HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|---|---|
| Title | 積雪及び氷の低周波ヤング率測定用連成振子 |
| Author(s) | 油川, 英明; 吉田, 順五 |
| Citation | 低温科學. 物理篇, 29, 37-49 |
| Issue Date | 1972-03-30 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/18168 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | 29_p37-49.pdf |

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Hideaki ABURAKAWA and Zyungo YOSIDA 1971 A Double Pendulum Used for the Determination of Low Frequency Young's Modulus of Snow and Ice. *Low Temperature Science, Ser. A, 29.* (With English Summary p. 47)

# 積雪及び氷の低周波ヤング率測定用連成振子*

油川英明　吉田順五
(低温科学研究所)

(昭和46年8月受理)

## I. まえがき

積雪及び氷のヤング率測定は，これまでにも数多く行なわれてきた。従来の測定方法は静荷重による歪の測定結果から求める静的方法[1),2)]と，100 Hz 以上の周波数の強制振動を用いる動的方法[3)~5)]とに大別される。これらの方法によって求められた積雪及び氷のヤング率の値をみると，静的方法による値よりも動的方法で得られる値の方が大きく，又動的方法によって得られる値も振動数の大小によって変わる。この様にヤング率の値が測定方法によって異なるのは，積雪や氷が粘弾性体であるためである。それ故振動数とヤング率との関数関係を知ることは，積雪や氷の粘弾性の研究にとって有益である。しかし，低周波数でのヤング率測定が一般には困難なため，この関数関係は未だ完全には知られていない。この論文で述べる連成振子によれば，約2 Hz という非常に低い周波数に関するヤング率が求められる。従って連成振子による方法は，いままで空白になっていた低周波領域におけるヤング率の値を補填する方法といえる。またこの方法は，装置が簡単で操作もたやすいので野外においても容易に用いることができる。

Le Rolland[6)] は構造物の一点に連成振子をとりつければ，構造物のその一点における「強度」が測定できることを指摘した。しかしこの方法は実用に供されなかったらしい。連成振子として非常に重いものを使わなければならないことがその理由であったと想像される。積雪や氷は適当な寸法の試料に作ると数十 kg 程度の重量の連成振子でその強度が測定できる。今回の実験では，厚さ 1~2 cm，長さ 50 cm 程の雪または氷の板を鉛直に低温実験室の床に固定し，水平方向に働く力に対する板の上端の強度を連成振子によって測定した。そして，その強度の値から計算によって積雪や氷のヤング率を求めた。

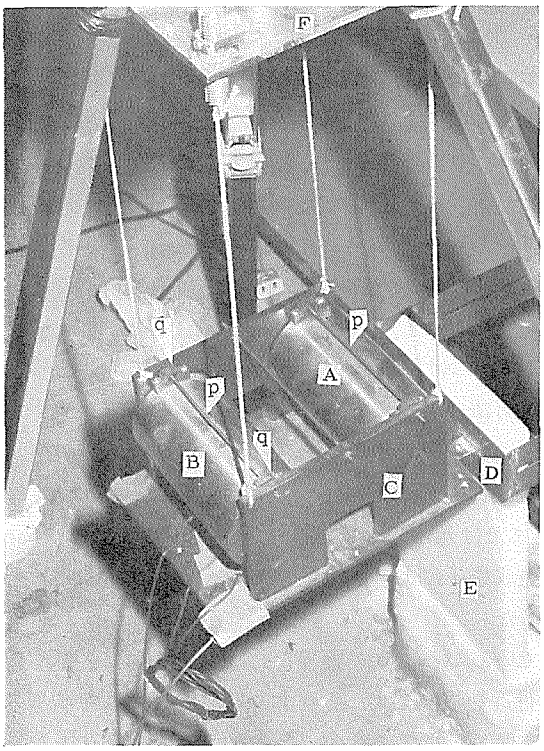
積雪も氷も温度を −5°C~−60°C の範囲でいろいろ変えて実験を行なった。ヤング率は温度下降とともに直線的に増大したが，−35°C 付近を境にして，それより低い温度では急に増大を止め一定値を保持した。また，温度を一定に保った積雪の変態によるヤング率の変化もしらべた。ヤング率は時間の経過とともにほぼ直線的に増加する傾向を示した。融雪期の湿った積雪について行なった野外測定の結果も若干報告する。

* 北海道大学低温科学研究所業績　第1147号

## II. 実 験 方 法

### (1) 測 定 装 置

第1図の写真が低温実験室内で雪の試料にとりつけた測定装置の有様である。丈夫な真鍮製の枠Cに取りつけた横に長い真鍮円筒AとBが連成振子である。両振子とも直径6.48 cm, 長さ11.98 cm, 質量3342 gで形も重量も全く等しい。それぞれの背の両端につけた小さい取付金具qには小型のボールベアリングがはめ込んである。枠Cの上部に水平に渡したピアノ線pがボールベアリングを貫ぬいて振子を吊るしている。従って枠Cを固定しておけば両方の振子はそれぞれのピアノ線pの中心線を支点として同一周期 $T$ で振動する。ヤング率を測定すべき雪の試料がEである。試料は低温実験室の床に水を使って堅固に凍着させてある。試料の板の上端は連成振子の枠Cにつけた真鍮板製の腕Dで固く押えられている。連成振子全体は丈夫な三脚に取りつけた真鍮板Fの四隅から出る四本の紐でつられている。紐の上端にとりつけたねじを回せば連成振子の枠の底板が水平に調節される。紐の長さは約50 cmである。




**第1図** 連成振子

A, B: 振　子
C: 振子の枠
D: 試料を振子に固定する枠
E: 試　料
F: 連成振子を吊して支える真鍮板
p: 振子を支えるピアノ線
q: ボールベアリングをはめこんだ取付金具

はじめ，両振子A，Bを静止させておく。一方の振子，例えばBを手で片よせて放すとBは振動を始め，その振動の反力が雪の板に伝えられ，雪の板の上端が周期 $T$ の小さい振幅の振動を始める。それにつれて連成振子全体が周期 $T$ で振動するため，振子Aが共鳴振動を開始し，その振幅は次第に増大する。振子Aの振幅が増大するにつれて振子Bの振動は衰え，ある時間たつとBは静止する。その後は逆に，Aの振動が衰えてついにAが静止するとともに，Bが振動し始めてその振幅が最大になる。この様に，試料の雪の板が剛体ではなく弾性体であるために連成振子の枠が振動し，振子Bに始めに与えられた振動エネルギーがある周期 $\tau$ で振子AとBとの間を往復する。もし雪の板が剛体ならば，すなわち雪の板のヤング率 $E$ が無限大ならば，連成振子の枠は振動しないから，振子Bの振動エネルギーが振子Aに移ることはない。つまり $\tau$ は無限に長いことになる。雪の板のヤング率 $E$ が小さい程，連成振子の枠の振動は大きくなり $\tau$ が短くなる。この関係を

利用して，$\tau$ を測定することにより雪の試料のヤング率 $E$ が求められるわけである。

**(2) 測定法の原理**

低温実験室の床に立てた雪の板 E の上端を水平な力 $f$ で押すと，板は短い距離 $\xi$ だけ水平に変位する。$\xi$ と $f$ の間には，$f=k\xi$ の比例関係がある。まえがきで「強度」と言ったのはこの $k$ のことである。$k$ が大きい程板は強い。試料の板の長さを $l$，幅を $b$，厚さを $2c$ とすれば，試料のヤング率 $E$ と強さ $k$ との間には，

$$E=\frac{l^3}{2bc^3}k \tag{1}$$

の関係がある。それ故，連成振子を使って $k$ を定めれば $E$ が計算される。

連成振子のふたつの振子は質量も形も寸法も全く同じである。ひとつの振子の質量を $m$，支点のまわりの慣性能率を $I$，支点と振子の重心との間の距離を $r$ とすれば，振子の固有振動周期 $T$ は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}} \tag{2}$$

で与えられる。$g$ は重力加速度である。試料の板の上端と結合した連成振子の一方の振子を片寄せて振動を開始させた時，片方の振子が一度静止してから再び静止する迄の時間，あるいは最も激しく振動してから次に最も激しく振動するまでの時間を $\tau$ とすると，

$$k=\alpha\cdot\frac{4\pi^2 m}{T^3}\tau \tag{3}$$

の関係がある。ここに $\alpha$ は無次元数 $\alpha=mr^2/I$ である。時間 $\tau$ を測定すれば (3) 式から $k$ が得られ，それから (1) 式によって試料のヤング率 $E$ の値が決められる。振動エネルギーが両方の振子の間を往復する間中，試料の雪の板は周期 $T$ で振動し続ける。それ故，この様にして得られる $E$ は，周期 $T$ で振動する雪が示すヤング率である。

振子の振動は支点の摩擦や空気との摩擦等により次第に減衰する。それで振動エネルギーの往復時間 $\tau$ が余りに長いと，振動エネルギーの交換が行なわれる前に振子の振動が止まってしまう。これでは $\tau$ を求めることができない。$\tau$ としては長くてもせいぜい 30 秒程度が望ましい。式 (3) が示す様に，$k$ と $\tau$ とは比例する。それ故，$\tau$ を 30 秒以下の短い時間に止めるには試料の板を薄く，細長い形にして $k$ を小さくすればよい。しかし，薄く細長い試料は壊れやすく取扱いに不便である。それで (3) 式の $\tau$ の係数 $4\pi^2\alpha m/T^3$ をできるだけ大きくとることにした。そのためには，$m$ が大きく $T$ が短い連成振子を作ればよい。実際に使う連成振子を第 1 図の写真の様に作ったのは，この目的に合わせるためであった。このことについては，更に第 (4) 項で考察を加える。

実際に用いた第 1 図の振子の本体である真鍮円筒の長さは 11.98 cm，半径 $a$ は 3.24 cm，質量 $m$ は 3352 g である。真鍮円筒の中心とそれを吊るすピアノ線の中心線との間の距離，つまり支点と振子の重心との距離 $r$ は 3.84 cm である。これらの値から，

$$I=m\left(\frac{a^2}{2}+r^2\right)=6.70\times10^4\,g\cdot\mathrm{cm}^2$$

$$\alpha = \frac{mr^2}{I} = 0.7375 \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}} = 0.458\ \text{sec}$$

$$\alpha \cdot \frac{4\pi^2 m}{T^3} = 1.016\times 10^6 \text{dyn/cm·sec}$$

と計算される。振子の固有振動の周期 $T$ を直接測定したら 0.458 秒となった。上の計算値と同じである。

第 1 図に示す様に連成振子全体は四本の紐で吊るされている。このために連成振子全体にも「強度」$k'$ がある。連成振子が自由に吊るされた位置から水平力 $f$ によって水平方向に短い距離 $\eta$ だけ変位したとすると $f=k'\eta$ の関係がなりたつ。それで第 1 図の装置を使って測定した $\tau$ を (3) 式の右辺に入れて得られる値は $k$ ではなく，$k+k'$ となる。連成振子を吊るす紐の長さを $L$，連成振子全体の質量を $M$ とすると，

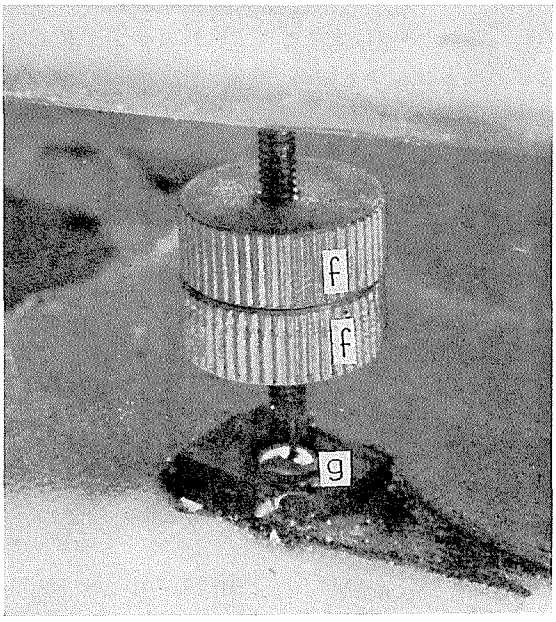
$$k' = \frac{Mg}{L} \qquad (4)$$

である。$M=9349$ g，$L=47$ cm の値を入れると，$k'=1.95\times 10^5$ dyn/cm となる。実際に測定された $\tau$ の値，例えば 10 sec 程度の値を (3) 式の右辺に入れると，$k+k'$ は $10^7$ dyn/cm となる。従って $k'$ は $k+k'$ に比べて小さく，$k'$ は $k$ に対して省略できる。それ故，(3) 式は $k$ そのものを与える式と考えてよい。

**(3) 振動エネルギー往復時間 $\tau$ の測定**

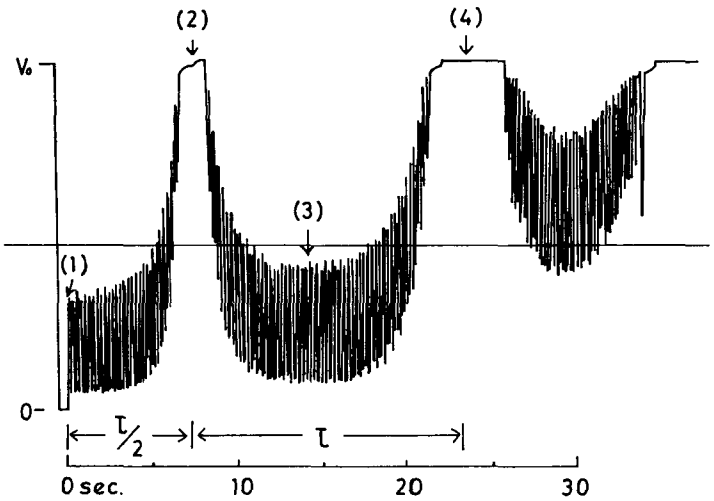
連成振子のふたつの振子の間を振動エネルギーが往復する時間 $\tau$ は，振子が完全に静止する瞬間あるいは振子の振幅が最大になる瞬間を判定すれば，ストップウォッチを使って測定できる。しかし，これらの瞬間を目で見て正確に定めるのは実際にはむずかしい。それで $\tau$ は次の様にして求めた。

第 2 図は振子の腹側，すなわち振子の下半分の写真である。腹からは下向きに雄ねじが 1 本つきでていて，それに 2 個の雌ねじ f がはめ込まれている。これは振子の周期調節用のねじで，両方の振子の固有周期を一致させるために使われる。雄ねじの先端につけた細い白金線の末端が，連成振子の枠 C の底に取りつけた水銀だめ g の水銀の中に入っている。白金線と水銀だめとはひとつの直流電気回路の開閉器をなしている。振子の位置が平衡位置からはずれると回路が開く。




**第 2 図** 振子の腹にとりつけた電流開閉器
f: 振子の周期調節用微ねじ
g: 水銀だめ

この回路開閉装置はふたつの振子のうちの一方だけにとりつけた。回路開閉器の両極は長い導線で低温実験室外に置いた9Vの電池と自記電圧記録器に連結されている。振子が静止していれば回路は閉じられたままであるから一定電流 $i_0$ が流れ記録器の針は一定電圧 $v_0$ を指す。振子が振動を始めても振子が平衡位置を通過する間は回路が閉じて $i_0$ の値の電流が流れる。しかしこの電流が流れる時間 $s$ は短く，記録器の時定数 $s_0$ に達しない。そのため，振子が平衡位置を通過する時に記録器にあらわれる電圧 $v$ は $v_0$ よりも小さい。振幅が小さくなると $s$ が増大して $s_0$ に近づくから $v$ は $v_0$ に近づく。振動が非常に衰えると，振動していても白金線と水銀との接触は切れない。この場合は $v$ が $v_0$ と一致する。




**第3図**　振子の振動の記録

(1) 振動開始点　(2) 振幅最小部分　(3) 振幅最大部分　(4) 振幅最小部分

第3図が記録紙に書かれた記録の一例である。横軸に時間，縦軸に電圧 $v$ がとってある。(1)の点で水銀接点をとりつけた振子が振動を開始した。しばらくの間は振幅が大きいから $v$ は $v_0$ よりはるかに低い位置にある帯の中を上下している。時間が経過して振子の振幅が減少するとともに帯は幅がせばまり位置が上昇する。(2)の点の近くで1.7秒間程 $v$ は $v_0$ の値を保つ。この間は振幅が非常に小さく，白金線と水銀との接触が絶たれなかった。それ故，(2)の点の水平線分の中点を振子の静止した時刻とみることができる。その後，振子は再び振動を開始し(3)の点で振幅が最大となった。そして(4)の水平線分の中点で第2回目の静止状態に達した。それ故(2)の点及び(4)の点にある水平線分の中点の間の時間が，振動エネルギー往復時間 $\tau$ となる。

第3図は密度 0.51 g/cm$^3$ のしまり雪の板を使って $-45$°C で行なった実験の結果である。もっと小さい密度の雪の板を用い，温度を 0°C に近くとると $\tau$ が短いため(4)の状態が数度現われる。しかし逆に，雪の密度が更に大きく，温度が更に低い場合は $\tau$ が長く，(4)の状態が1回も現われないまま振子の振動が全く衰えてしまう。この様な時は振動を開始した(1)の点から(2)の中点までの時間の2倍をとって $\tau$ とした。

### (4) 式(3)の $\tau$ の係数について

第2項で，(3)式の $\tau$ の係数 $A=4\pi^2\alpha m/T^3$ はできるだけ大きくするのが得策だと述べた。振子として用いる真鍮円筒の寸法と質量が既に定められていれば，$A$ の値は振子の支点をどこに選ぶかによってきまる。つまり $A$ の値は，円筒の中心すなわち振子の重心と支点との間の距離 $r$ の関数である。$A$ を表わす式の中で $\alpha$ と $T$ とが $r$ によって変わる。円筒の半径を $a$ とすると，簡単な計算によって $r/a=\sqrt{7/6}=1.08$ のとき $A$ が極大値をとることが知られる。実際に用いた連成振子では，$r/a=1.19$ であった。支点にボールベアリングを使うため，$r/a$ の値が理論的最良値1.08になるようには工作できなかったわけである。しかし，$r/a=1.19$ であっても，$A$ の値は極大値より僅か0.84%小さいにすぎない。それ故，実際上は $A$ が極大の振子を使ったといえる。

## III. 実験結果

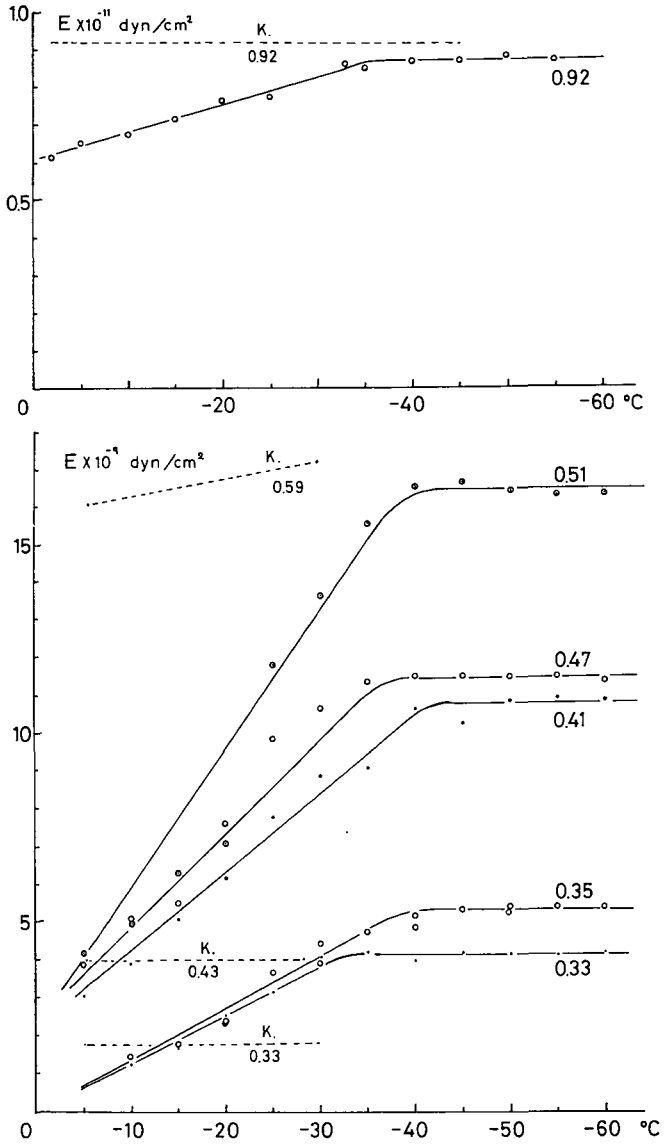
### (1) ヤング率 $E$ の温度変化

実験はすべて低温実験室のなかでおこなった。低温実験室の温度は $-5$°C から $-60$°C の範囲内でいろいろ変えた。第4図は連成振子によって測定した氷と積雪とのヤング率 $E$ と温度との関係である。この $E$ は，前にも述べた様に，氷または積雪の板が連成振子の固有周期 $T=0.458$ sec (振動数 2.2 Hz) で曲げ振動を行なうときに示すヤング率である。

用いた試料は密度 0.92 g/cm$^3$ の氷と，密度 0.33, 0.35, 0.41, 0.47, 0.51 g/cm$^3$ の積雪とである。第4図の各曲線に密度の値が書きそえてある。積雪試料のうち，密度 0.47 g/cm$^3$ 以下のものは，札幌の南にある中山峠から採集し，$-25$°C の低温室におよそ6カ月貯蔵しておいたしまり雪の雪塊から切り出した板である。密度 0.51 g/cm$^3$ の試料は，その古い雪をほぐして木枠に入れ圧密し，$-10$°C の低温室に約1カ月の間放置しておいたものである。氷の試料の板は市販の氷から気泡が含まれていない部分を切り出して作った。結晶粒の大きさは 10 mm 位であった。いずれの試料も，変態の進行がおそい，準安定の状態にある。

測定は，$-5$°C から $-60$°C までの温度範囲で，5°C 毎に行なった。第4図から明らかな様に，$-5$°C から $-35$°C 付近まではいずれの試料でも温度が下がるに従いヤング率 $E$ は直線的に増加する。密度の大きい試料程，その増加率は大きい。しかし，$-35$°C 付近から $-60$°C までの間では，$E$ の温度変化がいずれの試料においてもほとんどみられない。。

図中，K と印した点線は，黒岩および共同研究者が 200～380 Hz で雪や氷の板に曲げ振動を起こさせて得た $E$ の値である。黒岩他[4]が求めた $E$ の値は，ほとんど温度による変化を示していない。田畑[7]は，黒岩他と同様，高周波振動法により海氷のヤング率を測定し，$-8$°C 付近と $-23$°C 付近でヤング率の温度変化率が急に変わることを報告している。また小島[2]は，積雪を Maxwell 模型と Voigt 模型とを連結した模型で表わされる粘弾性体と考え，静荷重法によってふたつのヤング率 $E_1$ と $E_2$ とを決定した。$E_1$ は Maxwell 模型のヤング率，$E_2$ は Voigt 模型のヤング率である。温度 $-1$°C から $-20$°C の範囲内で，$E_1$ も $E_2$ も温度降下とともに増大した。測定に供した積雪の密度は 0.16～0.38 g/cm$^3$ であった。$E_1$, $E_2$ の最小値は $2\times10^6$ dyn/cm$^2$，最大値は $10^8$ dyn/cm$^2$ であった。同じ温度と密度の雪について比較すると静荷重法による




**第4図**　氷及び積雪のヤング率 $E$ と温度との関係

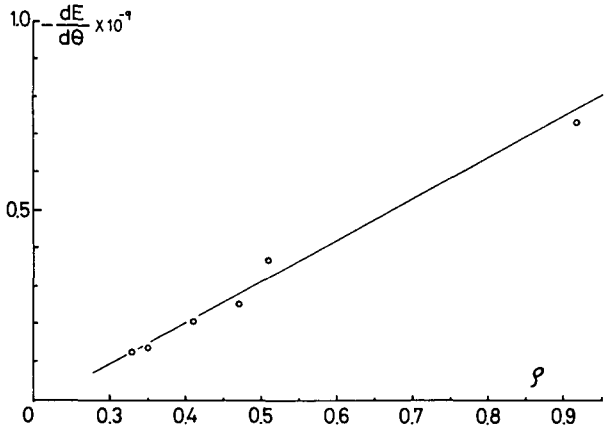
測定値は連成振子法で得た値の 1/10 程度である。

**(2)　ヤング率 $E$, 密度 $\rho$, 温度 $\theta$ の間の関係**

ヤング率 $E$ は温度 $\theta$ が −5°C から −35°C までさがるにつれ直線的に増大するが，増大のしかたは密度 $\rho$ によって違う。それゆえ，$E$ と $\theta$ との関係は

$$E = A(\rho)(|\theta| - 5) + B(\rho) \qquad (1)$$

の形に表わすことができる。$A(\rho)$ は 1°C の温度低下による $E$ の増分 $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}\theta$ であり，$B(\rho)$ は −5°C における $E$ の値である。$\theta$ が −35°C 以下の場合は，$E$ は温度に依存せず $\rho$ だけに関係する。よって




**第5図** $-\frac{dE}{d\theta}$ と氷及び積雪の密度 $\rho$ との関係

$$E=C(\rho) \qquad (2)$$

と書ける。

$-dE/d\theta$ と $\rho$ との関係は，第5図が示すように，氷の場合もふくめて

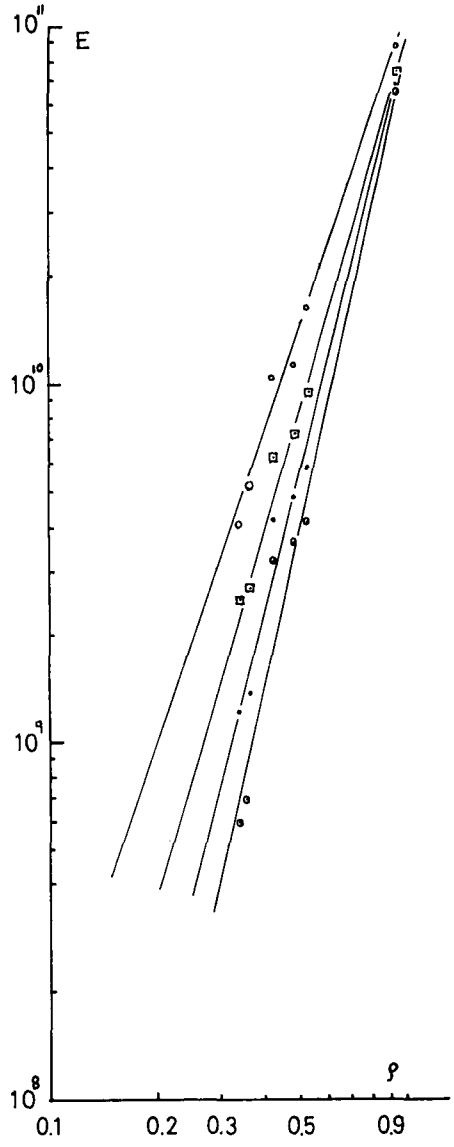
$$-\frac{dE}{d\theta}=(1.08\,\rho-0.23)\times10^{9} \qquad (3)$$

で表わされる。ただし $E$, $\rho$, $\theta$ の単位は dyn/cm², g/cm³, °C である。第6図はいろいろな温度におけるヤング率 $E$ と密度 $\rho$ との関係を示す図である。この図から一定温度においては，$E$ の対数と $\rho$ の対数とが，ほぼ直線関係にあることが知られる。これから

$-5$°C では $E=1.03\,\rho^{4.42}\times10^{11}$ (4)

$-40$°C～$-60$°C では $E=1.10\,\rho^{2.84}\times10^{11}$ (5)

の関係が得られる。




**第6図** 一定温度でのヤング率 $E$ と密度 $\rho$ との関係

関数 $A(\rho)$, $B(\rho)$, $C(\rho)$ は，それぞれ，(3)式，(4)式，(5)式の右辺にほかならない。よって $E$ と $\theta$ と $\rho$ との間には

$$E=\left\{(1.08\,\rho-0.23)(|\theta|-5)+103\,\rho^{4.42}\right\}\times10^{9} \qquad (-5>\theta>-35) \qquad (9)$$

$$E=1.10\,\rho^{2.84}\times10^{11} \qquad (-40>\theta>-60) \qquad (10)$$

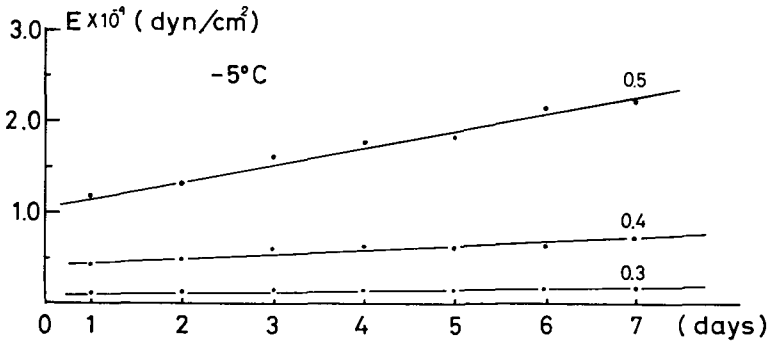
の関係がなりたつことになる。

(9), (10)式とも氷を含めて成り立つ関係である。$E$, $\rho$, $\theta$ の単位は，(3)式の場合と同じく dyn/cm², g/cm³, °C である。

### (3) 雪の焼結の進行とヤング率

積もったばかりの新雪は雪の結晶の単なる集合にすぎない。しかし，時間がたつと雪の結晶同志が焼結現象によって互に結合し，組織が丈夫なしまり雪にかわる。この焼結の進行にともなって，雪のヤング率は増大するであろう。野外に積もった積雪の表面から樹枝状の雪の結晶形が組織のなかにまだ認められる新雪を採取した。これを低温実験室のなかで木枠につめて密度 0.3 g/cm$^3$ の雪の板とし，連成振子を用いて 7 日間にわたってそのヤング率を測定した。野外に積もったままの新雪は軟かすぎて連成振子の方法でヤング率が測定できない。それで，木枠につめて固めたわけである。これとは別に，低温実験室に貯蔵してあった古いしまり雪をほぐした氷の粒を木枠につめて密度 0.4 g/cm$^3$ と 0.5 g/cm$^3$ との雪の板を作った。この雪の板のなかでも氷の粒が焼結し，雪のヤング率は次第に大きくなるであろう。新雪の板と同様，この 2 枚の雪の板についても，1 日に 1 回ずつ，7 日間にわたって連成振子を用いてヤング率を測定した。

その結果が第 7 図である。ヤング率 $E$ は，どの試料でも時間の経過とともに増大した。密度の大きい試料ほど，1 日の間のヤング率増大分 $dE/dt$ が大きい。そして，第 1 日目の $E$ の値 $E_0$ に対する $dE/dt$ の比 $(dE/dt)/E_0$ は，次の第 1 表が示すように，密度の差によって余り違わない。




**第 7 図**　雪の焼結によるヤング率 $E$ の増加

**第 1 表**

| 密　度　g/cm$^3$ | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|
| $E_0$　$10^9$ dyn/cm$^2$ | 0.1 | 0.45 | 1.20 |
| $(dE/dt)/E_0$　day$^{-1}$ | 0.13 | 0.11 | 0.14 |

### (5) 湿った雪のヤング率

昭和 44 年 4 月 12 日に北海道雨竜郡母子里で，融雪期の積雪から湿ったざらめ雪を直方体の形に切り出し，現場でそのヤング率を連成振子によって測定した。直方体の試料の根元を雪面下に 10 cm 程うめ込み堅固に固定した。試料の上面に薄いベニヤ板を置き，その上に連成振子を水平に載せた。試料の上端部が左右に振動し，振動エネルギーが両振子間を往復する。ヤング率 $E$ とともに木下式硬度 $H$，含水率 $W$，密度 $\rho$ も測定した。第 2 表が測定結果である。

第 2 表

| 積雪層 | 硬度 $H$ $10^3$g/cm$^2$ | 含水率 $W$ % | 密度 $\rho$ g/cm$^3$ | 乾き密度 g/cm$^3$ | 雪質 | ヤング率 $E$ $10^8$dyn/cm$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 表面層 | | | | | ぬれざらめ | 3.51 |
| 第 2 層 | 1.30 | 17.6 | 0.52 | 0.43 | ぬれざらめ | 3.18 |
| 第 3 層 | 1.12 | | 0.50 | | ぬれこざらめ | 2.83 |
| 第 4 層 | 1.41 | 11.0 | 0.53 | 0.47 | ぬれこざらめ | 4.23 |
| 第 5 層 | 1.38 | 10.5 | 0.48 | 0.43 | ぬれざらめ | 4.39 |

試料は表面層の第1層から第5層までの5つの層から切り出した。

第1層の雪と第5層の雪とは乾き密度が同じである。しかしヤング率 $E$ は非常にちがい，第1層の雪の $E$ は第5層の $E$ の 2/3 ほどにすぎない。おなじくざらめ雪でありながら，第1層の雪の組織が弱いためであろう。しかし，第1層の雪が第5層の雪に比べ含水率が7割も高いことがその原因であるかも知れない。第5図から外挿によって 0°C でのヤング率を定めると，それは乾いた雪の 0°C でのヤング率 $E_d$ となる。第2表の $E$ の値は $E_d$ の 10 分の1にすぎない。ただこの $E_d$ はざらめ雪についてのものではなく，しまり雪についてのものであることに注意する必要がある。

## IV. 結　　論

連成振子で積雪及び氷の板に曲げ振動を起こさせて，そのヤング率 $E$ を測定した。この測定法は振動法であるが，用いた振動が 2 Hz という低周波振動である点に特徴がある。測定に供した試料は密度が 0.33 から 0.51 g/cm$^3$ までの雪と粒径が 10 mm 程の多結晶氷とである。−5°C から −60°C にいたる温度範囲で $E$ を求めたところ，どの試料についても −5°C から −35°C までは温度降下とともに $E$ が直線的に増大して，−35°C をすぎると一定値になった。

いままでにおこなわれた雪の $E$ の測定は，高周波振動によるにせよ静荷重によるにせよ，ほとんど皆 −30°C より高い温度でのものである。しかし多結晶氷については 100〜700 Hz の振動による 0°C 以下 −100°C まで測定があるし[5]，また 5〜200 MHz の超音波をつかって単結晶の5個の弾性率が 0°C 以下 −140°C まで測定されている[8]。200 Hz 以上の高周波で得られた雪の $E$ は温度によって変わらず，静荷重法で得られた雪の $E$ は温度降下とともに増大する。100 Hz 以上の曲げ振動による多結晶氷のヤング率 $E$ は温度降下とともに 0°C から −100°C まで直線的に増大し，超音波を利用して定められた単結晶氷の5個の弾性率も皆 −140°C まで温度降下とともに増大を続けた。$E$ が振動数によって変わることは雪や氷が粘弾性をもつと考えることによって説明出来ると思われる。しかし，その確実な説明には同一の氷や雪の試料の $E$ を高周波振動法，低周波の連成振子法，静荷重法を用いて測定する必要があろう。

新雪の焼結過程，またしまり雪を一度ほぐしてから集めて作った雪の焼結過程にともなうヤング率 $E$ の増大も調べた。湿った雪の $E$ の測定を野外でおこない，連成振子法が野外でも用いうることを示した。

著者のひとり油川は，この仕事を，北海道大学理学部地球物理学修士課程の学生としてお

こなった。仕事を進める上で，低温科学研究所若浜五郎助教授から多くの適切な助言を得た。ここに記して感謝の意を表します。

## 文　献

1) 吉田順五・笹谷雅信・内海威彦 1948 積雪の弾性と衝撃. 低温科学, 物理篇, **4**, 11–16.
2) 小島賢治 1954 積雪の粘弾性. 低温科学, 物理篇, **12**, 1–15.
3) 山地健次・黒岩大助 1955 振動法による積雪の弾性及び粘性の研究 I. 低温科学, 物理篇, **13**, 49–57.
4) 黒岩大助・山地健次 1957 振動法による積雪の粘弾性の研究 II. 低温科学, 物理篇, **15**, 43–58.
5) 山地健次・黒岩大助 1957 0°C～−100°C の範囲における氷の粘弾性 I. 低温科学, 物理篇, **15**, 171–183.
6) Le Rolland, Paul 1931 Méthode de résonance pour mesurer la rigidité et éprouver la stabilité d'une construction. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **192**, 336–338.
7) 田畑忠司 1958 海氷の力学的性質の研究 II—振動法による弾性率の測定—. 低温科学, 物理篇, **17**, 147–166.
8) Dantl, G 1968 Die elastischen Moduln von Eis-Einkristallen. *Phys. Kondens. Materie*, **7**, 390–397.

## Summary

In the photograph of Fig. 1 of the text, A and B are two solid cylinders of brass suspended at their tops by piano wires p's which are held across a rigid framework C made of thick brass plates. As both cylinders A and B are quite the same in dimension and weight, they swing at the same period $T$, composing thus one type of the so-called double pendulums. The whole of double pendulum is hung through four strings from plate E held aloft by a strong tripod. The bottom plate of framework C is fastened through connector D to the top edge of snow plate E which stands upright with its foot frozen to the floor of a cold room. If one of the two pendulums, say B, is pulled aside by hand and then let loose, a periodic force is exerted to the top edge of the snow plate, with the result that the whole of doulbe pendulum and the snow plate begin to oscillate as one body with a period almost the same as the period $T$ of free oscillation of each of pendulums A and B. Needless to say that the oscillation of the snow plate is a bending oscillation, because its foot is firmly fixed to the floor of the cold room. Although the whole of double pendulum continues oscillating, pendulum B does not keep swinging with a constant amplitude. Pendulum B decays gradually in swinging to come finally to a standstill after a time interval of $\tau/2$, while the other pendulum A starts to swing with growing amplitude in such a way that it attains a maximum value at the moment when pendulum B stops swinging. After that the energy of swinging is shifted reversely from pendulum A to pendulum B just in the same manner as it was shifted from pendulum B to pendulum A before, and, after another time interval of $\tau/2$ pendulum B is swinging most strongly whereas pendulum A comes to a standstill. Such a periodic shift of swinging energy will be repeated indefinitely at the period of $\tau$ between the two pendulums, if no energy dissipation takes place.

If a force $f$ is applied horizontally to the top edge of the snow plate standing on the floor, the top edge will be displaced by an amount $\xi$ which is proportional to the

force $f$, that is, $f$ and $\xi$ will be connected to each other by the equation

$$f = k\xi . \tag{1}$$

The proportional constant $k$ may be called the rigidness of the top edge of the snow plate. If the value of $k$ is known, Young's modulus $E$ of the snow plate can be given by

$$E = \frac{l^3}{2bc^3} k , \tag{2}$$

where $l$, $b$ and $c$ represent respectively the height, the width and the half thickness of the snow plate.

The period $\tau$ of energy shift of the double pendulum depends upon the rigidness $k$: the smaller $k$ is, the shorter $\tau$ becomes. It is shown by the theory of dynamics that there holds the following relationship between $k$ and $\tau$:

$$K = \alpha \frac{4\pi^2 m}{T^3} \tau . \tag{3}$$

where $m$ is the mass of each of pendulums A and B. The constant $\alpha$ is dimensionless and is given by

$$\alpha = mr^2/I , \tag{4}$$

if the distance between the center of gravity and the fulcrum of each pendulum and its moment of inertia around the fulcurum are denoted by $r$ and $I$. Therefore, if the period $\tau$ of shift of the swinging energy is determined experimentally, Young's modulus $E$ of the snow plate can be calculated by the aid of equations (2), (3) and (4).

The whole of double pendulum used by the present authors weighed 9.35 kg. Numerical values concerning the solid cylinders of brass constituting pendulums A and B were

$$a = 3.24 \text{ cm} , \quad L = 11.98 \text{ cm} , \quad m = 3352 \text{ g} , \quad r = 3.83 \text{ cm} ,$$

where $a$ and $L$ mean the radius and the length of each cylinder respectively. These numerical values give

$$I = 6.70 \times 10^4 \text{ g·cm}^2 , \quad T = 0.458 \text{ sec} ,$$

$$\alpha \frac{4\pi^2 m}{T^3} = 1.016 \times 10^6 \text{ dyn/cm·sec} .$$

Because of its visco-elastic nature, Young's modulus of snow determined by a vibrational method varies in value according as the frequency of the used vibration is varied, and, usually it is not an easy matter to carry out a vibrational measurement at a frequency lower than 100 Hz. As mentioned above, the snow plate connected to the double pendulum continues a bending oscillation of a period almost exactly coinciding with that of pendulums A and B, namely $T = 0.458$ sec. Therefore the double pendulum method described hitherto gives Young's modulus of snow at a frequency as low as 2.2 Hz.

The photograph in Fig. 2 of the text shows the lower half of pendulum B. To the end of a short rod protruding from the bottom of the pendulum is soldered a piece of platinum wire. It makes an uninterrupted contact with mercury pot $g$ placed on the bottom of framework C if the swinging amplitude of the pendulum is limited within a narrow range. Both the platinum wire and the mercury pot are connected by wires

to a recording voltmeter and a dry cell. Figure 3 gives an example of the curves recorded by tne voltmeter. The curve looks like a sequence of hills. Flat tops of the hills show the time intervals during which the platinum wire kept contact with the mercury pot. Therefore the middle points of flat tops as marked (2) and (4) give the moments when the pendulum came to a standstill, and the period $\tau$ of energy shift of the double pendulum can be obtained by measuring the distance between those middle points.

The low frequency Young's modulus $E$ was measured by the above mentioned method of a double pendulum not only on snow plates of various densities but also on a plate of commercial ice, at temperatures ranging from $-5$°C to $-60$°C. The results of the measurements are shown by curves in Fig. 4 of the text. Such decimals as 0.33 or 0.35 attached to each curve are densities of the samples counted in the unit of g/cm$^3$, the curve with 0.92 being for the plate of ice. All the curves show that Young's modulus $E$ rises with decreasing temperature until it reachces $-35$°C, and is kept at constant values from that temperature down to $-60$°C. Let the density and the temperature of the samples be denoted by $\rho$ and $\theta$ respectively. Then the results of the measure ments shown in Fig. 4, including those for ice, can be expressed approximately by the following formulas:

$$E=\left\{(1.08\,\rho-0.23)(|\theta|-5)+103\,\rho^{4.42}\right\}\times 10^9\,\mathrm{dyn/cm^2} \quad \text{for} \quad -5^\circ\mathrm{C}>\theta>-35^\circ\mathrm{C},$$

and

$$E=1.10\,\rho^{2.84}\times 10^{11}\,\mathrm{dyn/cm^2} \quad \text{for} \quad -40^\circ\mathrm{C}>\theta>-60^\circ\mathrm{C}.$$