘性係数 η と密度 ρ との関係

はみなこの図の測点の存在する範囲に収まるようである。前の報告では粘性係数と密度との関係として

$$\eta(\rho) = \eta_{01} e^{21.0(\rho - 0.10)} \quad (5)$$

を得た。 η_{01} は $\rho = 0.100 \text{ gr/cm}^3$ のときの粘性係数 η の値で、その大きさは層によつて異なり、一昨年(1954-1955)測定した5つの層については $6.6 \sim 22 \text{ gr-wt} \cdot \text{day/cm}^2$ の範囲にあつた。つまりこれらの層の各々について $\log \eta$ と ρ とは直線関係にあり、それらの直線は互に平行であつて、ただ上下にずれていたのである。今年(1956-1957)の測定結果に関しても第6図に見られるとおり、新雪からしまりゆきへと変化した多くの層について一昨年と同様 $\log \eta$ は ρ に比例して増し、各層の $\log \eta$ と ρ との比例関係をあらわす直線は互に平行である。そして、今年と一昨年とにしまりゆきについて得られた $\eta(\rho)$ の測定値は殆どみな第6図の a, c と記号をつけた2本の平行な直線の間に入るのである。第6図の直線 b は直線 a と c との丁度中間にあたるが、最も多くの測定値が大体この直線 b に沿っている。従つてこの直線 b は札幌のしまりゆきの粘性係数 η と密度 ρ との関係を表するものとしてよいであろう。この直線の方程式は

$$\begin{aligned} \eta(\rho) &= \eta_0 e^{k\rho} & (6) \\ &= 1.00 e^{21.0\rho} \text{ gr-wt} \cdot \text{day/cm}^2 & (6-b) \end{aligned}$$

で与えられる。直線 a も c もともに b に平行であるから k の値は同じ $21.0 \text{ gr}^{-1} \cdot \text{cm}^3$ であるが、 η_0 は夫々 1.6 及び $0.6 \text{ gr-wt} \cdot \text{day/cm}^2$ である。 η_0 は $\rho = 0$ とおいたときの $\eta(\rho)$ の値である。もともと、 $\rho = 0$ という雪はあり得ないけれども、(5)式の形にするより(6)式の形にした方が、後の節に述べるような計算に応用する際に便利である。

上にも述べたように、しまりゆきの多くの層についての $(\log \eta) \sim \rho$ 直線は互に平行であつて、ただ上下にずれている。つまり、(6)式の k の値はどの層についても同じであつて、 η_0 の値が層によつて異なるのであるが、このような $(\log \eta) \sim \rho$ 直線の上下のずれの原因としては、第一に各層の雪の降つもつた当初の結晶形のちがいと、第二に各層が新雪からしまりゆきへと変化する間に経験した温度の違いとが考えられる。しかし実際にはこれらふたつの原因の影響が重つた結果を観測しているので、いずれか一方の影響だけを野外の自然の積雪についての測定結果からとり出すことは困難である。そこで、温度が η の値に及ぼす影響については、次の項(d)で低温実験室内の実験的測定結果にもとづいて論ずることにする。そして、ここでは先ず第6図で $\log \eta \sim \rho$ 直線が上の方にある (η_0 が特に大きい) 層で、その原因が結晶形の特殊性によることはつきりしている2, 3の層をとりあげて検討することにする。

新雪から通常のしまりゆきへと変化した層の $\log \eta$ と ρ との関係をあらわす直線のうち、第6図で最も上方に位置している K 層と名付けた層は、一昨年(1955)1月10日に降りつもつてできた層である。この層を形成していた雪の結晶の代表的な形は、厚みのある大型の広幅六花型結晶であつた。このような六花の形は結晶の昇華変形によつて日が経つにつれてくずれていくが、この種の結晶は他の型の結晶にくらべると、比較的永くはじめの形の特徴をとどめて

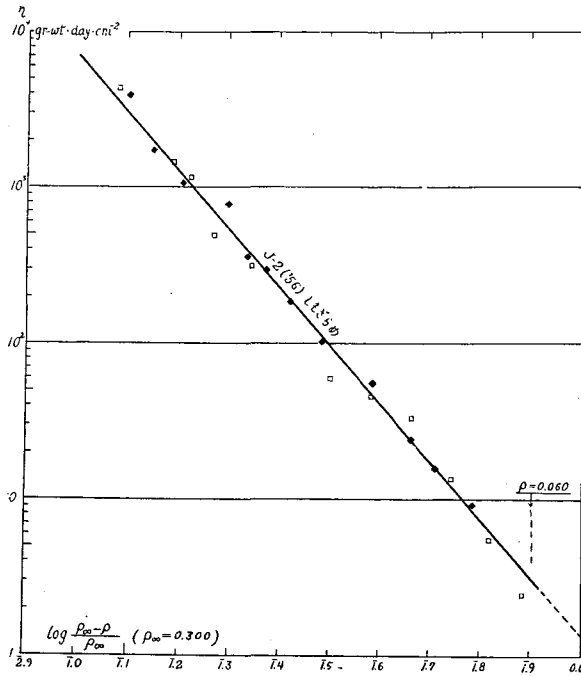
いる。又、K層の雪粒はしまり雪になつてからも、その上下に位置していた他のしまりゆきのいずれの層より大きいことが顕微鏡の観察の結果注意された。筆者は前に雪の結晶の集りに一定の荷重を加えて、粒子構造の粘性圧縮の過程を顕微鏡で観察した。その結果によると、樹枝状結晶のように各部分が細長く薄い結晶ではひとつの結晶の中の弱い部分が圧力によつて容易に塑性変形を行つて折れ曲る。これに反して、広幅六花のような結晶はこれと同じ大きさの圧力を加えただけでは、なかなか変形を起さなかつたのである。上にあげたK層(1954-1955)の場合も、個々の結晶が粘性圧縮に対して丈夫な形であるため、その影響が層全体の粘性圧縮に対してもあらわれて、 η が大きい値をとつたものと考えられる。次に、第6図には記入しなかつたが、一昨年(1954)の積雪で、上にのべたK層のすぐ下にあつた霰の層(J層)も η が大きく、 η と ρ との関係をあらわすグラフは第6図の直線aより僅か上にある。又、今年測定したD-29B層も比較的大きい霰がつもつたものであるが、この層についての η と ρ との関係は丁度第6図の直線aであらわされる。札幌では霰が降積することは度々あるが、多くは他の形の結晶(こまかい六花型結晶と雲粒の不規則集合など)と一緒につもり、日が経つにつれて霰ひとつひとつの存在が(顕微鏡で見ても)はつきりしなくなる。しかし、上に η が特に大きい例としてあげた2つの霰層では、いつまでも霰の形が積雪の切口に肉眼でもはつきり認められた。なお、第6図で普通のしまりゆきの η と ρ との関係をあらわすグラフが存在する範囲の上限とみなされるa直線上に、今年の積雪層J_r-3に関する測定値がのつている。この層は結晶形そのものは特別のものではなかつたが、降積るときに気温が0°Cよりわずかに高かつたために幾分とけながらつもつた雪の層で、はじめから密度が0.14という大きい値であつた。そして、層が形成されて間もなく気温の低下と共に凍結し、以後しまりゆきの層の間に埋もれた層で、積雪の切口ではあたかもざらめゆきのように見えた。しかし顕微鏡で見ると普通ざらめゆきといわれる雪にくらべれば粒も小さく、むしろしまりゆきに近い構造であつた。

以上がしまりゆきについての粘性係数 η と密度 ρ との関係であるが、次に、しまりゆきとは非常にちがつた構造を持ち、 η と ρ との関係もしまりゆきのそれとは異なる「霜ざらめ」層に関する測定結果について述べる。

昨年の霜ざらめ層J-2と今冬(1956-1957)のしもざらめ層D-4及びD-6層についての η と ρ との関係は第6図でもあきらかなように特殊である。密度が小さいうちは普通のしまり雪と同じくらいの η の値を示しているが、密度が0.25より大きくなると、同じ密度のしまり雪より10倍も大きい値を示すようになり、(6)式には当はまらない。このような雪に対しては、 $\rho(t \rightarrow \infty) \equiv \rho_{\infty}$ とし、 $\rho' \equiv \frac{\rho_{\infty} - \rho}{\rho_{\infty}}$ とおいて、

$$\eta(\rho) = \eta_0 \rho'^{-b}, \quad \rho' = \frac{\rho_{\infty} - \rho}{\rho_{\infty}}$$

とすれば測定結果がよく表わされる。 η_0 は(6)式で用いたのと同じく $\rho=0$ に対する η の値で b は常数である。第7図はJ-2(1955-1956)層についての $\log \eta$ と $\log \rho'$ との関係である。この直線から



第7図 しもざらめ (J-2, 1956) 層における
密度 ρ と粘性係数 η との関係

$$\eta(\rho) = 1.4 \rho^{-3.70} \text{ gr-wt-day/cm}^2 \quad (8)$$

を得る。但しここでは $\rho_\infty = 0.300$ とした。

$\log \eta$ と ρ との関係が普通のしまりゆきの直線関係から外れることは、しもざらめばかりでなく、融雪のために出来たざらめゆきについても言われる。第6図の「こざらめ」と書き入れた D-30 (1955-1956) に関する $\eta(\rho)$ のグラフがこれを示している。

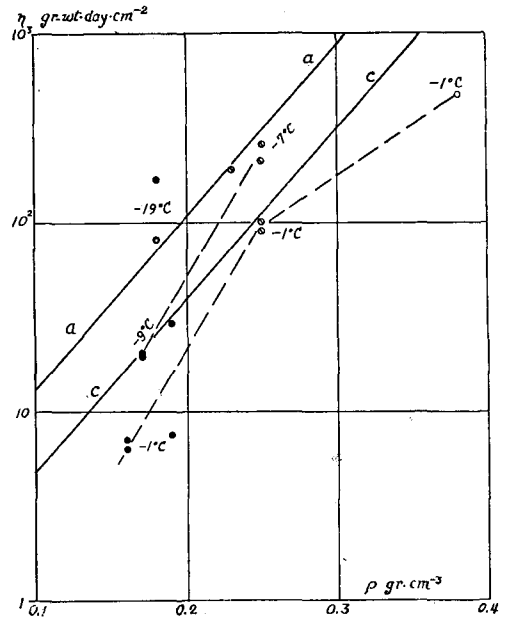
なお、第6図で普通のしまりゆきのひとつひとつの層について、 $\eta \sim \rho$ の関係をみると、 $\rho > 0.35 \text{ gr/cm}$ で $\eta(\rho)$ は直線関係から上向きに外れている場合がかなり多い。このような場合にも ρ_∞ を適当に選んで、(7) 式の形で η と ρ との関係を表現した方が実測値を忠実にあらわすことになるであろう。しかし、 ρ_∞ の値の決めかたに関して未だはつきりした根拠がつかめていないので、ここでは数学的に便利な (6) 式をしまりゆきの η と ρ との関係式として用いることにする。

(d) 室内実験による測定結果との比較

第8図には、前に筆者が雪の柱に一定の荷重を加えて得た粘性係数と密度との関係を数箇の円印で示してある。この実験では、自然の積雪のなかの上、中及び下層の三つの層からとつた3種類の雪を使つたので、その種類に応じて印をちがえてある。直線 a と c とは第6図の直線 a, c と同じものである。円印のそばに記入してある温度は、それぞれの測定値を得たと

きの雪の試料の温度で、実験室の室温に等しい。野外の積雪層について得た測定値はほとんど直線 a と c との間に入るのであるが、その温度は $-1^{\circ}\sim-6^{\circ}\text{C}$ の範囲内にあつた。しかし、図から明かなように、同じ温度範囲 $-1^{\circ}\sim-6^{\circ}\text{C}$ に於ける室内実験の測定値は、直線 c より下にあり、野外積雪の値よりかなり小さいわけである。ただ、密度 0.25 の雪についての室内実験の測定値だけは、ほぼ直線 a, c の間にある。しかしこの雪は通常のしまりゆきよりはむしろ第 6 図にある「こざらめ雪」D-30 (1955-1956) に近い構造の雪で、その野外測定値は直線 a より上に出るはずのものである。すなわち、この雪についてもやはり室内実験での測定値の方が小さいのである。このように実験による測定値と野外の積雪層の沈降から求めた値にはつきりした差があるのは、室内実験では圧力を加えてから僅か 10 分ないし 30 分間という短い時間のうちに測定値を求めてしまうのに対し、野外積雪の場合は圧力が加えられてから非常に長い時間の後に測定値が求められるという違いによるものである。

前にも述べたように、或るひとつの層の密度と粘性係数の関係が第 6 図の直線 a, b 及び c の何れに相当するかは、その層の始めの結晶形によるほか、層の温度にも関係する。前の報告¹⁾で述べたように、 $\log \eta$ は温度の低下と共に直線的に増し、その直線の傾きは雪の密度によつてもほとんど変わらない。つまり、同じ温度のちがいで対する $\log \eta$ の変化、すなわち $\log \eta$ の温度勾配は、温度によつても又雪の密度によつても変わらないという結果が得られている。これは、 $\log \eta \sim \rho$ 曲線は温度が変れば平行移動することを意味するものである。したがつて、第 6 図の $\log \eta \sim \rho$ の各直線が互に平行であるということは、各直線のあいだに温度の差が存在することをも示唆することになる。そして、室内実験の結果に現われた $\log \eta$ の温度勾配をそのまま野外測定による $\log \eta$ についてあてはめてもよいであろう。そうすると、第 6 図の直線 a, c の間隔は約 7°C の温度差に相当することになる。第 6 図の直線 a, c の間に測定値が入る自然の積雪層が実際に経験した温度を時間的に平均すると、大体 -1° ないし -6°C であつたから、実験的測定値から得られた 7°C という値は不都合のない値である。



第 8 図 実験による粘性係数の測定値と積雪層の自然圧縮から求めた粘性係数との比較
直線 a と c は第 6 図の直線 a, c と同じ

V. 積雪の密度の時間的変化をあらわす式

積雪の厚さの時間的変化をあらわす式には、従来、斎藤練一⁴⁾の式と石原健二⁵⁾が求めた式とがあつた。これらの式はいずれもその土地での積雪層の厚さ h 或いは層の密度 ρ と時間 t との平均関係を実験式として表わしたものであつた。したがつて、次の段階は、積雪層にかかる圧力などの物理的要素を加味した関係式を求め、平均状態からの偏差をもつ実際の積雪状態の記述にむかつて一歩進めることであろう。筆者は第1報で圧力の時間的変化が $P(t) = p_0 + p_1 t$ の形で表わされると仮定し、粘性係数の時間的変化については筆者が実験的に定めた $\eta(t) = \eta_0 e^{avt}$ の式を用いて、雪層の厚さ $H(t)$ の時間的変化を表わす式を求めた。そして、これは実測値とよく一致する式であつた。しかし、圧力に関する上のような仮定は余り一般的ではないし、 η と t との関係式も先に述べたようにあまり正確なものではない。これに反して η と密度との関係式としてはかなり正確な簡単な式が与えられている。それで此度は、この $\rho \sim \eta$ の関係式を基礎にして積雪層の密度 ρ の時間的変化を数式によつて表わすことを試みた。 ρ の時間的変化がわかれば、その逆数をとることにより、雪層の厚さの変化の式が得られることは云うまでもない。

或るひとつの雪の層が形成されたときの密度を ρ_0 、それから t 日後の密度を $\rho(t)$ とし、この層に作用する(雪の重さによる)圧力を $w(t)$ gr-wt/cm² とすれば、IV 節の(3)式から

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right)_t = \frac{w(t)}{\eta(t)} \quad (10)$$

であるが、 $\eta(\rho) = \eta_0 e^{k\rho}$ の関係を上の式に入れて積分すると、

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{e^{k\rho}}{\rho} d\rho = \frac{1}{\eta_0} \int_0^t w(t) dt \quad (11)$$

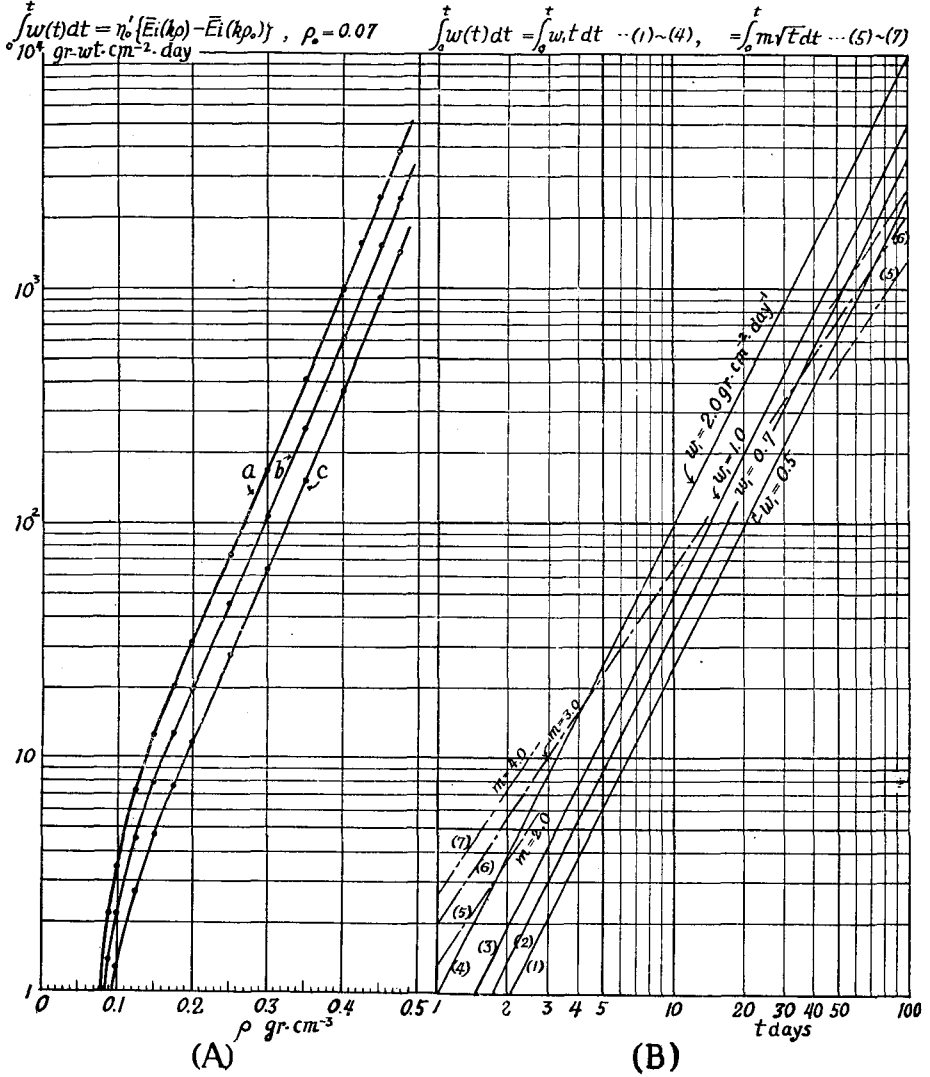
となる。この式の左辺は $k\rho = -u$ 、 $k\rho_0 = -u_0$ とおくことによつて

$$\begin{aligned} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{e^{k\rho}}{\rho} d\rho &= \int_{u_0}^u \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{-\infty}^u \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{-\infty}^{u_0} \frac{e^{-u}}{u} du \\ &= \bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0) \end{aligned}$$

のように、logarithmic-integral $\bar{E}i$ によつて表わされる。それで、(11)式は

$$\eta_0 \{ \bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0) \} = \int_0^t w(t) dt \quad (12)$$

と書くことが出来る。この式の右辺は、今問題にしている層が降りつもつてから t 日経つまでに受けた積算荷重 $Q(t)$ をあらわしているわけであるが、 $w(t)$ の如何なる形に対しても——言い換えれば、どんな雪の積りかたに対しても——時刻 t までの積算荷重 $Q(t)$ を決めさえすれば、(12)式によつて logarithmic integral の数値表⁶⁾を用いて、その時刻における密度を求めることが出来る。例えば、或る土地の降水量が毎日観測されて居れば、この降水量が全部積雪として貯えられる期間に対しては、或る雪層が形成されて以後の毎日の降水量を日毎に積算し



第 9 図

(A) 雪の密度とその密度になるまでに雪が受ける積算荷重との関係

(ρ と $\eta_0 \{ \bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0) \}$ との関係)

$\rho_0 = 0.07 \text{ gr}\cdot\text{cm}^{-3}$, $k = 21.0 \text{ gr}^{-1}\cdot\text{cm}^2$, a ... $\eta_0 = 1.60$, b ... $\eta_0 = 1.00$, c ... $\eta_0 = 0.60 \text{ gr}\cdot\text{wt}\cdot\text{day}/\text{cm}^2$

(B) 積算荷重 $\int_0^t w(t) dt$ と経過時間 t (days) との関係

雪の積りかた:

- | | | |
|--|--|--|
| 直線 (1) $w(t) = 0.5 t \text{ gr}/\text{cm}^2$ | (2) $w(t) = 0.7 t \text{ gr}/\text{cm}^2$ | (3) $w(t) = 1.0 t \text{ gr}/\text{cm}^2$ |
| (4) $w(t) = 2.0 t \text{ gr}/\text{cm}^2$ | (5) $w(t) = 2.0 \sqrt{t} \text{ gr}/\text{cm}^2$ | (6) $w(t) = 3.0 \sqrt{t} \text{ gr}/\text{cm}^2$ |
| (7) $w(t) = 4.0 \sqrt{t} \text{ gr}/\text{cm}^2$ | | |

て行くことにより、この層に対する $w(t)$ の時間的変化のグラフを画くことが出来る。そして、このグラフによつて時刻 $t=0$ から t 日後までの $w(t)$ の日毎の積算値 $Q(t)=\int_0^t w(t) dt$ を求めれば、(12)式から t 日後における雪層の密度を計算することが出来るわけである。

この計算に際しては密度 $\rho=0$ に対する η すなわち η_0 の値を決めなければならないが、第9図(A)には η_0 に 1.6, 1.0 及び 0.6 gr-wt·day/cm² を用い、 $\rho_0=0.07$ gr/cm³ として計算した $\eta_0 \{\bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0)\} = Q(t)$ と ρ との関係それぞれ曲線 a, b 及び c で示した。

VI. $w(t)$ の特別な形に対する密度の時間的変化

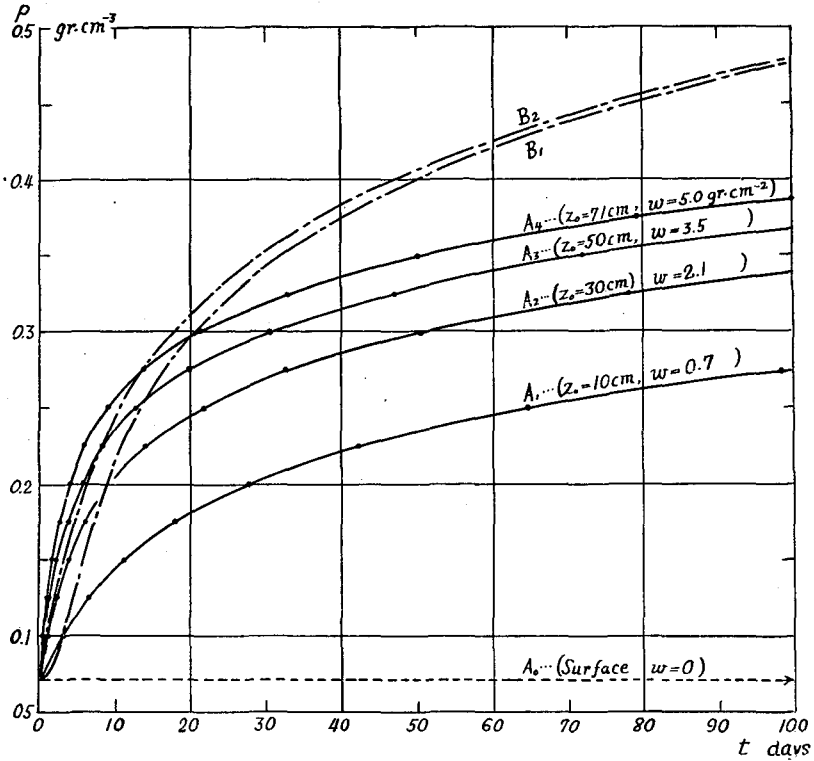
前節 V で導いた密度の時間的変化をあらわす (12) 式は、 $w(t)$ がどんな形を持つていても、つまり雪のつもりかたのどんな場合に対しても成立つ式である。この節では、 $w(t)$ が簡単な形をとるような特殊な場合について、(12)式から密度の時間的変化をあらわす曲線を求める。

[A] $w(t)=w_0$ (一定値)。 $t=0$ で一時に雪が厚く降りつもり、その後は全く雪が降らないという極端な場合である。 $t=0$ ではこの雪の表面から下面までが一様な密度 ρ_0 の雪で出来ているとする。この雪全体について言えば、自分自身の重みで縮んで行くのであるが、下方の雪ほど圧縮速度は大きいはずである。今、 $t=0$ で表面から深さ z_0 にある厚さ dz_0 の層の圧縮を考える。 dz_0 を非常に小さくつとて、層の自重を無視すれば、この層はこれより上の雪の重さ $w_0=\rho_0 z_0$ によつて圧縮されるわけである。 w_0 は時間と共に変わらないから、この層の密度の時間的変化は (12) 式により次のようにあらわされる。

$$\eta_0 \{\bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0)\} = w_0 t = \rho_0 z_0 t \quad (13)$$

この式に $\eta_0=1.00$ gr-wt·day/cm²、 $\rho_0=0.07$ gr/cm³ として $z_0=10, 30, 50$ 及び 71 cm を入れて求めた ρ と t との関係を、それぞれ第10図の曲線 A_1, A_2, A_3 及び A_4 であらわした。 A_0 と記した水平直線は表面にある dz_0 層の密度が不変であることを示している。前節まで述べて来た積雪層の密度の測定値は、いずれも有限な厚さをもつたひとつの層の内部の密度の勾配をならした平均密度であつた。そして、層に及ぼされる圧力にも層の自重による分も含めて来た。しかしこの節からは、より一般的な取扱いをするために、有限な厚さの層を無限に薄い層に分割して考え、これらの薄い層の圧縮を主として取扱うことにする。この場合個々の薄い層に及ぼされる圧力には層の自重を無視して差支えないわけである。

従来、実際の積雪層の密度の測定値から粘性係数を求めるのに用いた雪の圧力のうち、層の自重による分はその層の自重の 1/2 に等しいとしてきた。しかし、この項で述べたような特別な場合、特に雪の表面まで含めた厚い層に対してはこの関係が成立たないのである。第10図(b)には $t=0$ で表面から 50 cm までの間にあつた雪の厚い層が時刻 t での平均密度 $\bar{\rho}(t)$ と、(13) 式の w_0 にこの雪の自重の半分即ち 1.75 gr-wt/cm² を入れて求めた密度 $\rho_m(t)$ ($z_0=25$ cm) とをどちらも実線の曲線であらわした。この $\rho_m(t)$ は最初表面から 25 cm の深さにあつた雪の密度にひとしいことはいうまでもない。平均密度 $\bar{\rho}(t)$ を求めるには次のようにした。

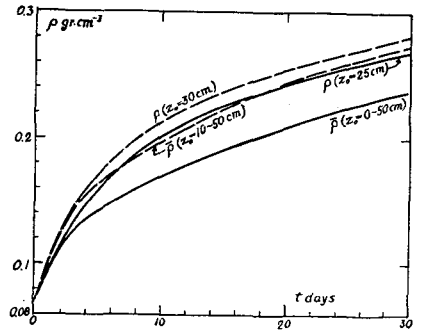


第10図(a) 一定荷重における雪の密度の時間的変化(曲線A₀~A₄)

はじめの密度を0.070 gr/cm³とする。A₁ははじめに表面からの深さz₀=10 cmにあつた雪の密度変化。B₁, B₂は第11図(a)の曲線(i), (ii)。

次のVII節第12図(c)にはt=0で表面から50 cmの深さまでの間にある雪からなる層の時刻tでの厚さh(t)が求めている。このh(t)で層の水量ω=3.5 gr/cm²を除いた値が平均密度ρ̄(t)である。

次に、t=0で表面から10~50 cmの間にあつた40 cmの厚さの雪の層について前と同じようにして密度ρ̄(t)を求め、(13)式にw₀=2.1 gr-wt/cm²を入れてρ_m(t)を計算すると、第10図(b)にそれぞれρ̄(z₀=10~50 cm)及びρ_m(z₀=30 cm)と記した破線のグラフが得られる。w₀=2.1 gr-wt/cm²という値はt=0でこの層の中央(z₀=30 cm)より上にある雪の重さである。つまり、この層の上にある雪の重さとこの層の自重の半分との和である。



第10図(b) 厚い積雪層の平均密度ρ̄(t)とその層の重心部分の密度ρ_m(t)との比較

第10図(b)の2組の曲線からあきらかなように、雪の表面まで含めた厚い層に関しては、平均密度ρ̄(t)は(13)式にw₀=ω/2を入れて求めたρ_m(t)よりはるかに小さい。しかし、t=0

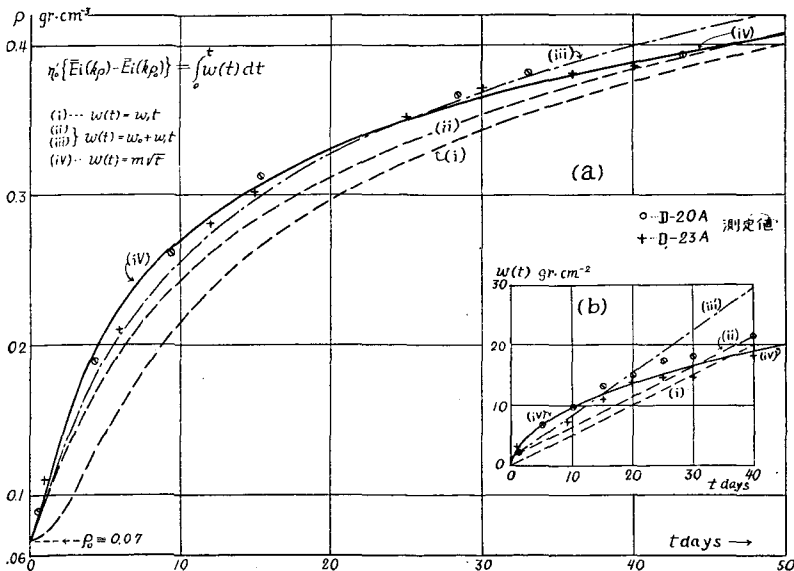
で表面から僅か 10 cm までの雪を除外した $z_0=10\sim 50$ cm の厚さ 40 cm の雪の層に着目すると、 $\bar{\rho}(t)$ と $\rho_m(t)$ とは前の場合にくらべて非常に接近してくる。40 cm の厚さの雪の上には、他の層と考える 10 cm の厚さの表面層が乗っているわけであつて、そうなると $\bar{\rho}$ と ρ_m とは非常に接近してくるわけである。

実際の積雪層ではひとつの層が形成されるとすぐにその上に次々と雪が積つてしまうので実際の雪の層は常に自身の上に他の層をのせていると見る事が出来る。したがつて、ある層の平均密度を定めるのに、その層はそれ自身の厚さの半分の重さと、その層の上に重っている層の重さとの和にひとしい圧方をうけているとして取扱つてきた従来の方法は正しかつたと云える。

[B] $w(t)=w_1t$ 絶えず一定の割合 w_1 で雪が降り積る場合である。自重を無視出来るような薄い層の降積つてから t 日後における密度 ρ は次式で与えられる。

$$\eta_0 \{ \bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0) \} = \frac{w_1}{2} t^2 \quad (14)$$

実際の雪は厳密に言えば長い期間一定の割合で降積することはない。しかし個々の層に及ぼす雪圧の実測値を示した第 3 図からもわかるように、比較的短い期間については、ほぼ直線的に積雪量が増すとみなして差支えない場合が多いのである。第 11 図の曲線 (i) は (14) 式から求められる ρ と t との関係を示す曲線の一例である。ここでは $\rho_0=0.07$ とし $\rho=0$ に対する η の値 η_0 として $1.00 \text{ gr-wt}\cdot\text{day}/\text{cm}^2$ を用い、雪は一定の割合 $w_1=0.5 \text{ gr}/\text{cm}^2\cdot\text{day}$ で降りつもととした。(層が受ける圧力の増加率は $w_1=0.5 \text{ gr-wt}/\text{cm}^2\cdot\text{day}$ である。) この曲線は $t=0$ の



第 11 図 (a) 雪の密度 ρ の時間的变化。計算で求めた密度変化曲線と実測値。
 (b) (a) の各曲線を求めるのに仮定した雪の積りかた、ならびに札幌における積りかたの例 (第 3 図の一部)。

近くに変曲点を持ち、この附近では実際の雪層の密度変化の測定値より小さな値を与える。しかし、 $w(t)=w_1t$ という形は次の節で述べるように、積雪の成層状況を理論的に導くのに用いる雪の積りかたの仮定としては最も便利な形である。

第9図(B)には、(14)の右辺で与えられる積算荷重と t との関係を w_1 のいろいろな値について直線(1)~(4)で示した。これらの直線と第9図(A)とを用いれば、 γ_0 及び w_1 のいろいろな値に対する $\rho \sim t$ 関係を直ちに求めることが出来る。

[B] $w(t)=w_0+w_1t$ [B]と同じく連続的に一定の割合 w_1 gr/cm²·dayで雪が降積るが、 $t=0$ ですでに w_0 gr/cm²の雪が存在している場合である。このような雪から圧力を受ける薄い層の密度 ρ と t との関係は

$$\gamma_0 \{ \bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0) \} = w_0t + \frac{w_1}{2} t^2 \quad (15)$$

で与えられる。自重を考慮しなければならぬほど厚い層の平均密度 ρ の時間的変化は、前の項[A]で述べたようなことに注意して、 w_0 を層の自重による項とすれば大体(15)式であたえられる。第11図(a)の曲線(ii)と(iii)とは(15)式によつて求めた $\rho(t)$ 曲線である。[B]の場合のように $t=0$ の近くに変曲点はなく、曲線は直ちに急速に上昇している。

[C] $w(t)=m/\sqrt{t}$ 自重を無視出来る薄い層を考えて、この上に積る雪の量が \sqrt{t} に比例する場合である。 m は比例常数でその単位は(w を積雪量とすれば) gr/cm²·day^{1/2}である。札幌での雪のつもりかたを示した第1図(b)からもわかるように、積雪水量の増加速度は12月下旬から1月はじめにかけて最も大きく、以後2月中旬までは次第に減少するのが普通である。従つて12月中旬から下旬にかけてつもつた雪の層に対しては、雪圧の変化を与える $w(t)$ は[B]よりむしろ[C]に近いわけである。この場合の ρ と t との関係式(12)は

$$\gamma_0 \{ \bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0) \} = \frac{2}{3} m t^{\frac{3}{2}} \quad (16)$$

となる。第11図(a)の曲線(iv)はこの式により $m=3.0$ として求めた $\rho(t)$ 曲線である。

第11図(b)には(a)図の $\rho(t)$ 曲線(i), (ii), (iii)及び(iv)を求めるのに用いた $w(t)$ のグラフを示した。即ち(i) $w(t)=0.5t$, (ii) $w(t)=1.5+0.5t$, (iii) $w(t)=1.5+0.7t$ 及び(iv) $w(t)=3.0/\sqrt{t}$ gr/cm²である。また、(b)図には今年(1956-1957)の札幌の雪D-20A及びD-23A層に対する $w(t)$ の実測値を円印及び十字印で示した。(a)図にはこれらのふたつの層の密度の測定値を示したが、曲線ivが最も測定値に近い。[C]では、層の自重の項を含んでいないのに、厚い層についての実測値、すなわちその層の平均密度の時間的変化の測定値とよく一致しているわけである。これは、この場合の $w(t)$ 曲線が $t=0$ で縦軸に対して切線となるため、自重の項を入れたのと同じような形になるからである。

VII. 積雪の密度の垂直分布

積雪の密度の垂直分布をあらわすには、

(a) 密度 ρ とその層より上に積っている雪の重量 w との関係であらわす方法

(b) 密度 ρ と積雪表面からの深さ z (cm) の関係としてあらわす方法

との2通りがある。後者(b)の表現法は普通に用いられる方法である。(a)の表現法で記載された例は、莊田幹夫⁷⁾の報告に見ることができる。莊田は非常に多くの測定結果を、この記載法によつてひとつの図にまとめている。

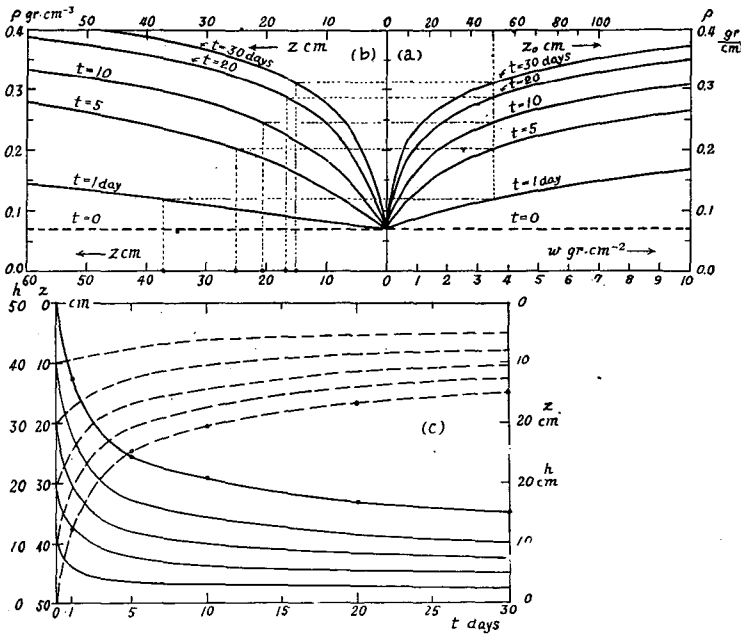
筆者は前節の式(11)及び(12)を利用して(a),(b)両方の表現法による密度の垂直分布曲線を、計算で導き出すことを試みた。それには積雪水量の増しかたを指定しなければならないがここでは前のV節でとりあげた2つの特別な場合[A]及び[B]について計算した。

[A] 全積雪水量一定の場合。つまり $t=0$ で一様な密度 ρ_0 を持つ厚い層が形成され、それ以後全く降雪を見ないという場合である。雪の層は自重によつて沈下して行くわけであるが下の方ほど w が大きく、雪は速く圧縮される。層の表面からの深さを z とすれば、 ρ も w も z の函数であり、 $\rho = -\frac{dw}{dz}$ の関係がある。

(a) ρ と w との関係。前の節で導いた式：

$$\eta_0 \{ \bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0) \} = wt$$

から、 t をパラメーターとして直ちに ρ と w との関係が求められる。 $\eta_0 = 1.00 \text{ gr-wt}\cdot\text{day}/\text{cm}^2$,



第12図 雪の積りかた [A] における雪の密度の垂直分布の時間的变化

- (a) 密度 ρ と雪の荷重 w との関係
- (b) 密度 ρ と表面からの深さ z との関係
 t は雪がつもつてからの経過時間
- (c) $t=0$ で積雪を深さ 10 cm ごとにならした各点の位置の時間的变化

$k=20.2 \text{ gr}^{-1} \cdot \text{cm}^3$, $\rho_0=0.070 \text{ gr/cm}^3$ とし, t に 1, 5, 10, 20 及び 30 日を入れて計算した ρ と w との関係が第 12 図 (a) の曲線である。(ここでは k の値を 21.0 とせずこれより幾分小さくとしてあるので第 9 図 (A) の曲線 b から求められる結果とはいくらかちがっている。)

(b) ρ と z との関係, 前章の式 (11) はここでは

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{e^{k\rho}}{\rho} d\rho = \frac{wt}{\eta'_0} \quad (17)$$

となる。 t の値を固定してこの式の両辺を z で微分すると

$$\frac{e^{k\rho}}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = \frac{t}{\eta'_0} \frac{dw}{dz}$$

となるが, これに $\left(\frac{dw}{dz}\right)_z = \rho(z)$ という関係を入れて積分すると

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{e^{k\rho}}{\rho^2} d\rho = \frac{t}{\eta'_0} \int_0^z dz$$

となる。これを logarithmic integral を用いて書きなおせば

$$k \{ \bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0) \} - \left\{ \frac{e^{k\rho}}{\rho} - \frac{e^{k\rho_0}}{\rho_0} \right\} = \frac{t}{\eta'_0} z \quad (18)$$

が得られる。この式の常数及び t の値に, (a) で用いたのと同じ値を入れて ρ と z との関係を求めると, 第 12 図 (b) の曲線のようになる。

次に, 上に得られた $\rho(w)$ 及び $\rho(z)$ の曲線を利用して $t=0$ で表面から $z_0 \text{ cm}$ にあつた薄い層 (又は雪粒) の t 日後における位置 (表面から $z \text{ cm}$) を求める。例えば, $t=0$ で表面から 50 cm の深さにあつた部分の $t=1, 5, 10, 20$ 及び 30 日後における表面からの深さは, 第 12 図 (a) で $z_0=50 \text{ cm}$ から下した点線と各 t の値に対する $\rho(w)$ 曲線との交点から夫々点線をたどつて行くと同図 (b) の z 軸上にこれらの t の値に対する z の値, 即ち, $z=37.0, 24.4, 20.6, 16.7$ 及び 15.0 cm が得られる。第 12 図 (c) のいちばん下の破線の曲線は, 横軸に t , 縦軸に z をとつて, 上のようにしてもとめた $t=0$ で $z_0=50 \text{ cm}$ にあつた点の軌跡を画いたものである。 $z_0=40, 30, 20$ 及び 10 cm に対しても同様の手続でその軌跡を画くことが出来る。第 12 図 (c) の他の破線はこれらをあらわしたものである。実際の雪では, 動かないのは積雪の表面ではなく底面である。この条件にあうように積雪内の各点の位置を表わすには, 各点線間の鉛直距離を不変に保つたまま, $z_0=50 \text{ cm}$ の点線が図の底辺と一致するまで全部の点線を下げればよい。同じ図に実線で画いた曲線はこのようにして得られたものである。若し, はじめの雪の層の厚さが 30 cm であつたとしたら, $z_0=30 \text{ cm}$ の点線が図の底辺と一致するように書きなおせばよい。

[B] 積雪水量が一定の割合 w_1 で増加する場合

(a) ρ と w との関係

時間 t の原点を根雪の初日にとり, 時刻 t から $t+dt$ の間にふりつもる雪の量 (降水量)

を $q(t)dt$ であらわすと、時刻 t での全積雪水量 $W(t)$ は $W(t) = \int_0^t q(s)ds$ である。但し s は時間をあらわす積分変数である。時刻 t' ($< t$) で形成された雪の層を t' 層と名づける。この層が時刻 t' で密度 ρ_0 であつたが、時刻 t では水量 $w(t, t')$ の雪の下にあつて密度が $\rho(t, t')$ になつたとする。この間に t' 層が受けた積算荷重を $Q(t, t')$ とすれば、 $\rho(t, t')$ と $Q(t, t')$ との関係は(12)式により

$$\gamma_0 \{ \bar{E}i(k\rho(t, t') - \bar{E}i(k\rho_0)) \} = Q(t, t')$$

である。全積雪水量の時間的変化を第13図の曲線 W のようにあらわし、この曲線上の時刻 t' 及び t の点をそれぞれ X, Y と名付ける。 t' 層は図では X から右向きに引いた太い水平直線で示されるが、これと時刻 t をあらわす鉛直直線との交点を Z とすれば、 $Q(t, t')$ は水平直線 XZ と鉛直線 ZY と W 曲線とに囲まれた部分の面積に等しい。 t' 層はその上に降積の雪によつて圧縮されるわけであるが、時刻 t までに t' 層の上にもつる積雪の水量 $w(t, t')$ は

$$w(t, t') = \int_{t'}^t q(s) ds = W(t) - W(t')$$

である。従つて、積算荷重 $Q(t, t')$ は次のようにあらわされる。

$$Q(t, t') = \int_{t'}^t w(s, t') ds = \int_{t'}^t (t-s) q(s) ds \tag{19}$$

今特別な場合として、降水強度 $q(t) = w_1$ (一定) の場合を考えると、

$$w(t, s) = w_1 \cdot (t-s), \quad q(s) ds = dw$$

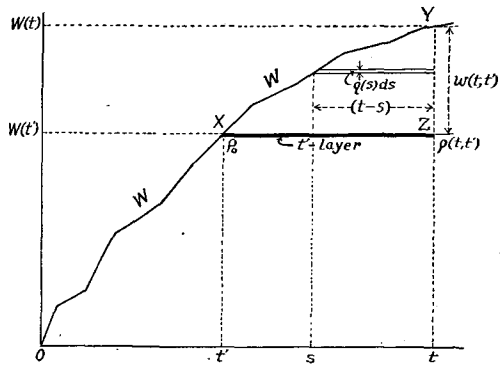
であるから、(19)は次のように書きなおされる。

$$Q(t, t') = \int_0^w \frac{w}{w_1} dw = \frac{w^2}{2w_1}$$

従つて、密度 $\rho(t, t')$ と $w(t, t')$ との関係として

$$\gamma_0 \{ \bar{E}i(k\rho(t, t')) - \bar{E}i(k\rho_0) \} = Q(t, t') = \frac{w^2}{2w_1} \tag{20}$$

が得られる。 Q と ρ との関係は第9図(A)から直ちに求めることが出来るから、 w_1 の値を指定すれば、(20)式から任意の w に対する ρ の値を求めることが出来る。ただし此の場合、 ρ と w との関係式(20)には t があらわれない。つまり、密度分布が時刻 t に無関係であるのは $q =$ 一定という特別な場合に限るのであつて、 q が時間と共に変る一般の場合には密度分布



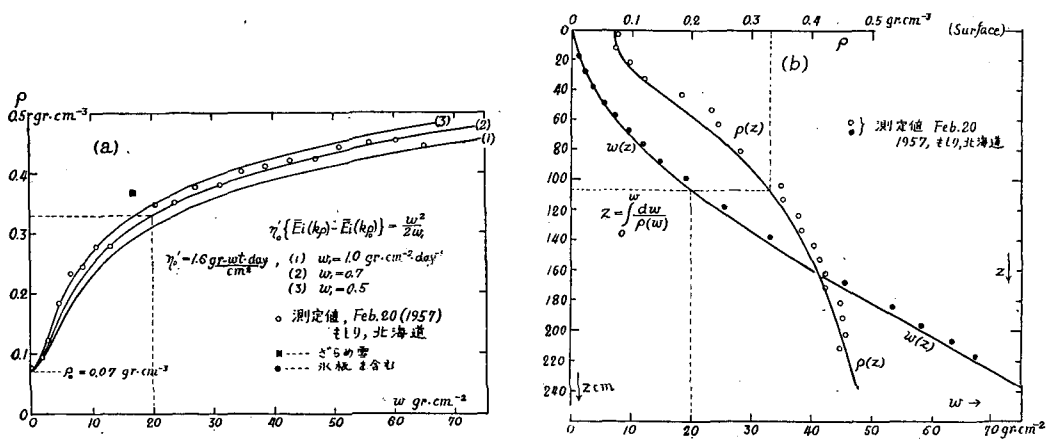
第13図 W : 根雪初日から積算した降水量,
 s, t, t' : 根雪初日から経過日数,
 $\rho(t, t')$: t' で出来た層 (t' -層) の t における密度, $w(t, t')$: t で t' 層の上に積っている雪の重さ
 $q(s)$: 時刻 s での降水強度

$\rho \sim w$ 関係は時刻 t によつて変る。

そのような一般の場合に、時刻 t における密度分布を求めるには次のようにすればよい。
 $W(t) = \int_0^t q(s) ds$ によつて降水強度 q から W と t との関係を求めておき、第13図のように、時刻 t をあらわす鉛直線 \overline{Yt} 上に雪の表面 Y から測つて積雪水量が w になる点 Z から水平直線 ZX を引く。 \overline{ZX} 、 \overline{ZY} 及び W 曲線で囲まれる部分の面積 Q を測り、第9図(A)からこの Q に対する ρ の値を求める。同様のことを w のいろいろな値に対して行なえば、時刻 t での ρ と w との関係を示すひとつの曲線 $\rho(w)$ が求められる。このようにすれば、毎日の降水量 $q(s)$ さえわかつていれば、 $W(t) = \int_0^t q(s) ds$ をあらわす曲線が如何なる形であろうとも、任意の時刻における密度分布を知ることができる。しかしこの方法はかなり手数がかかる。それで、積雪水量の増加率が大体一定 (w_1) であるとみなされる期間に対しては、(20)式で近似的な密度分布を求める方が便利である。

第14図には降水強度 q がいつも一定値 w_1 をとる場合の ρ と w との関係をも (20)式から求め、曲線(1)、(2)及び(3)であらわした。これらの曲線はそれぞれ $w_1 = 1.0, 0.7$ 及び $0.5 \text{ gr/cm}^2 \cdot \text{day}$ として求めたもので、いずれの場合も密度 ρ と積算荷重 Q との関係が第9図(A)の曲線 a に従うとした場合のものである。

実際の積雪は、根雪の初日から冬のさなかにかけては、おおよそのところ一定の割合でその水量が増して行くと見てよい。したがつて、或る時に、積雪内部の点の密度 ρ を測定し、その点より上にある積雪水量 w を求めて、 ρ と w との関係をも求めれば第14図(a)の曲線と一致するはずである。この図の円印は今年(1957)2月20日に北海道雨竜郡の北大演習林母子里(も

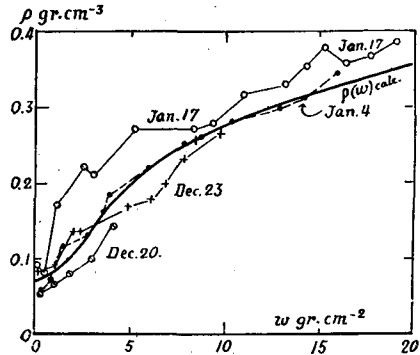


第14図 絶えず一定の割合 $w_1 \text{ gr/cm}^2 \cdot \text{day}$ で雪が積つている場合の密度の垂直分布 (第8図(A)の曲線 a にもとずいた計算結果と測定値)

- (a) 密度 ρ とその層より上に積つている雪の水量 $w \text{ gr/cm}^2$ との関係。 ($w_1 = 0.5, 0.7$ 及び $1.0 \text{ gr/cm}^2 \cdot \text{day}$ として計算した $\rho(w)$ 曲線)
- (b) 表面からの深さ $z \text{ cm}$ にいたる雪の水量 $w(z) \text{ gr/cm}^2$ 、ならびに深さ $z \text{ cm}$ の密度 $\rho(z)$ 測定値はいずれも北大雨竜演習林母子里看守所構内での測定値。計算は(a)の曲線(2)による。

しり) 看守所構内で測定した密度で、 $w_1=0.7$ の曲線(2)とほぼ一致している。実際に看守所で測定されていた降水量を根雪初日から2月20日までの100日間にわたり積算すると 71 gr/cm^2 で、 $w_1=0.71$ となる。また、筆者が滞在した2月20日から1週間の降雪量は 5.0 gr/cm^2 であつてこれもまた $w_1=0.7$ をあたえる。

第15図の太い実線は第9図(A)の曲線b($\gamma_0=1.00 \text{ gr-wt}\cdot\text{day/cm}^2$)により、 $w_1=0.7 \text{ gr/cm}^2\cdot\text{day}$ として求めた $\rho\sim w$ 曲線で、その他の細い線の曲線は今年(1956-1957)の札幌の積雪について実際測定された値である。第14図(a)で w_1 の値を小さくと



第15図 $w_1=0.5$ とし第9図(A)の曲線bにもとづいて計算した密度の分布 $\rho(w)_{\text{calc.}}$ と札幌における密度分布の測定値

る方が $\rho(w)$ 曲線が上にふくらむ形になることがわかるのであるが、第15図の測定値も、降雪強度が最も大きかつた12月20日から最も小さかつた1月17日にかけて次第に上にふくらんだ分布になつている。1月4日の測定値と計算で求めた曲線とは全く一致しているが、この頃は丁度 $w_1=0.7 \text{ gr/cm}^2\cdot\text{day}$ で連続的に雪が降つていたのである。

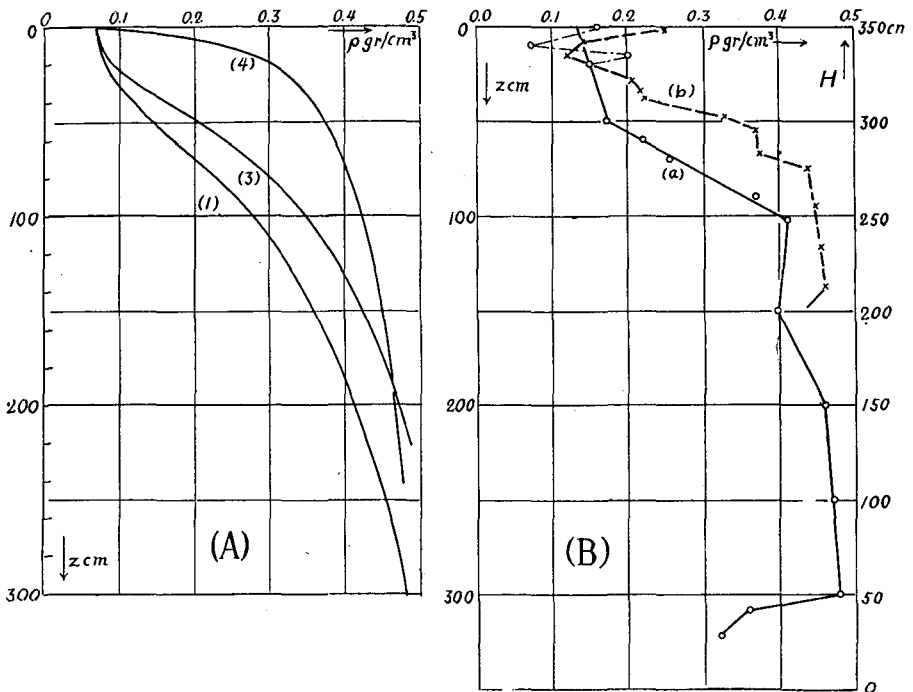
なお、ここでは $\rho(w)$ 曲線を求めるのに、 $\gamma_0=1.00$ として第9図(A)の曲線bであらわしたのに対し、まえの第14図の $\rho(w)$ 曲線では、第9図の曲線aにより $\gamma_0=1.60$ として計算した結果、母子里の測定値をよく説明し得たのである。このように2つの土地での測定結果を説明するのに別の $Q\sim\rho$ 曲線(第9図(A)のbとa)を用いる必要があつたのは、母子里では札幌よりかなり気温が低く、従つて又、雪温も低かつたためであらう。

(b) ρ と z との関係。この[B]の場合には[A]の一定荷重のときのように密度 ρ と積雪表面からの深さ z との関係式を簡単な形で導き出すことはできない。それで、

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\rho(w)} \tag{21}$$

の右辺の積分の値を第14図(a)の ρ と w との関係を用いて数値計算して z と w との関係を決めたのち、ふたたび第14図(a)の ρ と w との関係を利用して z と ρ との関係を求めた。第14図(b)の曲線 $w(z)$ が z と w との関係を示す曲線である。

この曲線 $w(z)$ と第14図(a)の曲線 $\rho(w)$ とから z と ρ との関係を求めるには次のようにすればよい。例えば、(a)図の点線に従つて $w=20 \text{ gr/cm}^2$ に対する ρ の値 0.33 gr/cm^3 が求められ、(b)図からは同じ w に対する z の値として 108 cm が得られる。そして図に記したように、 $z=108 \text{ cm}$ をあらわす点線の水平直線と $\rho=0.33$ をあらわす鉛直直線との交点を作れば、この点は $\rho(z)$ 曲線上の一点である。同様の手続をいろいろな w の値に対して行なえば、 $\rho(z)$ 曲線を(b)図に示したように求めることができる。これらの曲線 $\rho(z)$ 及び $w(z)$ に沿つて、母子里での測定値を記入したが、計算結果とほとんど一致している。



第16図 (A) 曲線(1)及び(3)は夫々 $w_1=1.0$ 及び $0.5 \text{ gr/cm}^2\text{-day}$ として計算した密度の分布曲線 $\rho(z)$ 。曲線(4)は一定荷重(積雪量不変)の場合の $t=20$ 日における $\rho(z)$ 曲線。
 (B) (a)はニセコで測定した密度分布。(b)は小幌で測定した密度分布。

第16図は北海道ニセコアンヌプリ(以下ニセコと略称)の中腹および室蘭本線小幌(こぼろ)信号所附近の山中で1956年3月に測定した実際の密度分布と理論曲線とを比較したものである。(A)図の曲線(1),(3)は第14図(a)の曲線(1)及び(3)から求めた $\rho(z)$ の理論曲線で、積雪水量が一定の割合 $w_1=1.0, 0.5$ で増して行く場合である。曲線(4)は第12図(b)の積雪水量不変の場合の $t=20$ 日に対する $\rho(z)$ の理論曲線である。(B)図は上記地点での実測結果で(a)曲線がニセコアンヌプリ、(b)曲線が小幌のものである。実測値曲線(a)にいちばん近いのは理論曲線(3)である。したがってニセコの積雪は(表面から1.5mくらいの深さまでの積雪に関しては) $w_1=0.5$ の割合で増加したものと考えられる。

小幌での実測曲線は理論曲線(3)よりもなお上の方にふくれている。そして積雪量が最初から変化しないと考えたときの理論曲線(4)と曲線(3)との中間にある。つまり、小幌の場合には、積雪の増加速度 w_1 がニセコの場合の0.5より小さかつたことを意味している。実際に、小幌の積雪深はニセコの積雪深の半分の175cmしかなかつたので、 w_1 はニセコの場合の半分ほどであつたわけである。しかし、 w_1 をその値にとつたとしても、実測値とのあいだにはかなりの開きが出てくる。それは、ひとつには実際の積雪水量の増しかたが、理論曲線(1),(3)を求めるのに用いた仮定(w_1 一定)と非常にちがつていたためであろう。

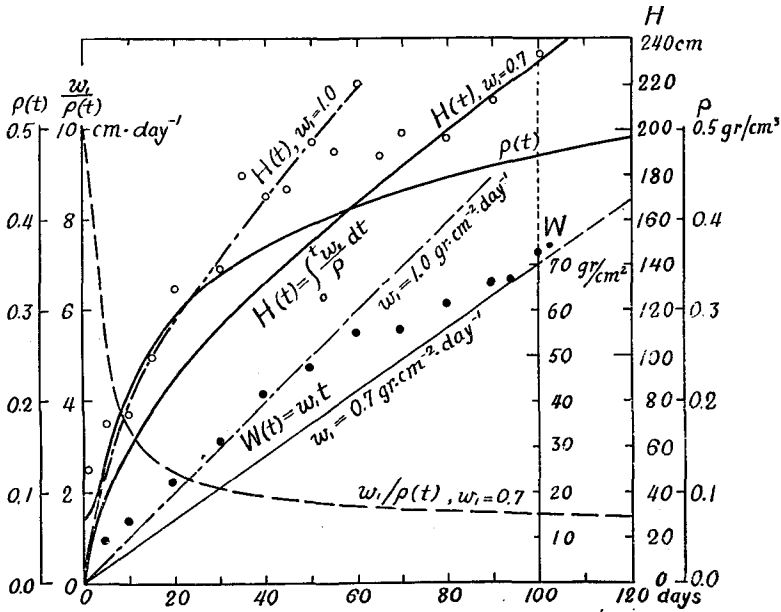
以上、北海道の4地点母子里、札幌、ニセコアンヌプリ、小幌での積雪密度分布の実測値と理論値との比較を行なつた。全体として比較的よい一致が得られたと思われるが、母子里での一致は殊によく、ほとんど完全といつてよいほどであつた。母子里は山にかこまれた平坦な盆地で、風も弱く、積雪に対する擾乱の少ない土地である。札幌もまた平地ではあるが、ここは家がたちこめ、煤煙なども多く、雪は人的擾乱にさらされている。ニセコ、小幌は人里はなれてはいるが傾斜地であつた。これらのことから考えて、筆者の行なつた方法は大筋においてはまちががなく、その土地の条件を繰り入れることにより、将来はもつとよい理論と実際との一致が得られるものとする。

VIII. 積雪深の時間的变化

雪が絶えず一定の割合 w_1 gr/cm²·day でつもりつづける場合。時間 t の原点を根雪の初日にとり、根雪初日から t ($< t$) 日後の1日間に積つて出来た雪の層の t 日における厚さを考えると、それは $\frac{w_1}{\rho(t-t')}$ cm にひとしい。したがつて、根雪の初日から t 日後の積雪深 $H(t)$ は

$$H(t) = \int_0^t \frac{w_1}{\rho(t-t')} dt' = \int_0^t \frac{w_1}{\rho(t)} dt \tag{22}$$

であらわされる。



第17図 曲線 $H(t)$: 計算で求めた積雪深。白円印は母子里での実測値。
 $W(t)$: 全積雪水量, 黒円印は母子里で観測された毎日の降水量の積算値。
 t : 根雪初日から数えた日数。曲線 $\rho(t)$: 雪の積りかたを $W(t)=0.7t$ gr/cm² と仮定したときの積雪最下層の密度変化。(第9図(A)の曲線 a と(B)図の直線(2)とから求めた)。

北海道の母子里で実際に観測された積雪深と、この(22)式から計算される値とを比較してみよう。この土地では積雪深が2 mをこえる。第17図の黒円印は母子里で観測されていた毎日の降水量を根雪の初日から積算して求めた $W(t)$ の実測値である。これで見ると、 w_1 の値ははじめから50日あたりまでは1.0で、それ以後しだいに小さくなり、90日目あたりから0.7になつている。それで、 $w_1=0.7$ および1.0として上の式(22)により $H(t)$ を求めてみた。 $w_1=0.7$ として $\rho(t)$ を第9図(A)の曲線aと同図(B)の直線(2)とから求め、 $\frac{w_1}{\rho(t)}$ を書いたのが第17図の $\rho(t)$ 及び $\frac{w_1}{\rho(t)}$ と記した曲線である。この $\frac{w_1}{\rho(t)}$ を用い、(21)式の積分を数値計算で行なつて得た $H(t)$ が第17図の太い実線の曲線である。又、 $H(t)$ 、 $w_1=1.0$ と記した細い破線の曲線は、上と同様の手続で w_1 の値を1.0として求めた $H(t)$ 曲線である。第17図の白円印が母子里の積雪深 $H(t)$ の観測値である。 $t=50$ 日以前の実測値は $w(t)=1.0 \text{ t gr/cm}^2$ として求めた理論曲線とよくあつている。その後実測値はこの理論曲線の値より小さくなり、 $t=90$ 日あたりから $w_1=0.7$ として求めた理論曲線に一致する。もちろん、90日以後 $w_1=0.7$ として求めた理論値と実測値とが一致したのは一応偶然によるものと考えなければならない。しかし、次のように考えると必ずしも偶然によるもののみは言えない。90日以後の理論値は、根雪の初日から $w_1=0.7$ によつて積雪が増加したと考へて求めたのであるから、実際よりは少ない雪の量を仮定しているわけである。このことは、理論値を小さくさせる方向に作用する。しかし、一方雪の量が少ないことは積雪の自重が少ないことを意味し、結果として積雪の沈降速度は小さくなる。したがつて実際よりも雪の量を少なく見積ることは、 $H(t)$ の理論値を実測値よりも大きくさせるように作用する。このふたつの作用が相殺して90日以後の一致が得られたものと想像されるわけである。

IX. 結 語

1954年12月から1957年2月までの3冬期間、主として札幌の積雪を対称に、積雪が雪自身の重さによつて圧縮されるいわゆる沈降の速さを測定して、これから積雪層の圧縮粘性係数を求めた。そのために、北大構内の雪に平均5日おきに表面から地面までの鉛直断面を作り、そこにあらわれる水平の縞によつて区分される雪層の各々につき、厚さと密度とを時間的に追跡して測定した。層の厚さの測定値は密度のそれにくらべると誤差が大きいので、主に密度の測定結果を利用し、IV節に述べたようにして積雪の各層の粘性係数を求めた。雪の粘性或いは弾性に関する実験的方法による測定は、従来も多くの研究者^{8),9),10)}によつて行なわれて来た。筆者も前に吉田順五¹¹⁾が行なつた実験と同じ方法で、低温実験室内で雪の粘弾性係数を測定¹⁾した。これらの室内実験は積雪のなかから切り出した雪の試料についての測定であり、得られた粘性係数は、圧力を加えてから比較的短かい時間内で測定されたものである。それで、次の段階として筆者は野外の積雪層が長期にわたり自然に行なう粘性圧縮を観測することにより、圧力がきわめてゆつくり増加し、しかも、圧力を加えられたまま非常に長い時間経過する場合にあらわれる粘性係数を求めたわけである。第1報及び第2報には個々の雪の層が降りつもつ

てからしまりゆきになるまでの数 10 日間における粘性係数の時間的変化に着目して、測定結果を報告した。個々の層につき、同じ時刻 t における粘性係数 $\eta(t)$ と密度 $\rho(t)$ との関係をもしらべた結果、 η を ρ の関数として簡単な式であらわすことが出来た。そして、この η と ρ との関係が霜ざらめと普通のしまりゆきとで著しく異なることを見出した。すなわち、同じ密度のしまりゆきと霜ざらめとを比較すると、霜ざらめの粘性係数はしまりゆきの粘性係数の 10 倍の大きさにも達する。これに反し、衝撃破壊強度をこれらの両者について比較すると、木下誠一¹³⁾ の測定結果によれば、霜ざらめの強度は、これと同じ密度を持つしまりゆきの 1/10 にすぎない。第 2 報では霜ざらめのこのような著しい性質をその特異な粒子構造から説明した。この報告 (第 3 報) では、実際の積雪層の粘性係数が時間の経過と共に大きくなるのは、結局、雪の密度が大きくなることに原因するという観点にもとづき、改めて η と ρ との関係を IV 節 (c) で述べたようにして、 $\eta(\rho) = \eta_0 e^{k\rho}$ であらわした。そして、この η と ρ との関係式を基礎として、先ず雪層の密度の時間的変化を

$$\eta_0 \{ \bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0) \} = \int_0^t w(t) dt = Q(t)$$

であらわすことが出来た。雪層の密度の降りつもつてから t 日後における値は、それまでにその層がうけた雪圧の積算値 $Q(t)$ さえわかれば上の関係式によつて求められることがわかつたわけである。この $\rho(t)$ と $Q(t)$ との関係にもとづいて更に、積雪の密度の垂直分布ならびに積雪深の時間的変化を計算によつて導き出すことが出来た。そしてこれらの計算結果を北海道内の 4 地点での測定値と比較してよい一致を見たのである。将来は、以上のような理論的取扱を更に発展させることによつて、実際の積雪状態を一層適確に説明出来るようになると思われる。

最後に、この研究を終始指導された吉田教授ならびに有益な助言を与えられた大浦助教授に厚く感謝する次第である。又、北大、雨竜演習林特に母子里看守所からは、多くの気象観測資料を拝借し、当地での積雪の測定に便宜を与えられた。ここに併記して厚く謝意を表す。なお、研究費は文部省科学研究費によつた。

文 献

- 1) 小島賢治 1954 積雪の粘弾性. 低温科学, 物理篇, **12**, 1.
- 2) ——— 1955 積雪層の粘性圧縮. I. 低温科学, 物理篇, **14**, 77.
- 2) ——— 1956 積雪層の粘性圧縮. II. 低温科学, 物理篇, **15**, 117.
- 4) R. Saito 1949 *Physics of Fallen Snow*. 中央気象台英文彙報, **19**, 1~2 号.
- 5) 石原健二 1951 積雪深変化の予報. 雪氷, **13**, 1.
- 6) 筆者が用いた数値表:
K. A. Karpov and S. N. Razumovskiy 1956 *Tablitsy Integralnogo Logarifma*. Akademia Nauk SSSR.
- 7) 荘田幹夫 1953 電柱支線及び送電鉄塔に対する積雪の沈降力の研究. 雪氷の研究, **I**, 139.
- 8) R. Haefeli 1939 *Schneemechanik mit Hinweisen auf die Erdbaumechanik*. Beiträge zur Geologie der Schweiz-Geotechnische Serie-Hydrologie, Lieferung **3**.

- 9) M. De Quervain 1949 Kristallplastische Vorgänge im Schneeaggregat II. Mitteilungen aus dem eidg. Institut für Schnee- und Lawinenforschung.
- 10) Edwin Bucher 1948 Beitrag zu den theoretischen Grundlagen des Lawinenverbau. Beiträge zur Geologie der Schweiz-Geotechnische Serie-Hydrologie, Lieferung 6.
- 11) 吉田順五・笹谷雅信・内海威彦 1948 積雪の弾性と匍匐. 低温科学, 4, 11.
- 12) 木下誠一 1957 衝撃による積雪の破壊. III. 低温科学, 物理篇, 16, 119.

Résumé

The viscous compression of snow layers composing the snow cover deposited on the ground was studied in the three winters of 1954-55, 1955-56 and 1956-57 at Sapporo. The author found a simple and considerably exact relation shown below by equation (4) between the coefficient of viscosity η and the density ρ of the layers. That equation was then used for computing theoretically the thickness of snow cover from the precipitated amount of snow and a good agreement was found between the computed thickness and the observed.

The density and the thickness were observed on each of the snow layers every five days. Let the density and the thickness of any layer t days after its formation be denoted by $\rho(t)$ and $h(t)$ respectively, then the increment ds of strain of that layer occurring during a small interval dt is

$$ds = \frac{h(t) - h(t+dt)}{h(t)} = - \left(\frac{dh}{h} \right)_t = \left(\frac{d\rho}{\rho} \right)_t \quad (1)$$

The coefficient of viscosity $\eta(t)$ of the snow composing the layer is defined by the relation

$$\eta(t) = w(t) \left/ \left(\frac{ds}{dt} \right)_t \right., \quad (2)$$

where $w(t)$ is the pressure acting on the layer. $w(t)$ was here put equal to the total weight of snow deposited above the mid-point of the layer concerned. $w(t)$ and $\left(\frac{ds}{dt} \right)_t$ were obtained from the results of measurement and the values of $\eta(t)$ were calculated by eq. (2) for different values of t and for each layer of snow. By eliminating the time t from $\eta(t)$ and $\rho(t)$ the following relation was found to hold between them:

$$\log \eta = \log \eta_0 + k\rho \quad \text{or} \quad \eta(\rho) = \eta_0 e^{k\rho}, \quad (4)$$

where η_0 is the value of η for $\rho=0$. Although the value of η_0 changed in the range 0.6-1.6 gr-wt·day/cm² from one layer to the other, the constant k showed the same value 21 gr⁻¹ cm³ for almost all the layers. It should be noticed, however, that equation (4) was applicable only to such a common snow layer as one which settled into hard compact snow by slow metamorphosis. Occasionally the snow layers changed by rapid metamorphosis into fragile structures mainly composed of depth hoars. In such cases $\log \eta$ increased with increasing ρ more rapidly than linearly and the relation between η and ρ was found to be expressed by the formula

$$\log \eta = \log \eta_0 - b \log \rho' \quad \text{or} \quad \eta(\rho) = \eta_0 \rho'^{-b} \quad (5)$$

$$\text{with } \rho' = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty},$$

where ρ_∞ is the value of ρ for $t \rightarrow \infty$ and b is a constant.

Let time t be counted from the beginning of the snow season and let the snow layer deposited at time t' be called t' -layer. Then, if the mass of snow precipitated in the time interval from t to $t+dt$ is denoted by $q(t) dt$,

weight of snow cover at time t :

$$W(t) = \int_0^t q(s) ds,$$

weight of snow layers at time t laying above t' -layer:

$$w(t, t') = \int_{t'}^t q(s) ds = W(t) - W(t'),$$

integrated load of the weight which acts on t' -layer from t' up to t ;

$$Q(t, t') = \int_{t'}^t w(s, t) ds = \int_{t'}^t (t-s) q(s) ds$$

integrated load of the weight on the lowest layer of the snow cover:

$$Q(t) = \int_0^t W(s) ds = \int_0^t (t-s) q(s) ds.$$

When t' -layer is taken into consideration $w(t)$ in eq. (2) must be replaced by the above defined $w(t, t')$. Thus modified eq. (2) and eq. (4) yield

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{e^{k\rho}}{\rho} d\rho = \frac{Q(t, t')}{\eta'_0}, \quad (6)$$

which can be transformed into

$$\eta'_0 \{ \bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0) \} = Q(t, t'). \quad (7)$$

Here $\bar{E}i(x)$ represents the logarithmic integral $\int_{-\infty}^{-x} (e^{-u}/u) du$ and ρ_0 is the initial value of the density of t' -layer. $Q(t, t')$ is a quantity of which the magnitude can be determined from the observed amount $q(t)$ of snow precipitated before time t . When $Q(t, t')$ is determined in this way the density $\rho(t, t')$ of t' -layer at time t can be computed from eq. (7) by the use of numerical table of the logarithmic integral $\bar{E}i(x)$. The snow $q(t')dt'$ precipitated in the time interval dt' at time t' to form t' -layer contributes to the thickness $H(t)$ of the snow cover at time t by the amount

$$dH(t, t') = q(t') dt' / \rho(t, t').$$

Therefore the thickness $H(t)$ of the snow cover can be obtained by summing up $dH(t, t')$ computed for every t' -layer which has been deposited up to time t .

Although the above mentioned procedure of computation is applicable regardless of the manner in which the precipitation of snow occurs, it is very troublesome to perform the computation in practice. It will be advantageous to represent the actual precipitation by an approximation convenient for the computation. As the first step the author puts the precipitation rate $q(t)$ equal to a constant value w_1 . Then eq. (7) takes the form

$$\eta'_0 \{ \bar{E}i(k\rho) - \bar{E}i(k\rho_0) \} = w_1 t^2 / 2 \quad (8)$$

or

$$\tau_0 \{Ei(k\rho) - Ei(k\rho_0)\} = w^2(t, t')/2w_1 \quad (9)$$

The last equation (9) shows that the density $\rho(t, t')$ of the t' -layer is completely determined by the weight $w(t, t')$ of the snow lying at time t above the t' -layer. This is a very favorable situation for the computation.

The solid circles in Fig. 17 are the integrated value of the observed precipitation, that is, $W(t) = \int_0^t q(s) ds$. Up to $t=60$ days the observed values lie near to the curve $W(t) = w_1 t$ with $w_1 = 1.0 \text{ gr}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{day}^{-1}$: in this interval w_1 was nearly equal to 1.0. In the same figure the broken curve marked $\{H(t), w_1 = 1.0\}$ shows the computed value of the thickness of snow cover under the assumption $w_1 = 1.0$. The light circles in the figure are the observed thickness of the actual snow cover. One sees a good agreement between the computed values and the observed. After $t=60$ days, the solid circles, that is, the observed values of $W(t)$, tend to approach the curve marked $w_1 = 0.7 \text{ gr}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{day}^{-1}$, which indicates that w_1 decreased from 1.0 to 0.7. The curve marked $\{H(t), w = 0.7\}$ is the computed $H(t)$ -curve for $w_1 = 0.7$ and the light circles representing the observed thickness of snow cover tend to be distributed along this curve.

When the density ρ of snow is computed for different depths z from the snow surface under the assumption $w_1 = 0.7$, ρ is found to depend on z as shown by the curve $\rho(z)$ in Fig. 14(b). The light circles are actual density measured on the same snow as that of Fig. 17 on the day $t=100$ when the snow cover was as thick as 230 cm. Agreement between the computed and the observed value is excellent. Several other snow covers were dealt with in the same way as above and the agreement was found to be good though not in so high degree as in the above example.

The author made another assumption on the manner of precipitation $q(t)$ equal to zero: the snow is accumulated instantly to a finite amount at $t=0$ and no snow is added hereafter. The computation shows that the snow layers composing the snow cover 50 cm thick initially subside in such a manner as shown by the full curves in Fig. 12(c). Unfortunately the author has not yet chanced to find a snow cover which seemed to satisfy so nearly the assumed conditions that the comparison of the computed value with the observed is permissible.