



Title	雪洞の変形について
Author(s)	大浦, 浩文; OURA, Hirobumi
Citation	低温科学. 物理篇, 17, 65-79
Issue Date	1958-12-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/17944
Type	departmental bulletin paper
File Information	17_p65-79.pdf



雪洞の変形について*

大浦浩文

(低温科学研究所 応用物理学部門)

(昭和33年7月受理)

I. まえがき

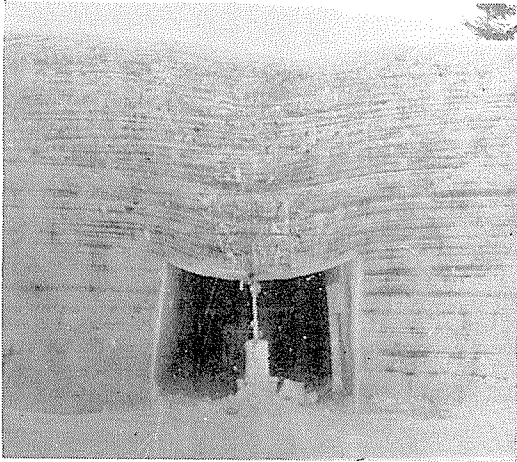
積雪は層状組織をもち、一様な性質のものではない。しかも複雑な形の斜面の上に堆積することが多く、積雪に作用する力は場合場合によつて非常にちがう。積雪は徐々に収縮、伸張、沈下をするが、それ等は当然積雪に作用する力によつて変わるわけである。一方、積雪から一様な性質をもつた小さな試料をとりだし、それに単純な力をかけた場合の変形を研究することにより、積雪の基本的な機械的性質は近頃大分明らかになつてきた。それで、層状組織をもつ実際の積雪に複雑な力が作用した場合の変形を積雪の基本的な機械的性質を基礎として説明することを次の問題とすべきであろう。すくなくとも、実際の積雪の変形と基本的な機械的性質との間の関連を調べることが必要である。実際の積雪を取扱ふとすれば、積雪の実際の性質をある程度単純化して考えなければならないが、どの程度の単純化が許されるかが、このような基本的な機械的性質との関連を調べることによつて判明するであろう。その目的に向う一步として筆者は深さ2 mの積雪のなかに横穴(雪洞)をつくり、その附近におこる雪の変形の時間的変化をしらべた。その結果から、主として、雪の縦粘度 η を導き出し、雪の試料について得られている η の値と比較した。

II. 観測装置

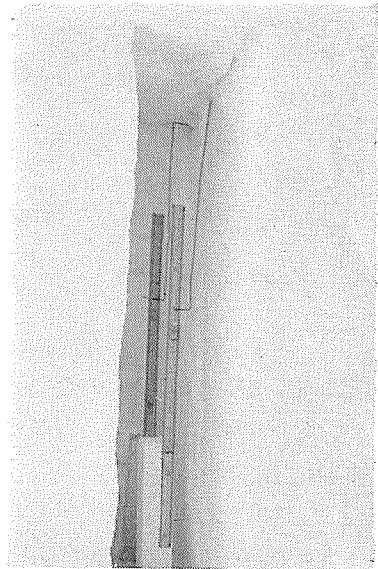
雪洞は間口1 m、高さ1 m、奥行約5 mである。積雪の深さは2 mなので、雪洞の屋根の厚さは1 mある(第1図参照)。雪洞の入口から1 m 75 cmのところを雪洞の変形を測定する装置をつけた。更にこの装置よりも1 m奥から先、すなわち雪洞の入口から2 m 75 cmのところから奥にむかつて雪洞の天井の中央を1 m 50 cmの長さの梁で支え、梁にかかる力の測定をした。雪洞の入口近くでは、自然のままの雪洞の変形の測定、奥の方では天井を支えて雪洞の自然の変形を妨害したときに生ずる応力の測定が行われたわけである。ただし、ここでは、入口附近で行つた自然変形についてだけ報告する。雪洞の入口及び入口から70 cm奥には木の蓋をして雪洞内の温度が外気温の影響を受けるのを防いだ。

雪洞の自然変形の測定としては、天井の中央の下降をダイヤルゲージで測り、また、天井

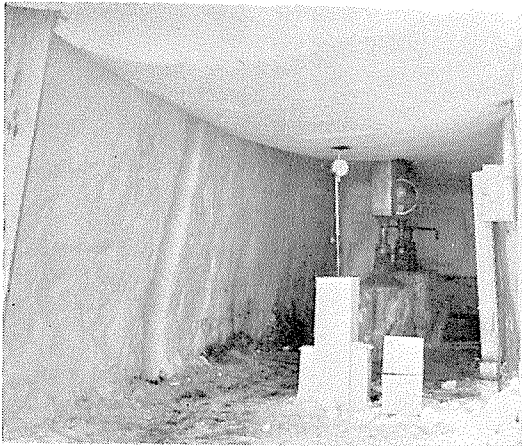
* 北海道大学低温科学研究所業績 第458号



第1図 観測をはじめてから10日目に変形測定装置の少し手前で切った雪洞の断面。入口はこの断面よりも約1 m 70 cm手前にあつた。中央にダイヤルゲージ、右側の壁面には物指をつけた垂木が立っている。



第3図 側壁に垂直に掘った溝の中で層の圧縮速度を測定しているところ。この溝が第2図の左の壁に見える。



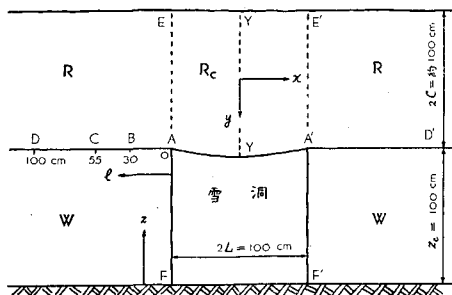
第2図 天井の降下測定の状態

の壁ぎわの下降を物指で測つた（第2図参照）。雪洞の側壁を形造っている積雪層は、雪洞が無い場合に較べて大きな余分の圧力を上層から受けている。この余分の力は雪洞の側壁から積雪層の内部にむかつて離れるにしたがい小さくなる筈である。この力の分布をしらべるために、雪洞の側壁に垂直に深い溝を掘り壁面から30 cm、55 cmのところまで雪洞の天井と同じ高さの層の沈下量を測定した（第3図参照）。

ダイヤルゲージは第2図に見られるように地面に立てた角材に固定し、その先を天井に取付けた鉄板に接触させた。こうして天井の下降を約1/500 mmの精度で読みとつた。

側壁及び側壁内部での沈下量を物指で測るには第3図のように地面に打ち込んだ垂木に物指を固定し、沈下を測定しようとする点に差込んだ針金を曲げてその先が物指の目盛を指すようにした。このときの読取りの精度は約1/5 mmである。この針金の根元、雪のなかに差込んだ所には、スポイドで水を注ぎ雪に凍りつかせた。天井に鉄板を取付けるときにも同様にした。

尚今後の説明の便宜のために第4図にはこれ等の装置を含む断面を模式的に示し、各点に名前をつけた。天井の中央がY、その真上の積雪表面がY'、天井と壁との交点がAとA'、壁面はAFとA'F'であらわし、地面との交点をFとF'とする。積雪の高さは地面から測り、 z であらわす。天井の高さ z_0 と同じ高さ $z=z_0=100\text{ cm}$ の水平面DAA'D'を境にして上部の積雪層——雪洞の天井であり屋根を形造つてい

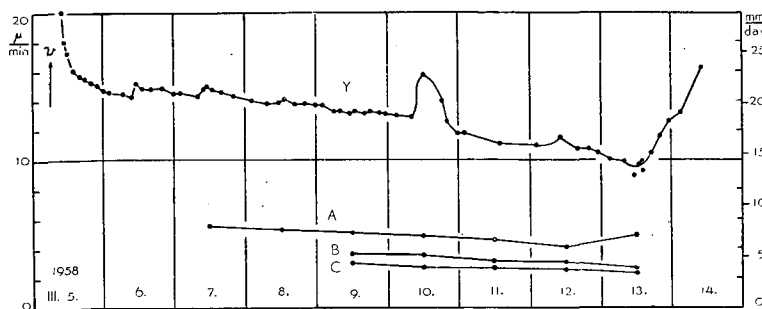


第4図 雪洞断面の模式図

る層——をR層、下部の層——雪洞の壁を形造つている層——をW層と名づける。W層については、AF面からの距離を l であらわす。B, C, Dは $z=z_0$ で $l=30\text{ cm}$, 55 cm , 100 cm の点をあらわす。またA, A'の真上の積雪表面上の点をE, E'とする。AA'の長さを $2L$, AEの長さを $2C$ とする。いまの場合 $L=C=50\text{ cm}$ である。R層のうち、雪洞の真上の矩形AEE'A'の部分をも呼ぶことにする。

III. 観測結果

前節に述べたような方法で、天井の下降量と側壁の圧縮量とが時間の函数として測定されたので、これ等の時間的な変化の割合から、下降速度、圧縮速度を求めて第5図に示した。横軸には日付をとつてある。Y, A, B, Cで示された曲線はそれぞれY, A, B, C点の下降速度、或いは沈下速度をあらわしている。Y点の位置の観測は1日に数回行い、その下降速度は毎回の観測値の差から求めた。A, B, C点に関しては、その観測精度があまり高くないので1日間の沈下量の平均値から沈下速度を定めた。何れの曲線も日が経つにしたがつて速度が小さくなつていく。Y曲線で異常と認められるのは3月5日(雪洞を作つた翌日)に測定をはじめたときにみられた急激な減少、10日の正午から夕方にかけての一時的な増加、及び13日午



第5図 沈降速度の時間的变化

曲線 Y : Y 点の下降速度 曲線 A : A' 点の沈下速度
 曲線 B : B 点の沈下速度 曲線 C : C 点の沈下速度

後から14日にかけての長期にわたる増加である。

a) 3月5日におけるY点の下降速度の減少

雪洞は4日に掘り、Y点の位置を示すダイヤルゲージを取付けたのはその日の22時30分であつた。翌朝7時に測定しようとしたら、前夜よりも6mmも下降して、ダイヤルゲージは完全にスケールアウトしていた。下降速度を $15 \mu/\text{min} = 0.9 \text{ mm/hour}$ と見算つて計算すると、ゲージが動いていたのは5日5時30分頃までとなる。ゲージはその後10時になつて整備しなおし再開したのであるが、第5図のY曲線はこの時から以後の天井の沈下速度を表わしているわけである。したがつてY曲線の始点のまえ4時間半(5時30分から10時まで)、雪洞の天井は、スケールアウトして動かなくなつたゲージによつて交えられていたわけである。それがゲージの整備により、ゲージによる支持を失つて急に下降しはじめたと考えられる。しかも図にあるように、下降速度は急激に減少しているが、このことは雪洞の天井の弾性遅延現象によるものとして説明されるであろう。図からわかるように、この弾性遅延時間 τ はほぼ4hour $\sim 1.5 \times 10^4 \text{ sec}$ である。 τ の値はその力学系をFoigt模型でおきかえたときの、ばねの弾性率 E_F とダッシュポットの粘度 η_F との比であらわされる。即ち $\tau = (\eta_F/E_F)$ である。今、この考えが正しいとして数量的な考察を与えてみる。積雪の縦粘度を η 、ヤング率を E とすると、 E_F 、 η_F の値は E 、 η の函数として与えられ、 η_F/E_F の値は E 、 η の値から算出できる。いまここではこの函数形については深く立入らないが、 η_F/E_F は η/E と同じ程度の大きさである事は予想される。それでこれを等しいとおけば、 $\tau = (\eta_F/E_F) = (\eta/E)$ が成立つ。 E は雪の性質による差異が比較的少なく、 $10^7 \sim 10^8 \text{ dyne/cm}^2$ 程度の大きさであることが知られている。これから η を求めると

$$\begin{aligned} \eta &= \tau E = 1.5 \times 11^{11} \sim 10^{12} \text{ dyne} \cdot \text{sec/cm}^2 \\ &= 1.7 \times 10^3 \sim 10^4 \text{ g} \cdot \text{day/cm}^2 \end{aligned}$$

となる。雪洞の屋根を作つている雪のなかでの縦粘度 η は小島によつてくわしく測定され¹⁾その結果を第7図(a)に示した。この図の $z=100 \text{ cm}$ は雪洞の天井にあたり、 $z=200 \text{ cm}$ は積雪の表面であつて、 η は雪洞の天井の所の大きな値から上にゆくにつれて減少している。 η の重心は $z=124 \text{ cm}$ あたりにあり、その附近の η の値は $3 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{day/cm}^2$ の程度であり、又R層全体の算術平均は $1.48 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{day/cm}^2$ で、何れも上に、 τ と E とから求めた η の値の範囲内にはいつている。

b) 3月13日午後からのY曲線の増大

13日の日中には日射も強く、気温も $+1^\circ\text{C}$ を超えたので、かなりの融雪が起こり、その水が積雪内部に浸透した。又その後夜間には豪雨があつた。これ等の水は一部は積雪内の層と層との境い目に沿つて横に流れ、雪洞の屋根をなしているR_c部分に集つた。この事はY点に取りつけた鉄板を14日午後に取りはずしたとき、多量の水がその穴から流れ出した事からうかがうことができる。この多量の水の重さのためと、温度の上昇による雪の粘度の低下とが重なつて、下降速度の増加をもたらしたと考えられる。

c) 3月10日のY曲線の山

10日に見られる異常増加の理由はよくわからない。ただ、この増加のあらわれる前にダイヤルゲージを取り付けてある角柱の頭を切つて低くした。これ等の作業の間に天井を押し上げるような事をしたのがこの異常現象の原因を作つたのかも知れない。

d) 3月9日におけるY, A, B, C点の速度

9日は雪洞を掘つた4日と観測を終了した14日との丁度まんなかの日にあたる。したがつて、この日のY, A, B, C点の沈下速度は観測期間10日間のそれぞれの真の平均沈下速度とみてよいであろう。 v にそれぞれの点の記号をつけてこの日の沈下速度を表わすと、

$$\begin{aligned} v_Y &= 19.2 \text{ mm/day}, & v_A &= 7.3 \text{ mm/day}, \\ v_B &= 5.2 \text{ mm/day}, & v_C &= 4.2 \text{ mm/day} \end{aligned}$$

となる。

雪洞の天井の中央点が天井の両端に対して垂れ下る速度は

$$v_Y - v_A = 11.9 \text{ mm/day}$$

で与えられる。観測終了日の14日には雪洞を切断して(第1図参照)天井の垂れ下りをはかつた結果12.6 cmを得た。したがつて観測期間10日間の平均下降速度は12.6 mm/dayとなり、上に得た9日の観測結果とよくあつている。

e) ABCD面の沈下速度分布と圧力分布

いま第4図に示された断面に平行で1 cmの間隔を持つた2枚の平面で雪洞を切り取つて考える。W層はR層及びW層自身の重さのために圧縮されA, B, C, D点は沈下する。矩形AEE'A', 即ちR_c部分の下にはW層が無いのでこの重さは左右のW層によつて受け持たれるであろう。幾何学的な対称性から、この重さは左右のW層に等分されて受け持たれる。すなわち、ABCD面に加えられる圧力の総和にはW層の真上のR層の重量の他にR_c部分の重量の半分が加わつている。この余分の重量はA点附近で最も多く受けもたれ、雪洞から遠ざかるにつれて、即ち l が大きくなるにつれて減少しているであろう。この余分の重量の減少のしかたを定めてみよう。

いま、W層の縦粘度は l や地面からの高さ z に無関係に η_0 であるとする。 $w(z)$ を高さ z の水平な単位面積上に積つた積雪の重量、 $w_1(l)$ を雪洞があるために余計に加わつた圧力とすると、 z の高さにある厚さ dz の雪の層は単位時間に $([w(z)+w_1(l)]/\eta_0) dz$ だけ縮む。したがつて、AD面上、Aから l だけはなれた点の沈下速度 $v(l)$ は

$$v(l) = \int_0^{z_c} \frac{w(z) + w_1(l)}{\eta_0} dz \quad (1)$$

で与えられる。ここに z_c は雪洞の天井の高さ即ちAD面の高さで、積分は地面からAD面まで行つた。観測によれば $w(z)$ は非常によい精度で

$$\begin{aligned} w(z) &= w(0) - 0.43z \text{ g/cm}^2 \quad (0 \leq z \leq z_c = 100 \text{ cm}) \\ w(0) &= 77 \text{ g/cm}^2 \quad (9 \text{ 日に於いて}) \end{aligned} \quad (2)$$

によつて表わされるのでこれを(1)式に入れて計算すると

$$v(l) = \frac{z_c}{\eta_0} \left\{ w\left(\frac{z_c}{2}\right) + w_1(l) \right\} \quad (3)$$

となる。そして $w_1(\infty) = 0$ なる条件を用いると、この式から

$$v(\infty) = \frac{z_c}{\eta_0} w(z_c/2) \quad (4)$$

が得られる。

雪洞の屋根 R 層の単位面積あたりの重さは $w(z_c)$ である。また雪洞の中は $2L$ であるから、R_c 部分の重さは $W = 2L \times w(z_c)$ となる。したがつて $w_1(l)$ については

$$\int_0^\infty w_1(l) dl = \frac{W}{2}, \quad W = 2L \times w(z_c) \quad (5)$$

が成立していなければならない。ここに左辺は ABCD 線上に沿う積分である。(5)式は(3)式と(4)式とによつて

$$\frac{\eta_0}{z_c} \int_0^\infty \{v(l) - v(\infty)\} dl = \frac{W}{2} \quad (6)$$

と書きなおされる。

$v(l)$ は $l = 0, 30, 55 \text{ cm}$ について観測されている。前に d 項であげた $v(0) = v_A, v(30) = v_B, v(55) = v_C$ がそれである。 η_0 の値が知れていれば、この $v(l)$ から(3)式によつて $w_1(l)$ すなわち $w_1(l)$ の分布が $l = 55 \text{ cm}$ までは求められる。しかし、 η_0 は不明であるとの立場ではそれはできない。また、 $w_1(l)$ の知られた l の範囲ももつと広くとれることが望ましい。上に求めた(4)式と(6)式とを用いて、次のようにして、 η_0 の値を定め、 l の範囲も広げることができる。

$v(\infty)$ は雪洞が無かつた場合の ABCD 面の沈降速度である。雪洞の側面から雪のなかに AD 面に沿うて水平に速く距れば、 $w_1(l)$ は 0 になつて $v(l)$ は $v(\infty)$ になる筈であるが、今 $l = l_D = 100 \text{ cm}$ の点 D で w_1 は 0、 v は $v(\infty)$ になると仮定する。すなわち、 $w_1(l_D) = 0, v(l_D) = v(\infty)$ と仮定する。そして簡単のために D 点での値 $v(l_D)$ を v_D であらわしたとすると(4)式、(6)式は

$$v_D = \frac{z_c}{\eta_0} w(z_c/2) \quad (7)$$

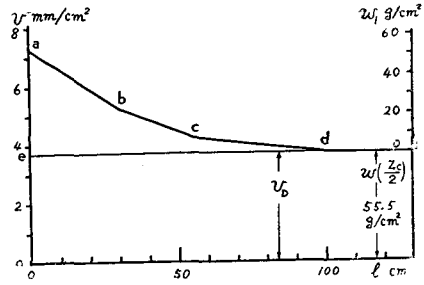
$$\frac{\eta_0}{z_c} \int_0^{l_D} \{v(l) - v_D\} dl = \frac{W}{2} \quad (8)$$

とかきなおされる。(7)式を(8)式に代入して η_0 を消去すれば

$$\frac{w(z_c/2)}{v_D} \int_0^{l_D} \{v(l) - v_D\} dl = \frac{W}{2} \quad (8')$$

となる。ここで $w(z_c/2)$ は(2)式により 55.5 g/cm^2 であり、 W は $2L \times w(z_c)$ で、 $L = 50 \text{ cm}$,

$w(z_c)=34 \text{ g/cm}^2$ を用いて $W=3400 \text{ g}$ であることがわかっている。 $v(l)$ については $l=0, 30, 55 \text{ cm}$ に対して v_A, v_B, v_C としてその値がわかっている。ここで v_D がきまれば (8) 式の左辺の積分は計算される。すなわち (8) 式は v_D を未知数とする方程式である。(8) 式を解いて v_D が求まれば (7) 式によつて η_0 がわかる。



第6図 雪洞の壁の中の高さ $z=z_c$ なる点の沈降速度 v と、その点の壁面からの距離 l との関係、及び、雪洞があるためにその点に生じた余分の圧力 w_1 と l との関係

(8) 式の解は次のような試行錯誤の方法で解くのが便利であろう。横軸に l 、縦軸に v をとつて、 $l=0, 30, 55$ の点について測定された値 v_A, v_B, v_C を書き込み、それ等の点を a, b, c とする (第6図)。

$l=100 \text{ cm}$ のところに仮にきめた v_D の値を書き込み d 点とす d 点を通る水平直線と曲線 $abcd$ と縦軸とで囲まれた面積を求めそれを S とすれば、 S が (8) 式の積分の仮の値となる。積分に掛つている項 w_1/v_D も仮の v_D がきまつているから既知であり、こうして左辺の計算ができる。これが右辺の値 $W/2$ と一致しないかもわからない。そうしたら v_D を少し訂正しておなじ事を行う。このようにして v_D を訂正してゆくと、ついに (8) 式の両辺の値を一致させることができ、その時の v_D が求むるものである。このようにして

$$v_D = v(l_D) = v(\infty) = 3.7 \text{ mm/day}$$

が得られた。又これを (7) 式に代入して

$$\begin{aligned} \eta_0 &= 1.5 \times 10^4 \text{ g} \cdot \text{day/cm}^2 \\ &= 1.27 \times 10^{12} \text{ dyne} \cdot \text{sec/cm}^2 \end{aligned}$$

が得られた。小島¹⁾ は実測によつて

$$\begin{aligned} v_D &= 3.5 \text{ mm/day} \quad (4 \text{ 日から } 14 \text{ 日までの平均}) \\ \eta &= (0.33 \sim 2.4) \times 10^4 \text{ g} \cdot \text{day/cm}^2 \quad (30 \leq z \leq 100) \end{aligned}$$

を得ているが、上の結果はその値とよく一致している。

$w_1(l)$ は (3) 式によつて $v(l)$ と直線的な関係で結ばれているので、得られた η_0 の値を用いて第6図の縦軸に w_1 の目盛を刻めば、曲線 $abcd$ がそのまま $w_1(l)$ の分布をあらわす事になる。第6図の右側にその目盛が刻んである。

ABCD 面に実際にかかつていた圧力の分布は $w_1(l)+w(z_c)$ で、9日の値は $w_1(l)+34 \text{ g/cm}^2$ であつた。

f) 沈下速度の減少

第5図の曲線によつて示されているように、Y, A, B, C 点の沈降速度は何れも日が経つにつれて減少している。降雪がなく、積雪の重さが増さなかつたとしても、沈降速度の減少は縦粘度の増加を意味する。しかも実際には毎日のように降雪があつて積雪にかかる応力は増加

していた。したがって曲線のこのような傾向は、縦粘度 η が時間と共に増加することを示している。次に、 η の増加速度 $\dot{\eta}$ を雪洞の変形に関して得られた測定値から求めてみよう。

A 点に相対的な Y 点の下降速度 $v_Y - v_A$ は、雪洞の屋根の重さに比例し、屋根を作っている雪の粘度 η に逆比例するであろう。屋根の重さは $w(z_c)$ に比例する。したがって

$$v_Y - v_A \propto w(z_c)/\eta \quad (9)$$

とおくことができる。これを対数的に時間で微分すれば、

$$\frac{\dot{\eta}}{\eta} = \frac{\dot{w}(z_c)}{w(z_c)} - \frac{\dot{v}_Y - \dot{v}_A}{v_Y - v_A} \quad (10)$$

が得られる。また、A, B, C 点の沈下に関しては、(3) 式を対数微分すれば、

$$\frac{\dot{\eta}}{\eta} = \frac{\dot{w}(z_c/2) + \dot{w}_1(l)}{w(z_c/2) + w_1(l)} - \frac{\dot{v}(l)}{v(l)} \quad (10')$$

なる式が得られる。(10), (10') 式は何れも、その右辺の値がわかれば $\dot{\eta}/\eta$ を与える式となるが、まず両式において、右辺の第 2 項は第 5 図から求められる。また $\dot{w}(z_c/2)$, $\dot{w}(z_c)$ は、何れも単位時間の降雪量にひとしいので、降雪量の測定値から決る量である。(10) 式を使う場合はこれで充分であるが、(10') 式を使うためには尚 $\dot{w}_1(l)$ の値が知れていなければならない。そのため

$$\frac{\dot{w}_1(l)}{w_1(l)} = \frac{\dot{w}(z_c)}{w(z_c)} \quad (11)$$

と仮定する。この仮定は $z = z_c$ の面では、 \dot{w}_1/w_1 の値が一定で、雪洞に近い点についても遠い点についても変わらないという事である。 w_1 の増加が降雪によつて積雪表面に新たに加わつた重さによることから考えて、この仮定は妥当であろう。且つまた、 $\dot{w}_1(l)$ に関しては (5) 式を時間で微分した式

$$\int_0^{\infty} \dot{w}_1(l) dl = L \times \dot{w}(z_c) \quad (12)$$

が成立たなければならないが、(11) 式で与えられる $\dot{w}_1(l)$ は (12) 式を満足している。

観測された $w(z_c)$, $\dot{w}(z_c)$, $w_1(l)$, $v(l)$, $\dot{v}(l)$ の値を用いて、(10) 式により

$$\dot{\eta}/\eta = 0.082/\text{day} \quad (\text{A 点に相対的な Y 点; 7 日より 9 日までの平均})$$

(10') 式により

$$\begin{aligned} \dot{\eta}/\eta &= 0.078/\text{day} \quad (\text{A 点; 7 日より 11 日までの平均}) \\ &= 0.067/\text{day} \quad (\text{B 点; 9 日より 12 日までの平均}) \\ &= 0.067/\text{day} \quad (\text{C 点; 9 日より 12 日までの平均}) \end{aligned} \quad (13)$$

が得られる。

小島は雪の縦粘度 η と雪の密度 ρ との間に

$$\eta = \eta_0 \exp(k\rho) \quad (14)$$

なる関係の成立つことを示した。 η_0 は雪の性質によつて異なる常数で、 k は雪の性質には無関係に $20.3 \text{ cm}^3/\text{g}$ の値を持つ常数である。(14)式を微分すると、 $\dot{\eta}/\eta = k\dot{\rho}$ となるが、この関係を地面から z_c の高さまでの雪、すなわち W 層にあてはめてみる。W 層は単位時間に v だけ縮み、そのために ρ が増すわけで

$$\dot{\rho} = \rho v / z_c$$

なる関係が容易に証明される。したがつて、

$$\dot{\eta}/\eta = k\rho v / z_c \quad (15)$$

なる関係が成立つ。 k には上述の値を用い、 ρ は W 層について観測された値 0.43 g/cm^3 を入れ v はそれぞれの観測点について測定された値を入れると

$$\begin{aligned} \dot{\eta}/\eta &= 0.064 & (\text{A 点}) \\ &= 0.041 & (\text{B 点}) \\ &= 0.034 & (\text{C 点}) \end{aligned}$$

となり、上に得た値とほぼ一致する。

IV. 雪洞の屋根の下降についての理論的考察

雪洞の屋根の部分に作用する力の平衡を 2 次元的に考える。すなわち単位の厚さをもち第 4 図の矩形 AEE'A' で表わされる雪の板 R_c 部分の平衡を考えるわけである。AA' = 2L, AE = 2C とし、座標の原点を矩形の中心にとり、水平に x 軸、下向きに y 軸をとる。雪の密度及び縦粘度は均一で、一定値 ρ , η を持つものとする。積雪は一般に粘弾性を持つているが、変移開始後、緩和時間或いは遅延時間にくらべて長い時間たつたときを考えることにすれば、弾性変形は終了してしまつている。残つていつまでも続くのは粘性変形である。それで長時間の変形を問題にするときは弾性変形は粘性変形に対して無視してよい。ここでは積雪を純粋なニュートン液体として η 一定と考えて計算する。

R_c 部分の雪の内部応力 σ_x , σ_y , τ_{xy} のあいだには釣合の式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0 \quad (16)$$

が成立つていなければならない。又、雪をニュートン液体と考えたときの歪の適合条件を応力であらわした式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (17)$$

も成立つていなければならない。

境界条件としては、まず屋根の上下面は自由面であることから、

$$y = \pm C \quad \text{で} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0 \quad (18)$$

が得られる。R_c 部分の両側の AE, A'E' 面に関しては、外側の雪がこれ等の面を通して屋根の

部分に及ぼしている力の詳細が不明なので、正確な境界条件を与えることができない。しかしこれ等の面における剪断応力全体が R_c の重さを支えていることは確かである。したがって、すくなくとも

$$x = \pm L \quad \text{で} \quad \int_{-C}^C \tau_{xy} dy = \mp 2\rho g LC \quad (19)$$

なる条件が必要であることがわかる。

(16), (17), (18), (19) を満足する解の一つとして

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3\rho g}{2C^2} (L^2 - x^2) y + \rho g \left(\frac{y^2}{C^2} - \frac{3}{5} \right) y \\ \sigma_y &= -\frac{\rho g}{2} \left(1 - \frac{y^2}{C^2} \right) y \\ \tau_{xy} &= -\frac{3}{2} \rho g \left(1 - \frac{y^2}{C^2} \right) x \end{aligned} \quad (20)$$

が存在することが知られている²⁾。この解は R_c の両端、すなわち $x = \pm L$ で

$$\int_{-C}^C \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-C}^C y \sigma_x dy = 0 \quad (21)$$

なる条件を満足している。すなわち、これ等の面を通して雪洞の屋根に作用する圧力の合力も回転モーメントも 0 である。したがって、近似的には、 R_c がその左右にある雪からうける力は (18) 式の剪断力だけであるとすることができる。

R_c の両端における (19), (21) の条件は、細長い棒のばあいと比較すると、棒を両端で、2 つの支点の上に水平にただ乗せた場合に相当する。乗せただけでクランプしなければ棒の両端では剪断力しか働いていない。

(20) 式であらわされた解は以上のような意味のものであつて、実際の雪洞の屋根において上のような境界条件が満されているかどうかはわからない。しかし、一応 (20) 式が成立つものとして雪洞の屋根の変形速度を求めることにする。

u, v を x, y 方向への変位速度、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ を x, y 方向の垂直歪、剪断歪をあらわすものとし、 ν を粘性変形におけるポアソン比とすれば、平面歪の場合、すなわち、 xy 面に垂直な方向の歪は無い場合には、

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\eta} \left[(1-\nu^2) \sigma_x - \nu(1+\nu) \sigma_y \right] \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\eta} \left[(1-\nu^2) \sigma_y - \nu(1+\nu) \sigma_x \right] \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{\eta} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (22)$$

の関係が成立つ。この式の $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ に (20) 式を入れて積分し、

$$x = 0 \quad \text{で} \quad u = 0$$

という条件と,

$$x = \pm L, \quad y = C \quad \text{で} \quad v = 0$$

という条件のもとに函数形を定めた。ここに、はじめの条件は幾何学的な対称性により YY' 線上の点が ω 方向に動かない事から誘導されたもので、あとの条件は R₀ の下面、即ち天井の両端 A 点と A' 点とを固定するという事を意味している。v に関する解は次式で与えられた。

$$v = \frac{\rho g(1-\nu^2)}{\eta} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{3\nu}{5(1-\nu)} \right) \frac{y^2 - C^2}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{(y^4 - C^4)}{4C^2} - \frac{3}{2C^2} \frac{\nu}{1-\nu} (L^2 - x^2) \frac{y^2}{2} \right] \\ - \frac{\rho g(1-\nu^2)}{\eta} \left[\frac{3}{2C^2} \left(L^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right) + \left(\frac{12}{5} + \frac{5\nu}{2(1-\nu)} \right) \frac{x^2}{2} \right] \\ + \frac{5}{24} \frac{2\rho g C(1-\nu^2)}{\eta} \frac{L^4}{I} \left[1 + \frac{4}{5} \frac{C^2}{L^2} \left(\frac{12}{5} + \frac{5\nu}{2(1-\nu)} \right) \right] \\ \text{但し} \quad I = \frac{2}{3} C^3 \quad (23)$$

これから雪洞の天井の中心の降下速度として

$$v_Y - v_A = [v]_{\substack{y=0 \\ y=C}} = \frac{5}{24} \frac{2\rho g C(1-\nu^2)}{\eta} \frac{L^4}{I} \left[1 + \frac{4}{5} \frac{C^2}{L^2} \left(\frac{12}{5} + \frac{\nu}{1-\nu} \right) \right] \quad (24)$$

を得る。

理論式の適用

a) $v_Y - v_A$ の実測値から η の平均値を求めること

(23), (24) 式は現実とちがった条件を仮定して解かれたものであるから、これを現実面へ適用する場合には、現実の条件を妥当な範囲内で変えて用いなければならない。

これから (24) 式を用いて $v_Y - v_A$ の実測値から η を求めるのであるが、ここで得られる η の値は AA' 面から EE' 面まで高さに無関係に積雪が一定の η を持っていると考えたときの値である。すなわち、ある意味における η の平均値しか得られない。

また ρ の値も高さによらずに一定であるという、現実からはなれた仮定をした。(24) 式の $2\rho g C$ は梁の単位長さ当りの自重である。これは雪洞の天井の単位面積当りの積雪水量 $w(z_0)$ に等しい。そこで 9 日の観測値 $w(z_0) = 34 \text{ g/cm}^2$ が $2\rho g C$ に等しいとおく事は妥当であろう。この事は雪洞の屋根の平均密度として $\rho = 0.34 \text{ g/cm}^3$ を採用する事を意味している。

先ず (24) 式に実際の値 $L = C = 50 \text{ cm}$, $\nu = 0.1$ を入れて

$$v_Y - v_A = \frac{\rho g}{\eta} (4.7 \times 10^3) \quad (25)$$

を得る。ここで $\rho = 0.34 \text{ g/cm}^3$ 及び 9 日の実測値 $v_Y - v_A = 1.19 \text{ cm/day}$ を代入すると

$$\eta = 1.34 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{day/cm}^2 \quad (26)$$

を得る。これは第 7 図 (a) からわかるように $z = 140 \text{ cm}$ の積雪層の η の値に相当し、 η の算術平

均 $1.48 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{day/cm}^2$ に近い。

上の扱いで境界条件は、細長い棒の場合と対照すると、棒の両端を2つの支点の上にあいだ横たえたばあいに相当することを述べた。ところで棒の場合は、両端でクランプすると、棒の中央の垂れ下りが、ただ横たえた場合の1/5に減る事が知られている。このことから、雪洞の屋根の場合も、屋根の両端が、その外に続く雪によつてしつかりと押えられていたとすれば $v_Y - v_A$ が(24)式の値の1/5ぐらいに減るであろうと想像される。そうだとすれば、 η の値は(26)式の1/5ぐらいになる筈である。実際の場合の境界条件はこれ等2つの場合の間にあるであろう。したがつて実際の η の値は(26)式の値とその1/5との間でであろう。

b) η の垂直分布を知つて $v_Y - v_A$ を求めること

これまでは雪洞の屋根の η は一定であるとしてきた。しかし実際には第7図(a)に示されたように、 η は下の方で大きく上の方で小さい。それで、 η を高さ z の函数として $v_Y - v_A$ を求めることを試みよう。もちろん厳密な取扱いはできないが、次のように考えることによつてかなりよい近似が得られると思う。

縦粘度の垂直分布 $\eta(z)$ を持つた単位厚さの矩形 $AEE'A'$ の雪の板を考えるかわりに、縦粘度は上から下まで一定値 $\eta(z_c)$ を持っているが、厚さ $b(z)$ が一様でなく、

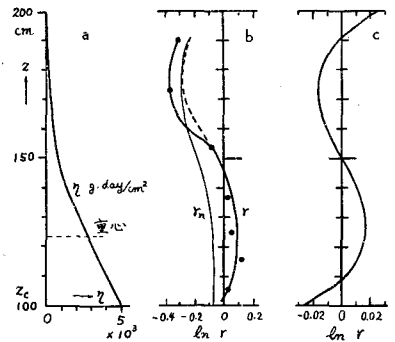
$$b(z) = \eta(z)/\eta(z_c)$$

で与えられる板を考える。すなわち、この板の縦断面の形は第7図(a)の曲線と座標軸とで囲まれた面積のうち $z=z_c=100 \text{ cm}$ より上にある部分の形に相似である。つまり、 η の z による変化を、板の厚さの z による変化としておきかえたわけである。

上に $v_Y - v_A$ を与える式として得た(24)式のなかで、 I は単位の厚さもち、高さが $2C$ なる雪の板 R_c の縦断面の慣性能率である。縦断面の重心を通る断面に平行な水平線のまわりの慣性能率である。それで、今考えている厚さの変る雪の板の場合にも、 I としてその縦断面の慣性能率を用いることにより、(24)式がそのまま成立つと仮定する。縦断面の形を与える第7図(a)の図形の重心は、その底辺より23.6 cm上にあり、重心を通る水平線(図に点線で示す)のまわりの慣性能率は

$$I = 1.064 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

である。(24)式にはこの I の値及び $\eta = \eta(z_c) = 5 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{day/cm}^2$ を代入し、且つ前と同様に $L=50 \text{ cm}$ 、 $\nu=0.1$ を代入する。 $2\rho gC$ は梁の単位長さ当りの自重であるから $w(z_c) = 34 \text{ g/cm}^2$ でおきかえる。又[]の中の C



第7図

- (a) 雪洞の天井の高さ z_c から積雪表面までにある積雪層の縦粘度。
 (b) 観測期間10日間に生じた鉛直方向の自然歪と、その層のはじめの位置 z との関係。 $\ln r$ は雪洞の屋根の中心線上にある各層に生じた自然歪。
 $\ln r_n$ は雪洞の無い自然状態における積雪層に生じた自然歪。
 (c) ρ , η 一定としたときの理論によつて計算された10日間に生ずる自然歪。

の値としては重心から底面までの距離 24 cm を代入する。こうして

$$\begin{aligned} v_Y - v_A &= 0.837(1+0.46) \\ &= 1.22 \text{ cm/day} \end{aligned} \quad (27)$$

が得られる。こうして求めた計算値は、実測値 1.19 cm/day とよく一致している。

c) 天井の対称軸 YY' 線上の歪

第 1 図は雪洞を作つてから 10 日経つた後の雪洞の断面であるが、積雪を作っている雪の各層の境界線がはつきりみられる。したがつて、雪層の厚さを測定することによつて雪洞から離れたところの自然状態の積雪に較べて、雪洞の中央線上の積雪がどれだけ余計に圧縮或いは伸張されているかが決定できる。自然状態の積雪の厚さに対する中央線上の厚さの割合を r とする。一方、自然状態の積雪が、雪洞を作つてからどれだけ圧縮されたかは、雪洞を作つたときの雪層の観測値と比較することによつて求められる。自然状態の積雪について、はじめの厚さに対する終りの厚さの割合が r_n であるとする、YY' 線上の各々の雪層は最初の厚さの $r = r_n r_0$ 倍になつているわけである。第 7 図 (b) には、実測によつて求めた r 、 r_n を自然歪 $\ln r$ 、 $\ln r_n$ に引きなおして、雪洞を掘つた当時の高さ z に対して示してある。 $\ln r$ と $\ln r_n$ との差は $\ln r_0$ をあらわしている。これによつて、上層部では圧縮が、下層部では伸張がおこつた事がわかる。不幸にして第 1 図の断面を作る前夜豪雨があり、YY' 線附近だけが著しく不自然に圧縮されていると思われた。それを適当に補正したものが第 7 図 (b) の点線である。

ρ 、 η が z によらず一定であるとした理論の結果、すなわち (23) 式から、 $\dot{\epsilon}_y = dv/dy$ を求めこれの $x=0$ における $\dot{\epsilon}_y$ を y の函数として求めることができる。この $\dot{\epsilon}_y$ から 10 日間の YY' 線上の y 方向の歪 ϵ_y を計算し、これから自然歪 $\ln r = \ln(1 + \epsilon_y)$ を求めて第 7 図 (c) に示した。高さ z による $\ln r$ の変化は傾向としては実測値とよく似ている。しかし、歪の大きさの方は実測値に較べて 1 桁小さい。尚、実測値第 7 図 (b) について云えば、10 日間に降雪があつて荷重が増加した事、及びはじめの表面が、終りには表面から大分下方に埋つてしまつたための幾何学的なえいきようがあるから、上層部の圧縮の度合は降雪が無かつた時よりも大きくなつていると考えられる。

第 7 図 (b) では $\ln r = 0$ 、即ち、伸びも縮みもしない点が下面から 45 cm の所にある。理論値の (c) 図では $\ln r = 0$ の点は中央、即ち下面から 50 cm の所にある。また η の高さによる変化を考慮し、 η の変化を板の厚さの変化でおきかえた理論によれば、変形が非常に小さいとき、 $\ln r = 0$ の点は η の分布の重心、すなわち、下面から 24 cm の所にある。変形が大きくなるにつれて $\ln r = 0$ の点が相対的に上方に移つてゆく事も予想される。

おわりに、この研究を御指導下さつた吉田順五教授に厚く御礼申し上げる。なお、この研究は文部省科学研究費によつておこなわれたものである。

文 献

- 1) 小島賢治 1958 積雪層の粘性圧縮 IV. 低温科学, 物理篇, 17, 53.
- 2) Timoshenko S. and J. N. Goodier 1951 Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York, 39-44, 54.

Résumé

The basic mechanical properties such as elasticity and viscosity have been studied on snow samples taken out from snow cover by subjecting to them to simple stresses. On the other hand the actual snow cover is usually laid on sloping ground of irregular form and is deformed in a complicated way being subjected to a complicated system of stresses. Then it will be desirable to find the relationships between the basic mechanical properties of snow and the complicated deformations occurring in the actual snow cover. In order to advance a step in that direction the author made a cave within the snow cover laid on flat ground and studied the deformation of the cave. The stresses produced around the cave were surely not simple; but they were not so complicated as to render it impossible for one to study them.

The snow cover was 2 m deep. The cave was made in its lower half in the horizontal direction, the floor of the cave being the ground surface. The cave was 1 m high, 1 m wide and about 5 m long. The ceiling of the cave gradually bulged downward, the walls being contracted vertically at the same time. For the sake of convenience, points and parts of the sections across the cave should be named as shown in Fig. 4 of the text.

The descent of the centre of ceiling (point Y) was measured several times in a day. The contraction of the walls was determined by observing the downward displacement of points A, B and C. Points B and C are respectively located 30 cm and 55 cm inwards from the wall surface. The descending velocities v_Y , v_A , v_B , v_C of these points changed with time as shown by the curves of Fig. 5. Attempts were made to find out connections between these velocities and the longitudinal viscosities already known on the snow samples.

1. Fig. 5 shows a rapid drop of point Y at the beginning of the period of observation. The author ascribed this rapid drop to the retarded elasticity of the snow layer forming the roof of the cave. Then, assuming the elasticity of snow to be in the range of the magnitude $10^7 \times 10^8$ dyne/cm², he obtained as the value of longitudinal viscosity η $1.5 \times 10^3 \sim 10^4$ g·day/cm². This value of η was in accord with that obtained by observing the natural contraction of the snow layers composing the upper half of the snow cover. (Now and hereafter "natural contraction" will be used in the sense of contraction occurring in the snow layers composing snow cover at a great distance from the cave.)

2. From the descending velocity of points A, B, C, D which were originally at the same height as the ceiling of the cave, the horizontal distribution of normal stress at this height was calculated (Fig. 6). The mean value of η of the snow layers forming

the wall of the cave was found to be $1.27 \times 10^4 \text{ g} \cdot \text{day}/\text{cm}^2$ in agreement with the value determined from natural contraction of the layers.

3. The velocity of descent of pints Y, A, B, C decreased gradually as time went on. From that the increasing rate of viscosity $\dot{\eta}/\eta$ was calculated:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}/\eta &= 0.032 \text{ day (Point Y)} \\ &= 0.078/\text{day (Point A)} \\ &= 0.067/\text{day (Point B)} \\ &= 0.067/\text{day (Point C)}.\end{aligned}$$

These are less than twice the values obtained for the natural contraction of snow layers.

4. The descent of the ceiling of the cave was treated as a problem in two-dimensional theory of viscosity. Part R_c (AEE'A' in Fig. 4), the roof of the cave, was considered to be a plate of unit thickness, $2L$ wide and $2C$ high (Fig. 4).

The problem was solved under the following boundary conditions. The total shear stress along the two sides of the beam (AE, A'E) should be the same as the total weight of the beam. The resultant of stresses on each side of the beam should have no bending couple and no horizontal component. The upper and lower edges of the beam are free from any force. It was also assumed that part R_c was isotropic and homogeneous, that is, R_c had the same viscosity η and the same density ρ throughout. In the case of plane strain, the descending velocity of Y relative to A was found to be given by

$$\begin{aligned}v_Y - v_A &= \frac{5}{24} \frac{2\rho g C(1-\nu^2)}{\eta} \frac{L^4}{I} \left[1 + \frac{4}{5} \frac{C^2}{L^2} \left(\frac{12}{5} + \frac{\nu}{1+\nu} \right) \right] \\ I &= \frac{2}{3} C^3 \quad \nu: \text{Poisson's ratio.} \quad (1)\end{aligned}$$

The observed value 1.19 cm/day of $v_Y - v_A$ satisfies this equation if η is taken as $1.35 \times 10^4 \text{ g} \cdot \text{day}/\text{cm}^2$, which value is near to $1.48 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{day}/\text{cm}^2$, the mean value of η determined on the snow layers composing R_c from their natural contraction.

In reality η was not the same throught the beam; it changed with height as shown in Fig. 7(a). The solution of the above problem was improved by taking into consideration this change in η . It was effected by supposing that the beam having unit thickness at its bottom changed in thickness with height in proportion to η . With $\eta = 5 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{day}/\text{cm}^2$ being the real value at the bottom of the beam, the calculated descending velocity $v_Y - v_A$ was found to be 1.22 cm/day, close to the observed value 1.19 cm day.

5. The vertical elongation and contraction were measured at central vertical line of R_c on each of the snow layers composing R_c . The curve of Fig. 7(b) shows the observed elongation or contraction in relation to the initial position of the layers. Fig. 7(c) shows the theoretical results calculated on the basis of the above described theory. Both the curves, observed and theoretical, show the same form but they are very different in magnitude; the theoretical magnitude turned out to be only one-tenth of the observed.