



Title	斜面積雪の内部応力および粘性流動 I : 波状に起伏する斜面の積雪
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科学. 物理篇, 22, 83-100
Issue Date	1964-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18009
Type	departmental bulletin paper
File Information	22_p83-100.pdf



斜面積雪の内部応力および粘性流動 I*

波状に起伏する斜面の積雪

吉田 順五

(低温科学研究所 応用物理学部門)

(昭和 38 年 11 月受理)

まえがき

この論文および次につづく論文は、斜面につもった雪を平面ひずみの状態にある粘性の非常に大きい非圧縮性ニュートン粘性流体と見て、その内部応力、流動速度を理論的に求めようとする試みである。この種の問題のうち、一様な斜面積雪、すなわち、無限にひろい平らな斜面に一樣な厚さでつもった雪についてのものならば容易に解くことができる。しかし、その他のばあいについての解は、筆者の知るかぎり、ほとんど求められていない。山の地形は種々雑多であり、雪のつもりかたも、時とばあいにより、いろいろに変わる。それで、一様な斜面積雪以外の積雪についての内部応力、流動速度を知る必要にせまられる。この論文では正弦波状に起伏する斜面の積雪の内部応力、流動速度をもとめ、つづくふたつの論文では、平らな斜面にくさび形につもった雪、および、円形斜面に一樣な厚さでつもった雪をとりあつかう。

積雪と氷とをくらべると、氷の方が非圧縮性粘性流体にちかい。それゆえ、この論文の結果は、斜面積雪の流動、応力よりは、むしろ、氷河の流動、応力に近いものを与えるであろう。しかし、軟かい積雪は別として、古く硬い積雪ならば、非圧縮性粘性流体とみることが、すくなくとも近似的には許される。斜面積雪の流動、応力については Haefeli¹⁾ の理論、氷河の流動、応力に関しては Lliboutry²⁾、Nye³⁾ の理論などがあげられる。これらの理論は、雪や氷を必ずしも単純な非圧縮性ニュートン粘性流体とせず、一般の塑性体として扱う点ですぐれている。しかし、一方、斜面の形や積雪、氷河の表面の形を自由にとりえないという欠点はまぬがれない。

I. 理論の概要

第 1 図で、曲線 **G** は斜面の形、曲線 **S** は斜面につもった雪の表面の形をあらわす。 x 軸を水平に、 y 軸を鉛直上方にとる。(実際の問題をとくときには、直角坐標軸を傾けてとったり、また、極坐標その他の坐標をつかったりする。そのような坐標へは、ここで用いる坐標から変換によって移ることができる。したがって、ここで、 x 軸 y 軸を水平および鉛直にとって議論

* 北海道大学低温科学研究所業績 第 655 号

しても、議論の一般性が失われることはない)。斜面にも積雪にも、 x 軸 y 軸に垂直な z 方向には変化がなく、積雪は z 方向に歪をもたない平面歪の状態にあるものとしよう。また、さきに述べたように、積雪は非圧縮性のニュートン粘性流体であると仮定する。しかも粘性係数は非常に大きくて、積雪の流動をきわめて緩慢にし、加速度を 0 にするほどだとする。すると、積雪内部の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ および流動速度の x, y 成分 u, v は微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \rho g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)}{\frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)} = 2\eta \quad (2)$$

を満したうえ⁴⁾、さらに

曲線 **S** のうえでは $\sigma_n = 0, \tau_{nt} = 0$; すなわち

$$[\sigma_n]_S = 0, \quad [\tau_{nt}]_S = 0 \quad (3)$$

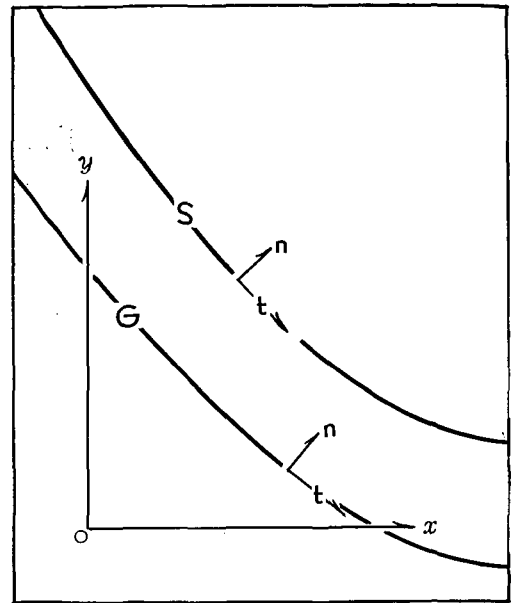
曲線 **G** のうえでは $u = 0, v = 0$; すなわち

$$u_G = 0, \quad v_G = 0 \quad (4)$$

の境界条件を満足しなければならない。ここに g は重力の加速度、 ρ は積雪の密度、 η は積雪の粘性係数である。n と t とは積雪表面、すなわち曲線 **S** の法線方向と切線方向とを表わす記号で、 σ_n と τ_{nt} とは、それぞれ、積雪表面における垂直応力成分と剪断応力成分とである。積雪表面は自由表面なので、境界条件 (3) が要請されるわけである。境界条件 (4) は、積雪が、その底では、斜面に附着して動かないことを示している。したがって、この境界条件は

$$[v_n]_G = 0, \quad [v_t]_G = 0 \quad (4)$$

という条件にいいなおしてもよい。 v_n, v_t は、それぞれ、流動速度の、斜面の法線方向と切線方向との成分である。ここで n と t とは方向を示す記号につかったが、さらに、n と t とでそれぞれの方向の長さをも表わすことにしよう。すると、t, n は斜面上の一点の近傍でひとつの



第1図 斜面積雪の一般のばあい
S: 積雪表面 G: 斜面

直角座標系を形成する。したがって (2) 式によって $\sigma_t - \sigma_n = 4\eta \partial v_t / \partial t$ の関係がなりたつ。ところが、 v_t は斜面上でつねに 0 なので、 $\partial v_t / \partial t$ も 0 である。かくして、つねに

$$[\sigma_n]_G = [\sigma_t]_G \quad (5)$$

の関係が成立することが知られる。

以上により、(1)、(2) 式の微分方程式の解で境界条件 (3)、(4) をみたます σ_x , σ_y , τ_{xy} , u , v をみいだせば、斜面積雪の応力、流動速度がえられることになる。しかし、斜面の形、積雪表面の形がよほど単純なものでないかぎり、このような解を直接もとめることは難かしい。それで、以下のようにして、多少ともその困難を軽減する。

(1) 式の微分方程式には重力の作用をあらわす $-\rho g$ の項がある。これが困難のひとつの原因である。もし (1) 式が重力の項をふくまない

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

であったとすれば、解は遙かにもとめやすくなる。そのことを利用して次節の方法をとる。

II. 単純応力場と重畳応力場

まず、実際の境界条件とは全く無縁に、きわめて簡単な境界条件のもとにある (1) 式、(2) 式の解をもとめる。この解を単純応力場とよび、単純応力場に属する応力成分、流動速度成分の記号には、その右肩に 0 をつけることにしよう。単純応力場としては、たとえば、つぎのふたつが考えられる。

(i) **表面が水平な積雪の応力場** 表面が水平面なので、底がどんな形をしていても、積雪は静止の状態にある。したがって、坐標原点を積雪表面上にとると、流体静力学の法則から

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \rho g y, \quad \tau_{xy}^0 &= 0 \\ u^0 = v^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

が直ちにみちびかれる。この σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 , u^0 , v^0 は、たしかに、(1)、(2) 式の微分方程式を満足している。よって、(7) 式はひとつの単純応力場をあたえる。

(ii) **一様な斜面積雪の応力場** まえがきでも述べた、無限にひろい平らな斜面に一様な厚さでつもった雪である。斜面の傾斜角は α 、雪の厚さは h であるとしよう。坐標原点を斜面上の一点に、 x 軸を斜面にそって下方に、 y 軸を斜面に垂直上方にとると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 = \sigma_y^0 = -\rho g \cos \alpha (h-y), \quad \tau_{xy}^0 &= \rho g \sin \alpha (h-y) \\ u^0 = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} y \left(h - \frac{y}{2} \right), \quad v^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となることが、厚さ $(h-y)$ の表面雪層の釣合いの条件から直ちにみちびかれる。坐標軸を傾けたので、(1) 式は、それと同等な

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho g \sin \alpha = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \rho g \cos \alpha = 0 \quad (1')$$

の形の微分方程式にかわる。(2)式の形は変化しない。(8)式が(1')式、(2)式の微分方程式をみたすことが検算によって容易にたしかめられる。したがって、(8)式は、ひとつの単純応力場である。

つぎに、境界条件は一応考慮の外において、(6)式と(2)式との微分方程式の解

$$\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}, u^{(i)}, v^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

を幾組かもとめる。これを重畳応力場とよぶことにしよう。すると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 + \sum a_i \sigma_x^{(i)}, & \sigma_y &= \sigma_y^0 + \sum a_i \sigma_y^{(i)}, & \tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 + \sum a_i \tau_{xy}^{(i)} \\ u &= u^0 + \sum a_i u^{(i)}, & v &= v^0 + \sum a_i v^{(i)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

で与えられる $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v$ は(1)式と(2)式の微分方程式を満足する。 a_i は常数で任意に択んでよい。重畳応力場には多種のものがあつて、それを見出す方法もよく研究されている。それゆゑ、適当な重畳応力場と適当な常数 a_i とをえらんで(9)式の $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v$ に、与えられた斜面積雪に関する境界条件(3), (4)式を満足させる可能性がうまれる。それに成功すれば、この $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v$ が、目的とする、斜面上の積雪の応力と流動速度とを与えることになる。

重畳応力場は、よく知られているように、応力函数 $\varphi^{(i)}$ から導くと便利である⁵⁾。 $\varphi^{(i)}$ は重調和函数、すなわち、微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi^{(i)} = 0 \quad (10)$$

の解で、応力成分は、この $\varphi^{(i)}$ から

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^{(i)} = \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^{(i)} = -\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x \partial y} \quad (11)$$

として求められる。流動速度成分 $u^{(i)}, v^{(i)}$ は(11)式の $\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}$ を(2)式に代入し積分して定めればよい。直角坐標 x, y のかわりに極坐標 r, θ を使うとすれば、(10)式、(11)式、(2)式は、それぞれ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi^{(i)} = 0 \quad (10')$$

$$\sigma_r^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta^{(i)} = \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta}^{(i)} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \theta} \right) \quad (11')$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\sigma_r^{(i)} - \sigma_\theta^{(i)})}{\frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial r}} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_\theta^{(i)} - \sigma_r^{(i)})}{\frac{v_r^{(i)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta^{(i)}}{\partial \theta}} = \frac{\tau_{r\theta}^{(i)}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta^{(i)}}{\partial r} - \frac{v_\theta^{(i)}}{r} \right)} = 2\eta \quad (2')$$

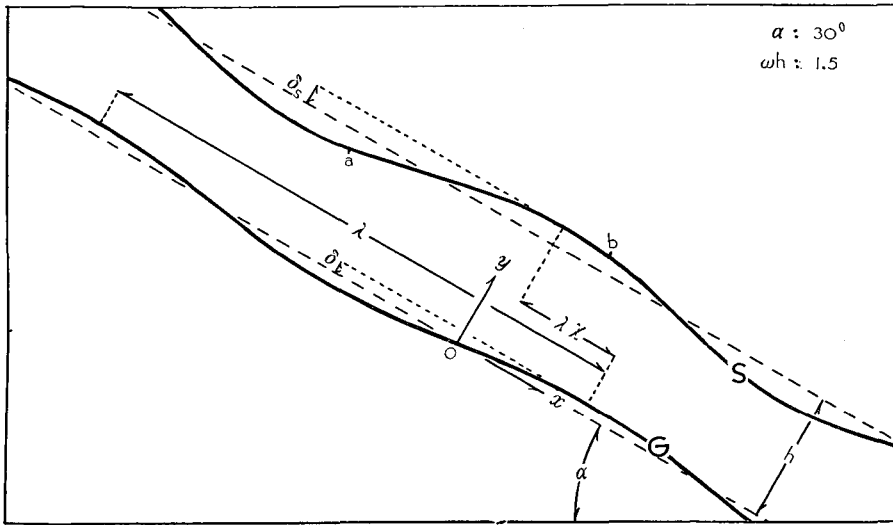
と書きかえられる。ここに v_r, v_θ は流動速度の r, θ 成分である。

以上のように、いくつかの応力場を重畳することが許されるのは、積雪をニュートン粘性

流体と仮定したために、(2) 式の右端の γ が応力の大小に無関係な常数となるからである。厳密に言えば、積雪のばあい、 γ は応力によってかわる。ここでは、その厳密を犠牲にして応力重量法の便利をとるわけである。

III. 正弦波状に起伏する斜面の積雪の定常状態

平均の傾斜角は α であるが、第 2 図の曲線 **G** のように正弦波状の小さな起伏をもつ斜面の積雪の応力、流動速度をもとめる。斜面が無限に広いとすると、積雪は平均の厚さ h の定常状



第 2 図 正弦波状に起伏する無限に広い斜面の積雪
S: 積雪表面 **G**: 斜面

態をとりうるであろう。 x, y 座標を第 2 図のようにとり、斜面の曲線 **G** が

$$y_G = \delta \sin \omega x, \quad \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{12}$$

で表わされるとすれば、積雪表面 **S** をあらわす式は

$$y_S - h = \delta_1 \sin \omega x + \delta_2 \cos \omega x, \quad \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{13}$$

の形をとるはずである。 λ は起伏の波長である。応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, 流動速度成分 u, v は微分方程式 (1) および (2) の解で曲線 **G, S** 上で、それぞれ (3) 式, (4) 式の境界条件をみたすものであるが、いまのばあいは更に、流動速度に対して

$$[v_n]_S = 0 \tag{14}$$

の境界条件がつけ加わる。定常状態では積雪表面の形が時間的に変化しない。そのためには表面 **S** に垂直な速度成分 $[v_n]_S$ が 0 でなければならないからである。

斜面の起伏の振幅 δ は小さく

$$\delta \ll \lambda \quad \text{すなわち} \quad \omega \delta \ll 1, \quad \text{および} \quad \delta \ll h \tag{15}$$

であるとする。 δ がこの条件をみたせば、 δ_1, δ_2 もおなじ条件をみたすであろう。 δ_1, δ_2 が λ にくらべて著しく小さいと、曲線 **S** の切線方向 **t** と法線方向 **n** とは、それぞれ、 x 方向と y 方向とに、ほとんど、一致する。それゆえ、積層表面での境界条件は、(3) 式、(14) 式のかわりに

$$[\sigma_y]_S = 0, \quad [\tau_{xy}]_S = 0 \tag{3'}$$

$$v_S = 0 \tag{14'}$$

としてよいことになる。単純応力場には、前節の(8)式をもちいる。

単純応力場 曲線 **G** のうえの u^0, v^0 の値 u_G^0, v_G^0 は、 $\delta \ll h$ であるために

$$u_G^0 = (u^0)_{y=0} + y_G \left(\frac{\partial u^0}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad v_G^0 = (v^0)_{y=0} + y_G \left(\frac{\partial v^0}{\partial y} \right)_{y=0}$$

とすることができる。(8)式と(12)式とによると、 $(u^0)_{y=0} = (v^0)_{y=0} = (\partial v^0 / \partial y)_{y=0} = 0$ また $(\partial u^0 / \partial y)_{y=0} = (\rho g h / \eta) \sin \alpha$ である。よって

$$u_G^0 = (\rho g h / \eta) \delta \sin \alpha \sin \omega x, \quad v_G^0 = 0 \tag{16}$$

となる。また $\delta_1, \delta_2 \ll h$ であり、 $(\sigma_y^0)_{y=h} = (\tau_{xy}^0)_{y=h} = 0$ であるために、(8)式と(12)式とから

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_n^0]_S &= [\sigma_y^0]_S = (y_S - h) \left(\frac{\partial \sigma_y^0}{\partial y} \right)_{y=h} = \rho g \cos \alpha (\delta_1 \sin \omega x + \delta_2 \cos \omega x) \\ [\tau_{nt}^0]_S &= [\tau_{xy}^0]_S = (y_S - h) \left(\frac{\partial \tau_{xy}^0}{\partial y} \right)_{y=h} = -\rho g \sin \alpha (\delta_1 \sin \omega x + \delta_2 \cos \omega x) \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

となることがわかる。

重畳応力場 重畳応力場としては第1表の応力函数 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(6)}$ から導かれるものをつかう。第1表および以下では、簡単のため、つぎの記法を用いる。

$$\begin{aligned} \sigma &= \sin \omega x, & \Sigma &= \sinh \omega y, & \zeta &= \omega y, \\ \tau &= \cos \omega x, & \Gamma &= \cosh \omega y, & \kappa &= 1/(2\eta). \end{aligned}$$

第1表 重畳応力場

$\varphi^{(i)}$	$\varphi^{(1)}$	$\varphi^{(2)}$	$\varphi^{(3)}$	$\varphi^{(4)}$	$\varphi^{(5)}$	$\varphi^{(6)}$
	$\sigma \Gamma$	$\tau \Gamma$	$\zeta \sigma \Sigma$	$\zeta \tau \Sigma$	$\zeta \sigma \Gamma$	$\zeta \tau \Gamma$
$\sigma_x^{(i)}$	$\omega^2 \sigma \Gamma$	$\omega^2 \tau \Gamma$	$\frac{\omega^2 \sigma \times}{(2\Gamma + \zeta \Sigma)}$	$\frac{\omega^2 \tau \times}{(2\Gamma + \zeta \Sigma)}$	$\frac{\omega^2 \sigma \times}{(2\Sigma + \zeta \Gamma)}$	$\frac{\omega^2 \tau \times}{(2\Sigma + \zeta \Gamma)}$
$\sigma_y^{(i)}$	$-\omega^2 \sigma \Gamma$	$-\omega^2 \tau \Gamma$	$-\omega^2 \zeta \sigma \Sigma$	$-\omega^2 \zeta \tau \Sigma$	$-\omega^2 \zeta \sigma \Gamma$	$-\omega^2 \zeta \tau \Gamma$
$\tau_{xy}^{(i)}$	$-\omega^2 \tau \Sigma$	$\omega^2 \sigma \Sigma$	$\frac{-\omega^2 \tau \times}{(\Sigma + \zeta \Gamma)}$	$\frac{\omega^2 \sigma \times}{(\Sigma + \zeta \Gamma)}$	$\frac{-\omega^2 \tau \times}{(\Gamma + \zeta \Sigma)}$	$\frac{\omega^2 \sigma \times}{(\Gamma + \zeta \Sigma)}$
$u^{(i)}$	$-\kappa \omega \tau \Gamma$	$\kappa \omega \sigma \Gamma$	$\frac{-\kappa \omega \tau \times}{(\Gamma + \zeta \Sigma)}$	$\frac{\kappa \omega \sigma \times}{(\Gamma + \zeta \Sigma)}$	$\frac{-\kappa \omega \tau \times}{(\Sigma + \zeta \Gamma)}$	$\frac{\kappa \omega \sigma \times}{(\Sigma + \zeta \Gamma)}$
$v^{(i)}$	$-\kappa \omega \sigma \Sigma$	$-\kappa \omega \tau \Sigma$	$-\kappa \omega \zeta \sigma \Gamma$	$-\kappa \omega \zeta \tau \Gamma$	$-\kappa \omega \zeta \sigma \Sigma$	$-\kappa \omega \zeta \tau \Sigma$

$$\sigma = \sin \omega x, \quad \tau = \cos \omega x, \quad \Sigma = \sinh \omega y, \quad \Gamma = \cosh \omega y, \quad \zeta = \omega y, \quad \kappa = 1/(2\eta)$$

正弦波状に起伏する斜面の積雪の応力場 第 II 節の (8) 式であたえられる単純応力場と、第 1 表の 6 個の重畳応力場とを、(9) 式の形に組み合わせれば、目的とする、正弦波状に起伏する斜面上の積雪の定常状態における応力場 σ_x , σ_y , τ_{xy} , u , v がえられる。係数 a_1, a_2, \dots, a_6 および δ_1, δ_2 は、以下のようにして、境界条件から定められる。

境界条件は (4), (3), (14') の条件, すなわち

$$(i) \quad u_G = 0, \quad (ii) \quad v_G = 0, \quad (iii) \quad [\sigma_y]_S = 0, \quad (iv) \quad [\tau_{xy}]_S = 0, \quad (v) \quad v_S = 0$$

の 5 個であるが、このうち (ii) はすでに満足されている。単純応力場の v^0 は常に 0 であるし、第 1 表の重畳応力場の $v^{(i)}$ は、いずれも、 x 軸上すなわち $y=0$ で 0 となるからである。厳格にみれば、曲線 \mathbf{G} 上の点の y 座標は 0 でないから、 $v^{(i)}$ は、 $y=0$ で 0 であるとしても、曲線 \mathbf{G} 上では 0 でない。しかし、曲線 \mathbf{G} と x 軸との距離は極めて短い δ の程度であるし、 $a_1, a_2, \dots, \delta_1, \delta_2$ も δ の程度のものにちがいないから、曲線 \mathbf{G} 上の $v^{(i)}$ の値は δ^2 の程度の微小量となる。それで、 $y=0$ で 0 ならば、曲線 \mathbf{G} のうえでも $v^{(i)}$ は 0 であるとして差しつかえないことになる。一般には応力函数 $\varphi^{(-2)} = \sigma \Sigma$, $\varphi^{(-1)} = \tau \Sigma$ からえられる応力場も重畳応力場として使える。しかし、これらの応力函数に属する v は $y=0$ で 0 とならないので、今のばあい、 $\varphi^{(-2)}$ と $\varphi^{(-1)}$ とは、使っても無駄になることが初めからわかる。第 1 表に、 $\varphi^{(i)}$ として $\sigma \Sigma$, $\tau \Sigma$ をあげてないのはその為である。

曲線 \mathbf{G} のうえでの u^0 の値 u_G^0 は (16) 式で与えられる。また、重畳応力場に属する $u^{(i)}$ の曲線 \mathbf{G} のうえでの値には、曲線 \mathbf{G} のうえの $v^{(i)}$ の値について上にのべたのと同じ理由で、 $y=0$ での値を用いてよい。すなわち、 Σ, I, ζ をそれぞれ 0, 1, 0 とした $u^{(i)}$ の値を用いてよい。かくして (i) の条件は

$$(i) \quad [(\rho g/\eta) h \delta \sin \alpha + a_2 \kappa \omega + a_4 \kappa \omega] \sigma + [-a_1 \kappa \omega - a_3 \kappa \omega] \tau = 0 \quad (18)$$

とかかれる。曲線 \mathbf{S} のうえでの重畳応力場に属する応力成分、速度成分の値には、同様の理由から、 $y=h$ での値がつかわれる。それで

$$S = \sinh(\omega h), \quad C = \cosh(\omega h) \quad (19)$$

とすれば、(17) 式を利用して、(iii), (iv), (v) の条件が

$$(iii) \quad [\rho g \delta_1 \cos \alpha - a_1 \omega^2 C - a_3 \omega^3 h S - a_5 \omega^3 h C] \sigma + [\rho g \delta_2 \cos \alpha - a_2 \omega^2 C - a_4 \omega^3 h S - a_6 \omega^3 h C] \tau = 0 \quad (20)$$

$$(iv) \quad [-\rho g \delta_1 \sin \alpha + a_2 \omega^2 S + a_4 \omega^2 (S + \omega h C) + a_6 \omega^2 (C + \omega h S)] \sigma + [-\rho g \delta_2 \sin \alpha - a_1 \omega^2 S - a_3 \omega^2 (S + \omega h C) - a_5 \omega^2 (C + \omega h S)] \tau = 0 \quad (21)$$

$$(v) \quad [-a_1 \kappa \omega S - a_3 \kappa \omega h C - a_5 \kappa \omega h S] \sigma + [-a_2 \kappa \omega S - a_4 \kappa \omega h C - a_6 \kappa \omega h S] \tau = 0 \quad (22)$$

と書かれる。(i), (iii), (iv), (v) の 4 個の式は、いずれも、 $\sigma = \sin \omega x$ と $\tau = \cos \omega x$ との斉一次式で、 σ および τ の係数項が 0 でなければ成立しない。そのことから、8 個の未知係数 a_1, a_2, \dots, a_6 ,

δ_1, δ_2 を定めるべき 8 個の方程式が導かれる。その方程式を解くと

$$\delta_1 = \delta \frac{2C(\omega h)^4 \sin^2 \alpha}{(\omega h)^4 \sin^2 \alpha + (CS - \omega h)^2 \cos^2 \alpha} \tag{23}$$

$$\delta_2 = \delta_1 \frac{CS - \omega h}{(\omega h)^2} \cot \alpha \tag{24}$$

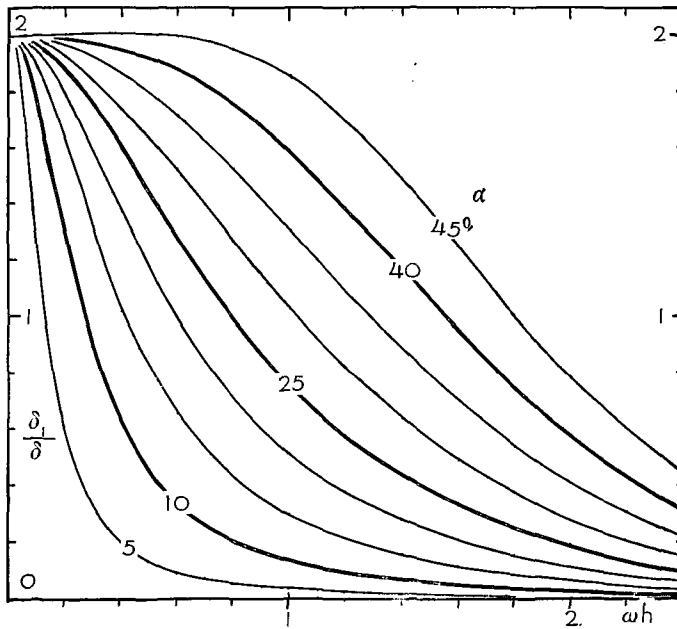
$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \delta_1 \frac{\rho g S}{\omega^2 (\omega h)} \cos \alpha & a_4 &= -\delta_2 \frac{\rho g S}{\omega^2 (\omega h)} \cos \alpha \\ a_3 &= -a_1 & a_2 &= -\delta \frac{2\rho g h \sin \alpha}{\omega} - a_4 \\ a_5 &= -a_1 \frac{S - \omega h C}{\omega h S} & a_6 &= \delta \frac{2\rho g \sin \alpha}{\omega^2} + a_4 \frac{S - \omega h C}{\omega h S} \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

$(S = \sinh(\omega h), \quad C = \cosh(\omega h))$

という結果になる。積雪表面の形を定める δ_1 と δ_2 とは、 δ に比例し、また、 α と ωh との函数であるが、積雪の密度 ρ および粘性係数 η には関係しない。

IV. 前節の結果の検討

δ_1 の値 前節では、いろいろな係数のうち、 δ_1 だけを完全な形で書きあらわし、他の係数は δ_1 を使って表現した。それで、第 3 図に (δ_1/δ) と ωh とのグラフを示した。 (δ_1/δ) は ωh と α との函数なので、 α はパラメーターとして用い、それに 5° おきの値を与えた。 (δ_1/δ) の数値



第 3 図 (δ_1/δ) と $\omega h, \alpha$ との関係

斜面の起伏は $\delta \sin \omega x$ で、積雪表面の起伏は $\delta_1 \sin \omega x + \delta_2 \cos \omega x$ で表わされる

は、この論文の末尾に表としてかかげる。

積雪表面の形 積雪表面の形は (13) 式で与えられるが、この式は

$$y_s - h = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} \sin(\omega x + 2\pi\lambda) = \delta_s \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \chi \right) \quad (26)$$

$$\delta_s = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} = \delta_1 \sqrt{1 + (\delta_2/\delta_1)^2}, \quad 2\pi\lambda = \tan^{-1}(\delta_2/\delta_1) \quad (27)$$

と書きかえられる。斜面の形を表わす式は (11) 式 $y_G = \delta \sin(2\pi x/\lambda)$ である。よって、第 2 図に示してあるように、積雪表面を表わす曲線 **S** の山あるいは谷は、斜面を表わす曲線 **G** の山あるいは谷より

$$\lambda \cdot \chi(\omega h, \alpha) \quad (28)$$

だけ x の負の方向、すなわち斜面上方にむかってずれる。しかし、 $\lambda\chi$ は $\lambda/4$ をこえない。また曲線 **S** の振幅 δ_s は曲線 **G** の振幅 δ の

$$m(\omega h, \alpha) = \frac{\delta_s}{\delta} = \frac{\delta_1}{\delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2} \quad (29)$$

倍である。前節でえた δ_1 、 δ_2 の値から

$$m(\omega h, \alpha) = \frac{2C(\omega h)^4 \sin^2 \alpha}{(\omega h)^4 \sin^2 \alpha + (CS - \omega h)^2 \cos^2 \alpha} \sqrt{1 + \frac{(CS - \omega h)^2 \cos^2 \alpha}{(\omega h)^4 \sin^2 \alpha}} \quad (30)$$

$$\chi(\omega h, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{(CS - \omega h) \cot \alpha}{(\omega h)^2} \quad (31)$$

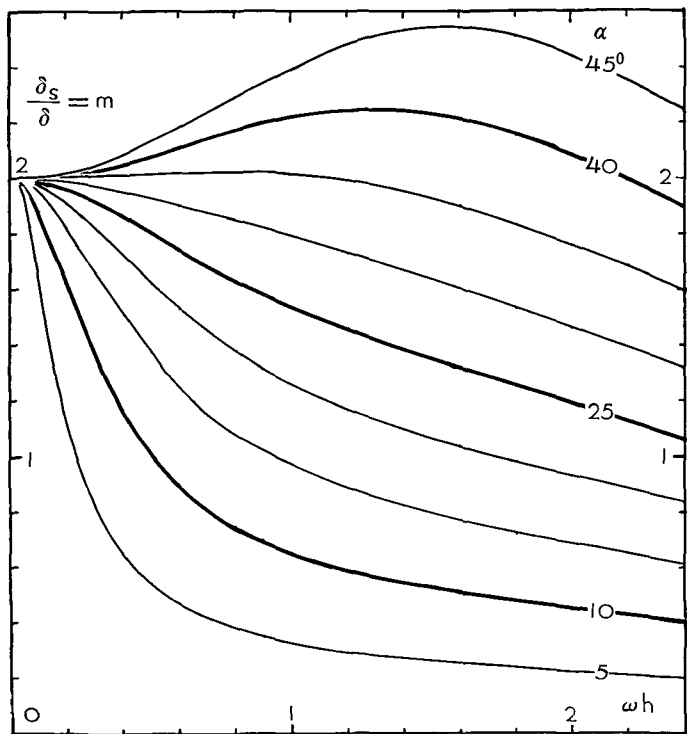
がえられる。第 4 図、第 5 図のグラフは、 α のいろいろな値に対して、 m と χ との値を ωh の関数として示している。

あるひとつの斜面について考えれば、 α と ω とは一定の値をもつ。このばあいには、第 4 図から、積雪の厚さ h が増大するとともに、 m は、 α が 35° 以下ならばただ減少し、 α が 35° 以上ならば一度極大値をとってから減少することがわかる。すなわち、積雪が厚くなると、当然予想されるように、地面の波形の影響は積雪表面に現われにくくなる。

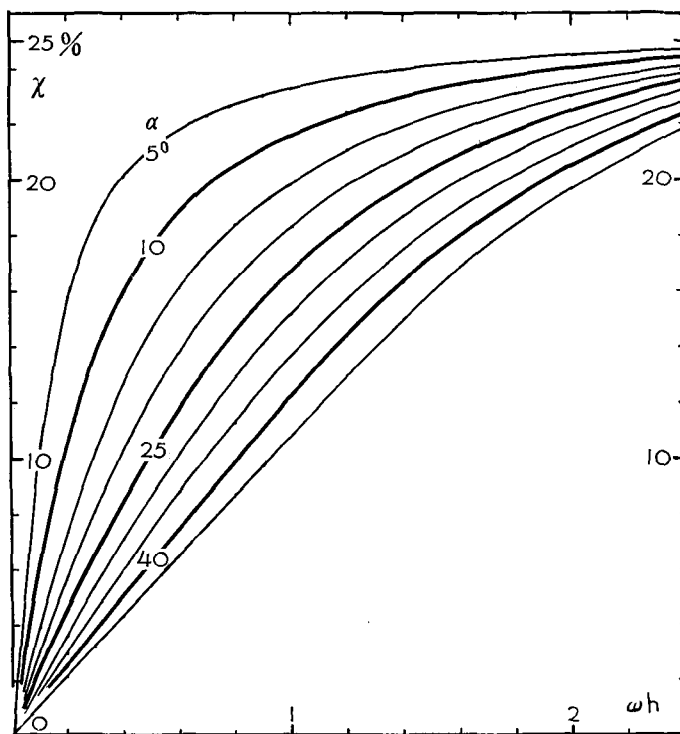
第 4 図で、 α の値の大きい曲線ほど上の方に位置している。したがって、斜面の影響が積雪表面に現われる度あいは、平均傾斜角 α が大きいほど強い。 α が 0 ならば、 h と λ とが有限なかぎり、 $m=0$ すなわち $\delta_s=0$ で、積雪表面は水平面となり、地面の波は積雪表面に全然あらわれない。これもまた、当然予想される結果である。

斜面の波と積雪表面の波とのあいだのずれ χ は、第 5 図が示すように、 ωh が小さくなるとともに、すなわち、 λ が h に対して大きくなるにつれて、小さくなる。しかし、ずれの実長は $\lambda \cdot \chi$ で χ 自体ではないから、 λ が長くなっても、ずれの実長が短くなるとは、必ずしもいられない。

第 2 図の曲線 **G**、**S** は $\alpha=30^\circ$ 、 $\omega h=1.5$ のばあいについて書いてある。 λ は h の $2\pi/1.5=4.2$ 倍にひとしい。 m と χ の値としては第 4 図、第 5 図からえられる 1.64、19.4% をつけた。積



第4図 $m(\omega h, \alpha)$: 積雪表面の振幅 $\delta_s = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ と斜面の振幅 δ との比

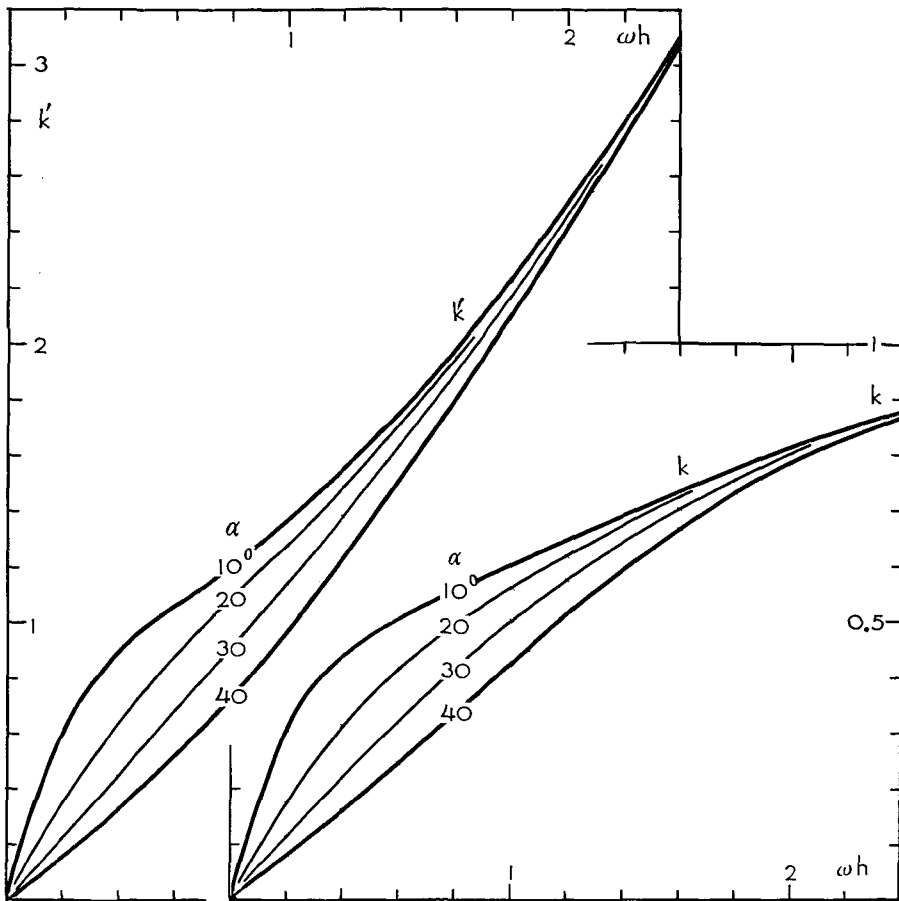


第5図 $\chi(\omega h, \alpha)$: 積雪表面の波は、斜面の波より、 $\lambda \cdot \chi(\omega h, \alpha)$ だけ斜面上方にずれる

雪表面の起伏は斜面の起伏より 64% も強く、波長 λ の 19.4% だけ斜面上方にずれている。斜面が起伏のために平均傾斜 α よりゆるやかになる部分では積雪は厚く、急になる部分ではうすい。これもまた当然期待される結果である。

積雪表面の σ_t 積雪表面では σ_n, τ_{nt} は 0 である。しかし表面の切線方向には張力あるいは圧力が存在しえ、それはつぎの $[\sigma_t]_s$ であらわされる。

$$\begin{aligned}
 [\sigma_t]_s &= (y_s - h) \left(\frac{\partial \sigma_x^0}{\partial y} \right)_{y=h} + \left(\sum_{i=1}^6 a_i \sigma_x^{(i)} \right)_{y=h} \\
 &= 2\rho g \left[2S\delta \sin \alpha \cos \omega x - \left(\frac{S^2}{\omega^2 h^2} - 1 \right) \cos \alpha (\delta_1 \sin \omega x + \delta_2 \cos \omega x) \right] \\
 &= 2\rho g \delta \cdot 2S \sin \alpha \left[\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} - k \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \chi \right) \right] \\
 k &= \left(\frac{S^2}{\omega^2 h^2} - 1 \right) \frac{\delta_2}{\delta} \cot \alpha / 2S \tag{32}
 \end{aligned}$$

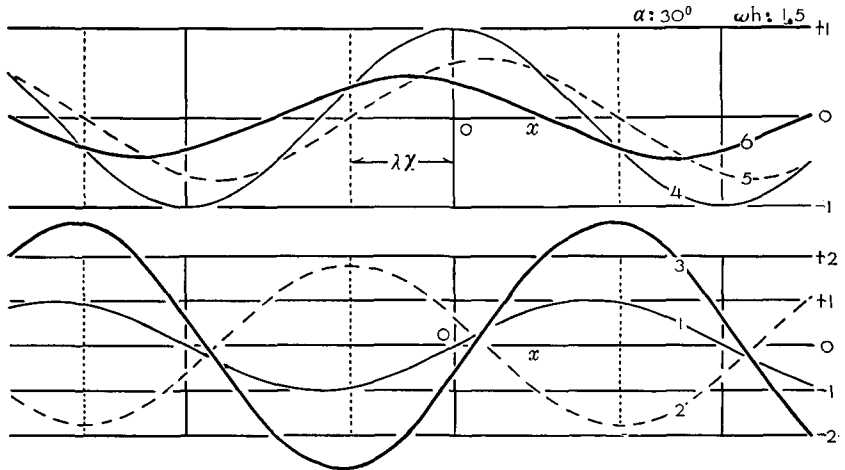


第 6 図 k, k' と $\omega h, \alpha$ との関係

$[\sigma_t]_s$ が正ならば張力、負ならば圧力である。張力の存在する表面部分に割目がはいれば拡大するであろう。

(32) 式の $[\sigma_t]_s$ は、斜面の形の波より位相が $\lambda/4$ 斜面上方にずれた $\cos 2\pi x/\lambda$ の波と、斜面より位相が $\lambda/2$ だけ斜面上方にずれ積雪表面と位相の一致する $\sin 2\pi(x/\lambda + \chi)$ の波との和として表わされている。第1の波と第2の波との振幅の比 $k = \left(\frac{S^2}{\omega^2 h^2} - 1\right) \frac{\partial s}{\delta} \cot \alpha/2S$ と α , ωh との関係を示してある。

第2図とおなじ条件、すなわち、 $\alpha=30^\circ$, $\omega h=1.5$ のばあいについて $[\sigma_t]_s/(2\rho g \delta \cdot 2S \sin \alpha)$ と x との関係を示した。曲線4は $\cos 2\pi(x/\lambda)$, 曲線5は $k \cos 2\pi(x/\lambda + \chi)$ である。曲線6の値が正のところでは積雪表面にそって張力が働く。この張力部分は、第2図にうつすと、a点とb点の間になる。だいたいにおいて、斜面起伏のため、斜面の傾斜が平均傾斜よりゆるやかになっている所の鉛直まうえが張力部分である。平均傾斜より急なところでは、逆に圧力がはたらく。



第7図 積雪表面にそう方向の垂直応力成分 $[\sigma_t]_s$ および積雪の底の剪断応力 $[\tau_{nt}]_G$ の変動部分。曲線4, 5は、それぞれ $\cos 2\pi(x/\lambda)$, $k \cos 2\pi(x/\lambda + \chi)$ で、曲線4と5との和である曲線6が $[\sigma_t]_s/(2\rho g \delta \cdot 2S \sin \alpha)$ を表わす。曲線1は $\sin 2\pi(x/\lambda)$, 曲線2は $k' \cos 2\pi(x/\lambda + \chi)$ である。曲線3は曲線1と2との和で、 $[\tau_{nt}]_G$ の変動部分を $\rho g \delta \sin \alpha$ で割ったものを表わす

曲線6の極大値は、第7図が示すように、だいたい0.5である。 $\sin \alpha$ の値も、 $\alpha=30^\circ$ であるから、0.5である。したがって、 $[\sigma_t]_s$ の極大値は $\rho g \delta \cdot S$ で与えられることになる。 $h=2\text{m}$ とすると、 $\omega h=1.5$ なので、 $\lambda=8.4\text{m}$ である。よって、 $\delta=0.2\text{m}$ にとれば、 δ は h や λ にくらべて充分小さい。 δ がこの値であるとして、雪の密度 ρ を 0.4 gr/cm^3 にとると、 $S=2.13$ を用いて、 $[\sigma_t]_s$ の最大値は 17 gr-wt/cm^2 となる。雪の底での σ_x , σ_y の平均値 $\rho g h \cos \alpha$ は 69 gr-wt/cm^2 である。したがって、 $[\sigma_t]_s$ は $\rho g h \cos \alpha$ の $1/4$ にも達することになる。

積雪の底の τ_{nt} 積雪が波状に起伏する斜面と接する面での積雪内剪断応力 $[\tau_{nt}]_G$ は

$$\begin{aligned}
 [\tau_{nt}]_G &= [\tau_{xy}^0]_G + (\sum a_i \tau_{xy}^{(i)})_{y=0} \\
 &= \rho g h \sin \alpha - \rho g \delta \sin \alpha \sin \omega x \\
 &\quad + \rho g \left[2\delta \sin \alpha \sin \omega x + \frac{S - \omega h C}{\omega^2 h^2} \cos \alpha (\delta_1 \cos \omega x - \delta_2 \sin \omega x) \right] \\
 &= \rho g h \sin \alpha + \rho g \delta \sin \alpha \left[\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} - k' \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \chi \right) \right] \\
 k' &= \frac{\omega h C - S}{(\omega h)^2} \cot \alpha \cdot \frac{\delta_s}{\delta}
 \end{aligned} \tag{33}$$

で与えられる。第6図に k' と α , ωh との関係をグラフで示してある。

$[\tau_{nt}]_G$ は平均部分 $\rho g h \sin \alpha$ と残りの変動部分とからなっている。第7図の曲線3は $\alpha=30^\circ$, $\omega h=1.5$ のばあいについて、変動部分を $\rho g \delta \sin \alpha$ で割ったものを x の関数として表わしたものである。曲線1は $\sin 2\pi(x/\lambda)$, 曲線2は $k' \cos 2\pi(x/\lambda + \chi)$ で、 k' の値には第6図からえられる1.76をつかった。曲線1は斜面の起伏とおなじ位相であり、かつ曲線1と曲線3とは位相がほぼ一致している。したがって、剪断応力の変動部分は斜面がもりあがったところでは正で、雪が地面を引ずりおろそうとする平均剪断応力 $\rho g h \sin \alpha$ を助長することになる。斜面がくぼんだ所では、変動部分は負で、平均剪断応力を削減する。

第7図でみると、曲線3の極大値は2.75である。まえと同様に、 $h=2$ m, $\delta=0.2$ m, $\rho=0.4$ gr/cm³ とすると、剪断応力の平均部分は40 gr-wt/cm², 変動部分の極大値は11 gr-wt/cm² と計算される。すなわち、 $[\tau_{nt}]_G$ は斜面起伏の頂では55 gr-wt/cm², 底では29 gr-wt/cm² で、頂と底とでの差は、かなり大きい。斜面の起伏の凸部をけずって斜面を平らにする作用にはいろいろある。そして、これだけの積雪の剪断応力 $[\tau_{nt}]_G$ の変動も、その種の作用のひとつとして相当な効果をもつものと思われる。

流 量 斜面も積雪表面も平面ならば、積雪が斜面を流下する流量は

$$U_0 = \int_0^h u_0 dy = \frac{\rho g h^3}{3\eta} \sin \alpha \tag{34}$$

である。斜面も積雪表面も波状に起伏する今の定常流のばあいの流量は、 $(\delta/\lambda)^2 U_0$ の程度においてしか、 U_0 と差がないことが容易に証明される。したがって、第1近似では、斜面に起伏ができて、流量には変化がおこらないといえる。

V. 正弦波状に起伏する斜面にある表面の平らな積雪

いままでと同様、斜面には正弦波状の起伏があるが、積雪の表面が平面をなすばあいを考える。積雪の平均の厚さは h とする。第8図のように坐標原点を積雪表面上におき、 y 軸を積雪表面に垂直下方にとると、斜面の形をあらわす曲線 G の式は

$$h - y_G = \delta \sin \omega x \tag{35}$$

となる。境界条件(3), (4)から、曲線 G のうえでは $u=v=0$; 積雪表面では、すなわち、 $y=0$ では、 $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ であることが要求される。

単純応力場として、今までのと同じものをつかう。ただ、坐標のとりかたを変えたので、
 応力成分、流動速度成分の式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= \sigma_y^0 = \rho g \cos \alpha \cdot y, & \tau_{xy}^0 &= -\rho g \sin \alpha \cdot y \\ u^0 &= \frac{\rho g}{2\eta} \sin \alpha \cdot (h^2 - y^2) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

となる。

重畳応力場には、第I表の応力函数 $\varphi^{(4)}$ 、 $\varphi^{(6)}$ から導かれるものを用いる。この重畳応力場の $\sigma_y^{(4)}$ 、 $\tau_{xy}^{(4)}$ は、ともに、 $y=0$ で0であり、また σ_y^0 、 τ_{xy}^0 も $y=0$ で0となるから、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \sigma_y^0 + a_4 \sigma_y^{(4)} + a_6 \sigma_y^{(6)} \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 + a_4 \tau_{xy}^{(4)} + a_6 \tau_{xy}^{(6)} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

も $y=0$ で0となる。すなわち、この σ_y 、 τ_{xy} は、係数 a_4 、 a_6 の値の如何にかかわらず、積雪表面での境界条件をすべて満している。曲線 **G** についての境界条件

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\right)_{y=h} \delta \sin \omega x + [a_4 u^{(4)} + a_6 u^{(6)}]_{y=h} &= 0 \\ [a_4 v^{(4)} + a_6 v^{(6)}]_{y=h} &= 0 \end{aligned}$$

は

$$\begin{aligned} \left[\frac{\rho g h}{\eta} \sin \alpha \cdot \delta + a_4 \frac{\omega}{2\eta} (C + \omega h S) + a_6 \frac{\omega}{2\eta} (S + \omega h C) \right] \sin \omega x &= 0 \\ -\frac{\omega}{2\eta} \omega h [a_4 C + a_6 S] &= 0 \end{aligned}$$

となる。これから、係数 a_4 、 a_6 が

$$\left. \begin{aligned} a_4 &= \frac{2\rho g S}{\omega^2} \delta \sin \alpha \\ a_6 &= -\frac{2\rho g C}{\omega^2} \delta \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

として定められる。 S 、 C は、今までどおり、それぞれ $\sinh(\omega h)$ 、 $\cosh(\omega h)$ の略号である。

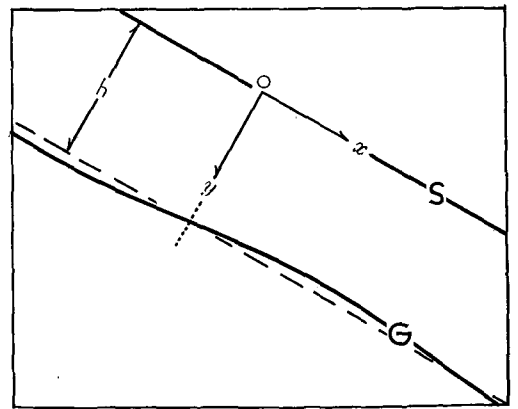
第I表、(35)、(36)、(38)式によって、積雪表面 $y=0$ では

$$\left. \begin{aligned} v_s &= 0, \\ [\sigma_t]_s &= 4\rho g S \delta \sin \alpha \cos \omega x \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

積雪の底、曲線 **G** のうへでは

$$-[\tau_{nt}]_G = \rho g h \sin \alpha + \rho g \delta \sin \alpha \sin \omega x \quad (40)$$

であることが知られる。表面に起伏のある前のばあいと同じく $\alpha=30^\circ$ 、 $\omega h=1.5$ 、 $h=2$ m、 $\delta=0.2$ m にとると、 $[\sigma_t]_s$ の極大値は 34 gr-wt/cm²、 $[\tau_{nt}]_G$ の変動部分の極大値は 4 gr-wt/cm² となる。これらの値は、まえば、それぞれ 17 gr-wt/cm²、11 gr-wt/cm² であった。それゆえ、積雪



第8図 正弦波状に起伏する斜面のうえにある表面の平らな積雪

表面が平らになると、積雪表面にそう方向の張力圧力は2倍にふえ、積雪の底の剪断応力の変動部分は、逆に、 $1/3$ に減ることとなる。

流量は(34)式の U_0 とかわらない。

(39)式に示したとおり、 $v_s=0$ であるから、この積雪表面が平らなばあいも、時間とともに積雪表面の形に変化がおこらない。つまり、積雪の流動は定常である。しかし、この定常状態は不安定で、積雪表面の形がなにかの原因で乱されれば、表面に起伏のある前の定常状態に多行するであろう。

文 献

- 1) Haefeli, R. 1963 Stress transformations, tensile strengths, and rupture processes of the snow cover. Ice and Snow, Edited by W. D. Kingery, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 560-575.
- 2) Lliboutry, L. 1956 La mécanique des glaciers. Annales de géophysique, **12**, 245-276.
- 3) Nye, J. F. 1957 The distribution of stress and velocity in glaciers and ice sheets. Proc. Roy. Soc., London, **A 239**, 113-133.
- 4) Соколовский, В. В. 1950 塑性学 (大橋義夫訳, 1959, 朝倉書店). 32-34.
- 5) Timoshenko, S. and Goodier, J. N. 1951 Theory of Elasticity. 2nd edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 46-53.

Summary

In Fig. 2 of the text curve **G** represents a sloping ground surface with small undulations, with a snow cover of mean thickness h the upper surface of which is indicated by curve **S**. The purpose of the present paper is the theoretical derivation of internal stress and flow velocity in the snow cover. For this purpose it is assumed that snow is an incompressible Newtonian fluid of uniform density ρ , in a steady flow state of plane strain. The formula for curve **G** is assumed to be

$$y_G = \delta \sin \omega x, \quad (1)$$

where δ is very small compared to h and $\lambda (=2\pi/\omega)$, the wave length of undulations of the ground. Then curve **S** will be of the form

$$y_S - h = \delta_1 \sin \omega x + \delta_2 \cos \omega x = \delta_s \sin (\omega x + 2\pi\lambda) \quad (2)$$

with $\delta_1, \delta_2, \delta_s$ of the same order of magnitude as δ .

The following relations between stress components $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ and flow velocity components u, v, w hold for any incompressible Newtonian fluid in a state of plane strain:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad w = 0 \\ \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\frac{\partial u}{\partial x}} &= \frac{\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)}{\frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)} = 2\eta, \end{aligned} \quad (3)$$

where η is the coefficient of viscosity. Since snow has very high viscosity and consequently flows very slowly if at all, the acceleration of its movement can be entirely

wavy slope if the values of a_i are chosen to satisfy boundary conditions (5), (6) and (7).

The following formulas are found to give such values for a_i :

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta \frac{2C(\omega h)^4 \sin^2 \alpha}{(\omega h)^4 \sin^2 \alpha + (CS - \omega h) \cos^2 \alpha} \\ \delta_2 &= \delta_1 \frac{CS - \omega h}{(\omega h)^2} \cot \alpha \\ a_1 &= \delta_1 \frac{\rho g S}{\omega^2 (\omega h)} \cos \alpha & a_4 &= -\delta_2 \frac{\rho g S}{\omega^2 (\omega h)} \cos \alpha \\ a_3 &= -a_1 & a_2 &= -\delta \frac{2\rho g h \sin \alpha}{\omega} - a_4 \\ a_5 &= -a_1 \frac{S - \omega h C}{\omega h C} & a_6 &= \delta \frac{2\rho g \sin \alpha}{\omega^2} + a_4 \frac{S - \omega h C}{\omega h C},\end{aligned}$$

where S and C are $\sinh(\omega h)$ and $\cosh(\omega h)$ respectively. The formulas for δ_1 and δ_2 are obtained during the process of finding those for a_i .

The amplitude δ_s and the phase angle χ of curve \mathbf{S} are related to δ_1 and δ_2 by $\delta_s = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ and $2\pi\chi = \tan^{-1} \delta_2/\delta_1$. In Figs 4 and 5, δ_s/δ and χ are plotted against ωh for values of α between 5° and 45° . As shown by the curves in Fig. 4, the amplitude δ_s increases as the slope angle α increases, therefore, the steeper the slope, the more the top surface of the snow cover reflects the contours of the ground surface. Fig. 2 illustrates the relation of the curves \mathbf{S} and \mathbf{G} when $\alpha=30^\circ$ and $\omega h=1.5$ ($\lambda=4.2h$).

The longitudinal tension or compression $[\sigma_t]_s$ at the top surface of the snow cover is given by

$$[\sigma_t]_s = 2\rho g \delta \cdot 2S \sin \alpha [\cos \omega x - k \sin(\omega x + 2\pi\chi)],$$

where k is a constant varying with ωh as the lower right group of curves in Fig. 6 indicates. Curve 6 of Fig. 7 shows how $[\sigma_t]_s/(2\rho g \delta \cdot 2S \sin \alpha)$ changes with x when $\alpha=30^\circ$ and $\omega h=1.5$. Areas of tension (positive value of $[\sigma_t]_s$) and compression (negative value of $[\sigma_t]_s$) alternate: in Fig. 2, the area of tension is between points a and b. Should a crack appear in the top of the snow cover, its position would be near the centre of the tension area.

It is proved that a snow cover with a planar upper surface will flow down a wavy slope with steady velocity, retaining its planar upper surface despite the snow movement. The stress and velocity components of such a snow cover can be obtained by combining the above σ_x^0, \dots, v^0 with the components derived from the stress functions $\varphi^{(4)}$ and $\varphi^{(6)}$ of Table 1, referred to coordinates x, y shown in Fig. 8. The author presumes that this steady flow is unstable and that any disturbance of the upper surface of the snow cover will result in a transformation from a smooth surface to one more nearly corresponding to the ground surface contours (Fig. 2).

数 値 表

斜面の曲線 G は $y_G = \delta \sin \omega x$ (本文の(12)式) で表わされ、積雪表面の曲線 S は $y_S - h = \delta_1 \sin \omega x + \delta_2 \cos \omega x = \delta_S \sin 2\pi (x/\lambda + \alpha)$ (本文の(13)式および(26)式) で表わされる。 $\omega = 2\pi/\lambda$ で、 λ は斜面の起伏の波長である

α	5°			10°			15°		
	δ_1/δ	δ_S/δ	α (%)	δ_1/δ	δ_S/δ	α (%)	δ_1/δ	δ_S/δ	α (%)
0.0	2.0000	2.0000	0.00	2.0000	2.0000	0.00	2.0000	2.0000	0.00
0.1	1.2698	1.5977	10.38	1.7578	1.8797	5.76	1.8925	1.9504	3.89
0.2	0.6056	1.1116	15.83	1.2885	1.6213	10.38	1.6283	1.8229	7.41
0.3	0.3258	0.8253	18.54	0.8960	1.3687	13.64	1.3252	1.6645	10.34
0.4	0.1983	0.6547	20.10	0.6288	1.1660	15.94	1.0517	1.5079	12.72
0.5	0.1323	0.5463	21.11	0.4557	1.0138	17.58	0.8321	1.3699	14.61
0.6	0.0943	0.4729	21.81	0.3416	0.9000	18.81	0.6634	1.2540	16.13
0.8	0.0546	0.3823	22.72	0.2088	0.7474	20.50	0.4375	1.0818	18.38
1.0	0.0353	0.3300	23.30	0.1385	0.6538	21.60	0.3021	0.9655	19.94
1.2	0.0243	0.2966	23.69	0.0967	0.5917	22.39	0.2157	0.8838	21.07
1.4	0.0173	0.2731	23.99	0.0695	0.5469	22.97	0.1573	0.8225	21.94
1.6	0.0126	0.2549	24.21	0.0508	0.5119	23.42	0.1159	0.7730	22.60
1.8	0.0092	0.2397	24.38	0.0374	0.4821	23.76	0.0844	0.7187	23.13
2.0	0.0068	0.2260	24.52	0.0275	0.4549	24.04	0.0632	0.6896	23.54
2.2	0.0050	0.2130	24.63	0.0201	0.4289	24.25	0.0464	0.6508	23.87
2.4	0.0036	0.2002	24.71	0.0146	0.4032	24.42	0.0337	0.6123	24.13
α	20°			25°			30°		
0.0	2.0000	2.0000	0.00	2.0000	2.0000	0.00	2.0000	2.0000	0.00
0.1	1.9445	1.9770	2.89	1.9693	1.9713	2.26	1.9834	1.9966	1.83
0.2	1.7945	1.9134	5.64	1.8831	1.9600	4.47	1.9347	1.9866	3.65
0.3	1.5923	1.8246	8.12	1.7558	1.9159	6.50	1.8594	1.9717	5.40
0.4	1.3751	1.7256	10.31	1.6033	1.8619	8.49	1.7614	1.9515	7.08
0.6	0.9901	1.5321	13.82	1.2819	1.7434	11.85	1.5255	1.9018	10.19
0.8	0.7093	1.3775	16.39	0.9949	1.6313	14.56	1.2728	1.8452	12.88
1.0	0.5148	1.2604	18.31	0.7634	1.5350	16.72	1.0340	1.7869	15.18
1.2	0.3789	1.1713	19.76	0.5829	1.4629	18.43	0.8229	1.7262	17.09
1.4	0.2815	1.1005	20.88	0.4434	1.3811	19.80	0.6444	1.6650	18.68
1.6	0.2099	1.0403	21.77	0.3357	1.3155	20.89	0.4974	1.6014	19.97
1.8	0.1563	0.9855	22.74	0.2524	1.2524	21.77	0.3788	1.5344	21.03
2.0	0.1158	0.9335	23.02	0.1882	1.1900	22.47	0.2847	1.4637	21.88
2.2	0.0852	0.8821	23.46	0.1390	1.1270	23.03	0.2113	1.3895	22.57
2.4	0.0621	0.8305	23.65	0.1015	1.0620	23.48	0.1549	1.3119	23.12
α	35°			40°			45°		
0.0	2.0000	2.0000	0.00	2.0000	2.0000	0.00	2.0000	2.0000	0.00
0.2	1.9672	2.0032	3.02	1.9889	2.0144	2.53	2.0037	2.0218	2.13
0.4	1.8726	2.0122	5.96	1.9519	2.0543	5.05	2.0098	2.0846	4.29
0.6	1.7223	2.0211	8.76	1.8782	2.1103	7.54	2.0012	2.1781	6.46
0.8	1.5295	2.0226	11.35	1.7581	2.1686	9.95	1.9565	2.2878	8.67
1.0	1.3136	2.0135	13.66	1.5912	2.2161	12.26	1.8573	2.3941	10.87
1.2	1.0934	1.9899	15.74	1.3875	2.2415	14.38	1.6974	2.4792	13.00
1.4	0.8853	1.9516	17.50	1.1667	2.2403	16.28	1.4875	2.5296	15.00
1.6	0.6998	1.8993	18.99	0.9487	2.2114	17.95	1.2507	2.5392	16.81
1.8	0.5416	1.8347	20.23	0.7493	2.1581	19.36	1.0128	2.5088	18.39
2.0	0.4115	1.7597	21.25	0.5771	2.0838	20.54	0.7941	2.4444	19.74
2.2	0.3075	1.6762	22.07	0.4352	1.9940	21.50	0.6059	2.3527	20.86
2.4	0.2263	1.5859	22.72	0.3221	1.8920	22.28	0.4520	2.2414	21.77