



Title	斜面積雪の内部応力および粘性流動 II : 平らな斜面の上の楔形の積雪
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科学. 物理篇, 22, 101-117
Issue Date	1964-03-25
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/18010">https://hdl.handle.net/2115/18010</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	22_p101-117.pdf



## 斜面積雪の内部応力および粘性流動 II\*

平らな斜面の上の楔形の積雪

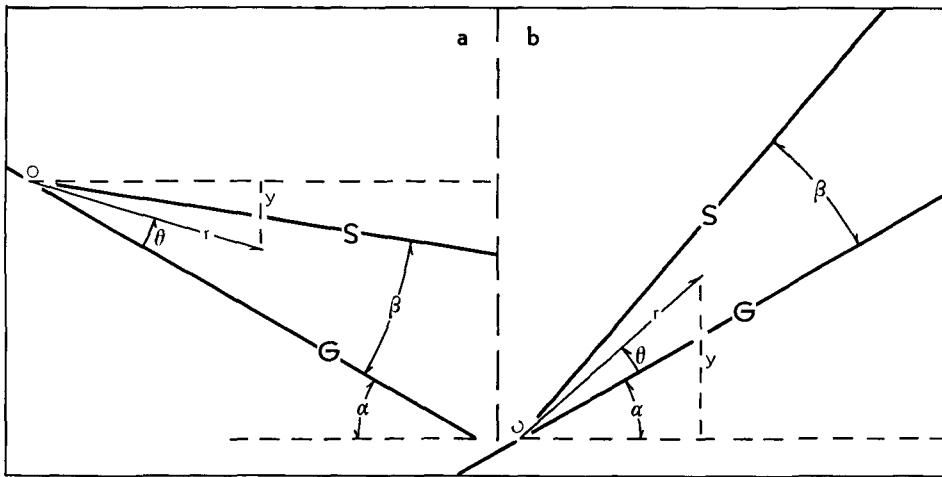
吉田 順五

(低温科学研究所 応用物理学部門)

(昭和 38 年 11 月受理)

### まえがき

この論文は、おなじ表題の前の論文<sup>1)</sup>のつづきである。第1図の **a** あるいは **b** に示したように、傾斜角  $\alpha$  の平らな斜面 **G** のうえに頂角が  $\beta$  の楔形をなしてつもった積雪の、内部応力流動速度を計算するのが目的である。直線 **S** が積雪の表面である。まえの論文でと同様、積雪は非圧縮性ニュートン粘性流体で平面ひずみの状態にあると仮定する。坐標には、第1図に示した極坐標  $r, \theta$  をつかう。便宜のため、前の論文を論文 I と呼ぶ。



第1図 傾斜角  $\alpha$  の平らな斜面 **G** のうえに積雪が楔形につもっている。直線 **S** が積雪の表面である。**a** のばあいには積雪の厚さが斜面をくだるにつれ増し、**b** のばあいには減る

### I. 求める解の意味

目的とする応力成分  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  流動速度成分  $v_r, v_\theta$  は、論文 I の (1) 式 (2) 式の微分方程式を極坐標で表わした

\* 北海道大学低温科学研究所業績 第 656 号

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \pm \rho g \sin(\alpha \mp \theta) &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} - \rho g \cos(\alpha \mp \theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)}{\frac{\partial v_r}{\partial r}} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r)}{v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} = \frac{\tau_{r\theta}}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)} = 2\eta \quad (2)$$

の解で

積雪表面をあらわす直線 **S** 上では、すなわち、 $\theta = \beta$  では

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (3)$$

斜面を表わす直線 **G** 上では、すなわち、 $\theta = 0$  では

$$v_r = v_\theta = 0 \quad (4)$$

の境界条件をみたすものである。(1)式のなかの復号士あるいは干のうち、上のものは第1図 **a** のばあい、下のものは第1図 **b** のばあい用いる。復号についてのこの規約は、以下この論文全体にわたっておこなわれる。 $\rho, \eta$  はそれぞれ積雪の密度、積雪の粘性係数である。

しかし(3)式(4)式の境界条件だけでは解が一義的にさだまらない。直線 **S** および **G** がひとつの面積をかこんでいないからである。一義的に解を決定するには、(3)式(4)式の条件に加えて、直線 **S** 上の一点と直線 **G** 上の一点とをむすぶ曲線、たとえば円弧  $r=R$  = 常数 のうでの境界条件を与える必要がある。しかし、この第3の境界条件が初めから与えられていると、問題が非常に解きにくい。それで、この論文では、うゑに述べたような(3)式(4)式の境界条件だけを満足する解を求めることを第1段階の目的とする。用いる方法は、論文Iでと同様、ひとつの単純応力場といくつかの重畳応力場とを加えあわせる重畳法である。

ある特定の単純応力場、重畳応力場から出発してえられるこの第1段階の解を  $\sigma'_r, \dots, v'_\theta$  としよう。すると、これらの成分は円弧  $r=R$  のうである定まった  $\theta$  の函数  $[\sigma'_r]_R, \dots, [v'_\theta]_R$  となるにちがいない。すなわち、 $r=R$  では

$$\sigma'_r = [\sigma'_r]_R, \dots, v'_\theta = [v'_\theta]_R \quad (5)$$

である。したがって、もしも、実際のばあいについて、(5)式がみたされることがあるとすれば、この第1段階の解  $\sigma'_r, \dots, v'_\theta$  がそのまま正しい解となるわけである。しかし、このようなことは偶然にしかおこりえない。それで(3)式(4)式の境界条件はみたしたままで  $[\sigma'_r]_R, \dots, [v'_\theta]_R$  の値を変化させ実際のばあいに適合させる方法の要求がおこる。第IV節以下にのべるのは、不完全ながら、そのような方法を求めるための試みである。

## II. 第1段階の解

第1段階の解とは、前節でのべたように、ある単純応力場とある重畳応力場とを加えてえられる応力場で境界条件(3)(4)だけをみたすものである。

**単純応力場** まず、論文I第II節にあげた2個の例のうちの(i)をとる。この単純応力場

は表面が水平な静止した積雪内の応力場である。積雪面を第1図の坐標原点 O をふくむ水平面にえらぼう。すると、論文 I の (7) 式から、 $y=r\sin(\alpha\mp\theta)$  の関係を利用して、単純応力場が

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^0 &= \sigma_\theta^0 = \mp \rho g r \sin(\alpha\mp\theta) \\ \tau_{r\theta}^0 &= 0, \quad v_r^0 = v_\theta^0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

で与えられることがわかる。

第1図 b のばあい、積雪は O 点をふくむ水平面より上に位置している。それにもかかわらず、この水平面を表面とし、それより下にある積雪内の応力場を単純応力場に用いるのは不適當のようにも思われる。しかし、単純応力場は、ただ (1) 式 (2) 式の微分方程式の解でありさえすればよい。そして、うえの (6) 式は、O 点を通る水平面の上でも下でも、たしかにこれらの微分方程式を満足している。それゆえ (6) 式で正号をとったものを第1図 b のばあいの単純応力場に使っても不都合はないのである。

**重畳応力場** 第1表にあげた6個の応力函数  $\varphi^{(i)}$  のうちのはじめの4個  $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(4)}$  から導かれる重畳応力場  $\sigma_r^{(i)}, \dots, v_\theta^{(i)}$  をつかう。 $\varphi^{(i)}$  は、いずれも論文 I の (10) 式をみたしているし、応力成分  $\sigma_r^{(i)}, \sigma_\theta^{(i)}, \tau_{r\theta}^{(i)}$  は (11) 式によって  $\varphi^{(i)}$  から導かれる。流動速度の  $r, \theta$  成分  $v_r^{(i)}, v_\theta^{(i)}$  は、(11) 式で定められた応力成分を (2) 式に代入し、積分法によって求めればよい。

第1表 重畳応力場 ( $\kappa=1/2\eta$ )

(i) の単純応力場には (1) から (4) までの重畳応力場が、(ii) の単純応力場には (1) から (6) まで全部の重畳応力場が使われる

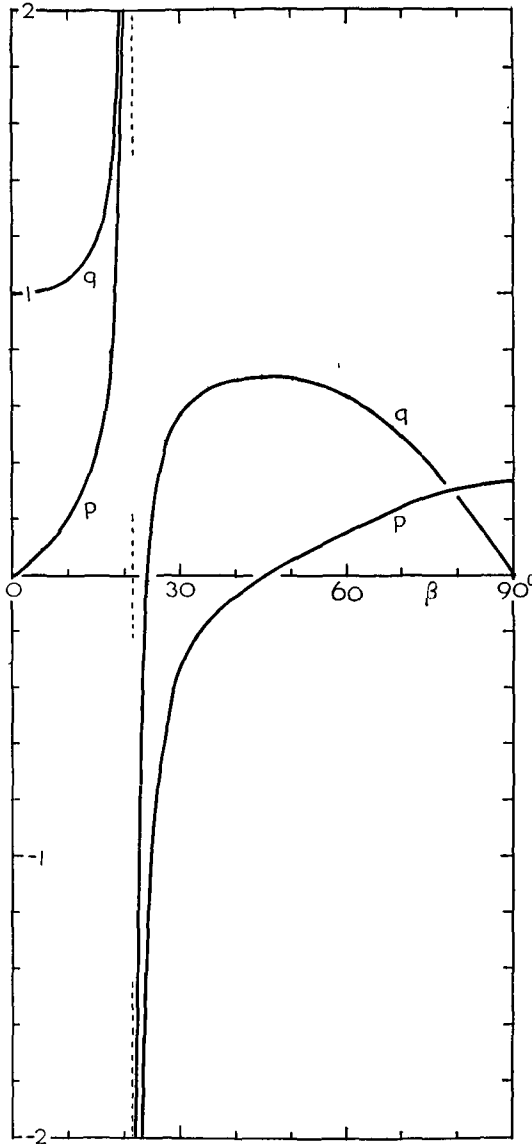
$\varphi^{(i)}$	$\varphi^{(1)}$	$\varphi^{(2)}$	$\varphi^{(3)}$	$\varphi^{(4)}$	$\varphi^{(5)}$	$\varphi^{(6)}$
	$r^3 \sin\theta$	$\frac{1}{3} r^3 \sin 3\theta$	$r^3 \cos\theta$	$\frac{1}{3} r^3 \cos 3\theta$	$r^2$	$\frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$
$\sigma_r^{(i)}$	$2r \sin\theta$	$-2r \sin 3\theta$	$2r \cos\theta$	$-2r \cos 3\theta$	2	$-\sin 2\theta$
$\sigma_\theta^{(i)}$	$6r \sin\theta$	$2r \sin 3\theta$	$6r \cos\theta$	$2r \cos 3\theta$	2	$\sin 2\theta$
$\tau_{r\theta}^{(i)}$	$-2r \cos\theta$	$-2r \cos 3\theta$	$2r \sin\theta$	$2r \sin 3\theta$	0	$-\cos 2\theta$
$v_r^{(i)}$	$-\kappa r^2 \sin\theta$	$-\kappa r^2 \sin 3\theta$	$-\kappa r^2 \cos\theta$	$-\kappa r^2 \cos 3\theta$	0	$-\kappa r \sin 2\theta$
$v_\theta^{(i)}$	$-3\kappa r^2 \cos\theta$	$-\kappa r^2 \cos 3\theta$	$3\kappa r^2 \sin\theta$	$\kappa r^2 \sin 3\theta$	0	$\kappa r (1 - \cos 2\theta)$

**第1段階の解** 第1段階の解としての応力成分、流動速度成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= \sigma_r^0 + \sum_{i=1}^4 a_i \sigma_r^{(i)}, \quad \sigma_\theta' = \sigma_\theta^0 + \sum_{i=1}^4 a_i \sigma_\theta^{(i)}, \quad \tau_{r\theta}' = \tau_{r\theta}^0 + \sum_{i=1}^4 a_i \tau_{r\theta}^{(i)} \\ v_r' &= v_r^0 + \sum_{i=1}^4 a_i v_r^{(i)}, \quad v_\theta' = v_\theta^0 + \sum_{i=1}^4 a_i v_\theta^{(i)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

として与えられる。係数  $a_i$  の値は、さきにあげた境界条件 (3) 式 (4) 式を (7) 式にあてはめて決定される。えられた係数  $a_i$  を (7) 式に代入し整理すると、第1段階の解が下記の形にえられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= \rho g r \left[ \mp \sin(\alpha\mp\theta) \pm \frac{1}{2} \sin(\alpha\mp\beta) \left\{ p(\beta) (\sin\theta + 3\sin 3\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q(\beta) (\cos\theta + \cos 3\theta) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$



第2図 (8)~(12)式にふくまれる  $p(\beta), q(\beta)$  の値

とは、ともにこの値の  $\beta$  で  $\pm\infty$  となる。(8)から(12)までの式には、どれにも  $p(\beta), q(\beta)$  がふくまれている。したがって、 $21.5^\circ$  あるいはその極く近くの  $\beta$  の値に対しては、これらの式を応力成分、速度成分を表わすものとして使うことができない。

**一様な斜面積雪内応力を単純応力場とするばあい** 論文I第II節にあげた単純応力場のうちの(ii), すなわち、一様な斜面積雪内の応力場と、第I表にあげた6個の応力場全部とを用いると、うえのとは別な第1段階の解がえられる。しかし、こうして得られる  $\sigma'_r, \dots, v'_\theta$  も、 $\beta=21.5^\circ$  では、やはり  $\pm\infty$  になってしまう。この解について論ずることも必要であろうが、こ

$$\sigma'_\theta = \rho g r \left[ \mp \sin(\alpha \mp \theta) \pm \frac{1}{2} \sin(\alpha \mp \beta) \left\{ 3p(\beta)(\sin \theta - \sin 3\theta) + q(\beta)(3 \cos \theta - \cos 3\theta) \right\} \right] \quad (9)$$

$$\tau'_{r\theta} = \mp \rho g r \frac{1}{2} \sin(\alpha \mp \beta) \left\{ p(\beta)(\cos \theta - 3 \cos 3\theta) - q(\beta)(\sin \theta - \sin 3\theta) \right\} \quad (10)$$

$$v'_r = \pm (\rho g / 8 \gamma) r^2 \sin(\alpha \mp \beta) \left\{ p(\beta)(3 \sin 3\theta - \sin \theta) + q(\beta)(\cos 3\theta - \cos \theta) \right\} \quad (11)$$

$$v'_\theta = \pm (\rho g / 8 \gamma) r^2 \sin(\alpha \mp \beta) \left\{ 3p(\beta)(\cos 3\theta - \cos \theta) + q(\beta)(3 \sin \theta - \sin 3\theta) \right\} \quad (12)$$

復号  $\pm$  および  $\mp$  は、さきに定めたとおり、上のものが第1図aのばあいに、下のものが第1図bのばあいに用いられることを意味する。 $\gamma$  は積雪の粘性係数である。 $p(\beta), q(\beta)$  は第2図の曲線で表わされる  $\beta$  の函数で、

$$p(\beta) = \frac{\sin 3\beta - \sin \beta}{\cos 4\beta + 4 \cos 2\beta - 3} \quad (13)$$

$$q(\beta) = \frac{3 \cos 3\beta - \cos \beta}{\cos 4\beta + 4 \cos 2\beta - 3} \quad (14)$$

で与えられる。

この(13)式(14)式の分母は  $\beta=21.5^\circ$  (正確には  $21^\circ 28' 12''$ ) で0である。それゆえ、第2図に示されているように、 $p(\beta)$  と  $q(\beta)$

の論文では、これ以上それに触れないことにする。

### III. 第1段階の解の検討

論文 I の問題では、積雪は流動するにも拘わらず表面の形が時間的にかわらない定常状態にあった。正弦波状の起伏があるとはいえ無限に長い斜面に、平均としては一様な厚さで無限に広くつもった積雪なので、定常状態がありえたのである。この論文の楔形の雪では定常状態は不可能で、時間がたつと表面は形をかえ平面ではなくなってしまう。しかし積雪は粘性係数  $\eta$  が非常に大きいため、表面が動くとしても非常に緩慢である。したがって、ある時に楔形になったとすれば、その状態はかなりのあいだ持続し、その持続時間に対してはここにえた結果が適用される。この点で積雪のばあいには、粘性係数の小さい水のばあいなどちがって、非定常状態にも大きな意味があるとしてよいであろう。

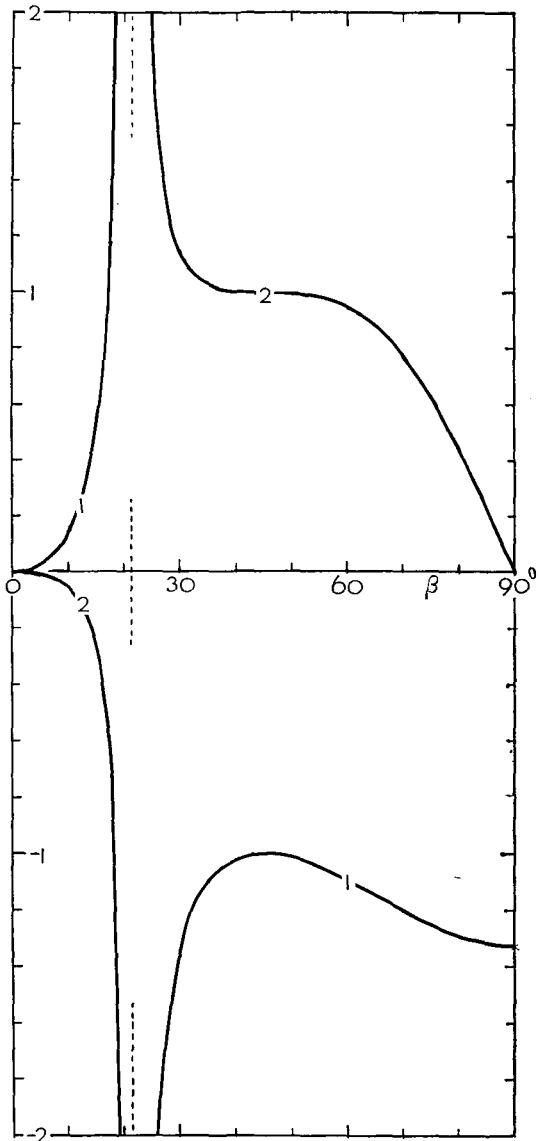
粘性流動のためには積雪表面の形がかわるとしても、融解や新たな雪の堆積がその変化を打消して、表面の形をそのままに保つこともおこりうる。楔の頂角  $\beta$  は変わっても、積雪表面は平らなままということもありえよう。これらのばあいには、この論文の計算結果を長期間にわたってあてはめることができる。

**積雪表面の流動速度** (11) 式 (12) 式の括弧 { } のなかの  $\theta$  を  $\beta$  に等しくおいたものを  $[\partial'_r]_s, [\partial'_\theta]_s$  とすると、積雪表面の流動速度  $[v'_r]_s, [v'_\theta]_s$  は

$$[v'_r]_s = \pm(\rho g/8\eta) r^2 \sin(\alpha \mp \beta) \cdot [\partial'_r]_s \quad (15)$$

$$[v'_\theta]_s = \pm(\rho g/8\eta) r^2 \sin(\alpha \mp \beta) \cdot [\partial'_\theta]_s \quad (16)$$

であたえられる。 $[\partial'_r]_s, [\partial'_\theta]_s$  は  $\beta$  の関数で  $\beta$  とは第 3 図の曲線 1, 2 で表わされるような関係にある。 $\beta=21.5^\circ$  では  $[\partial'_r]_s, [\partial'_\theta]_s$  が  $\pm\infty$  となり、 $[v'_r]_s, [v'_\theta]_s$  は物理的意味をうしなう。それで、 $\beta$  が  $21.5^\circ$  あるいはその



第 3 図 曲線 1:  $[\partial'_r]_s$ . 曲線 2:  $[\partial'_\theta]_s$

附近の値をとるばあいは、こんど考えないこととする。

斜面をのぼるにつれて積雪が厚くなる第1図 **b** のばあいには、斜面をずりおちるにつれて積雪はふくれ、積雪表面は時間とともに斜面から遠ざかるはずである。すなわち、 $[v'_s]_s > 0$  になるはずである。実際、 $\beta < 21.5^\circ$  ならば、第3図に示されているように  $[\hat{v}'_s]_s < 0$  であるから、(16)式により  $[v'_s]_s > 0$  である。しかし、 $\beta > 21.5^\circ$  のときは、 $[\hat{v}'_s]_s > 0$  なので  $[v'_s]_s < 0$  となってしまう。すなわち積雪表面は斜面にむかって動き、積雪は斜面をはいあがることになる。これは、この第1段階の解では、 $\beta > 21.5^\circ$  になると、(5)式の境界条件に現われる  $[\sigma'_r]_R$ 、 $[\sigma'_\theta]_R$ 、 $[\tau'_{r\theta}]_R$  が雪を上の方へ引きあげようとする応力になっているからである。原点  $O$  から昇りであった斜面が  $r=R$  のところで降りに変るとすれば、このような境界条件が実現することもある。しかし、途中で傾斜をかえない斜面を考えるとすれば、(8)~(12)式の応力場は  $\beta < 21.5^\circ$  のばあいにしか使えないことになる。

斜面の下の方にむかって積雪が厚くなる第1図 **a** のばあいも同様である。 $\beta < \alpha$  ならば積雪表面はくだけり傾斜なので  $[v'_s]_s < 0$ 、 $\beta > \alpha$  ならばのぼり傾斜なので  $[v'_s]_s > 0$  となるはずである。 $\beta < 21.5^\circ$  のときには、(16)式は正にそのような  $[v'_s]_s$  をあたえる。しかし、 $\beta > 21.5^\circ$  になると、(16)式は逆の結果をあたえてしまう。

しかし、第IV節にのべる第2種重畳応力場をつかえば、 $\beta > 21.5^\circ$  のばあいに対しても、うのような矛盾をふくまない応力場を作ることができる。第VI節にその例をひとつあげる。

**流線** 積雪内部での雪の流動の方向を示す流線の微分方程式は、(11)式(12)式を用いて

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{v'_r}{v'_\theta} = \frac{p(\beta)(3\sin 3\theta - \sin \theta) + q(\beta)(\cos 3\theta - \cos \theta)}{3p(\beta)(\cos 3\theta - \cos \theta) + q(\beta)(3\sin \theta - \sin 3\theta)} \quad (17)$$

と書かれる。これを積分して、流線の方程式が

$$r = c [3p(\beta)(\cos 3\theta - \cos \theta) + q(\beta)(3\sin \theta - \sin 3\theta)]^{-\frac{1}{3}} \quad (18)$$

として与えられる。 $c$  は積分常数で任意の値に選んでよい。

**積雪表面の応力** 積雪の表面で  $\sigma'_\theta$ 、 $\tau'_{r\theta}$  は0である。しかし、表面にそう方向にはたらく張力あるいは圧力  $\sigma'_r$  は0でない。(8)式によって、表面の  $\sigma'_r$  は

$$\left. \begin{aligned} [\sigma'_r]_s &= \mp \rho g r \sin(\alpha \mp \beta) [1 - ([\hat{\sigma}'_r]_s/2)] \\ [\hat{\sigma}'_r]_s &= p(\beta)(\sin \beta + 3\sin 3\beta) + q(\beta)(\cos \beta + \cos 3\beta) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

と与えられる。 $\beta$  の函数である  $[\hat{\sigma}'_r]_s$  の値は、 $\beta=0$  では2、 $\beta$  の増大とともに増大し  $\beta=21.5^\circ$  で  $+\infty$  となる。 $\beta=21.5^\circ$  をこえると、 $-\infty$  から出発して  $\beta=45^\circ$  で極大値の0に達し、それから減少して  $\beta=90^\circ$  では  $-(2/3)$  の値をとる。結局、 $[\hat{\sigma}'_r]_s$  は  $\beta < 21.5^\circ$  では正で2より大きく、 $\beta > 21.5^\circ$  では常に負である。この  $[\hat{\sigma}'_r]_s$  の性質によって(19)式をみると、「積雪表面の流動速度」の項でのべた  $[v'_s]_s$  が正のときには  $[\sigma'_r]_s$  は負で圧力となり、負のときには正で張力となることがわかる。

例として第1図 **a** のばあいで  $\alpha=30^\circ$ 、 $\beta=15^\circ$  のときを考えよう。 $\beta=15^\circ$  では  $[\hat{\sigma}'_r]_s$  の値が3.334なので、積雪の密度  $\rho$  を  $0.4 \text{ gr/cm}^3$  と仮定すると

$$[\sigma'_r]_s = 0.069 \times r \text{ gr-wt/cm}^2$$

なる張力をうる。r は cm ではかる。r=10 m ともなれば 69 gr-wt/cm<sup>2</sup> の値になる。

**β が小さいばあいの応力場** β が非常に小さいと、(8)~(12) 式の応力成分、流動速度成分は、第 1 近似において

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_r = \sigma'_\theta = -\rho g \cos \alpha \cdot (r\beta - rt), \quad \tau'_{r\theta} = \pm \rho g \sin \alpha \cdot (r\beta - rt) \\ v'_r = \pm (\rho g / \eta) \sin \alpha \cdot (rt) \{ r\beta - (rt/2) \}, \quad v'_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となる。坐標原点 O から斜面に垂直上方に y 軸、斜面にそって下方に x 軸をとると、これらの成分は、第 1 図 a, b の両方のばあいとも、

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x = \sigma'_y = -\rho g \cos \alpha \cdot \{ h(x) - y \}, \quad \tau'_{xy} = \rho g \{ h(x) - y \} \\ u' = (\rho g / \eta) \sin \alpha \cdot y \{ h(x) - (y/2) \}, \quad v' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

とかなおされる。h(x) は βx を表わしたもので、坐標 x の点での積雪の厚さにひとしい。u', v' は流動速度の x, y 成分である。(21) 式は、論文 I にあげた単純応力場のうちの(ii), すなわち、一様な斜面積雪の応力成分、流動速度成分をあらわす式にふくまれる常数 h (一様な斜面積雪の厚さ) を x の函数である h(x) でおきかえたものと同じである。ただし、この h(x) は、あらわにはそれと示されていないけれども、時間的に変化するものである。斜面の下にむかって積雪が厚くなる第 1 図 a のばあいには h(x) は時間とともに減少し、逆の第 1 図 b のばあいには増大する。

第 1 近似の (21) 式では σ'<sub>x</sub>, v' の積雪表面での値 [σ'<sub>x</sub>]<sub>s</sub>, [v']<sub>s</sub> は 0 となるが、第 2 近似まで考えると

$$[\sigma'_x]_s = \pm \beta \rho g h(x) \sin \alpha, \quad [v']_s = \mp \beta \frac{11\rho g}{8\eta} [h(x)]^2 \sin \alpha \quad (22)$$

となる。いままでどおり、復号のうち上のは第 1 図 a のばあいにつかう。このときは [σ'<sub>x</sub>]<sub>s</sub> > 0 で表面には張力がある。下の符号は第 1 図 b のばあいのものである。積雪は斜面の裾にむかってうすく、表面には圧力がはたらく。

#### IV. 第 2 種重畳応力場

第 1 節のおわりで述べた目的のため、すなわち、r=R での応力成分、流動速度成分の値を多少とも自由に変更するために、第 2 種重畳応力場と名づけるものを考える。これは (1) 式から重力項 (第 4 項) をとり去った微分方程式と (2) 式の微分方程式との解で、(3) 式 (4) 式の境界条件をみたすものである。第 2 種重畳応力場の応力成分、流動速度成分を σ''<sub>r</sub>, …, v''<sub>θ</sub> とし、さきに求めた第 1 段階の解 σ'<sub>r</sub>, …, v'<sub>θ</sub> と、任意の常数 K を介して

$$\sigma_r = \sigma'_r + \rho g K \sigma''_r, \quad \dots, \quad v_\theta = v'_\theta + \rho g K v''_\theta \quad (23)$$

の形に結合しよう。すると、この σ<sub>r</sub>, …, v<sub>θ</sub> は (1) 式 (2) 式の解であり、しかもなお、(3) 式 (4) 式の境界条件を満足する。σ'<sub>r</sub>, …, v'<sub>θ</sub> と σ''<sub>r</sub>, …, v''<sub>θ</sub> との r=R における値はおなじでない。それゆえ K の値を適当にえらべば、(23) 式の σ<sub>r</sub>, …, v<sub>θ</sub> によって、あらかじめ与えられた

第 2 表 第 2 種重疊応力場 ( $\kappa=1/(2\eta)$ )

	$\psi^{(1)}$	$\psi^{(2)}$	$\psi^{(3)}$	$\psi^{(4)}$
$\psi^{(k)}$	$r^{s+2} \sin s \theta$	$\frac{r^{s+2}}{s+2} \sin (s+2) \theta$	$r^{s+2} \cos s \theta$	$\frac{r^{s+2}}{s+2} \cos (s+2) \theta$
$\sigma_r^{(k)}$	$-(s+1)(s-2) r^s \sin s \theta$	$-(s+1) r^s \sin (s+2) \theta$	$-(s+1)(s-2) r^s \cos s \theta$	$-(s+1) r^s \cos (s+2) \theta$
$\sigma_\theta^{(k)}$	$(s+1)(s+2) r^s \sin s \theta$	$(s+1) r^s \sin (s+2) \theta$	$(s+1)(s+2) r^s \cos s \theta$	$(s+1) r^s \cos (s+2) \theta$
$\tau_{r\theta}^{(k)}$	$-s(s+1) r^s \cos s \theta$	$-(s+1) r^s \cos (s+2) \theta$	$s(s+1) r^s \sin s \theta$	$(s+1) r^s \sin (s+2) \theta$
$v_r^{(k)}$	$-\kappa s r^{s+1} \sin s \theta$	$-\kappa r^{s+1} \sin (s+2) \theta$	$-\kappa s r^{s+1} \cos s \theta$	$-\kappa r^{s+1} \cos (s+2) \theta$
$v_\theta^{(k)}$	$-\kappa (s+2) r^{s+1} \cos s \theta$	$-\kappa r^{s+1} \cos (s+2) \theta$	$\kappa (s+2) r^{s+1} \sin s \theta$	$\kappa r^{s+1} \sin (s+2) \theta$

$r=R$  における境界条件を近似的にでも満足する応力場を作る可能性がうまれる。

第 2 表の 4 個の  $\psi^{(k)}$  は重調和函数である。したがって応力函数としてつかえる。 $s$  は任意の値をとりうる。第 1 表の応力函数  $\varphi^{(k)}$  は、 $\psi^{(k)}$  で  $s$  を 1 または 0 としたものにほかならない。第 2 種重疊応力場は、 $\psi^{(k)}$  をつかって次のようにして組立てることができる。

$\psi^{(k)}$  から導かれる第 2 表の応力成分，速度成分の各を

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r'' &= \sigma_r^{(1)} + b_s \sigma_r^{(2)} + c_s \sigma_r^{(3)} + d_s \sigma_r^{(4)} \\ &\dots\dots\dots \\ v_\theta'' &= v_\theta^{(1)} + b_s v_\theta^{(2)} + c_s v_\theta^{(3)} + d_s v_\theta^{(4)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

の形に組合わせて

$$\theta=0 \text{ では } v_r'' = v_\theta'' = 0 \quad (4')$$

の境界条件を用いると

$$b_s = -(s+2), \quad d_s = -s c_s \quad (25)$$

の関係がえられる。さらに、

$$\theta=\beta \text{ では } \sigma_\theta'' = \tau_{r\theta}'' = 0 \quad (3')$$

の境界条件をいれれば

$$\left. \begin{aligned} (s+2) \{ \sin s \beta - \sin (s+2) \beta \} + c_s \{ (s+2) \cos s \beta - s \cos (s+2) \beta \} &= 0 \\ \{ -s \cos s \beta + (s+2) \cos (s+2) \beta \} + c_s s \{ \sin s \beta - \sin (s+2) \beta \} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

の関係がみちびかれる。このふたつの式が同時に成立するためには、 $s$  が、ふたつの式から  $c_s$  を消去してえられる三角方程式

$$\cos \{ 2(s+1) \beta \} + 1 - (1 - \cos 2 \beta) (s+1)^2 = 0 \quad (27)$$

の根でなければならない。(27) 式の根である  $s$  を用いると、(26) 式のどちらを用いたとしても同じ値の  $c_s$  がえられ、さらにそれから、(25) 式によって係数  $b_s, d_s$  の値も定められる。 $s$  は  $\beta$  の函数であるが、(27) 式は  $s$  の 2 次方程式なので、おなじ値の  $\beta$  に対して  $s$  に  $s_1$  と  $s_2$  とのふたつの値がある。したがって、係数  $b_s, c_s, d_s$  にも、おなじ  $\beta$  に関するふたつづつの値があるわけである。

第4図には  $s_1, s_2$  と  $\beta$  との関係を表わす曲線を示した。また、この論文の末尾には  $s$  と  $c_s$  との数値表がある。(25) 式の関係によって (24) 式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r'' &= \sigma_r^{(1)} - (s+2) \sigma_r^{(2)} + c_s \{ \sigma_r^{(3)} - s \sigma_r^{(4)} \} \\ &\dots\dots\dots \\ v_\theta'' &= v_\theta^{(1)} - (s+2) v_\theta^{(2)} + c_s \{ v_\theta^{(3)} - s v_\theta^{(4)} \} \end{aligned} \right\} (28)$$

と書きなおされる。第2種重畳応力場はこの (28) 式の  $\sigma_r^{(1)} \dots v_\theta^{(4)}$  に第2表の表式をいれ、 $s$  と  $c_s$  とに数値表の値を用いたものである。 $\sigma_r''$  を例にとれば

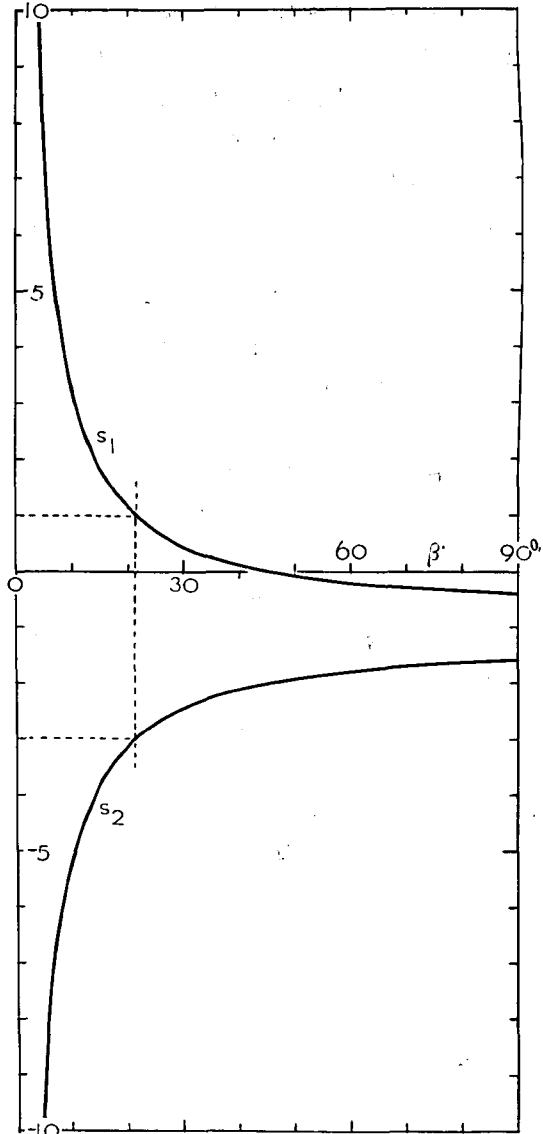
$$\sigma_r'' = r^s (s+1) \{ -(s-2) \sin s \theta + (s+2) \sin (s+2) \theta \} + c_s \{ -(s-2) \cos s \theta + s \cos (s+2) \theta \}$$

である。この結果に達した手続きからわかるとおり、ここにえられた応力場は、この節の冒頭にのべた第2種重畳応力場の条件をたしかに満している。

V. 第2種重畳応力場の検討

**$s$  の値に対する制限** 第2表からわかるように、第2種重畳応力場の応力成分  $\sigma_r'', \sigma_\theta'', \tau_{r\theta}''$  は  $r^s$  に比例する。一方、いまの楔形の斜面積雪の問題では  $r$  の値に0がふくまれる。したがって、負の値の  $s$  は除外しなければならない。第4図によると、 $s_2$  はつねに負であり、 $s_1$  が正なもの  $0 < \beta < 45^\circ$  においてのみである。よって今のばあいつかえる  $s$  は、 $45^\circ$  以下の  $\beta$  に対する  $s_1$  に限られる。しかし、 $\beta$  が  $45^\circ$  をこえることは実際上あまりないであろうから、この制限も大きな障害にはならない。

**$\beta = 21.5^\circ$  のときの  $s_1, s_2$**  第4図に示したように  $s_1, s_2$  は  $\beta = 21.5^\circ$  でそれぞれ  $+1, -3$  になる。 $s_1 = 1$  のときの  $\phi^{(1)}$  は、第1段階の解をもとめる際に使った第1表の  $\phi^{(1)}$  にほかならない。したがって、第1表の重畳応力場は  $\sum a_i \sigma_r^{(i)}, \dots, \sum a_i v_\theta^{(i)}$  の形に合成されると、それだけで (3) 式 (4) 式の境界条件を満足する可能性をもつ。元来、重畳応力場を単純応力場に重ねるのは



第4図  $s$  に関する三角方程式  $\cos \{ 2(s+1)\beta \} + 1 - (1 - \cos 2\beta)(s+1)^2 = 0$  のふたつの根  $s_1, s_2$  と  $\beta$  との関係

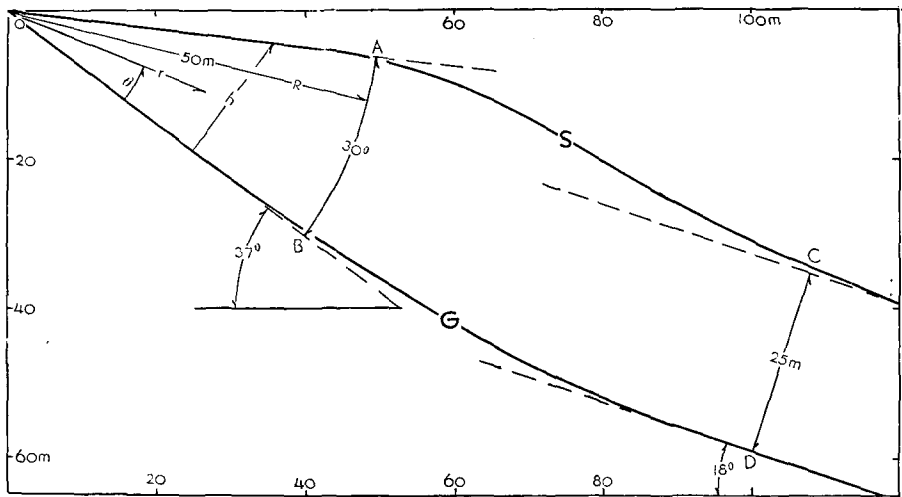
単純応力場が積雪表面  $S$  上でもつ  $\sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0$  を打消すためであった。ところが、 $\sum a_i \sigma_\theta^{(i)}, \sum a_i \tau_{r\theta}^{(i)}$  が  $S$  上で 0 になっているとすれば  $\sum a_i \sigma_r^{(i)}, \dots, \sum a_i v_\theta^{(i)}$  に無限大の係数をかけて単純応力場に重ねないかぎり、 $S$  上の  $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  は打消されない。(13) 式 (14) 式の  $p(\beta), q(\beta)$  が  $\beta=21.5^\circ$  で  $\pm\infty$  になったのは、このような事情によるものと解される。

$\psi^{(i)}$  が  $\varphi^{(i)}$  と一致すれば、第 2 種重畳応力場は新しいことを何らもたらさない。したがって、 $\beta=21.5^\circ$  のときの解は、第 2 種重畳応力場を使っても求められないのである。

### VI. 立山剣御前乗越の積雪

第 5 図の曲線  $G$  は、富山県立山の雷鳥沢をのぼりつめた剣御前乗越の頂から剣沢にむかって北東にくだる斜面の断面図である。測量は富山大学小笠原教授が指導する立山総合調査隊によって、昭和 37 年 10 月、積雪がほとんど消えてしまったときにおこなわれた。曲線  $S$  は、文部省科学研究費による総合研究「昭和 38 年豪雪調査」の一環として、北海道大学低温科学研究所が昭和 38 年 5 月 8 日におこなった積雪表面の測量結果である。乗越の頂  $O$  点から 50 m までの積雪断面は、ほとんど正確に、頂角  $\beta$  が  $30^\circ$  の楔形をなし第 1 図  $a$  の状態が実現している。頂のちかくでは傾斜角  $\alpha$  が  $37^\circ$  という急な斜面も、100 m くだると傾斜  $18^\circ$  の長い斜面にかわる。そして積雪は厚さ 25 m の一様な斜面積雪となる。この剣御前乗越の頂附近の楔形の積雪  $OAB$  に、前節までにえた楔形積雪内応力場に関する結果をあてはめてみよう。

この楔形の積雪  $OAB$  の応力場は、第 I 節でのべたように、 $OB$  上では  $v_r=v_\theta=0$ 、 $OA$  上では  $\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0$  の境界条件にくわえて、 $r=50$  m の円弧  $AB$  上での境界条件があたえられて始めて定まる。しかし、いまのばあい、円弧  $AB$  上の応力成分ないし流動速度成分を  $\theta$  の函数として予め指定することはできない。それで、円弧  $AB$  上の境界条件としては、積雪  $OAB$  の流



第 5 図 富山県立山の剣御前乗越から剣沢にくだる斜面の春(昭和 38 年 5 月 8 日)の積雪縦断面。O: 乗越の頂。S: 積雪表面。G: 斜面。多量の雪が吹だまり、積雪の上部  $OAB$  は完全な楔形となっている

動のために円弧 AB を通過する雪の流量  $Q$  が下方の傾斜  $18^\circ$  の斜面上の一様な積雪の流量  $Q_0$  にひとしいという仮定をつかうことにする。これは、第 6 図の積雪全体が、その上端部の OAB をのぞいて、定常流動状態にあると仮定することにひとしい。

ところで、楔形の積雪 OAB の頂角  $\beta$  は  $30^\circ$  で  $21.5^\circ$  より大きいから、第 1 段階の解が単独で OAB 内の応力場となることはありえない。第 III 節の「積雪表面の流動速度」の項でのべたように、第 1 段階の解は円弧 AB を通過して雪が流れのぼるような流動速度を与えるからである。それで応力場としては、第 1 段階の解と第 2 種重畳応力場とを加えあわせた (23) 式をとり、 $Q=Q_0$  の条件から常数  $K$  の値を定めることにする。

流動速度の  $r$  成分  $v_r$  は (23) 式によると

$$v_r = v'_r + \rho g K v''_r \quad (29)$$

である。よって流量  $Q$  は

$$Q = Q' + KQ'', \quad Q' = \int_0^\beta v'_r(R) R d\theta, \quad Q'' = \int_0^\beta \rho g v''_r(R) R d\theta$$

と表わされる。 $v'_r$ ,  $v''_r$  は (11) 式, (28) 式および第 2 表によって  $\theta$  の函数として知られる。それによって、

$$Q' = -\frac{\rho g}{12\eta} R^3 \sin(\alpha - \beta) \frac{\sin 4\beta - 2 \sin 2\beta}{\cos 4\beta + 4 \cos 2\beta - 3} \quad (30)$$

と計算されるが、長さの単位には cm を用いて  $R=5 \times 10^3$  cm とし、 $\alpha=37^\circ$ ,  $\beta=30^\circ$  とすると

$$Q' = -(\rho g/\eta) 0.7331 \times 10^9$$

の値がえられる。 $Q''$  は

$$Q'' = \frac{\rho g}{2\eta} R^{s+2} \left[ \left\{ \cos s\beta - \cos(s+2)\beta \right\} + c_s \left\{ \frac{s}{s+2} \sin(s+2)\beta - \sin s\beta \right\} \right] \quad (31)$$

と計算され、 $\beta=30^\circ$  に対する  $s=0.4504$ ,  $c_s=0.7881$  の値をもちい、 $R=5 \times 10^3$  とすると

$$Q'' = (\rho g/\eta) 0.37265 \times 10^9$$

となる。

傾斜  $18^\circ$  の斜面の厚さ  $h=25$  m の積雪では、斜面からの距離を  $y$ , 斜面にそう方向の流動速度を  $u$  とすれば、 $u=(\rho g \sin \alpha/\eta) y \{h-(y/2)\}$  なので、

$$Q_0 = \int_0^h u dy = \frac{\rho g}{3\eta} h^3 \sin \alpha \quad (32)$$

となる。 $\alpha=18^\circ$ ,  $h=2.5 \times 10^3$  とおけば

$$Q_0 = (\rho g/\eta) 1.6095 \times 10^9$$

である。仮定により  $Q_0=Q=Q'+KQ''$  である。これから、

$$K = 6.286$$

なる結果がえられる。

かくして、(8)~(12) 式の第 1 段階の解と (28) 式の第 2 種重畳応力場とを (23) 式の形に組合

わせ、

$$\alpha = 37^\circ, \quad \beta = 30^\circ, \quad p(\beta) = -1/3, \quad q(\beta) = 0.5733,$$

$$s = 0.4504, \quad c_s = 0.7881, \quad K = 6.286$$

として計算すれば、第5図の楔形の積雪 OAB の応力成分  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  および流動速度成分  $v_r, v_\theta$  の数値がえられる。ただし、長さの単位には cm を用いる。s,  $c_s$  には、それぞれ  $s_1, s_2; [c_s]_1, [c_s]_2$  のふたつの値がある。ここでは、まえに説明した理由によって、そのうちの  $s_1, [c_s]_1$  の値をとった。

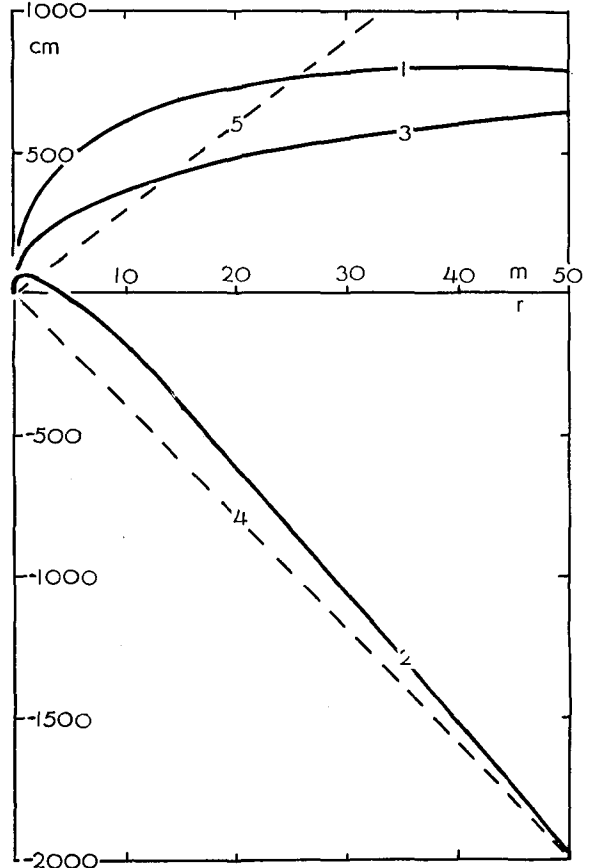
斜面 G 上の  $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  うえのようにしてえた  $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  の式で  $\theta=0$  とおくと、第5図の斜面 G のうちの OB 部分における垂直応力、剪断応力が

$$[\sigma_\theta]_G = \rho g (-r \times 0.5314 + r^{0.4504} \times 14.371)$$

$$[\tau_{r\theta}]_G = \rho g (-r \times 0.04063 + r^{0.4504} \times 18.235)$$

とえられる。論文 I (5) 式により  $[\sigma_r]_G$  は  $[\sigma_\theta]_G$  にひとしい。第6図の曲線2と3とが  $[\sigma_\theta]_G/\rho g, [\tau_{r\theta}]_G/\rho g$  と  $r$  との関係を表わす。 $[\sigma_\theta]_G$  は坐標原点では0で、そこをはなれると急に大きくなって  $r=1\text{ m}$  で極大値  $61\rho g$  に達し、 $r=4\text{ m}$  までは正の値を保持する。つまり、 $r=4\text{ m}$  まで  $[\sigma_\theta]_G$  は張力で積雪は斜面を引あげようとしている。積雪の密度を  $0.4\text{ gr/cm}^3$  とすると、 $r=1\text{ m}$  での張力の極大値は  $61 \times 0.4 = 24\text{ gr-wt/cm}^2$  となる。積雪の下面では斜面上の岩石の礫が積雪のなかに喰いこんでいるであろう。岩石の密度は、だいたい、 $2.4 \sim 3\text{ gr/cm}^3$  の範囲にある。すると、直径  $10 \sim 8\text{ cm}$  の礫が積雪の下面に隙間なく喰いこんで附着していれば、 $24\text{ gr-wt/cm}^2$  の張力があっても積雪は、斜面から、はがれないことになる。

傾斜角  $37^\circ$  の広い斜面があつて、そのうえに厚さ  $h$  の一様な積雪があるとすれば、斜面上の垂直応力  $[\sigma_y]_G$  は  $h\rho g \cos 37^\circ$ 、斜面上の剪断応力  $[\tau_{xy}]_G$  は  $h\rho g \sin 37^\circ$  となる。第6図



第6図 第5図の楔形の積雪 OAB の表面および底での応力。添字 S, G は、それぞれ、表面と底を意味する。曲線1:  $[\sigma_r]_G/\rho g$  曲線2:  $[\sigma_\theta]_G/\rho g$  曲線3:  $[\tau_{r\theta}]_G/\rho g$  曲線4:  $[\sigma_y]_G/\rho g$  曲線5:  $[\tau_{xy}]_G/\rho g$

の2本の破線4, 5は, これらの表式の  $h$  に第5図の楔形の積雪の  $r$  に比例して増大する厚さを使つたばあいの  $[\sigma_y]_G/\rho g$ ,  $[\tau_{xy}]_G/\rho g$  をあらわしている。垂直応力  $[\sigma_y]_G$  と  $[\sigma_\theta]_G$  とは近い値である。しかし, 剪断応力  $[\tau_{xy}]_G$  と  $[\tau_{r\theta}]_G$  とは, だいたい等しいともいわれないほどちがう。

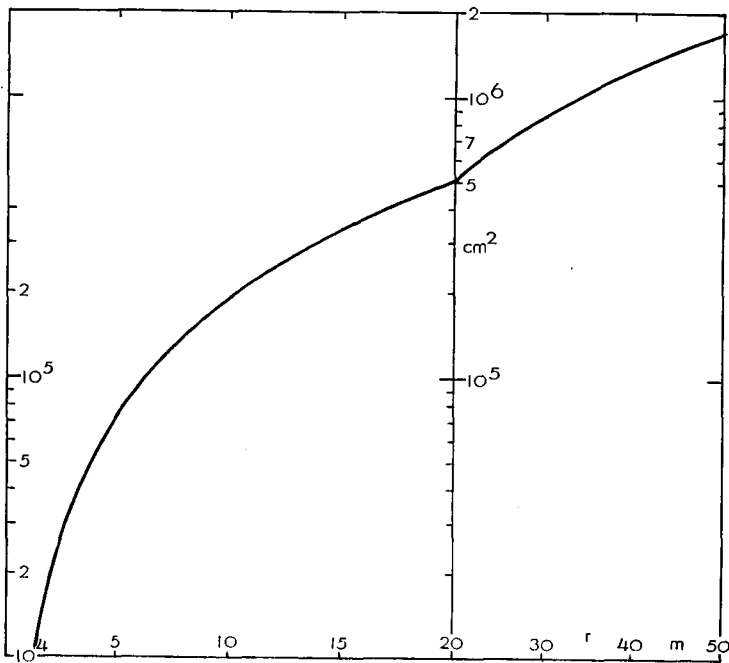
積雪面  $S$  上の  $\sigma_r, v_\theta$   $\sigma_r, v_\theta$  の式で  $\beta=30^\circ$  とおけば, 第5図の積雪面  $S$  のうちの  $OA$  部分の  $\sigma_r, v_\theta$  が

$$[\sigma_r]_S = \rho g (-r \times 0.16247 + r^{0.4504} \times 34.63)$$

$$[v_\theta]_S = (\rho g/\eta) (r^2 \times 0.017594 - r^{1.4504} \times 9.327)$$

とえられる。第6図の曲線1が  $[\sigma_r]_S/\rho g$  と  $r$  との関係を示す。 $[\sigma_r]_S$  は正, すなわち, 張力である。 $r$  とともに増大して  $r=40$  m のあたりで極大値  $802 \rho g$  に達し, そのあとは緩慢に減少する。積雪の密度  $\rho$  を  $0.4 \text{ gr/cm}^3$  とすれば,  $r=40$  m における  $[\sigma_r]_S$  の極大値は  $320 \text{ gr-wt/cm}^2$  となる。密度  $0.4 \text{ gr/cm}^3$  の積雪の抗張力は  $100 \sim 500 \text{ gr-wt/cm}^2$  ぐらいと知られている<sup>2),3)</sup>。それで, 第5図の楔形の雪の表面には割目のはいる可能性がたかいと考えてよいであろう。

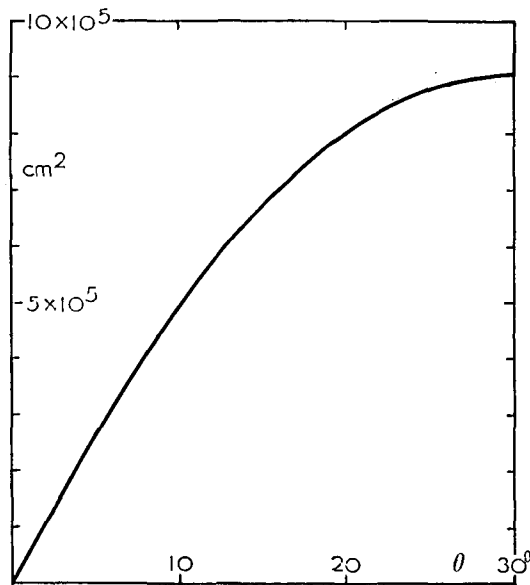
うえの式で与えられる  $[v_\theta]_S$  は,  $r$  のすべての値について負である。すなわち, 積雪表面は斜面に近づくような運動をする。 $-[v_\theta]_S/\rho g$  と  $r$  との関係を示した。  $[v_\theta]_S$  の数値を定めるには  $\rho$  と  $\eta$  との値を知る必要があるが, 小島<sup>4),5)</sup> によると, 温度が  $0^\circ\text{C}$  に近いばあい,  $\rho=0.4 \text{ gr/cm}^3$  のしまり雪では  $\eta=4 \times 10^3 \text{ gr-wt}\cdot\text{day/cm}^2$ ,  $\rho=0.5 \text{ gr/cm}^3$  のしまり雪では  $\eta=3 \times 10^4 \text{ gr-wt}\cdot\text{day/cm}^2$  である。 $\rho, \eta$  にこれらの値をあてはめて  $[v_\theta]_S$  を計算すると次の表の値がえられる。



第7図  $-(\eta/\rho g)[v_\theta]_S$  と  $r$  との関係

$r$ (m)		10	20	30	40	50
$-(\eta/\rho g)[v_\theta]s$		$1.9 \times 10^5$	$5 \times 10^5$	$8.5 \times 10^5$	$1.3 \times 10^6$	$1.7 \times 10^6$
$-[v_\theta]s$ ( $\frac{\text{cm}}{\text{day}}$ )	$\rho:0.4$	19	50	85	130	170
	$\rho:0.5$	3.2	8.5	14.5	22	29

$r=R=50\text{ m}$  での  $v_r$  第5図の円弧 AB 上の  $v_r$  の値を  $[v_r]_R$  と書けば、 $(\eta/\rho g)[v_r]_R$  と  $\theta$  との関係が第8図の曲線で表わされる。 $\eta$  に前項の値をつかうと、A 点の  $[v_r]_R$  の値が<sup>3)</sup>、 $\rho=0.4\text{ gr/cm}^3$  のときは  $90\text{ cm/day}$ 、 $\rho=0.5\text{ gr/cm}^3$  のときは  $15\text{ cm/day}$  となる。



第8図  $(\eta/\rho g)[v_r]_R$  と  $\theta$  との関係

この研究は、文部省総合研究「昭和38年度豪雪調査」の科学研究費の一部をつかって行なわれた。

#### 文 献

- 1) 吉田順五 1964 斜面積雪の内部応力および粘性流動. I. 波状に起伏する斜面の積雪. 低温科学, 物理篇, **22**, 83-100.
- 2) 高橋延男・加藤 博 1961 雪の抗張力計について. 雪氷, **23**, 91-94.
- 3) Haefeli, R. 1963 Stress transformations, tensile strengths and rupture processes of the snow cover. Ice and Snow, Edited by W. D. Kingery, The M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 560-575.
- 4) 小島賢治 1957 積雪層の粘性圧縮. III. 低温科学, 物理篇, **16**, 167-136.
- 5) 小島賢治 1958 積雪層の粘性圧縮. IV. 低温科学, 物理篇, **17**, 53-64.

## Summary

In Fig. 1 of the text curves  $S$  represent the top surfaces of wedge-shaped snow covers on plane sloping grounds  $G$ . In polar coordinates  $r$  and  $\theta$  shown in the figure, stress components  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  and flow velocity components  $v_r$ ,  $v_\theta$  within the snow cover were calculated theoretically using the method of combining two kinds of solutions presented in the preceding paper (Part I). As before, the snow was assumed to be an incompressible Newtonian fluid of very high viscosity in a state of plane strain, but, in this case, there is no steady flow of snow.

The components should satisfy differential equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \pm \rho g \sin(\alpha \mp \theta) &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} - \rho g \cos(\alpha \mp \theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)}{\frac{\partial v_r}{\partial r}} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r)}{\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} = \frac{\tau_{r\theta}}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)} = 2\eta \quad (2)$$

and boundary conditions

$$[\sigma_\theta]_S = [\tau_{r\theta}]_S = 0, \quad [v_r]_G = [v_\theta]_G = 0. \quad (3)$$

The upper sign of  $\pm$  or  $\mp$  is applied to Fig. 1 **a**, and the lower one to Fig. 1 **b**. Subscripts S and G refer to curves **S** and **G** and  $\rho$ ,  $\eta$  are density and viscosity of the snow. The above differential equations (1) and (2) are merely equations (4) and (3) in Part I in polar coordinates.

The solutions to be combined are:

a) first,

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 &= \sigma_\theta^0 = \mp \rho g r \sin(\alpha \mp \theta), \\ \tau_{r\theta}^0 &= 0, \quad v_r^0 = v_\theta^0 = 0, \quad \text{and} \end{aligned} \quad (4)$$

b) second,  $\sigma_r^{(i)}$ ,  $\dots$ ,  $v_\theta^{(i)}$  listed in Table 1 of the text with  $i=1, 2, 3, 4$ . They are derived from stress functions  $\varphi^{(i)}$  in the top row of the table.

Combinations of the above two solutions in the forms

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= \rho g r \left[ \mp \sin(\alpha \mp \theta) \pm \frac{1}{2} \sin(\alpha \mp \beta) \left\{ p(\beta) (\sin \theta + 3 \sin 3\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q(\beta) (\cos \theta + \cos 3\theta) \right\} \right] \\ \sigma_\theta' &= \rho g r \left[ \mp \sin(\alpha \mp \theta) \pm \frac{1}{2} \sin(\alpha \mp \beta) \left\{ 3p(\beta) (\sin \theta - \sin 3\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q(\beta) (3 \cos \theta - \cos 3\theta) \right\} \right] \\ \tau_{r\theta}' &= \mp \rho g r \frac{1}{2} \sin(\alpha \mp \beta) \left\{ p(\beta) (\cos \theta - 3 \cos 3\theta) - q(\beta) (\sin \theta - \sin 3\theta) \right\} \\ v_r' &= \pm (\rho g / 8\eta) r^2 \sin(\alpha \mp \beta) \left\{ p(\beta) (3 \sin 3\theta - \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + q(\beta) (\cos 3\theta - \cos \theta) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$v'_\theta = \pm(\rho g/8\gamma) r^2 \sin(\alpha \mp \beta) \left\{ 3p(\beta)(\cos 3\theta - \cos \theta) + q(\beta)(3 \sin \theta - \sin 3\theta) \right\}$$

with

$$p(\beta) = \frac{\sin 3\beta - \sin \beta}{\cos 4\beta + 4 \cos \beta - 3}, \quad q(\beta) = \frac{3 \cos 3\beta - \cos \beta}{\cos 4\beta + 4 \cos 2\beta - 3}$$

satisfy differential equations (1), (2) as well as boundary conditions (3). Therefore  $\sigma'_r, \dots, v'_\theta$  are the stress and velocity components for the wedge-shaped snow cover. They can only be used when angle  $\beta$  of the wedge is less than  $21.5^\circ$ , because

(i)  $p(\beta)$  and  $q(\beta)$  become  $\pm\infty$  at  $\beta=21.5^\circ$  as shown by the curves in Fig. 2, and because

(ii) for  $\beta > 21.5^\circ$   $v'_r$  and  $v'_\theta$  show the snow cover moving up the slope instead of down. As a matter of fact the snow cover can climb the slope if the stress components on the surface  $r=R$  (constant) act upon the snow so as to push or pull it up. The above  $\sigma'_r, \dots, v'_\theta$  produce this effect at  $r=R$  when  $\beta$  is greater than  $21.5^\circ$ . But climb of the snow cover is very rare if it occurs at all. It is for this reason that the use of stress and velocity components (5) is excluded for  $\beta > 21.5^\circ$ .

Stress and velocity components  $\sigma''_r, \dots, v''_\theta$  are introduced to apply to a wedge-shaped snow cover with  $\beta > 21.5^\circ$  flowing down the slope. They are  $\sigma^{(i)}, \dots, v_\theta^{(i)}$  of Table 2 combined in the form

$$\left. \begin{aligned} \sigma''_r &= \sigma_r^{(1)} - (s+2)\sigma_r^{(2)} + c_s(\sigma_r^{(3)} - s\sigma_r^{(4)}) \\ &\dots\dots\dots \\ v''_\theta &= v_\theta^{(1)} - (s+2)v_\theta^{(2)} + c_s(v_\theta^{(3)} - sv_\theta^{(4)}), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

where  $s$  and  $c_s$  are roots of the trigonometrical equations

$$\left. \begin{aligned} (s+2) \{ \sin s\beta - \sin (s+2)\beta \} + c_s \{ (s+2) \cos s\beta - \cos (s+2)\beta \} &= 0 \\ \{ -s \cos s\beta + (s+2) \cos (s+2)\beta \} + c_s s \{ \sin s\beta - \sin (s+2)\beta \} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

For the same value of  $\beta$  two values  $s_1, s_2$  and  $[c_s]_1, [c_s]_2$  are found for  $s$  and  $c_s$ :  $s_1$  and  $s_2$  are plotted against  $\beta$  in Fig. 4. Since  $\sigma_r^{(i)}, \dots, v_\theta^{(i)}$  are components derivable from stress functions  $\psi^{(i)}$  of Table 2,  $\sigma''_r, \dots, v''_\theta$  are solutions of differential equations (1) with the fourth terms  $\rho g \sin(\alpha \mp \theta), \rho g \cos(\alpha \mp \theta)$  removed, and of differential equations (2). The above mentioned constants  $s$  and  $c_s$  make  $\sigma''_r, \dots, v''_\theta$  satisfy boundary conditions (3). Therefore for any value of constant  $K$  such combinations of  $\sigma'_r, \dots, v'_\theta$  and  $\sigma''_r, \dots, v''_\theta$  as

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma'_r + \rho g K \sigma''_r \\ &\dots\dots\dots \\ v_\theta &= v'_\theta + \rho g K v''_\theta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

give the stress and velocity components for the wedge-shaped snow cover. When  $\beta > 21.5^\circ$  and the wedge-shaped snow cover is flowing downhill, stress and velocity components may be found by choosing appropriate values for  $K$ .

An example of a wedge-shaped snow cover is shown schematically in Fig. 5. Every year monsoon deposits such a snow cover on the back slope of a pass located near Mt. Tateyama in Toyama Prefecture. The uppermost portion of the snow cover is nearly wedge-shaped with a wedge angle of  $30^\circ$ . In order to find the stress and velocity components for that portion the author determined the value of  $K$  by assuming that the flux

of snow through arc AB in Fig. 5 was equal to that within the lower part of the snow cover of uniform thickness 25 m. Curves 1, 2 and 3 in Fig. 6 give the values of  $[\sigma_r]_s/\rho g$ ,  $[\sigma_\theta]_G/\rho g$ ,  $[\tau_{r\theta}]_G/\rho g$  respectively, as a function of the distance  $r$  from the vertex of the wedge. For  $r$  less than 4 m,  $[\sigma_\theta]_G$  is positive, that is, there is tensile stress between the snow and the ground. This stress is insufficient to separate the two since its maximum value is only about 25 gr-wt/cm<sup>2</sup>.

数 値 表

$p(\beta)$ ,  $q(\beta)$  は本文の (13) 式 (14) 式で与えられる  $\beta$  の函数。  $s_1$ ,  $s_2$  は本文の三角方程式 (27) のふたつの根で  $\beta$  の函数である。 本文 (26) の方程式は、 そのなかの  $s$  と  $c_s$  とにこの表の  $s_1$  と  $[c_s]_1$  との値の組、あるいは、  $s_2$  と  $[c_s]_2$  との値の組を用いれば、 ふたつとも同時に満足される

$\beta$	$p(\beta)$	$q(\beta)$	$s_1$	$[c_s]_1$	$s_2$	$[c_s]_2$
0°	0.0000	1.0000	$\infty$		$-\infty$	
5	0.0913	1.0118	7.486	0.4944	-9.486	-0.3901
10	0.2141	1.0580	3.2475	0.5488	-5.2475	-0.3399
15	0.4670	1.2035	1.8424	0.6053	-3.8424	-0.2903
20	2.2054	2.3581	1.1431	0.6636	-3.1431	-0.2410
25	-0.9019	0.2156	0.7262	0.7245	-2.7262	-0.1930
30	-0.3333	0.5773	0.4504	0.7881	-2.4504	-0.1449
35	-0.1636	0.6654	0.2555	0.8545	-2.2555	-0.0968
40	-0.0688	0.6982	0.1108	0.9255	-2.1108	-0.0486
45	0.0000	0.7071	0.0000	1.0000	-2.0000	0.0000
50	0.0574	0.6993	-0.0873	1.0793	-1.9127	0.0492
60	0.1575	0.6364	-0.2144	1.2542	-1.7856	0.1506
70	0.2444	0.4991	-0.3010	1.4564	-1.6990	0.2581
80	0.3088	0.2793	-0.3618	1.6961	-1.6382	0.3744
90°	0.3333	0.0000	-0.4054	1.9834	-1.5946	0.5035
$\beta$	$p(\beta)$	$q(\beta)$	$\beta$	$p(\beta)$	$q(\beta)$	
17.5°	0.7962	1.4103	23°	-2.1199	-0.6041	
21	6.9258	5.5709	24	-1.2717	-0.0315	
22°	-6.1308	-3.3083	27.5°	-0.5056	0.4730	