



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	雪崩発生機構の考察
Author(s)	遠藤, 八十一; ENDO, Yasoichi
Citation	低温科学. 物理篇, 23, 75-86
Issue Date	1965-03-30
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/18022">https://hdl.handle.net/2115/18022</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	23_p75-86.pdf



## 雪崩発生機構の考察\*

遠藤 八十一

(低温科学研究所 応用物理学部門)

(昭和 39 年 11 月受理)

### I. ま え が き

雪崩の発生機構は、斜面上の積雪の内部応力分布がわかったのちに始めて明らかになるものである。しかし、積雪内部の応力分布を決定することは、極めてむづかしい。そこで黒田<sup>1),2)</sup>は、斜面上の積雪の内から、幅  $2b$ ・長さ  $l$  の長方形部分をとりだして次のように考えた。この長方形部分には、これを落下させようとする重力と、地面および周囲の積雪による支持力とが作用している。支持力には、限界がある。その限界より重力のほうが大きくなれば、長方形部分は雪崩として落下しはじめる。いま

$$\begin{array}{ll} \rho = \text{積雪密度} & \sigma_t = \text{積雪の引張り強度} \\ h = \text{積雪の厚さ} & \sigma_p = \text{積雪の圧縮強度} \\ \theta = \text{斜面の傾斜角} & \sigma_s = \text{積雪の剪断強度} \end{array}$$

とすれば、黒田の導いた雪崩発生条件式は

$$2\rho b l h g \sin \theta \geq 2(\sigma_t + \sigma_p) b h + 2\sigma_s l h + 2\sigma_s l b \quad (1)$$

となる。 $g$  は重力加速度である。左辺が長方形の積雪を斜面にそって落下させようとする重力、右辺が支持力の限界値である。右辺第 1 項は、長方形の上辺と下辺とに働く限界支持力である。上辺では積雪の内部応力が引張り応力、下辺では圧縮応力であると仮定されている。右辺第 2 項は、長方形の両側面における限界支持力、第 3 項は地面の限界支持力である。

上の黒田理論は、もともと雪崩発生の完全な条件を与えることを目的としたわけではないので、いろいろ欠陥のあるのはしかたがない。しかし、次の 2 点は欠陥としてもいささか過ぎるように思われる。

(a) (1) 式の左辺(または右辺)は、長方形の幅  $2b$  と長さ  $l$  との値のとりかたによって、右辺(左辺)より大きくもなるし、小さくもなる。つまり、 $2b$  と  $l$  とを決定する方法が他にないかぎり、(1) 式は雪崩発生を判断するための条件式としては使用できない。

(b) (1) 式は積雪の内部応力が長方形の周囲および底で、同時に限界値  $\sigma_t$ 、 $\sigma_p$ 、 $\sigma_s$  に達すると仮定している。このようなことは、実際にはおこりえない。

しかし、(b) の欠陥を取り除こうとすれば、積雪内部の応力分布を決定しなければなら

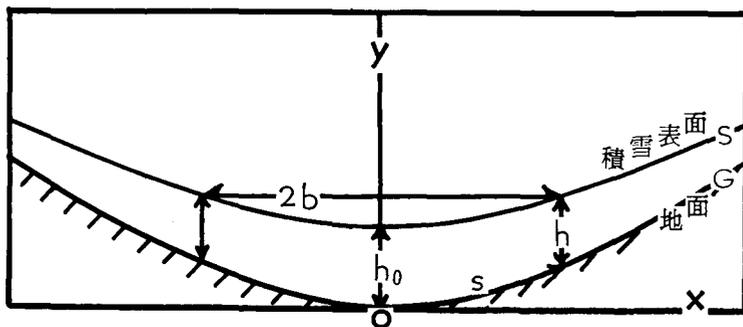
\* 北海道大学低温科学研究所業績 第 698 号

い。それでは、簡潔な黒田の理論の価値をおとしてしまうことになる。そこで、筆者は(b)の欠陥はそのままにして、(a)の欠陥を補って黒田の理論の改良を試みた。積雪からとりだした長方形部分の幅や長さは、斜面の形状と関係があるはずである。それで、斜面の横断面の形から幅 $2b$ を決定する方法を考えてみた。長さ $l$ の決定は試みなかった。積雪内の応力状態が斜面の傾斜方向に変らなければ、長方形の上辺と下辺に働く支持力の和は0となり、(1)式の右辺第1項は消える。すると、(1)式から $l$ は取り除かれ、雪崩発生に $l$ は無関係となる。傾斜方向に応力状態が変化しないばあいは、実際にも少ないとはいえないであろう。

## II. 雪崩の発生

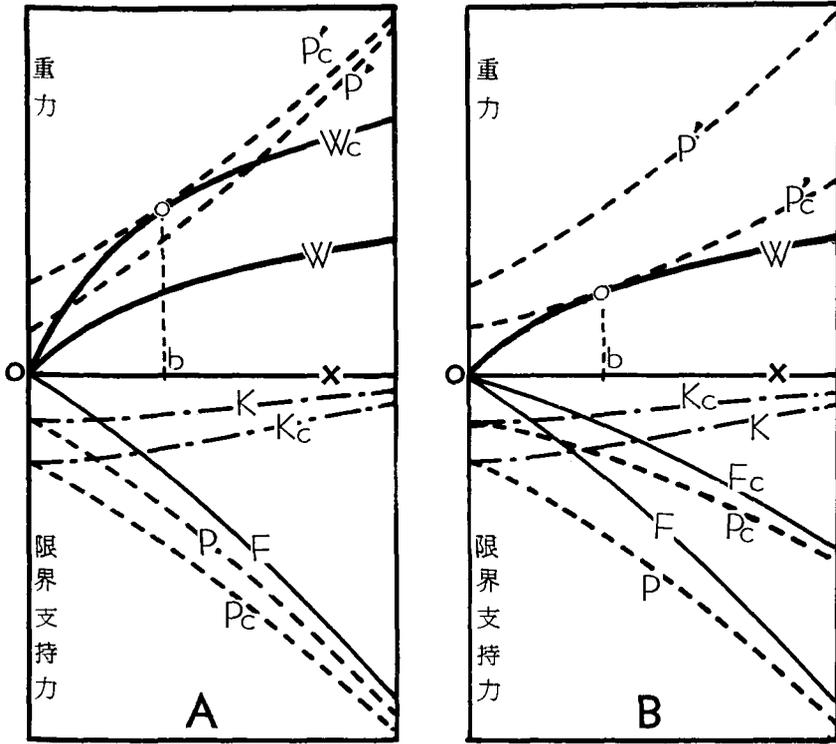
雪崩は凹型斜面でおこることが多い。それで凹型斜面につもった雪について、黒田の考えかたにしたがって雪崩発生の条件を求めることにする。黒田の理論では不明のままに残されていた雪崩発生地幅 $2b$ は、斜面の横断面の形から決定される。まえがきのおわりで述べたように、積雪の応力状態は傾斜方向に変化しないと仮定するので、雪崩発生の条件に雪崩発生地の長さ $l$ は関係しない。

斜面の中心線と垂直な面で切った横断面に現われる地面および積雪表面の形が、第1図の左右対称な曲線で表わされるとしよう。積雪深 $h$ は、斜面の最低部O点で最大値 $h_0$ をとり、左右にむかうにつれて次第に減少する。O点を原点として、座標 $x$ 、 $y$ を横方向、縦方向にとり、座標 $z$ を $x$ - $y$ 面に垂直に、斜面の中心線にそつてとる。そして、 $z$ 方向に単位長さの厚さをもつ、 $-x$ から $+x$ までの範囲に存在する積雪が、なだれ始めるための条件を考える。しかし、 $y$ 軸に対して全ての事情が対称なので、その半分の0から $+x$ までにわたる積雪に注目すればよい。すなわち、この部分の積雪の重力と支持力の限界値とを考えればよい。



第1図 斜面の中心線と垂直な面で切った横断面に現われる地面および積雪表面の形

注目する積雪の重力は、 $x$ が大きくなるにつれ増大する。しかし、積雪深 $h$ が $x$ と共に減少するため、増大率は $x$ の増大と共に減る。したがって、積雪を斜面にそつて落下させようとする重力の大きさと $x$ との関係は、第2図Aの曲線Wで表わされる。一方、この積雪は、地面と座標 $x$ の側面の右側の積雪とによって支えられている。地面の支持力の限界値は、第1図



第2図  $x$ と重力および各支持力との関係  
 A 積雪深の増加によって起る変化  
 B 積雪強度の低下によって起る変化

の曲線  $G$  の原点  $O$  から座標  $x$  までの長さ  $s$  に比例する。  $s$  は  $x$  が極く小さいあいだは  $x$  とほぼ同じ値であるが、  $x$  が大きくなるにつれ次第に  $x$  をうわまわるようになる。したがって、地面の限界支持力と  $x$  との関係は、第2図 A の曲線  $F$  のようになるであろう。側面の限界支持力の曲線は、同図の曲線  $K$  のように  $x$  の増大につれて小さくなる。積雪深  $h$  が原点を遠ざかるにつれ小さくなるからである。原点  $O$  を含む側面には、対称性によって支持力は現われない。かくして、注目する積雪を支える全限界支持力として、曲線  $F$  と  $K$  との和の曲線  $P$  がえられる。

第2図 A の曲線  $P'$  は、重力の大きさと全限界支持力の大きさとを比較するために、曲線  $P$  を  $x$  軸で折返したものである。この場合のように、いかなる値の  $x$  に対しても曲線  $P'$  が曲線  $W$  より上にあるときは、限界支持力が重力の作用をうわまわり雪崩は発生しない。しかし、降雪が続いて積雪深が増すと事情が異なる。曲線  $W$  は上方に凸の形を保ったまま、次第に昇ってゆく。限界支持力の曲線  $P'$  も、上方に凹の性質を失わず上昇するが、上昇の割合は曲線  $W$  の場合より弱い。それは、地面の限界支持力  $F$  には変化がなく、積雪深が増したために側面の限界支持力  $K$  がわずかに大きくなるに過ぎないからである。それゆえ、積雪深がある値になると、曲線  $W$  と曲線  $P'$  とは第2図 A の曲線  $W_c$  と曲線  $P'_c$  とのように、ある一点で接す

ようになるであろう。接点の  $x$  の値を  $b$  とすると、座標  $-b$  から  $+b$  までのあいだにある雪を斜面に沿って落そうとする重力が、全支持力の限界に達したのである。したがって、幅  $2b$  の積雪は斜面を下りはじめ雪崩の発生となる。このようにして、雪崩発生地幅  $2b$  は、曲線  $W$  と曲線  $P'$  との接点の座標から決められる。両曲線は、積雪の性質が与えられれば、凹型斜面のわん曲度でその形が定まる。その意味で、雪崩発生地幅は地形によって決定されるということができる。

積雪深に変化がなくとも日射や暖気によって積雪の強度が弱められると、雪崩が発生する。この場合も、曲線  $W$  と曲線  $P'$  とが接することが、雪崩発生の発端となる。しかし、両曲線の接触は曲線  $P'$  の降下によっておこる。そのありさまを第2図 **B** に示した。積雪の強度の低下によって、地面の限界支持力  $F$  と側面の雪の支持力  $K$  とは、 $x$  の値のいかんにかかわらず同じ率で減少する。それで、はじめ第2図 **B** の曲線  $F, K, P, P'$  で与えられた支持力は、それぞれ曲線  $F_0, K_0, P_0, P'_0$  に変わり、曲線  $P'_0$  と曲線  $W$  とが接触する。この接点の座標を  $b$  とすれば、 $-b$  と  $+b$  との間の積雪が支持力を失なって落下することは、まえと同じである。

### III. 雪崩発生後の事情

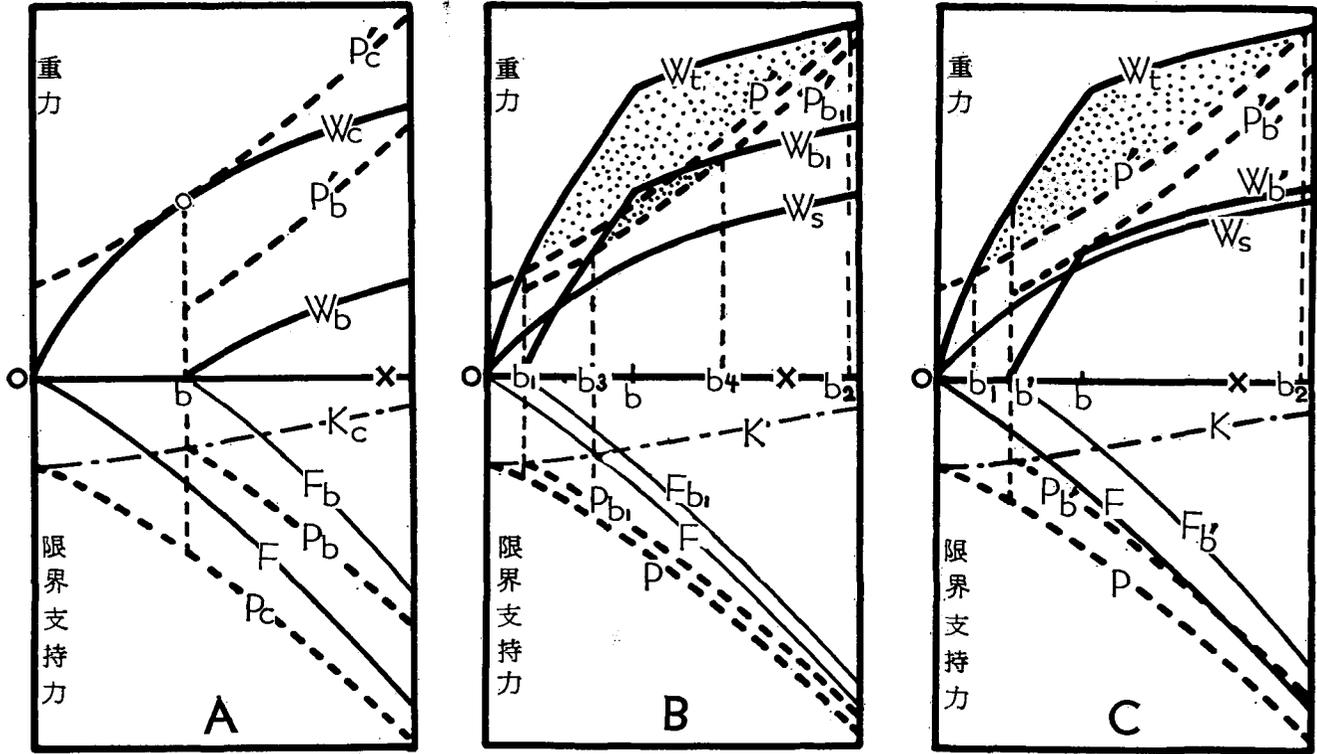
前節で述べたようにして、凹型斜面で幅  $2b$  の積雪が崩落しはじめた後に起る現象を考えてみる。

#### 1. 発生地側の両側に残った積雪の安定性

幅  $2b$  の積雪が支持を失なって落下したあと、その両側に残った積雪に働く重力と限界支持力とを考えてみる。第3図 **A** の曲線  $W_0, F, K_0, P_0, P'_0$  は第2図 **A** の曲線  $W_0, F, K_0, P_0, P'_0$  と同じにとつてある。ところで、雪崩が発生してからは、 $x < b$  には積雪は存在しない。それゆえ、 $x = b$  と  $b$  より大きな  $x$  の値との間にある残った積雪に作用する重力と限界支持力との釣合を考えればよい。重力を表す曲線は、雪崩発生直前の曲線  $W_0$  を下降平行移動により  $x = b$  で  $x$  軸を切るようにさせた第3図 **A** の曲線  $W_b$  となる。地面の限界支持力曲線  $F_b$  も、曲線  $F$  を  $x = b$  で  $x$  軸を切るように上昇平行移動させたもので与えられる。側面における支持力の曲線  $K_b$  は、もとのままである。曲線  $F_b$  と曲線  $K_b$  との和の曲線  $P_b$  が全限界支持力の曲線である。それを上に折返すと曲線  $P'_b$  となる。第3図 **A** から明らかのように、曲線  $P'_b$  は常に曲線  $W_b$  から離れて上方に位置している。残った積雪に働く重力は全限界支持力を越えることはない。つまり、残った積雪は安定で、さらに積雪の厚さが増すと、積雪の強度が下がるとかしない限り、その位置にとどまる。

#### 2. 雪崩発生地の下側の積雪の崩落

通常、雪崩発生地側の傾斜は急で、その下に傾斜の緩やかな斜面がつづき、その凹所が雪崩の滑落路となる。この滑落斜面では勾配が発生地より緩やかなことを除いて、他の全ての事情、すなわち、積雪深や斜面の横断面の形が発生地と同じであるとする。そうすると、この滑落斜面の積雪に作用する重力は、勾配がゆるやかなため、第3図 **B** の曲線  $W_0$  のようになるであろう。発生地での曲線  $W_0$  にくらべれば全体として低い位置にある。これに対して、限界支持力



第3図 雪崩発生後の重力曲線および各支持力曲線

- A 雪崩発生地の両側に残った積雪の重力曲線と各支持力曲線  
 B, C 滑落斜面上の積雪の重力曲線と各支持力曲線

曲線  $K$ ,  $F$ ,  $P$ ,  $P'$  には変りがない。したがって、曲線  $W_s$  と曲線  $P'$  とは接することはなく積雪は安定状態にある。

しかし、発生地を離れた積雪が滑落斜面の積雪の上辺にのしかかると、滑落斜面の積雪を落下させようとする重力に変化が生ずる。重力曲線は第3図Bの曲線  $W_s$  から曲線  $W_t$  になる。発生地で幅  $2b$  の雪が下りはじめたとすると、 $x$  の値が0から  $b$  までの間の重力曲線は、曲線  $W_s$  と第3図Aの曲線  $W_e$  との和で与えられる。 $x$  の値が  $b$  より大きな値に対する曲線は、曲線  $W_s$  を上昇平行移動したものである。それで、重力曲線  $W_t$  は第3図Bに示すように、 $x=b$  まで急激に上昇し、そこで折れまがって、その先は曲線  $W_s$  を上昇平行移動させたものにつながる。このため、曲線  $W_t$  は  $x=b$  の点を含む  $b_1$  から  $b_2$  の範囲にわたって限界支持力曲線  $P'$  の上にでる。それゆえ、滑落路では、幅  $2b_1$  より広く  $2b_2$  より狭い積雪部分に崩落する可能性が生ずる。しかし、その幅には第3図Cに示した  $2b'$  なる下限があつて、それより狭くはならないことが次のようにしてわかる。

滑落する可能性のある積雪部分のうち、第3図Cに示した幅  $2b'$  の滑落斜面上の積雪が滑りはじめたとする。そして、その両側に残った積雪に働く重力と限界支持力とを、Iの方法にしたがって考えてみる。発生地を離れた幅  $2b$  の積雪が滑落斜面上の積雪の上辺にのしかかったために生じた重力曲線  $W_t$  は、幅  $2b'$  の滑落斜面上の積雪の落下によって曲線  $W_{b'}$  に変化する。地面の限界支持力曲線  $F$  も、 $x < b'$  に積雪が存在しないため、曲線  $F_{b'}$  になる。しかし、側面における限界支持力曲線には変化は起らない。それゆえ、全限界支持力曲線は、曲線  $F_{b'}$  と  $K$  との和の曲線  $P_{b'}$  に変化し、それを  $x$  軸で折返した曲線  $P'_{b'}$  がちょうど曲線  $W_{b'}$  と点  $b$  で接触したとしよう。すなわち、 $2b'$  とは曲線  $P'_{b'}$  に曲線  $W_{b'}$  がその屈折点で接触するような滑落斜面の幅である。しかし、この  $2b'$  の幅の積雪が滑落すると、さらに点  $b'$  と  $b$  との間の積雪も滑落する。点  $b'$  と  $b$  との間の積雪に作用する重力が、その積雪に働く全支持力の限界に達しているからである。したがって、滑落する積雪の幅は  $2b'$  より広くなる。また、はじめに崩落する滑落斜面上の積雪の幅が、 $2b'$  より狭いときにも、その両側に残った積雪は安定せず雪崩の幅はさらに広がる。第3図Bに示すように、 $2b'$  より狭い幅  $2b_1$  の積雪が滑りだしたとする。(第3図Bは幅  $2b_1$  の積雪が滑りだした場合について書いてある。しかし、 $2b_1$  と  $2b'$  との間の幅の積雪が滑りだしたときもこれと本質的には変らない。それで、幅  $2b_1$  の積雪が滑りだした場合について話を進める。) そうすると、残った積雪部分の重力曲線および全限界支持力曲線は  $W_{b_1}$  および  $P'_{b_1}$  となる。このため、曲線  $W_{b_1}$  は  $b_3$  から  $b_4$  までの範囲にわたって曲線  $P'_{b_1}$  の上に出る。 $b_3$  と  $b_4$  の間で、重力の作用が支持力の限界を越しているから、残った積雪のうち  $b_3$  より大きく、 $b_4$  より小さい部分の積雪が滑落することになる。すなわち、雪崩の幅は  $2b_3$  より大きくなる。この現象の繰返しによって、滑落斜面上の崩落する積雪の幅は次第に広がる。そして、その幅が  $2b'$  より大きくなったときにはじめて、その両側に残った積雪が安定するのである。幅が  $2b'$  より大きくなったときは、第3図Cからわかるように、残った積雪の重力曲線が常に全限界支持力曲線の下に位置する。残った積雪に働く重力が支持力の限界値に達することがないので、残った積雪は安定であり、それ以上幅が広がることはない。かくして、滑落斜

面上の積雪が崩落する幅は、決して  $2b'$  より狭くなりえないのである。

#### IV. 雪崩発生条件式

II 節で述べたように、凹型斜面で雪崩が発生する条件は、第 2 図 **A** の重力曲線 **W** と全限界支持力曲線 **P'** とが接することである。雪崩発生地の幅  $2b$  は、その接点の  $x$  座標によって決定される。両曲線は、積雪の性質と斜面のわん曲度を与えられれば、形が定まる。したがってそれから雪崩発生条件と雪崩発生地の幅とを数量的に決定することができる。

積雪深  $h$  は、第 1 図の原点  $O$  で最大値  $h_0$  をとり、 $x$  が増すにつれて、 $x$  に比例して直線的に減少するとすれば

$$h(x) = h_0(1 - mx) \quad (2)$$

と書くことができる。そして、積雪の平均密度を  $\rho$ 、斜面の傾斜角を  $\theta$ 、重力加速度を  $g$  とすれば、重力曲線 **W** (積雪に働く重力の斜面方向成分) は、(2) 式を積分したものに  $\rho g \sin \theta$  を乗じて次式で表わされる。

$$W(x) = \rho g h_0 \sin \theta \left( x - \frac{1}{2} m x^2 \right) \quad (3)$$

一方、積雪の限界剪断応力を  $\tau_0$  とすれば、側面の限界支持力曲線 **K** は

$$K(x) = -\tau_0 h_0 (1 - mx) \quad (4)$$

である。

地面の限界支持力曲線 **F** を知るには、第 1 図の曲線 **G** の原点  $O$  から座標  $x$  までの長さ  $s$  が、 $x$  の函数として与えられなければならない。簡単のために、 $s$  と  $x$  との差が  $x$  の 2 乗に比例して増すものとして

$$s = x + n x^2 \quad (5)$$

とおく。(5) 式を座標  $x$ 、 $y$  で表わすと

$$y = \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{1}{2} + n x \right) \sqrt{n x (1 + n x)} - \frac{1}{4} \ln \{ 1 + 2 n x + 2 \sqrt{n x (1 + n x)} \} \right] \quad (6)$$

となる。第 4 図 **B** には、(6) 式が図示してある。図から明らかなように、(6) 式は第 1 図の曲線 **G** のような形の、上方にわん曲した曲線の式である。 $n$  の値が大きいほど、この曲線のわん曲は強くなる。

地面と積雪との間の限界剪断応力は、積雪自身の限界剪断応力  $\tau_0$  とは同一ではないが、それに比例するであろう。その比例係数を  $k$  とすると、 $k$  の値は地面の状態によって変る。かくして、地面の限界支持力曲線 **F** は

$$F(x) = -k \tau_0 s = -k \tau_0 (x + n x^2) \quad (7)$$

で表わされ、全限界支持力曲線 **P** は (4) 式と (7) 式の和で与えられ

$$P(x) = -\{ \tau_0 h_0 + \tau_0 (k - m h_0) x + k \tau_0 n x^2 \} \quad (8)$$

となる。この曲線  $P(x)$  を  $x$  軸によって折返した曲線が  $P'(x)$  であるから、曲線  $P'(x)$  は

$$P'(x) = \tau_0 h_0 + \tau_0 (k - mh_0)x + k\tau_0 n x^2 \quad (9)$$

となる。積雪深  $h$  は常に正である。したがって、(2) 式により

$$0 < x < \frac{1}{m} \quad (10)$$

でなければならない。(2) から (9) までの式は、みなこの範囲の  $x$  についてのみ成立つものである。

雪崩が発生するための条件、すなわち、重力曲線  $W(x)$  と全限界支持力曲線  $P'(x)$  とが接する条件は

$$W(x) = P'(x), \quad dW(x)/dx = dP'(x)/dx$$

の2式で与えられる。これから次の2つの関係式 (11), (12) が導かれる。

$$x = \frac{\rho g h_0 \sin \theta - \tau_0 (k - mh_0)}{m \rho g h_0 \sin \theta + 2k\tau_0 n} = \frac{2\tau_0 h_0}{\rho g h_0 \sin \theta - \tau_0 (k - mh_0)} \quad (11)$$

$$\{\rho g h_0 \sin \theta - \tau_0 (k - mh_0)\}^2 = 2\tau_0 h_0 (m \rho g h_0 \sin \theta + 2k\tau_0 n) \quad (12)$$

### 1. 雪崩発生地の幅 $2b$

(11) 式の  $x$  の値は、曲線  $W(x)$  と曲線  $P'(x)$  との接点の  $x$  座標である。したがって、(11) 式は雪崩発生地の幅  $2b$  の半分にひとしく

$$b = \sqrt{\frac{2\tau_0 h_0}{m \rho g h_0 \sin \theta + 2k\tau_0 n}} \quad (13)$$

とかけるが、(10) 式の条件により、(13) 式は  $b < 1/m$  のときにだけ意味がある。

斜面のわん曲が強いほど、すなわち  $n$  が大きいほど、また積雪深の減少率が大きいほど、すなわち、 $m$  が大きいほど雪崩発生地の幅は狭くなる。積雪が深く  $h_0$  が大きくなれば、幅  $2b$  は広がる。

### 2. $h_0$ と $\tau_0$ との関係

(12) 式は、雪崩が発生するときの積雪深の最大値  $h_0$  と積雪の限界剪断応力  $\tau_0$  との関係を示す式で、 $\tau_0$  について解くと

$$\tau_0 = \frac{\rho g h_0 \sin \theta}{k \pm \sqrt{2(m+2n)kh_0 - m^2 h_0^2}} \quad (14)$$

の形になる。しかし、(10) 式の条件より (13) 式の  $b < 1/m$  でなければならないことから、(14) 式は次のように限定される。

$$0 < h_0 < \frac{m+2n}{m^2} k \text{ の範囲で}$$

$$\tau_0 = \frac{\rho g h_0 \sin \theta}{k + \sqrt{2(m+2n)kh_0 - m^2 h_0^2}} \quad (15)$$

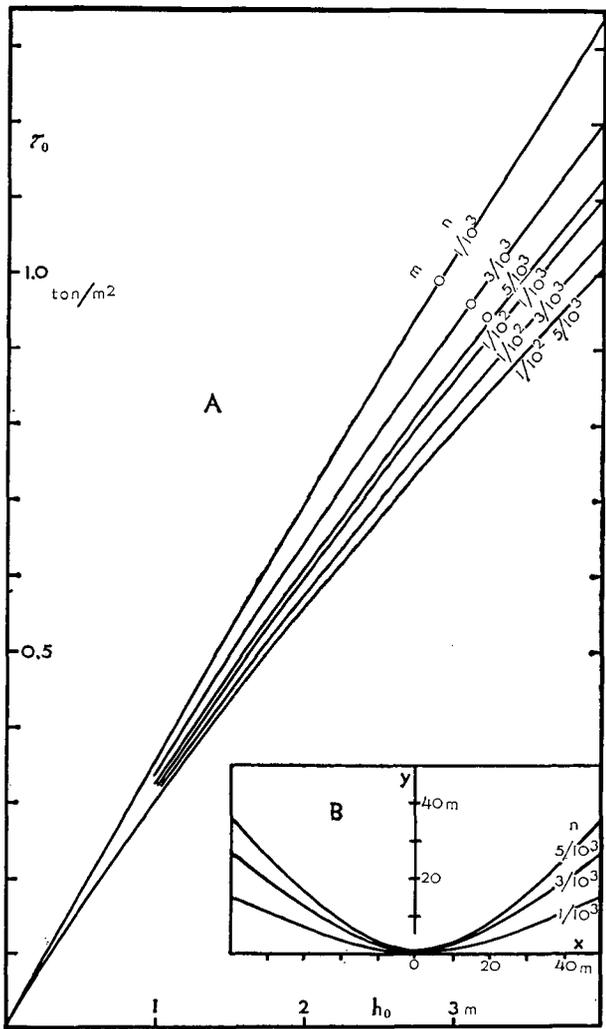
これが凹型斜面において雪崩の発生するときの  $\tau_0$  と  $h_0$  との関係式である。積雪が斜面上に安

定しているときは、(15) 式は

$$\text{左辺} > \text{右辺}$$

である。

第4図Aには $\tau_0$ と $h_0$ との関係をグラフに示した。(15)式に示すように $\tau_0$ は $\rho$ 、 $h_0$ 、 $\theta$ 、 $k$ 、 $m$ 、 $n$ との関数である。そこで、 $\rho=0.35 \text{ ton/m}^3$ 、 $k=0.5$ 、 $\theta=35^\circ$ とし、 $m$ および $n$ をパラメーターとして $\tau_0$ と $h_0$ との関係を示した。 $\tau_0$ の値が、第4図Aに示す曲線より上に位置するときは決してなだれることはなく、 $\tau_0$ が曲線上の値になったときに雪崩が発生する。それゆえ、 $\tau_0$ が変化しないとすれば、積雪深 $h_0$ が増すほど、斜面のわん曲度 $n$ が小さいほど、また積雪深の減少率 $m$ が小さいほど、雪崩は発生しやすいのである。



第4図 A  $\tau_0$ と $h_0$ 、 $n$ 、 $m$ との関係  
B  $y$ と $x$ 、 $n$ との関係

## V. 要 約

黒田の雪崩発生条件式は、雪崩発生地の幅を定めるべき他の方法を必要とする。それで、雪崩発生地の幅を、最大傾斜線と垂直な平面で切った斜面の形によって決定する方法を考えた。斜面の横断面が凹型である場合について、第1図の原点Oから座標 $x$ までの積雪重力と側面および地面における限界支持力との釣合を考えることによって、次の雪崩発生条件式が導かれる。

$$0 < h_0 < \frac{m+2n}{m^2} k \text{ の範囲で}$$

$$\tau_0 = \frac{\rho g h_0 \sin \theta}{k + \sqrt{2(m+2n)k h_0 - m^2 h_0^2}}$$

斜面上の積雪が安定しているときは、上式の左辺は右辺より大きい。積雪の厚さが増したり、限界剪断応力が減少したりすることによって左辺が右辺に等しくなったときに、雪崩が発生する。そのときの雪崩発生地の幅は次式で与えられる。

$$2b = 2\sqrt{\frac{2\tau_0 h_0}{m\rho g h_0 \sin \theta + 2k\tau_0 n}}$$

終りに、この研究に際して、終始御指導いただいた吉田順五教授に謹んで感謝の意を表します。また、若浜五郎助教授並びに中村勉博士の有益な助言と批判に対して深く感謝いたします。

## 文 献

- 1) 黒田正夫 1949 雪崩, 吹溜り, 雪庇. 雪氷十年 (雪氷協会編), 102-116.
- 2) 黒田正夫 1953 雪崩発生の力学的考察. 雪氷の研究 I (雪氷学会編), 203-214.

## Summary

The purpose of this investigation was to determine the conditions required to release an avalanche on a slope of concave cross section shown by curve **G** of Fig. 1. The plane of the paper represents a section perpendicular to the steepest direction of the slope. Let coordinates  $x$  and  $y$  be taken as shown in the figure. It is assumed that both curve **S**, the section of the surface of the snow cover lying on the slope, and curve **G** are symmetrical with respect to the  $y$ -axis, and that the thickness of the snow cover,  $h$ , decreases as  $x$  increases. The forces acting on that portion of the snow cover which extends from the origin to  $x$ , are expressed as  $W$ ,  $F$ , and  $K$ .

$W$  is the component of gravity in the direction of the slope, as given by  $\rho g \sin \theta \int_0^x h dx$ , where  $\rho$ ,  $g$  and  $\theta$  are, respectively, the mean density of the snow, acceleration of gravity and inclination angle of the slope. Curve  $W$ , in Fig. 2 A shows how the component  $W$  varies with  $x$ .

F is the critical value of resistance at the ground surface, that is, the largest value which the resistance can have. This resistive force increases in proportion to the length,  $s$  of curve  $G$ , extending from the origin to point  $x$ . Critical resistance,  $F$ , changes with  $x$  as is shown by curve  $F$ , in Fig. 2 A.

K is the critical value of the shearing force with which the snow lying to the right of point  $x$ , holds the portion of snow in question. For the sake of convenience this shearing force will be called "side shearing force". Curve  $K$  in Fig. 2 A gives the critical value,  $K$ , of the side shearing force in relation to the abscissa,  $x$ .

As long as  $P=F+K$  is greater than  $W$  for any value of  $x$ , the snow on the slope is stationary since the resistance and the side shearing force cancel the gravitational force,  $W$ . In Fig. 2 A, curve  $P'$  is the curve  $P$ , inverted with respect to the  $x$ -axis. Curve  $P'$  lies entirely above curve  $W$ , proving that  $P>W$ . If the thickness of the snow cover increases with the fall of new snow, curve  $W$  will rise to the position of curve  $W_c$  and come into contact at  $x=b$  with curve  $P'_c$ , which is the curve  $P'$  corresponding to the new state of thicker snow cover. Then the portion of snow cover to the left of point  $x=b$  will start sliding down the slope, because the gravitational force,  $W$ , acting on that portion, just exceeds the largest value which the sum of side shearing force and resistance at the ground surface can attain. Contact between curves  $W$  and  $P'$  may also occur, with no increase in the thickness of snow cover, by a reduction in the strength of the snow resulting from a rise in the snow temperature or infiltration of melt water. In this case, as is shown in Fig. 2 B, curve  $P'$  descends to the position of curve  $P'_c$ , touching curve  $W$  which undergoes no change. For the reason previously given, the portion of snow cover to the left of the contact point begins to fall. In this way, the condition under which an avalanche starts is illustrated by the contact of the two curves,  $W$  and  $P'$ .

The foregoing may be expressed mathematically as follows. We assume that thickness  $h$  of the snow cover and length,  $s$  of curve  $G$  of Fig. 1 are given by

$$h(x) = h_0(1-mx), \tag{1}$$

$$s(x) = x + nx^2, \tag{2}$$

where  $m$  and  $n$  are constants. Then we have, if shear strength of the snow is denoted by  $\tau_0$ ,

$$W(x) = \rho g \sin \theta \int_0^x h \, dx = \rho g h_0 \sin \theta \left( x - \frac{1}{2} mx^2 \right), \tag{3}$$

$$K(x) = -\tau_0 h = -\tau_0 h_0(1-mx), \text{ and} \tag{4}$$

$$F(x) = -k\tau_0 s = -k\tau_0(x + nx^2). \tag{5}$$

The critical specific resistance, that is, the critical resistance per unit area of the ground surface, will not be the same as  $\tau_0$  but will vary in proportion to it. For that reason, in equation (5), the critical specific resistance is expressed as  $k \tau_0$  with  $k$  as a constant. The conditions under which curves  $W$  and  $P'$  come into contact are given by equations

$$W(x) = P'(x) \text{ and } dW(x)/dx = dP'(x)/dx, \tag{6}$$

where  $P'(x) = -K(x) - F(x)$ . By solving the simultaneous equations (6), we get

$$\tau_0 = \frac{\rho g h_0 \sin \theta}{k + \sqrt{2(m+2n)kh_0 - m^2 h_0^2}} \text{ for } 0 < h_0 < \frac{m+2n}{m^2} k \quad (7)$$

and

$$b = \sqrt{\frac{2\tau_0 h_0}{m\rho g h_0 \sin \theta + 2mk\tau_0}}. \quad (8)$$

As long as  $\tau_0$  is greater than the right side of equation (7), the snow is in a stable state and remains on the slope. But as soon as equation (7) holds true, by an increase in  $h_0$  or a decrease in  $\tau_0$ , that portion on the snow cover of width  $2b$  given by equation (8) starts to slide down the slope as an avalanche.

In Fig. 4 A the curves give the relationship between  $\tau_0$  and  $h_0$  which satisfy equation (7). Equation (2) gives such forms for the ground surface as those of the curves in Fig. 4 B.