HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	海氷の熱的性質の研究　II ： 不均質な氷層の K/cρ の値を求める方法
Author(s)	小野, 延雄
Citation	低温科學. 物理篇, 23, 177-183
Issue Date	1965-03-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18030
Type	departmental bulletin paper
File Information	23_p177-183.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Nobuo ONO 1965 Thermal Properties of Sea Ice. II. A Method for determining the $K/c\rho$-value of a Non-Homogeneous Ice Sheet. *Low Temperature Science, Ser. A, 23.* (With English Summary p. 182)

海氷の熱的性質の研究 II*

不均質な氷層の $\frac{K}{c\rho}$ の値を求める方法

小野延雄
(低温科学研究所 海洋学部門)

(昭和39年12月受理)

I. まえがき

海氷は純氷の結晶と結晶のすきまに濃い塩水(ブライン)を閉じこめた構造をしている。このブラインは温度が変るとその温度での平衡濃度となるために，氷を析出したり，まわりの氷を融かしたりする。海氷の熱的性質の著しい特徴は，氷層の温度変化に伴なうこのような氷の融解の潜熱が，氷層の内部で放出あるいは吸収されることである。

この温度変化による氷の析出や融解のために，海氷の比熱の値は著しく大きく，しかも，氷層の温度やブライン量のわずかの違いで大きく変化する。ブラインは常にその温度での平衡濃度になっていると考えられるので，氷の塩分量と温度とを与えるとブラインの量が定まることになる。したがって，海氷の比熱の値は塩分量と温度との関数として，純氷量とブライン量との割合から理論的に計算することができる[1,2]。しかし，実際の海氷はブラインのほかに気泡も含んでいるので，その比熱は気泡を考えていない理論値とは多少異なることになる。しかも氷層から測定用の試料を切出すと，ブラインの一部が脱落して熱的性質の異なったものとなってしまう。それゆえ，海氷の比熱の測定は氷が張っているままの状態でおこなうことが望ましい。このためには，氷層の温度を測った記録から $\frac{K}{c\rho}$ (K: 熱伝導率，c: 比熱，ρ: 密度) の値を求め，熱伝導率と密度とをそれぞれ実測すればよい。

前報I[3]で氷層中の温度分布と表面の熱流量との測定から熱伝導率の値を求めた。その結果，“薄い一冬氷”の熱伝導率が深さによって変化することを知った。このような不均質な氷層では全層の温度分布を記述する式は複雑なかたちとなってしまうので，温度記録から $\frac{K}{c\rho}$ の値を簡単に求めることはむずかしい。

この論文は，そのような不均質な氷層の $\frac{K}{c\rho}$ の値を温度記録から近似的に求めることの試みである。

II. 解析方法

氷層中の温度の傾きは鉛直方向のみにあると考えることができる。氷層の表面から鉛直下

* 北海道大学低温科学研究所業績 第704号

向きに z 軸をとり，温度を θ，時間を t とするとき，熱伝導の微分方程式は

$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \tag{1}$$

である。ここで，c, ρ, K は，それぞれ氷層の各深さの比熱，密度，熱伝導率である。(1) 式は

$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z}+K\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \tag{2}$$

であり，不均質な氷層では $\frac{\partial K}{\partial z}\neq 0$ なので右辺第1項を省略することができない。(2) 式の右辺の第1項と第2項との比をとって

$$f\equiv\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial z}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big/\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

とおくと，(2) 式から形式的に次式が得られる。

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=(1+f)\frac{K}{c\rho}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \tag{4}$$

(4) 式の $(1+f)\frac{K}{c\rho}$ を“みかけの拡散係数”と呼ぶことにする。

次に，時刻 t における z の深さの温度を $\theta_{z,t}$ と書くことにすると，z から上下に等距離 s だけ離れた点の温度は Taylor の展開式で，それぞれ

$$\theta_{z+s,t}=\theta_{z,t}+s\frac{\partial\theta_{z,t}}{\partial z}+\frac{s^2}{2!}\frac{\partial^2\theta_{z,t}}{\partial z^2}+\frac{s^3}{3!}\frac{\partial^3\theta_{z,t}}{\partial z^3}+\frac{s^4}{4!}\frac{\partial^4\theta_{z+\eta s,t}}{\partial z^4}\qquad 1>\eta>0 \tag{5}$$

$$\theta_{z-s,t}=\theta_{z,t}-s\frac{\partial\theta_{z,t}}{\partial z}+\frac{s^2}{2!}\frac{\partial^2\theta_{z,t}}{\partial z^2}-\frac{s^3}{3!}\frac{\partial^3\theta_{z,t}}{\partial z^3}+\frac{s^4}{4!}\frac{\partial^4\theta_{z-\eta' s,t}}{\partial z^4}\qquad 1>\eta'>0 \tag{6}$$

と書くことができる。同様にして z の深さの時刻 $t+\tau$ における温度は

$$\theta_{z,t+\tau}=\theta_{z,t}+\tau\frac{\partial\theta_{z,t}}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2\theta_{z,t+\eta''\tau}}{\partial t^2}\qquad 1>\eta''>0 \tag{7}$$

となる。これらを用いて次式が得られる。

$$\theta_{z,t+\tau}-\frac{1}{6}\left\{\theta_{z+s,t}+4\theta_{z,t}+\theta_{z-s,t}\right\}=\tau\frac{\partial\theta_{z,t}}{\partial t}-\frac{s^2}{6}\frac{\partial^2\theta_{z,t}}{\partial z^2}+\varepsilon \tag{8}$$

ここで

$$\varepsilon=\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2\theta_{z,t+\eta''\tau}}{\partial t^2}-\frac{s^4}{144}\left\{\frac{\partial^4\theta_{z+\eta s,t}}{\partial z^4}+\frac{\partial^4\theta_{z-\eta' s,t}}{\partial z^4}\right\} \tag{9}$$

である。いま

$$\frac{s^2}{6\tau}\equiv\left[(1+f)\frac{K}{c\rho}\right]_{z,t} \tag{10}$$

とおけば，(4) 式により (8) 式は

$$\theta_{z,t+\tau}=\frac{1}{6}\left\{\theta_{z+s,t}+4\theta_{z,t}+\theta_{z-s,t}\right\}+\varepsilon \tag{11}$$

となる。ε は展開式の剰余の項を集めたものであり小さいと考えられるので

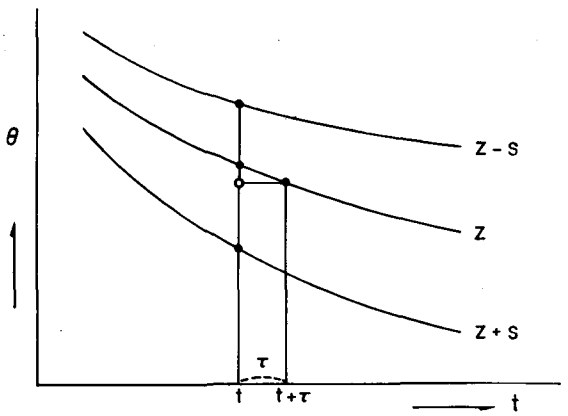
$$\varepsilon = 0 \tag{12}$$

と仮定すると，(11) 式は

$$\theta_{z,t+\tau} = \frac{1}{6}\left\{\theta_{z+s,t}+4\theta_{z,t}+\theta_{z-s,t}\right\} \tag{13}$$

となる。K が常数 (すなわち $f\equiv 0$) の場合の (13) 式および (10) 式は，拡散現象の数値解法に用いられる式として知られている[4,5]。

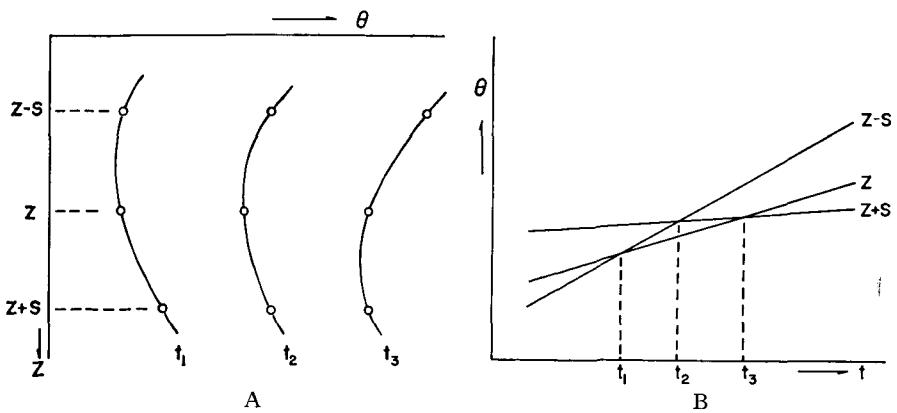
この (13) 式および (10) 式を使うと，第1図のようにして，みかけの拡散係数の値を温度記録から容易に求めることができる。まず，ある深さ z と z から等距離にある $z-s$, $z+s$ の3つの深さの温度記録から，任意の時刻 t における各深さの温度を読みとって (13) 式の右辺を計算する。図では，計算して得た値が○印になったとして示してある。z の深さの温度がこの値をとるまでの時間を τ とすれば，この τ と s とは (10) 式の関係を満足する。したがって，$z-s$, z, $z+s$ の深さの温度記録を用いれば，z の深さの $(1+f)\dfrac{K}{c\rho}$ の値を任意の時刻について計算することができる。



第1図 温度記録の解析法

それゆえ，適当な時刻で f の値を知ることができれば $\dfrac{K}{c\rho}$ の値が求まることになる。f は (3) 式で与えられるから，ある時刻の鉛直温度分布と熱伝導率の鉛直分布が既知であれば，式の上では値が定まるはずである。しかし，実際には，温度などの測定記録から (3) 式の f を求める操作は繁雑であり，しかも大きな誤差が入りやすい。

特別な場合として，考える深さ z の温度がその鉛直分布の極値をとる時刻には，$\dfrac{\partial\theta}{\partial z}=0$ であるから，(3) 式により $f=0$ となる。それに，この場合には，上述の方法で得た値が直接



第2図 極小をもつ鉛直温度分布の推移とそのときの温度記録

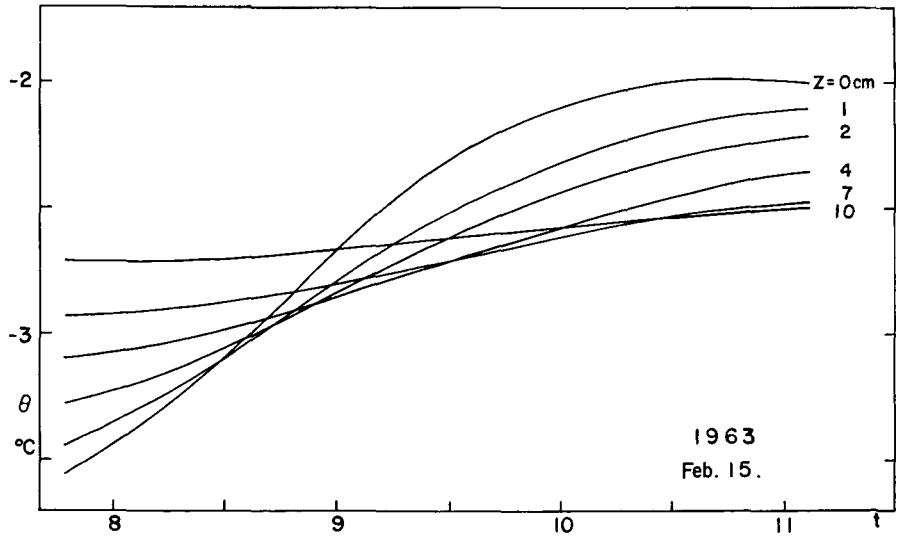
$\frac{K}{c\rho}$ の値を示すので都合がよい。海氷の鉛直温度分布では氷層の下面が常に結氷温度であるために，氷層中に温度の極大があるときにはそれより深いところに必ず極小があることになる。このように氷層中に極大と極小が見られるのは表面温度が短時間に大きく変化する場合に限られ，実際の鉛直温度分布にあらわれる極値としては多くの場合極小のみが観測される。

ある深さ z の温度が鉛直分布で極小となる時刻は，以下にのべる方法で実際の温度記録から近似的に求めることができる。第2図のAは z の深さの温度が極小となる前後の時刻の鉛直温度分布であり，Bはそときの温度記録である。z の温度が $z-s$ の温度に等しくなる時刻を t_1 とすると，第2図Aの t_1 に示したように温度の極小は z と $z-s$ とのあいだにあると考えられる。同様にして z と $z+s$ の温度が等しくなる時刻 t_3 には，極小は z と $z+s$ のあいだにあることになる。z の深さが鉛直温度分布で極小となる時刻は，この t_1 と t_3 のあいだにある。$z-s$ と $z+s$ の温度が等しい時刻 t_2 における極小の深さは，t_1 の極小の深さと t_3 の極小の深さとのあいだにあり z にかなり近いと考えられる。それゆえ，時刻 t_2 で求めた $(1+f)\frac{K}{c\rho}$ の値を目的とする z の深さの $\frac{K}{c\rho}$ の近似値として扱うことにする。これらの時刻 t_1，t_2，t_3 は，第2図Bに示したようにそれぞれの深さの温度曲線の交点の時刻であるから，実際の温度の測定記録でもすぐに見つけることができる。

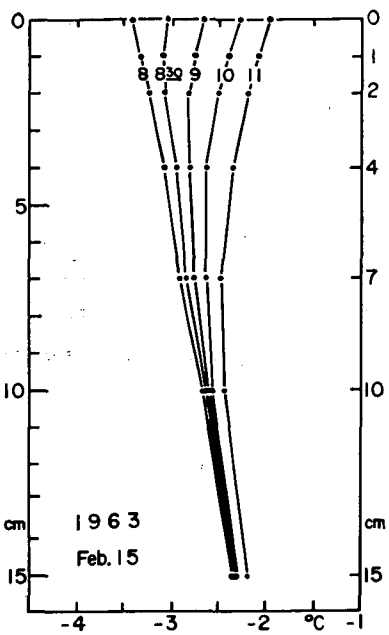
III. 計　算　例

1962年の冬いらい毎年2月に北海道オホーツク海岸の紋別で，港内に張った海氷(薄い一冬氷)の鉛直温度分布を測定してきた。その記録の中から，1963年2月15日に測定した温度記録を選んで $(1+f)\frac{K}{c\rho}$ の値を求めてみた。

第3図はその日の午前8時から11時までの温度記録である。図中の温度曲線は周期の短かい変動をはぶいて滑らかな線で描いてある。また，第4図には，そのときの鉛直温度分布の



第3図　鉛直温度分布に極小のある温度記録の例



第4図 極小をもつ鉛直温度分布の時間的変化

第1表 $(1+f)\frac{K}{c\rho}$ 値の計算結果

z (cm)	s (cm)	t_1	t_2	t_3
2	2	5.6×10^{-3}	4.4×10^{-3}	2.8×10^{-3}
4	3	5.4	4.7	4.2
7	3	4.2	4.6	5.0

推移を示した。時間の経過につれて温度の極小が深い方に移っていくのが認められる。

このような温度記録から，2 cm，4 cm，7 cm の各深さでの $(1+f)\frac{K}{c\rho}$ の値を計算したのが第1表である。表には，いま $z=4$ cm を例にとると $s=3$ cm であり，1 cm，4 cm，7 cm の3つの深さの温度を用いて，第2図の t_1，t_2，t_3 に相当する時刻でそれぞれ求めた $(1+f)\frac{K}{c\rho}$ の値が示してある。前節で述べたように，t_2 の時刻で得たその深さの $\frac{K}{c\rho}$ の近似値であると考えると，3つの深さでの $\frac{K}{c\rho}$ の値は $4.4\sim4.7\times10^{-3}$ の範囲内にあり深さによる違いの少ないことが認められる。

IV. 考　　察

$(1+f)\frac{K}{c\rho}$ の値を求める方法には (12) 式の $\varepsilon=0$ の仮定が必要であった。まず，前節の計算例がこの仮定をどの程度満足しているかについて調べてみる。

ε は (9) 式により，温度の時間に関する2次偏導関数と深さに関する4次の偏導関数との和で与えられている。第3図からある深さの温度が極小値を示す時刻の前後では，温度の時間変化がかなり直線的であることがわかる。しかも，第1表の値を計算した各時刻における τ の値は2～6分の範囲内にあった。この程度の時間内では温度の時間変化は直線とみなすことができ，温度の時間に関する2次偏導関数は0となる。実際に解析をおこなった場合にもこの期間内は直線として取扱った。また，鉛直温度分布はある深さのある温度を極小値として持ち，$z-s$，z，$z+s$ の各深さでそれぞれの温度を示すような3次方程式で近似することができる。したがって，温度の深さに関する4次の偏導関数も0となり，計算例に用いた実際の温度記録が $\varepsilon=0$ の仮定を充分満足していることがわかる。

次に，(3) 式で定義された f の符号について考えてみる。計算例に用いた氷層の熱伝導率の鉛直変化は，前報Iの第5図に示したように，$\frac{\partial K}{\partial z}$ の符号が深さ 2 cm および 4 cm で正，7 cm で負となっている。z の深さの $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ は，第2図からもわかるように，時刻 t_1 では正，t_2 でほぼ0，t_3 では負の値をとる。また，このような温度の極小の近くでは $\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}$ はすべて正の値をとる。したがって，f の値は，t_1 から t_3 へと時間がたつにつれて 2 cm および 4 cm では正

から負へ，7 cm では負から正へと変化する。第1表の $(1+f)\frac{K}{c\rho}$ の値が時間の経過につれて 2 cm と 4 cm で減少し 7 cm で増加しているのは，この f の変化によるものと思われる。

温度記録の中には f の値が -1 よりも小さくなるような場合もあり，この時刻には“みかけの温度拡散係数” $(1+f)\frac{K}{c\rho}$ が負の値として得られることになる。

すでにのべたように不均質な氷層の $\frac{K}{c\rho}$ 値を知るためには，鉛直温度分布に極値が見られるような温度記録を用いるのがよい。前報Ⅰでは，海氷の表面に寒剤や海水を入れた熱源容器を置いて氷層の温度の人為操作をおこなったことをのべた。温度の極小を得るための人為操作としては，まず氷の表面に冷熱源を置いて氷層内に大きな温度の傾きをつくり，次に暖熱源と取換えて表面から温度を上げてやればよい。極小の深さが次第に深い方に移っていく温度記録はこうして容易に得ることができる。

この研究に際し終始御指導をいただいた田畑忠司教授，鈴木義男講師に厚く感謝の意を表します。

文　献

1) Malmgren, F. 1927 On the properties of sea ice. The Norwegian North Polar Expedition with the “Maud” 1918–1925. Sci. Res. ***1***, 5, 67 pp.
2) Зубов, Н. Н. 1945 北氷洋の氷. 第5章. 海氷の物理的・化学的性質. (低温科学研究所訳 1954) 97 pp.
3) 小野延雄 1965 海氷の熱的性質の研究 I. 薄い一冬氷の熱伝導率の測定. 低温科学，物理篇, ***23***, 167–176
4) 高橋喜彦 1941 渦動拡散及び熱伝導の図式解法. 気象集誌, ***19***, 321–327.
5) 日高孝次 1941 高橋喜彦氏の方法と応用数学. 海と空, ***21***, 285–291.

Summary

In the first paper in this series, it was shown that young winter sea ice is non-homogeneous with respect to thermal properties. The differrential equation of thermal diffusion, therefore, is

$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z}+K\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\ , \qquad (2)$$

where, c is specific heat, ρ is density, K is thermal conductivity, θ is temperature, t is time, and z is depth in the ice cover.

A method for determining the numerical value of $\frac{K}{c\rho}$ of such an ice sheet, from the observed temperature data, is proposed in this paper.

Writing

$$f\equiv\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial z}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big/\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right) \qquad (3)$$

for the ratio of the first term to the second term in the right-hand side of (2), (2) may be rewritten

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=(1+f)\frac{K}{c\rho}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\ . \qquad (4)$$

Let $\theta_{z,t}$ be the temperature at the depth z at time t. Then, $\theta_{z+s,t}$, $\theta_{z-s,t}$, and $\theta_{z,t+\tau}$ are given by (5), (6), and (7) in the text. It follows from (5), (6) and (7) that

$$\theta_{z,t+\tau}-\frac{1}{6}\left\{\theta_{z+s,t}+4\theta_{z,t}+\theta_{z-s,t}\right\}=\tau\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{s^2}{6}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+\varepsilon\ , \tag{8}$$

where ε is a sum of the remainder in every Taylor's series, and, in this case, negligibly small.

On substituting

$$\frac{s^2}{6\tau}\equiv\left[(1+f)\frac{K}{c\rho}\right]_{z,t}\ , \tag{10}$$

(8) becomes, when $\varepsilon=0$,

$$\theta_{z,t+\tau}=\frac{1}{6}\left\{\theta_{z+s,t}+4\theta_{z,t}+\theta_{z-s,t}\right\}\ . \tag{13}$$

Temperature changes at depths of $z-s$, z and $z+s$ are illustrated in Fig. 1. Computation of the right-hand side of (13) with temperatures of those depths at time t, is marked with a circle in the figure. Using these values for τ and s, we obtain the value of $(1+f)\frac{K}{c\rho}$ at depth z, and time t, taken from (10).

If $f=0$, we obtain $\frac{K}{c\rho}$ immediately. By equation (3), $f=0$ when $\frac{\partial\theta}{\partial z}=0$, that is, when the temperature is at a minimum or maximum value on the vertical profile. Fig. 2-A shows temperature profiles at times $t_1(\theta_{z-s}=\theta_z)$, $t_2(\theta_{z-s}=\theta_{z+s})$ and t_3 $(\theta_z=\theta_{z+s})$. These times are easily determined from the temperature records as shown in Fig. 2-B. At the time, t_2, the minimum temperature is close to depth z. Therefore, it may be assumed that $f=0$ at approximately t_2.

As examples, records of observations of temperature minimums are shown in Figs. 3 and 4. From these records, values for $(1+f)\frac{K}{c\rho}$ at depth 2, 4, and 7 cm, at times t_1, t_2 and t_3 are calculated and shown in Table 1. The $\frac{K}{c\rho}$-value at these depths can be estimated as $4.4\sim4.7\times10^{-3}$ C.G.S. from the values given in column t_2.