



Title	積雪の粒度分布の求め方について
Author(s)	大浦, 浩文; OURA, Hirobumi; 小林, 大二 他
Citation	低温科学. 物理篇, 24, 139-157
Issue Date	1966-03-22
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18040
Type	departmental bulletin paper
File Information	24_p139-157.pdf



積雪の粒度分布の求め方について*

大浦 浩文・小林 大二

(低温科学研究所 気象学部門)

(昭和 40 年 9 月受理)

I. ま え が き

積雪の粒度は、積雪をあらわす基本量であるが、いままでのところ、ほとんどの場合に平均的な取り扱いがなされているだけで、特定の積雪層の粒度分布について調べられたことは未だない。これは積雪の粒子をばらばらにすることが困難で、ほとんどの場合、不可能なせいである。

他の一般の粒状物体における粒度分布測定のひとつの場合には、粒子に分割して直接その大きさを測定するか又は沈降法によるかして粒度分布を求めているのであるが、積雪の場合にはこの一般の測定法の応用ができにくい。又アニリン法によって積雪の薄片をつくりそれから粒度分布を測定しようとすれば、薄片の厚さをどの程度にすれば正しい粒度分布を知ることができるか決定することがむずかしい。

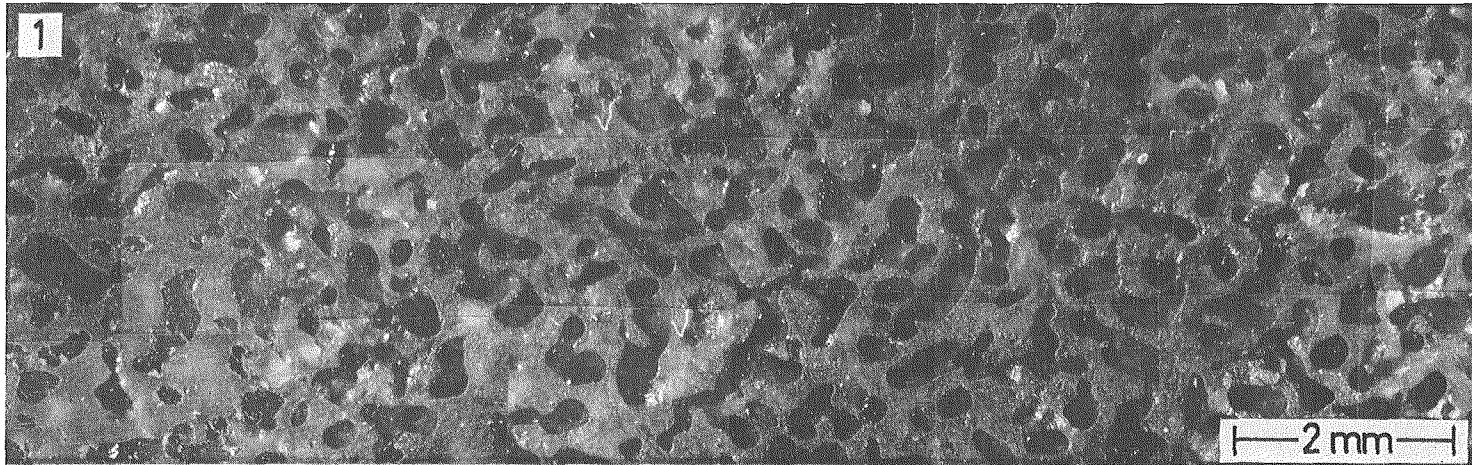
簡単に粒子に分割できない場合の粒度に関して、Krumbein¹⁾は岩石の薄片から粒度分布をその面について測定し、その分布の積率(モーメント)から全体の粒度分布の積率を算出している。しかし全体の粒度分布を求めるところまで計算をすすめていない。

そこで、我々は一つの断面上の粒度分布が求めれば、その構成粒子が球であるという仮定のもとに、全体の粒度分布を推定することが、電子計算機の助けを借りれば容易にできることに目を付け、積雪断面の顕微鏡写真から求めた 1 断面上の粒度分布から、立体構造をした積雪の粒度分布を算出したのでここに報告する。

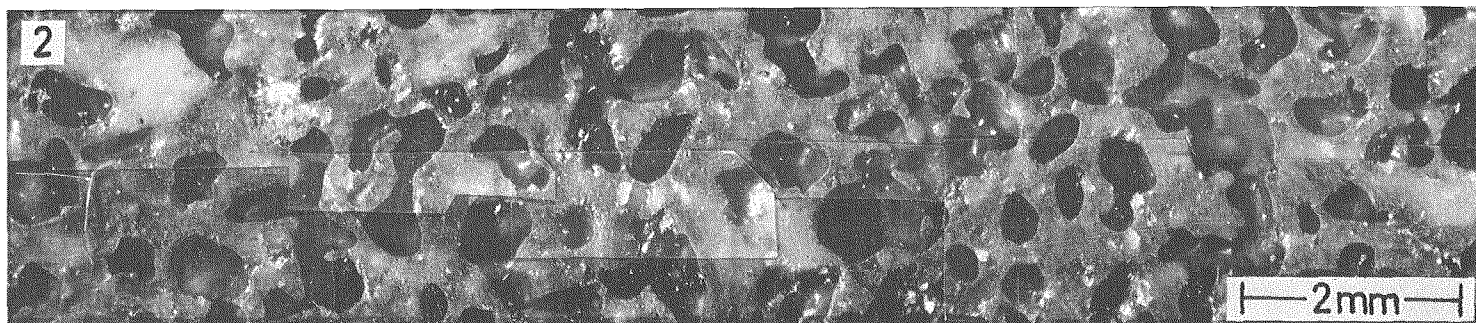
II. 試料の作製と断面写真の撮影

試料作製の方法はアニリン法による積雪薄片の作製法とほとんど同じである。異なるのは固体のアニリンと氷とははっきり識別できるように、アニリンに酸化第 2 鉄 (Fe_2O_3) を混入した点である。まず酸化第 2 鉄を混入したアニリンで積雪の試料を固め、一面をけずってその面をプレパラートにはりつけ、もう一方の面をけずって適当な厚さにし断面を仕上げ反射光によって顕微鏡写真の撮影を行なう。もし必要ならば、マイクロームによって一定の厚さで連続的にけずって断面写真の撮影を行なっていけば、立体構造を知ることにも可能である。肉眼によ

* 北海道大学低温科学研究所業績 第 766 号



第1図 積雪断面の顕微鏡写真
しまりゆき 密度 0.39 g/cm^3 , 倍率 14.6 倍



第2図 積雪断面の顕微鏡写真
しまりゆき 密度 0.42 g/cm^3 , 倍率 14.6 倍

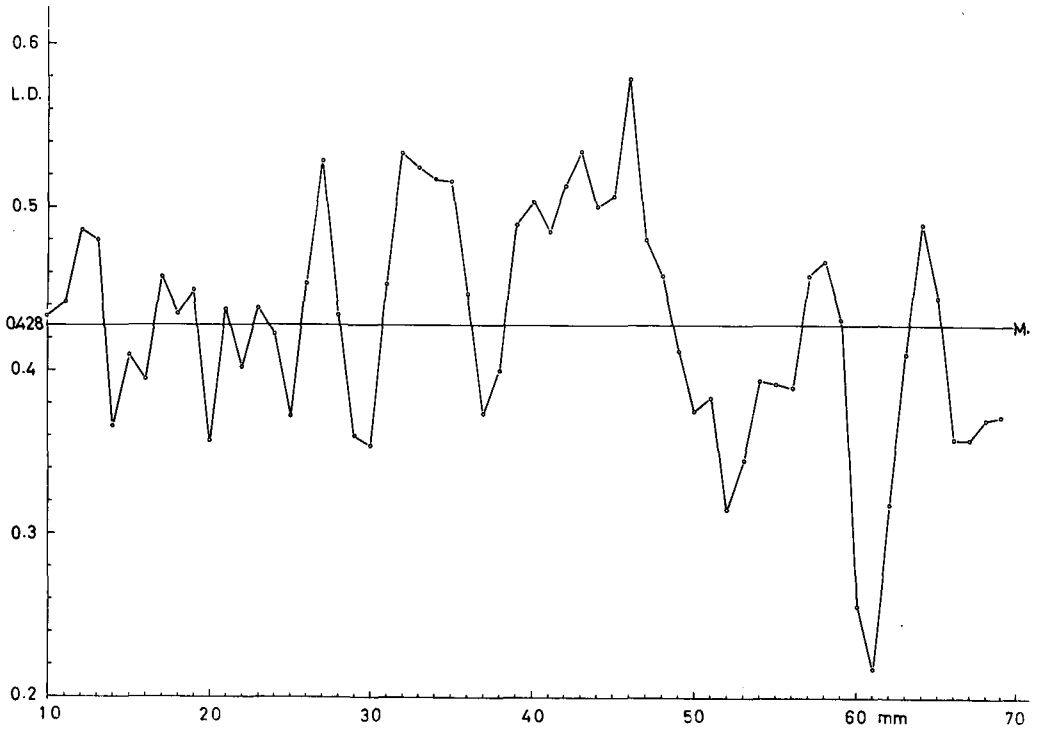
顕微鏡観察では酸化第2鉄を混入しなくともある程度は固体のアニリンと、氷の区別はつくのであるが、写真にした場合のコントラストは非常に悪い。照明に関しては今回は垂直照明のできる落射装置のついた顕微鏡を使用し、斜めからの投射光を併用した。使用した倍率は、対物レンズ4倍、写真のフィルム面において14.6倍であった。落射光源は6V-15W球を5Vで、斜めからの投射は6V-30W球を8Vで使用した。投射装置はレンズ面から10cm位、角度は45°前後、いずれも日本光学製を使用した。写真撮影には富士フィルムFを使用し露出時間は1/2秒から1秒であった。この場合、落射光と斜めからの投斜光の強さ、位置等は写真上でのコントラストを強くするためにかなり微妙でありその影響は大きい。この方法で得られた写真の2例を第1図、第2図に示す。試料は2つとも母子里において1965年3月4日に190cmの深さの積雪から採取したもので、いずれも積雪の光に対する散乱・吸収係数の測定に使用した試料である。第1図は地面から70~80cmの層の雪で密度は0.39 g/cm³、第2図は地面から30~40cmの層で密度は0.42 g/cm³のいずれもしまり雪である。

III. 断面写真上での粒度の測定

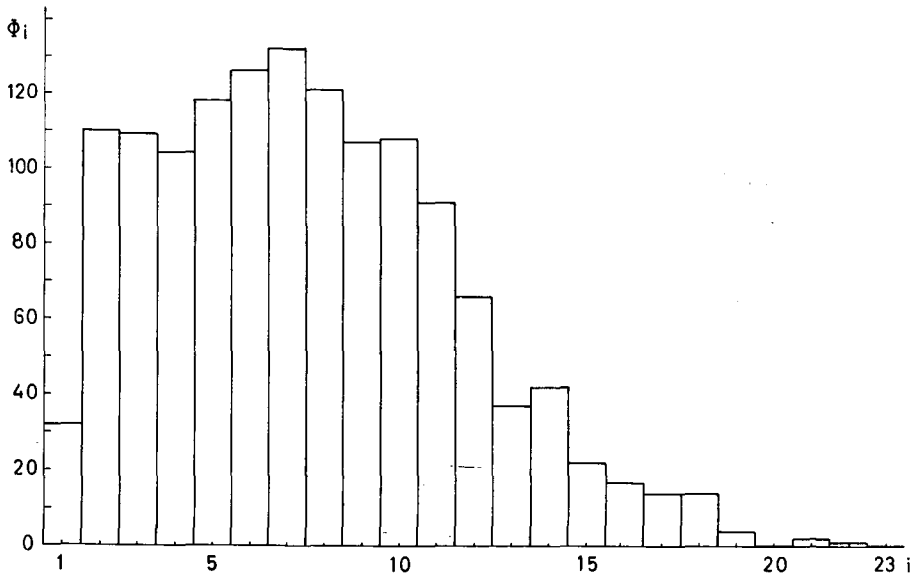
測定に使用した写真は、14.6倍に撮影されたネガフィルムの密着写真をはり合わせたものである。粒度分布を求めるためにまず次の様な測定をした。つまり、1mm間隔に引いた1群の平行線が各粒子によって切りとられる線分の長さを測り、この線分の長さの度数分布を求めることにした。実際には、この平行線群は写真上にひかず、コンパレーターの十字線を1mm間隔に走らせて、線分の長さを読みとった。読みとりは一応0.01mmまで行なった。数個の粒子が結合している場合には、自然粒界と思われる位置に境界線を入れ、又、データー整理の上で円を仮定したので、あまり細長い粒子については適当な境界線を入れて測定を行なった。なおコンパレーターの読み取りでは位置が記録されるのであるが、このほうが線分の長さだけを記録しておくよりは、データー利用の時便利である。例えば、光の透過の問題の時は、途中に人為的に入れた粒界は必要でなくなるが、今回のデーターからは直ちにこの線を取り除くことができる。又、積雪の構造もこのデーターから推察できることがある。

測定に使用したのは第1図の写真であって、測定領域は、写真上で測って走査線の方に150mm、それと垂直方向に60mmであった。これは実物上では10.3×4.1mmの範囲にあたる。したがって走査線の数は60本であった。150mm長の走査線の1本毎の線密度を第3図に示す。なお60本の平均値は、0.428であった。それに氷の密度0.917 g/cm³を掛けて算出した重量密度は0.392 g/cm³となる。なお重量と体積との測定から算出した密度は、前節で述べたように0.39 g/cm³であった。

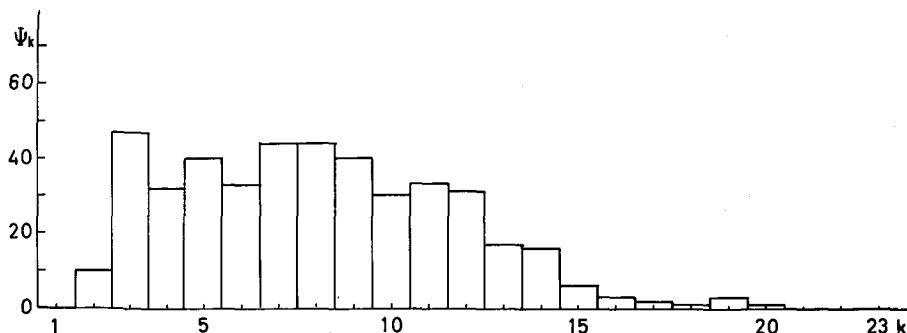
この測定の場合に何本の線を走査したら、この試料の正しい平均密度が得られるかを知るために、まず標準偏差を算出したところ0.0692であった。これから0.428±0.020の信頼区間で、信頼係数を0.89にするには30本、0.99にするには80本の走査の測定値の平均を使わなければならないことがわかった。又0.428±0.010の信頼区間では、信頼係数を同じく0.99にするには320本の走査が必要となる。



第3図 第1図について得られた走査線1本毎の線密度
 横軸は基準線から各線までの距離
 縦軸は線密度・1本の走査線の長さは150mm



第4図 第1図を間隔1mmの平行線群で切ったとき得られる線分の度数分布
 横軸は線分の長さをあらわし、 i 番目の柱は $(i-1) \times 0.4$ mm から $i \times 0.4$ mm の長さの線分の数をあらわす



第5図 第1図の粒子の面積から求めた粒度の度数分布横軸は相当する円の直径 $D = 2\sqrt{\text{面積}/\pi}$ を示し、0.4 mm 毎に区切ってある。k番目には $(k-1) \times 0.4$ mm から $k \times 0.4$ mm までの D を持つ粒子が含まれる

測定した写真上の線分の長さの分布を第4図に示す。各階級の幅は0.4 mmである。例えば6番目の階級には2 mmより長く2.4 mmより短い線分が属している。

又、写真上にあらわれた粒子の断面積を求め、その断面積と等しい面積をもつ円の直径で断面粒子の大きさをあらわし、0.4 mm 毎の階級にわけて得られる度数分布を第5図に示した。断面積を求めるには、同一の断面図形に属する線分の長さの和をとり、その和に走査間隔の1 mmを掛けて求めた。

IV. 粒径分布の算出

1. 平面上に無秩序に散在する相似図形の大きさの度数分布を、平面上の任意の直線が切る図形の切り口の線分の長さの度数分布から求める方法

A. 大きさのそろった相似図形の場合

図形の大きさを表わすために最大径を取ることにし、その長さを D とする。例えば円ならば直径、正方形ならば対角線の長さをとる。いま最大径の方向を x 軸と θ だけ傾けてこの図形を置き、 x 軸に平行な直線で、 Δy の間隔で切っていくとき、切り口の線分の長さが l と $l + \Delta l$ の範囲にある数 $f(l, \theta, D) \Delta l$ を求めることができる。つまり、線分の長さについて度数分布関数 $f(l, \theta, D)$ を求めることができる。すべての θ について度数分布関数を求めて平均すれば $f(l, D) = \int_0^{2\pi} f(l, \theta, D) d\theta / 2\pi$ が得られる。したがって大きさ D の図形 N 個がそれぞれ勝手な向きにあった場合、 Δy の間隔でこれ等の図形を切っていく時得られる線分の長さの度数分布は $Nf(l, D)$ であらわされる。

D の大きさが D' になったときは、 f の形はどうなるであろうか。 $f(l, D)$ であらわされる曲線の形がわかれば、 $f(l, D')$ の表わす曲線の形は直ちに得られるということをここに証明する。以下2つの相似形を区別して図形 D 、図形 D' であらわす。各図形の最大径の方向が平行になっている場合を考える。ここで相似の位置をそれぞれ等間隔で切っていく。図形 D を Δy

の等間隔で n 本の平行線で切れれば、図形 D' の方は図形 D と相似の位置を切るものとすれば、 $(D'/D)\Delta y$ の等間隔で n 本の平行線で切ることになる。ここで切り口の線分の長さは、 D の方が l ならば D' の方は $(D'/D) \cdot l$ である。 Δy が充分小さい時、 n 本の線分の長さに図形 D の方では Δl の差があるとすれば、図形 D' の方では $(D'/D)\Delta l$ の差があることになる。ところが、図形 D' の方も図形 D と同じ間隔の平行線で切るとすれば、前と同じ範囲を切る線分の数は $(D'/D)n$ 本となる。度数分布は長さの変分 Δl 、つまり、 l と $l+\Delta l$ の中に入る線分の数をあらわすわけであるから図形 D' の方で、いま考えている位置の近傍で、 $(D'/D)l$ と $(D'/D)(l+\Delta l)$ の範囲、つまり変分 $(D'/D)\Delta l$ にある線分の数が $(D'/D)n$ 本ならば $(D'/D)l$ と $(D'/D)l+\Delta l$ の範囲に、つまり変分 Δl に入る線分の数は n 本である。これは図形 D の方で l と $l+\Delta l$ の中に入る線分の数と等しい。このことは図形のあらゆる部分に対して成立つから、図形全体に対して、図形 D の方で $l+\Delta l$ に入る線分の数と、図形 D' の方で $(D'/D)l+\Delta l$ の中に入る線分の数は等しい。又このことは θ がどんな値であっても成立つから、度数分布関数の θ による平均値 $f(l, D)$ についても成立つ。これを式であらわせれば

$$f(l, D) = f\left(\frac{l}{D} D, D'\right) \quad (1)$$

である。これは f 式中の l と D とは l/D の形が入っていることをあらわしている。いま、

$$f(l, D) \equiv F\left(\frac{l}{D}\right) \quad (2)$$

と書き改めると、(2)式は(1)式を満足することがわかる。従って図形 D について分布関数 $f_D(l)$ がわかれば、この相似図形に特有な分布関数 $F(l/D)$ を求めることは容易である。又図形 D' に対する分布関数 $f_{D'}(l)$ は

$$f_{D'}(l) = f_D(lD/D')$$

によってわかる。つまり図形 D に対する分布曲線で長さが $l(D/D')$ に対する度数が、図形 D' に対する度数分布では l に対応する度数である。横軸に l 、縦軸に度数をとって描いた $f_D(l)$ 曲線を、縦軸はそのままにして横軸の方に D'/D 割合で引き伸して得られる曲線が $f_{D'}(l)$ である。

分布関数の性質がわかったので次のような例題を解くことは容易である。つまり、いま1つの面に散在する同じ大きさの相似図形を、 Δy の等間隔で切って得られる線分の度数分布 $\varphi(l)$ が与えられておれば、これから図形の大きさと数を見出すことができる。この方法としては、

$$\varphi(l) = nF\left(\frac{l}{D}\right) \quad (3)$$

が成立つような n, D を探せば、はじめの図形の数 n 個で、大きさは D であったことがわかる。 n, D の求め方としては次のようにすれば簡単である。任意の D' について $f_{D'}(l)$ を書き (D' が D の近似値である方がよい)、横軸方向に伸縮して $\varphi(l)$ にあわせれば D が求まり、縦軸方向に伸して $\varphi(l)$ にあわせれば n がわかる。あらかじめ近似値 D', n' がわかっておれば $n'f_{D'}(l)$ から出発すればよい近似が得られる。

B. 種々の大きさの相似図形が混在している場合

相似図形の大きさの度数分布関数が $\psi(D)$ であったとすれば、これを **A** 項で述べたのと同じように、 Δy の間隔で切って得られる線分の度数分布関数を $\varphi(l)$ とすれば、

$$\varphi(l) = \int_0^{\infty} F\left(\frac{l}{D}\right) \psi(D) dD \quad (4)$$

が成立つ。 $\varphi(l)$ を与えて $\psi(D)$ を求めるということは (4) 式であらわされた積分方程式を解くことである。一般に $\varphi(l)$ は $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ の形で与えられている。ここに

$$\varphi_i = \int_{(i-1)\Delta l}^{i\Delta l} \varphi(l) dl \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

である。そこで (4) 式を l について $(i-1)\Delta l$ から $i\Delta l$ まで積分すると

$$\int_{(i-1)\Delta l}^{i\Delta l} dl \equiv S_i \quad (6)$$

なる記号を使えば

$$S_i \varphi(l) = S_i \int_0^{\infty} F\left(\frac{l}{D}\right) \psi(D) dD$$

となり、(5) 式を使って左辺を書き直せば

$$\varphi_i = S_i \int_0^{\infty} F\left(\frac{l}{D}\right) \psi(D) \cdot dD$$

となる。そこで右辺の積分を ΔD 毎に区切れれば

$$\int_{(k-1)\Delta D}^{k\Delta D} dD = I_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

なる記号を使って

$$\varphi_i = S \left[I_1 F\left(\frac{l}{D}\right) \psi(D) + I_2 F\left(\frac{l}{D}\right) \psi(D) + \dots + I_m F\left(\frac{l}{D}\right) \psi(D) \right] \quad (8)$$

と書ける。 ΔD が小さければ

$$I_k F\left(\frac{l}{D}\right) \psi(D) \doteq \frac{1}{\Delta D} I_k F\left(\frac{l}{D}\right) \cdot I_k \psi(D) \quad (9)$$

なる近似が成立つ。

$$I_k \psi(D) = \Psi_k \quad (10)$$

とおけば (8) 式は

$$\varphi_i = \frac{1}{\Delta D} S_i \left[\Psi_1 I_1 + \Psi_2 I_2 + \dots + \Psi_m I_m \right] F\left(\frac{l}{D}\right) \quad (8')$$

となる。

$$\frac{1}{\Delta D} S_i I_k F\left(\frac{l}{D}\right) = F_{ik} \quad (11)$$

とおけば、(8')式は

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^m F_{ik} \Psi_k, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (12)$$

となる。つまり

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1m} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} \quad (13)$$

となる。 $m < n$ ならば、測定方程式である(13)式から正規方程式を作って連立一次方程式を解けばよい。近頃は電子計算機の利用がでるので n, m の数を大きくとることができる。 $n = m$ ならば(13)式をそのまま解けば Ψ_k を求めることができる。 $\psi(D)$ は次式で与えられる。

$$\psi(D) = \frac{\Psi_k}{\Delta D}, \quad (k-1)\Delta D < D < k\Delta D, \quad k=1, \dots, m \quad (14)$$

応 用 例

a. 図形が円の場合

x 軸上に中心のある直径 D の円を Δy の間隔で x 軸に平行な直線で切るとき、直線 $y = y'$ の切る線分の長さ l は

$$l = \sqrt{D^2 - (2y')^2} \quad (15)$$

であらわされる。そこで $y = y' - \Delta y$ で切った線分の長さは前よりも

$$\delta l = \frac{2\sqrt{D^2 - l^2}}{l} \Delta y \quad (16)$$

だけ長い。ここでは Δy 離れる毎に δl ずつ長い線分が1本ずつできる。 l と $l + \Delta l$ の間にある線分の数 $F_c \Delta l$ は x 軸の反対側の直線 $y = -y'$ でも l の長さの線分があることを考え

$$F_c \Delta l = 2 \frac{\Delta l}{\delta l} = \frac{\Delta l}{\Delta y} \cdot \frac{l}{\sqrt{D^2 - l^2}}$$

であらわされる。つまり

$$F_c \left(\frac{l}{D} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta y} \frac{l}{\sqrt{D^2 - l^2}}, & l \leq D \\ 0, & l > D \end{cases} \quad (17)$$

である。 $\Delta D = \Delta l$ とし、 $l = i\Delta l$, $D = k\Delta l$ なるおきかえをすると、

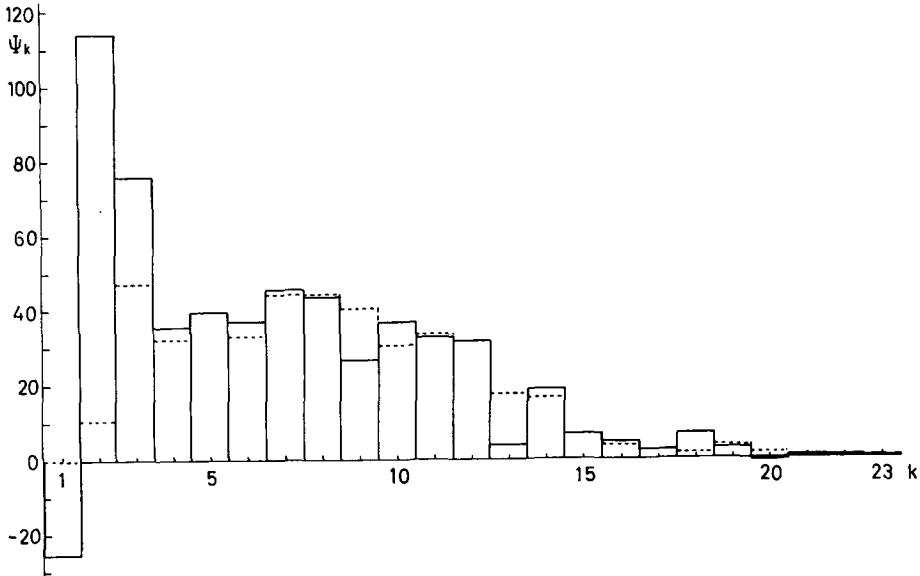
$$\left. \begin{aligned} F_{ik} &= 0 & (i > k) \\ F_{ik} &= \frac{1}{\Delta l} \int_{(i-1)\Delta l}^{i\Delta l} dl \int_{(k-1)\Delta l}^{k\Delta l} F \left(\frac{l}{D} \right) dD, & (i \leq k) \\ &= \Delta l \int_{i-1}^i di \int_{k-1}^k F \left(\frac{i}{k} \right) dk \\ &= \frac{\Delta l}{\Delta y} \int_{i-1}^i \int_{k-1}^k \frac{i}{\sqrt{k^2 - i^2}} dk \cdot di \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

これは容易に積分できて

$$Y(i, k) = k\sqrt{k^2 - i^2} - i^2 \ln(k + \sqrt{k^2 - i^2}) \quad (19)$$

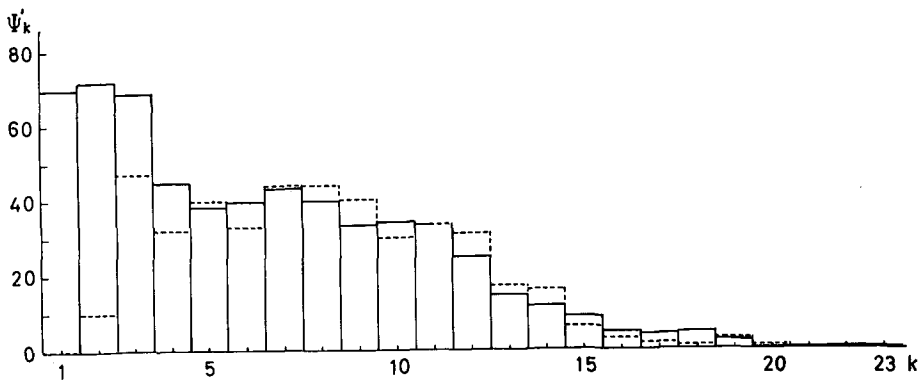
を使ってあらわせば

$$F_{ik} = \frac{4l}{4y} \left[Y(i-1, k) - Y(i-1, k-1) + Y(i, k) - Y(i, k-1) \right] \quad (18')$$



第6図 第1図の粒子に相当する円の直径の度数分布
(第4図から(12)式を使って算出したもの)

横軸 k 番目の柱は $(k-1) \times 0.4$ mm から $k \times 0.4$ mm までの直径の円の数をあらわす。点線は第5図に等しい



第7図 第1図の粒子に相当する円の直径の度数分布

第4図の ϕ_i の移動平均 $(1/4)(\phi_{i-1} + 2\phi_i + \phi_{i+1})$ を ϕ_i の代りに使って(12)式から導かれた k 番目の柱は $(k-1) \times 0.4$ mm から $k \times 0.4$ mm までの直径の円の数をあらわす。点線は第5図に等しい

である。

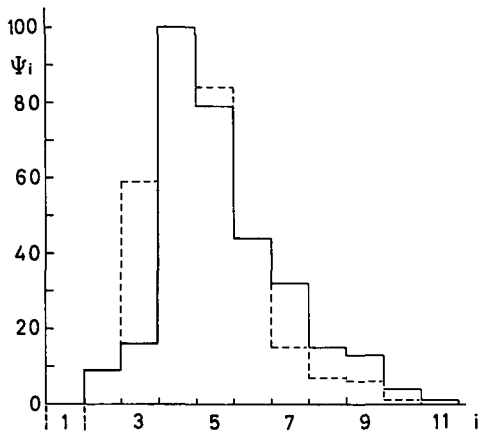
積雪の粒子の断面は必ずしも円とは云えない。しかし問題を簡単にするため、一応円であると仮定して、円の直径の分布を求めてみた。

III 節に述べたように、14.6 倍に引き伸ばした写真上で、面積 150×60 mm の範囲を、間隔 $\Delta y=1$ mm の平行線で切った線分の長さを、 $\Delta l=0.4$ mm 毎に区切って集計し、第 4 図 Φ_i が得られたので、(18') 式の Δl , Δy にもこの値を入れて F_{ik} を $i=23, k=23$ まで求め、(13) 式に入れて Ψ_k を求めた。第 1 表にはこの F_{ik} を示めてある。また第 6 図に Ψ_k を示してある。第 7 図には、 Φ_i の代わりに移動平均した値、 Φ'_i 、つまり

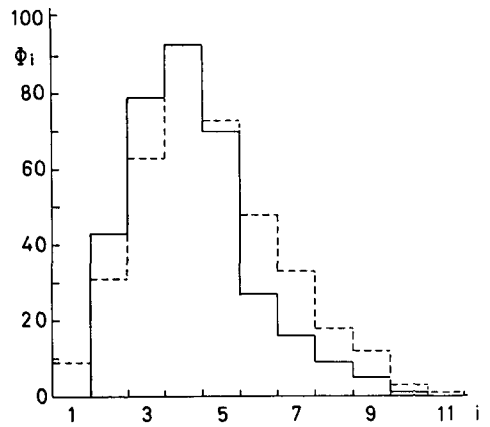
$$\Phi'_i = \frac{1}{4} (\Phi_{i-1} + \Phi_{i+1}) + \frac{1}{2} \Phi_i, \quad \text{但し } \Phi_0 = \Phi_{24} = 0$$

を使って求めた Ψ'_k を示す。何れも比較のため第 5 図を点線で示めてある。大体合っているようであるが、ただ粒径の小さい所では実測値より非常に大きな値が得られた。すべての誤差のしわが粒径の小さな所に集まるようである。第 2 表は F_{ik} の逆行列 F_{ki} をあらわしている。 F_{11}^{-1}, F_{22}^{-1} が 5, 2.3 であることは、 Φ_1, Φ_2 に生じた誤差が 5 倍, 2.3 倍になって Ψ_1, Ψ_2 に入ってくることをあらわしている。

第 8 図, 第 9 図の実線は Krumbein の報告に出ていた実測値である。第 8 図は砂岩の薄片上であらわれた粒子の断面の度数分布であり、第 9 図は砂岩をほぐして得られた粒子の度数分布である。第 8 図の点線は粒子を球と仮定して第 9 図の実測値に (12) 式を適用して算出されたものであり、第 9 図の点線は第 8 図の実測値に (12) 式を適用して算出されたものである。但し、何れの計算値も度数の最高値を実測値に合うよう比例常数を掛けてある。



第 8 図 砂岩の薄片上の粒度分布
横軸は 0.04 mm 毎に区切ってある
実線 Krumbein の実測値
点線 第 9 図の実測値に (12) 式を適用して算出された値



第 9 図 砂岩の粒度分布
横軸は 0.04 mm 毎に区切ってある
実線 Krumbein の実測値
点線 第 8 図の実測値に (12) 式を適用して算出された値

b. 図形が長円の場合

1つの長円を切って得られる線分分布は、長円の長軸を a 、短軸を b とした場合、直径が b から a の間に分布する円の一群を切って得られる線分分布に等しいので、その円の直径 D の分布 $\xi(D)$ を求めてみる。

先ず次のことを確認しておく。

i) この長円の a 軸が x 軸と平行なときに得られる線分分布は、半径 a の円が (b/a) 個あった時に等しい。

ii) この長円のある軸 a' が x 軸と平行なとき、 a' 軸に共軌な b' 軸と a' 軸とのなす角を θ' とすると、このときの線分分布は、 a' 軸を1つの主軸とし、 $b' \sin \theta'$ を他の主軸とする長円のものに等しい。つまり、半径 a' の円が $(b' \sin \theta'/a')$ 個あることに相当する。

上に述べた i), ii) の条件を考慮して、長軸が x 軸と θ だけ傾いているときの分布を求めると。この時の長軸 A は

$$\frac{1}{A} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos 2\theta}{2a^2b^2}} \quad (20)$$

であり、 $b' \sin \theta'$ に相当する値 B は

$$B = \frac{ab}{A} = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

である。ここで θ の変化する範囲を $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とすれば、長円のすべての傾きが表現される。

θ と $\theta+d\theta$ の間にある長円の数 $P|d\theta|$ 個あるとすれば

$$dA = A^3 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta \quad (22)$$

であるから、 A と $A+dA$ の間にある長円の数 $\eta(A)|dA|$ は $\eta(A)|dA|=P|d\theta|$ 故に

$$\eta(A) = P \left| \frac{d\theta}{dA} \right| = \frac{P}{\left| A^3 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{\sin 2\theta}{2} \right|} \quad (23)$$

θ が0から $\pi/2$ まで全部で1個とすれば

$$\int_0^{\pi/2} P \cdot d\theta = 1$$

P は一定だから、 $P \cdot \pi/2 = 1$ 、 $P = 2/\pi$ である。故に

$$\eta(A) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{A^3 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin 2\theta} \quad (24)$$

上に述べた ii) により、相当する円、つまり半径 A 或は直径 $D=2A$ の円の数 $\xi_A(A)$ 、或は $\xi_D(D)$ はこの B/A 倍であるから

$$\begin{aligned} \xi_D(D) = \xi_A(A) &= \frac{B}{A} \eta(A) = \frac{4}{\pi} \frac{ab}{\left| A^5 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin 2\theta \right|} \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{ab}{\left| \left(\frac{D}{2} \right)^5 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin 2\theta \right|} \end{aligned} \tag{25}$$

となる。 θ は必要があれば(20)式により A であらわされ、また $D=2A$ の関係によって D であらわす事ができる。

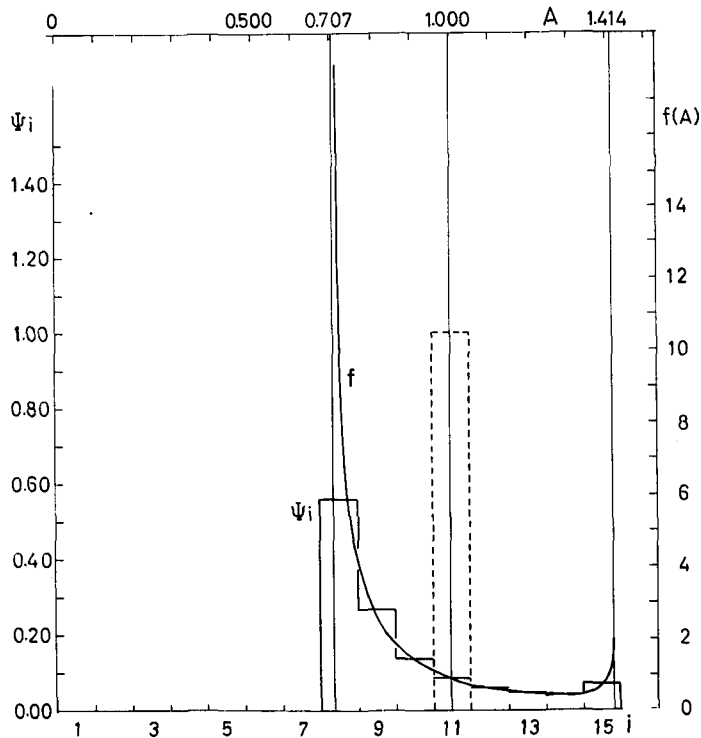
特に $ab=1, b/a=1/2$ の場合について計算してみると、

$$a = \sqrt{2}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから

$$\frac{1}{A} = \sqrt{1.25 - 0.75 \cos 2\theta}, \quad \xi_A(A) = \frac{8}{3\pi} \frac{1}{A^5 \sin 2\theta}$$

となる。上式から θ を消去して ξ_A と A との関係を図10に示してある。これは半径1の円と等面積の長円が切断された時の切り口の線分長分布と等しい線分長分布を持つ一組の円の半径の分布である。長円の大きさを等面積の半径であらわせれば、長円は、 $A=1$ に唯1個あるだ



第10図 長軸 $\sqrt{2}$ 短軸 $1/\sqrt{2}$ の長円1つと等しい線分の長さの分布を与える円の半径 A の分布 $f(A)$

けであるが、それから得られた線分分布が円だけを切断して得られたと考えると、半径 A が $b=1/\sqrt{2}$ から $a=\sqrt{2}$ まで分布している一組の円として求められる。これからわかるように、長円であるのに円だけしかないと考えて計算をすすめると、求められた直径の度数分布は実際に長円と等面積の円だけがあった場合の度数分布よりもなだらかになる。

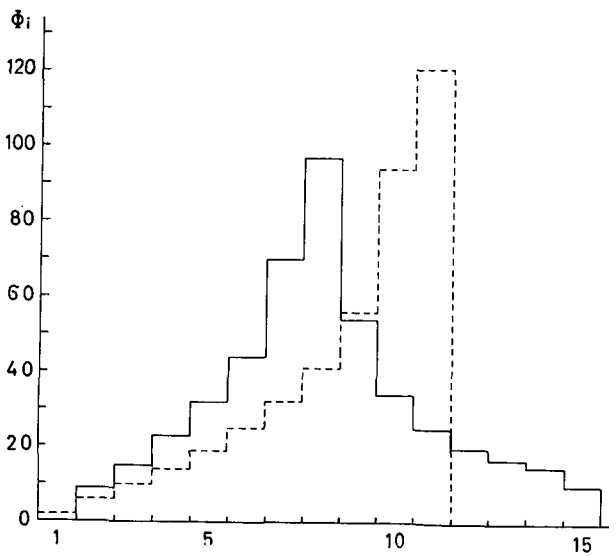
長円についての線分長の度数分布 $F_e(l/2a, b/a)$ は、(17) 式であらわされる円についての線分長度数分布 $F_e(l/D)$ を使って

$$F_e\left(\frac{l}{2a}, \frac{b}{a}\right) = \int_{2b}^{2a} F_e\left(\frac{l}{D'}\right) \xi(D') dD' \tag{26}$$

であらわされる。上記の場合の $F_e\left(\frac{l}{10.5}, \frac{1}{2}\right)$ の値を(26)式を使って算出したのが第11図の実線である。(26)式の右辺は(4)式と同じ形であるから、(4)式の計算を(12)式で行なったように、(20)式の計算も(12)式つまり同じ F_{ik} を使って行なった。ただし、

$$\Psi_i = I\xi(D)$$

であらわされる。 Ψ_i の値として第10図の Ψ_i の値を用いた。



第11図 線分の長さの分布

実線は長軸直径 $10.5 \times \sqrt{2}$ 短軸直径 $10.5/\sqrt{2}$ の長円からのもの。実際は第10図 Ψ_i によって示される1群の円より求めた。点線は直径10.5の円のもの。実際は第10図に点線で示されている第11番目の群に属する1個の円より求めた

2. 相似な粒子の無秩序に散在する空間の切断面にあらわれた図形の面積分布から
もとの粒子の大きさの分布を求める方法

A. 一般的な形の場合

1項に述べた方法から類推できるように、大きさ D の粒子 (D は最大径) をあらゆる向き

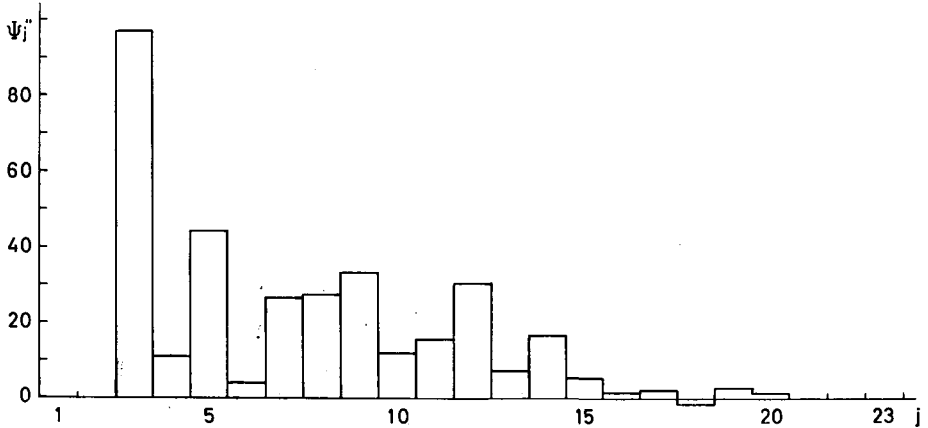
に置いたときに得られる切断面積 S の分布 $F(S/D^2)$ が求められれば、面積分布 $\varphi(S)$ と粒子の大きさの分布 $\psi(D)$ との関係は、

$$\varphi(S) = \int_0^{\infty} F\left(\frac{S}{D^2}\right) \psi(D) dD$$

であるから、1項で述べた方法でこの積分方程式を解けば $\varphi(S)$ から $\psi(D)$ を求めることができる。

B. 球の場合

一般的な場合とちがって切断面上にあらわれた図形はすべて円である。したがって円の分布を面積の分布であらわす代りに、直径の分布であらわすことができる。ここで都合のよいことは、球の直径の分布と1つの切断面上の円の直径の分布との関係は、丁度平面上の円の直径の分布とそれを直線で切った時の線分の分布との関係に等しい。したがって(18')式、(19)式と(13)式を使えば断面にあらわれた円の直径 l の分布 $\phi_i(l)$ から球の直径の分布 $\Psi_i(D)$ を求めることができる。但し(18')式の中の $\Delta y = 1$ とし求めた Ψ_i の分布は、上面下面が測定に利用した切断面上の面積で、厚さが単位長さの体積中にある球の度数分布である。したがって1-B-aの項で線分長分布から得られた直径分布 Ψ_k をあらためて(13)式の ϕ'_k と考え、この ϕ'_k から球の直径分布 Ψ'_j を求めることができる。第12図に示した球の直径の分布は、第5図の分布を使って求めたものである。ただし最下位の2つの階級 Ψ_1, Ψ_2 は誤差が大きいので、図に示していない。



第12図 切断面上の粒度分布第5図を使って求めた立体的な完全な粒子の粒度分布。ただし Ψ_1, Ψ_2 は図示していない

V. あとがき

現在まで一般に粒度分析は、容易に粒子にほぐすことができるものについてだけ行なわれてきたが、積雪のようにこわれやすいものについてはその粒度分布を測定するよい方法がなかった。しかるに今回、任意の断面の任意の線上の粒子を切る線長分布が測定されれば、全体の粒度分布が推定できる方法が見つかったので実際に積雪の粒度分布の推定をする事ができた。

但し計算をする上に、構成粒子が球であると仮定し、実際の数値計算は電子計算機によって行なった。積雪の断面の顕微鏡写真をとるために、試料はベンガラを混入したアニリンが固めたものをカンナでけずって作り、それを反射光で撮影した。線長分布の測定はコンパレーターを14.6倍の写真上を1mm間隔で走査することによって行なった。

終りに、積分方程式の解法につきいろいろと討議して下さった鈴木義男講師に厚くお礼を申し上げる。又この原稿の校正時に、弘前大学理学部の権平長四郎教授から Scheil の論文²⁾を紹介していただいた。彼は著者等と同様な積分方程式の解を第15項まで計算している。

文 献

- 1) Krumbein, W. C. 1935 Thin section mechanical analysis of indurated sediments. *J. Geology*, **43**, 482-496.
- 2) Scheil, E. 1935 Statistische Gefügeuntersuchungen I. *Z. Metalkunde* **27** 199-209.

Summary

The size-frequency distribution of ice particles in snow cover is an important factor in describing the snow cover. Since present methods of size analysis are confined to the separated particles, those methods can not be used for the analysis of snow cover, because the snow cover is made of a net work of ice particles and it is difficult to separate the particles without destroying them. The result is that no one has so far reported the size distribution of ice particles in snow cover. W. C. Krumbein tried to determine the size-frequency distribution of indurated sediments by means of thin section, but he only succeeded in calculation of the moments of grain size distributions in sediments. He did not solve an integral equation representing the relation between size-frequency distribution of unharmed perfect grains and that of cross sectional domains of the grains appearing on the section of the rock. At the present time, since we can utilize the electronic computing machine, we can easily solve the integral equation numerically. This paper reports how the size-frequency distribution could be obtained from microphotographs of the cross section of snow cover.

A piece of snow sample was immersed at temperature -5°C in aniline which contained suspended powders of ferric oxide (rouge), and it was solidified at a temperature about -25°C , then it was cut and planed. The microphotographs of the cross section were obtained by the light reflected at the surface of the section which was illuminated vertically and obliquely (Fig. 1). The magnification of the photograph was 14.6 times.

At first, on the photograph the length of segments of a straight line caught by a boundary line of a sectional figure of snow particles was measured by means of comparator. That is, both positions where the straight line crosses the periphery of each particle were registered and the length of segments was calculated. The length-frequency distribution of segments was obtained for a set of 60 parallel lines 150 mm long and at 1 mm intervals. This means the area 150×60 mm on the photograph was observed. The distribution is

shown in Fig. 4. The segments were classified according to their length. Each class had an interval of 0.4 mm.

From the measurements, the line density, that is the proportion of the summed up length of segments to the whole length of the original line, was also obtained. The line density for one line differs from that for the neighbouring line. In Fig. 3, the line density for each line was plotted in the order of the position of the line. The mean line density was 0.428 and the standard deviation was 0.0692. From the value of standard deviation, it is understood that 80 lines must be used for the calculation of the mean line density, if one expects the mean value to fall in the interval 0.428 ± 0.02 with the reliability of 99%. As the mean line density must be the same to the volume density, it was multiplied by the density of ice 0.917 g/cm^3 ; then the density of the snow sample 0.392 g/cm^3 was obtained. This value, obtained from the microphotograph, is in accord with the value 0.39 g/cm^3 that had been measured from the weight and volume of the sample before it was immersed in aniline.

At first, figures of cross sectional domain of the grains are assumed to be similar figures. The longest diameter of the figure is denoted by D , and the frequency distribution of D is denoted by $\Psi(D)$. If the length of the segment is represented by l , and the frequency of the segments is represented by $\varphi(l)$, then the relation between $(\varphi)l$ and $\psi(D)$ is represented by the following equation.

$$\varphi(l) = \int_0^\infty F\left(\frac{l}{D}\right) \psi(D) dD$$

where $F(l/D)$ is a characteristic function for the similar figure. The function can be calculated for any figure. If the segments or the diameters are classified into many groups according to their length and the deviation of length in every group is of small range Δl or ΔD , then the representation of the group Φ_i or Ψ_k is defined by Eqs. (5) and (10).

$$\Phi_i = \int_{(i-1)\Delta l}^{i\Delta l} \varphi(l) dl, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

$$\Psi_k = \int_{(k-1)\Delta D}^{k\Delta D} \psi(D) dD, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

If F_{ik} is defined by

$$F_{ik} = \frac{1}{\Delta D} \int_{(i-1)\Delta l}^{i\Delta l} \int_{(k-1)\Delta D}^{k\Delta D} F\left(\frac{l}{D}\right) dl dD,$$

then the following equation

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{\infty} F_{ik} \Psi_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

is introduced. In the calculation the approximate Eq. (9) in the text has to be satisfied. If Φ_i is known, then Ψ_k is obtained as the solution of Eq. (12). For the circle $F(l/D)$ which is necessary for calculation F_{ik} is defined by Eq. (18) or Eq. (18') in the text. Where Δy represents the intervals of the parallel scanning lines drawn on the plane on which the circle is figured.

In application, a microphotograph of a section of a sample of snow cover shown in

Fig. 1 was used. At first, the segments cut from the parallel lines by the boundary line of the sectional figures of snow grains were measured and the frequency distribution was obtained. (After this, the frequency distribution obtained by this treatment will be referred to merely as "frequency distribution of segments".) Then, the frequency distribution of the diameters of corresponding circles was calculated by the use of Eq. (12). The interval of parallel lines Δy was 1 mm, and the interval of histogram Δl and ΔD was 0.4 mm, and the maximum value of i and k was 23, that is $m=n=23$. The numerical calculation of Eq. (12) was made by the electronic computer. The histograms for the diameter shown in Figs. 6 and 7 were calculated from the histogram for the segment shown in Fig. 4.

In calculation of Fig. 7, the moving average of ϕ_i , that is, $\frac{1}{4}(\phi_{i-1} + 2\phi_i + \phi_{i+1})$ was used instead of ϕ_i . Meanwhile the area of the sectional figure of each grain was measured and the frequency distribution of the diameters of circles which had the same area as the sectional figures was obtained. This is shown in Fig. 5 and with a dotted line in Figs. 6 and 7, too. The errors of calculation seem to be concentrated in Ψ_k whose suffix k is small.

The relation between the frequency distribution of diameters of spheres and those of sectional figures, circles, is the same as the relation between the frequency distribution of circles and that of segments. The frequency distribution of diameters of corresponding spheres of the snow particles is shown in Fig. 12 being calculated from Fig. 5. The full lines of Figs. 8 and 9 show the data having appeared in the paper of Krumbein. Figure 8 shows the frequency distribution of grains on thin section and Fig. 9 shows that of loose grains. The dotted line of Fig. 8 was calculated from the full line of Fig. 9, and the dotted line of Fig. 9 was calculated from the full line of Fig. 8, with the use of Eq. (12).

In this paper, the statistics of size were so far taken about the diameters of corresponding circles which have the same area as the sectional figure of the grain. Therefore the error caused by this treatment was examined. An ellipse was considered, for example. The ratio of major and minor axes was 2:1 and the area was π , that is, the radius of the corresponding circle was 1. The frequency distribution of segments obtained from the ellipse was found to be the same as that obtained from a group of circles of which the distribution of radii A was $f(A)$ in Fig. 10. The histogram of segments obtained from an ellipse whose major and minor diameters are $10.5 \times \sqrt{2}$ and $10.5/\sqrt{2}$ or from a group of circles of which the distribution of diameters is represented by Ψ_i in Fig. 10, is shown by a full line in Fig. 11 and the histogram of segments obtained from a corresponding circle of radius 10.5 represented by the dotted line in Fig. 10 is shown by a dotted line in Fig. 11. From these results, one can expect that the error on the frequency distribution caused by regarding ellipses as circles may not be large, if the curve of frequency distribution is mild and broad.