



|                  |   |
|------------------|---|
| Title            | 熱収支を考慮した斜面下降風の非定常モデル  |
| Author(s)        | 坂本, 雄三; SAKAMOTO, Yuzo; 石田, 完 他   |
| Citation         | 低温科学. 物理篇, 31, 87-105   |
| Issue Date       | 1973-03-25  |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/18222">https://hdl.handle.net/2115/18222</a> |
| Type             | departmental bulletin paper   |
| File Information | 31_p87-105.pdf  |



## 熱収支を考慮した斜面下降風の非定常モデル

坂本 雄三

(北海道大学大学院 理学研究科)

石田 完

(低温科学研究所)

(昭和48年9月受理)

### I. ま え が き

斜面が冷却、加熱されることによって生ずる斜面風の理論としては、古くから Prandtl のものが有名である。彼は定常な場合について風速と温位の高度分布を与える式を理論的に導いた。そして、その理論式は実測とかなりよく一致するという論文<sup>1),2)</sup>も、いくつか発表されている。また Gutman らは、斜面の傾きが変化している場合について、数値実験を試みている<sup>3)</sup>。一方、このように斜面風の詳しい構造を研究するのに対して、Ball は南極の斜面下降風 (Katabatic Wind) について水力学的な観点から hydraulic jump が起きる条件を理論的に調べたり<sup>4)</sup>、バルク的な方法を用いて、下降風に及ぼす Synoptic な気圧場やコリオリ力の影響を研究している<sup>5)</sup>。

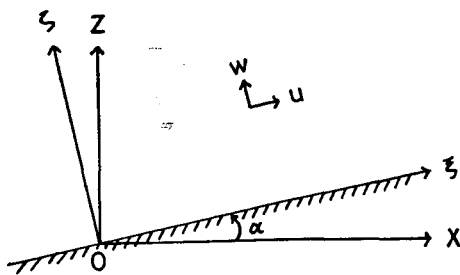
しかしながら、斜面風の原因が輻射によって斜面の表面が冷却されたり、加熱されたりすることにあるにもかかわらず、斜面の表面での正味輻射、大気からの顕熱と潜熱、斜面の下からの伝導熱などの収支を考慮した理論的研究はほとんどなされてこなかった。即ち、斜面が輻射によって、冷やされる(暖められる)と、斜面風が吹き出すが、風が吹き始めると、乱流によって垂直方向の熱交換が盛んになり、斜面は余り冷え(暖まら)なくなる。すると、斜面風自体も発達を抑えられ、ある強さのところで、ほぼ定常な流れになるはずである。このような考えのもとに1次元的ではあるが、斜面の表面での熱収支を考慮した斜面風のモデルを考えてみた。

そして、下降風の場合に限って、下降風がどんな構造をもって、どの程度まで発達するかということ、運動方程式とエネルギー式を数値積分することによって調べ、実際の観測データとの比較を行なってみた。

### II. 基礎方程式

斜面風に関する基礎方程式の導き方については、微気象学の教科書<sup>6),7)</sup>にもものっているが、方程式を簡略化するときの仮定を明瞭にするために、以下に述べる。

\* 北海道大学低温科学研究所業績 第1266号



第1図 座標軸のとりかた  
 $x-z$  座標系と  $\xi-\zeta$  座標系は斜面の傾斜角  $\alpha$  だけ傾いている

今、一定の傾斜角  $\alpha$  を持ち、無限に広がった斜面を考える。座標系は、第1図のように、斜面に沿って  $\xi$  軸、それに垂直に  $\zeta$  軸をとることにする。コリオリ力を無視すると、大気の運動は  $\xi-\zeta$  面についてだけ考えればよいから、運動方程式として(1)と(2)が、エネルギー保存則として(3)が、連続の式として(4)が成立する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + w \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -C_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial \xi} - g \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K_M \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial \xi} + w \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -C_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} - g \cos \alpha \quad (2)$$

但し、

$$\pi = \left( \frac{P}{P_{00}} \right)^{\frac{R}{C_p}} = \frac{T}{\theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + w \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K_H \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho w) = 0 \quad (4)$$

ここで、 $u, w$  はそれぞれ風速の  $\xi$  および  $\zeta$  成分であり、 $K_M, K_H$  はそれぞれ運動量および熱の渦動拡散係数である。その他の文字は、気象学で一般に用いられている物理量と同じである。

初期の状態における量を添字「0」を付けて表わし、初期条件として、まづ次の二つのことを仮定する。

i) 初期状態では大気は静止している。従って、(1)と(2)より静力学の方程式として、

$$0 = -C_p \theta_0 \frac{\partial \pi_0}{\partial \xi} - g \sin \alpha \quad (5)$$

$$0 = -C_p \theta_0 \frac{\partial \pi_0}{\partial \zeta} - g \cos \alpha \quad (6)$$

が成立する。

ii) 大気は一定の温位勾配  $B$  を持って、成層している。従って、

$$\theta_0(\xi, \zeta) = \theta_{00} + Bz = \theta_{00} + B(\xi \sin \alpha + \zeta \cos \alpha) \quad (7)$$

と書ける。但し、 $\theta_{00}$  は  $z=0$  における初期の温位である。

更に、方程式を簡単にするために、以下のことを仮定する。

iii) 初期の静止状態における量からの偏差量を添字「'」を付けて表わし、

$$\theta = \theta_0 + \theta' \quad (8)$$

$$\pi = \pi_0 + \pi' \quad (9)$$

とし、更に偏差量の2次以上の項は無視できる。

iv) 斜面の表面は一様に冷却、或いは加熱されると考える。従って、斜面が無限に広がっていることを考慮すると、

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} = \frac{\partial \pi'}{\partial \xi} = 0 \quad (10)$$

が成り立つ。

v) ブシネスク近似が成立する。これは、密度変化は重力と関係した項だけ考えればよいということであるから、連続の式(4)は

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \quad (11)$$

という簡単な形になってしまう。

また、境界条件として、以下の二つの事を仮定する。

vi)  $\zeta=0$  で、 $u=w=0$  である。

vii)  $\zeta=\infty$  で、 $u=\theta'=\pi'=0$  である。

以上の仮定とそれから導かれる事項により、方程式(1)~(4)は、以下の如く簡略化される。まづ、(10)と(11)より  $w=\text{constant}$  になるが、条件 vi) を考慮すれば、更に、 $w=0$  になってしまう。次に、(8)と(9)を(1)~(3)に代入して、(5)、(6)、(10)および条件 iii) を考えれば、結局 (1)、(2)、(3)は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\theta'}{\theta_0} g \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K_M \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \quad (12)$$

$$0 = \frac{\theta'}{\theta_0} g \cos \alpha - C_p \theta_0 \frac{\partial \pi'}{\partial \zeta} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + uB \sin \alpha = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K_H \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) \quad (14)$$

という簡単な形になってしまう。ところで、(13)は  $\theta'$  より  $\pi'$  を求めるのに使われる式であって、 $u$  と  $\theta$  を求めるには、(12)と(14)だけあれば、充分である。

### III. Prandtl の理論

有名な Prandtl の理論については、詳しいことは先に挙げた教科書に譲り、ここでは、その結果だけを引用して、その理論の問題点を検討してみることにする。

Prandtl は、斜面風が定常に達したときの風速と温位の高度分布を与える式を以下のように導いた。(12)と(14)において、定常ということと、渦動拡散係数が高さによって変化しないということを仮定すると、

$$0 = \frac{\theta'}{\theta_0} g \sin \alpha + K_M \frac{d^2 u}{d\zeta^2} \quad (15)$$

$$u B \sin \alpha = K_H \frac{d^2 \theta'}{d\zeta^2} \quad (16)$$

という、 $u$  と  $\theta'$  に関する二つの常微分方程式が導かれる。この連立微分方程式を境界条件 vi), vii) を考慮し解けば、 $u$  と  $\theta'$  の  $\zeta$  に関する分布を与える式として、

$$u(\zeta) = \theta'_0 \left( \frac{g K_M}{\theta_0 B K_H} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\zeta}{l} \exp \left( -\frac{\zeta}{l} \right) \quad (17)$$

$$\theta'(\zeta) = \theta'_0 \cos \frac{\zeta}{l} \exp \left( -\frac{\zeta}{l} \right) \quad (18)$$

但し、 $\theta'_0 = \theta'(0)$ : 表面での温位偏差

$$l = \left( \frac{4 K_M K_H \theta_0}{g B \sin^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{4}}$$

が得られる。

このように、Prandtl の理論では、風速の強さを決定するのに大きな寄与をしている斜面の表面での温位偏差  $\theta'_0$  という量は、境界値として任意に与えなければならず、斜面の諸性質がわかっているとしても、斜面風の強さを決定することはできない。更に、渦動拡散係数についても任意に与えなければならず、そもそも、その高度変化が考慮されていない。ところで、この  $\theta'_0$  は、本来斜面の表面における輻射量、大気からの潜熱や顕熱、斜面の下からの伝導熱などの収支から、決定することができる量である。そこで、次節で述べるように、表面での熱収支を考慮し、更に、渦動拡散係数についても、高度変化と安定度による変化をできるだけ考えた斜面風の数値的なモデルをつくってみた。

#### IV. モデル

##### 1) 方程式系

大気の運動方程式とエネルギー式として、(12) と (14) を用いる。斜面の表面から下については、斜面を構成している物質の温度を  $T$ 、熱拡散係数を  $\kappa$  として、熱伝導の式、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} \quad (19)$$

が成立するとする。

(14) と (19) は次に述べる表面での境界方程式によって結びつけられ、大気と斜面内部の温度分布が決定される。気温分布が求められれば、(12) より風速分布が決められる。但し、渦動拡散係数は、その時の風速と気温分布に従って、刻々変化してゆく。

##### 2) 表面での熱収支

(12) と (14) を結びつける境界方程式として表面での熱収支を表わす式

$$R_N + H + C = 0 \quad (20)$$

を用いた。ここで、 $R_N$ 、 $H$ 、 $C$  は正味輻射、大気からの顕熱、斜面の下からの伝導熱の熱流量で

ある。大気からの潜熱は大気中の水蒸気量が少ないものとして熱収支を考える際、無視した。  
今、表面に与える熱量を正にとると、(20)の各項は以下のように表わすことができる。

$$R_N = (1-\alpha_S) I_S + (1-\alpha_L)(I_L - \sigma T_S^4) \quad (21)$$

$$H = \rho C_p \left( K_H \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=z_0} \quad (22)$$

$$C = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} \quad (23)$$

ここで、 $I_S$ は日射による短波長輻射、 $I_L$ は大気からの長波長輻射、 $\alpha_S$ と $\alpha_L$ はそれぞれ短波および長波に関する反射率（計算を実行する段階では斜面を黒体と考えたので、 $\alpha_L=0$ とした。）、 $T_S$ は表面温度、 $\sigma$ はステファンの定数、 $z_0$ は粗度定数、 $\lambda$ は斜面を構成している物質の熱伝導率である。更に、 $I_S$ と $I_L$ に関しては、近藤<sup>8)</sup>が得た経験的な式を晴天であると仮定して用いた。それによると

$$I_S = J_0 \left( \frac{\bar{d}}{d} \right)^2 \cos \zeta \left\{ 0.3 + 0.7 \times 10^{-0.055(1+0.04e_m) \sec \zeta} \right\} \quad (24)$$

$$\cos \zeta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h \quad (25)$$

$$I_L = \sigma T_m^4 \left\{ 1 - (0.49 - 0.066 \sqrt{e_m}) \right\} \quad (26)$$

で与えられる。ここで、 $\zeta$ は太陽の天頂角、 $J_0$ は太陽定数、 $\bar{d}$ と $d$ は地球太陽間のそれぞれ、平均およびその時期での距離、 $e_m$ と $T_m$ は地表面付近の日平均水蒸気圧と気温、 $\varphi$ はその場所の緯度、 $\delta$ と $h$ は太陽の赤緯と時角である。

### 3) 境界条件の修正

大気乱流の理論に従い、斜面の表面での条件を

- i)  $u(z_0)=0$ ,
- ii)  $T(z_0)=T(0)$ ,

のように修正した。

また数値計算することを考慮して、大気の上層と斜面の下層における境界条件を以下のよう  
に与えた。

- iii)  $u(D)=0$ , および  $T(D)=\text{constant}$
- iv)  $T(-S)=\text{constant}$

ここで、 $D$ および $S$ は、温度がほぼ日変化しないと考えられる地上からの高度および表面からの深さであり、実際の値としては、 $D$ は数百 m、 $S$ は 1 m 程度が与えられる。

### 4) 渦動拡散係数

山本と島貫は、乱流輸送量が高さに関して一定であると考えられる地上数 10 m までの大気境界層において適用できるものとして、以下のような形で、運動量についての渦動拡散係数を与えた<sup>9)</sup>。

$$\zeta^* = -\sigma \frac{z}{L},$$

$$L = -u_*^3/k \cdot \frac{g}{\theta} \cdot \frac{H}{\rho \cdot C_p},$$

$$\phi^4 - |\zeta^*|^{1-2p} \phi^3 - 2\phi^2 + 1 = 0$$

$$K_M = \frac{ku_*z}{\phi}$$

ここで、 $\phi$  は  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{kz} \phi \left( \frac{z}{L} \right)$  によって、定義されるユニバーサル関数、 $\sigma$  と  $p$  は定数、 $u_*$  は摩擦速度、 $k$  はカルマン定数、 $L$  はモーンソンの長さである。山本と島貫は、 $\sigma$  として 15、 $p$  として不安定な場合は 0、安定な場合は 1/6 を与えている。この山本と島貫の式は厳密には平坦な土地において、定常な風が吹いているときにだけ成立するのであるが、今大胆にもこの式を斜面風の場合についても、表面が傾いていることに注意を払って適用してみることにする。そして温位と風速の分布および斜面に垂直な高度から  $K_M$  を求めることができるように以下のように変形した。

$$\frac{\zeta^*}{\phi} = - \frac{\sigma g \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \cos \alpha}{\theta \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2} \quad (27)$$

$$\phi^4 - \left| \frac{\zeta^*}{\phi} \right|^{1-2p} \phi^{4-2p} - 2\phi^2 + 1 = 0 \quad (28)$$

$$K_M = \left( \frac{k\zeta}{\phi} \right)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right| + \nu \quad (29)$$

但し、 $\nu$  は大気分子動粘性係数である。こうすれば、 $\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial \zeta}$  を与えることにより、(27) より  $\frac{\zeta^*}{\phi}$  が得られ、これを(28)に代入して  $\phi$  について解けば  $\phi$  が求まる。 $\phi$  がわかれば(29)より任意の高さにおける  $K_M$  が得られる。また、 $K_M$  と  $K_H$  については種々の議論があるが、ここでは  $K_M = K_H = K$  を仮定した。しかし、このようにして、それぞれの時刻ごとの  $K$  を計算し、 $u$  と  $\theta$  の時間変化を追っていったところ、それらの値は数分ですぐ発散してしまった。この原因は、斜面風の場合、 $\frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0$  となる層が必ずあり、その層では(29)から求められる  $K$  の値が  $\nu$  という極端に小さい値になってしまうためであろうと考えられる。そこで、(29)を適用できる条件として、 $\frac{\partial K}{\partial \zeta} \geq 0$  を仮定し、(29)を使って求められる  $K$  の値はこの条件が満たされている層においてのみ有効とした。また、この条件が満たされていない層では、その層の一つ下の層の  $K$  の値をその層の  $K$  の値として使うことができると仮定した。

このような仮定を設けても下の層より順に計算していけば、ある時刻における  $K$  の値は全層にわたって計算される。そして、 $K$  の値についてこのような方法を用いることによって、計算不安定をのがれることができた。

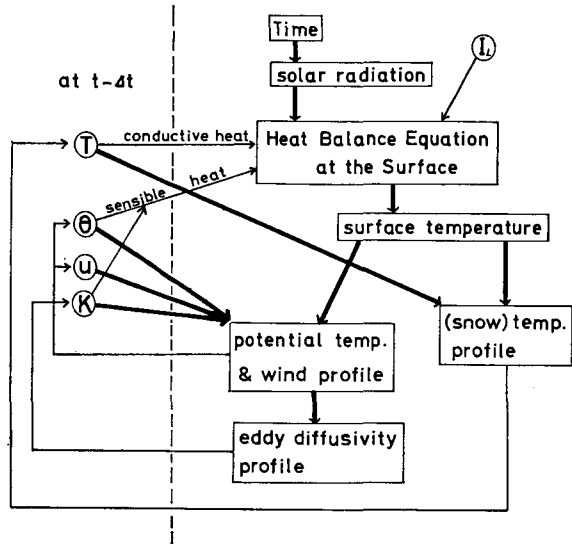
この方法は、物理的には根拠がないが、 $K$  が高さについて一定として得られた Prandtl の理論式が実際とかなりよく一致することから考えて、それ程大きな誤りがある方法とは思われない。

V. 数値計算の方法

地表面付近の気温  $T_m$  の値として  $T(D)$  を用い、各パラメータの値と斜面の中の初期の温度分布を与えれば、大気が静止している場合、(20) 式の中の未知変数は (25) 式の  $h$  (太陽の時角) だけとなり、 $h$  の値が計算される。この  $h$  の値を初期時刻とする。風速と気温の垂直分布を求める (12), (14) および斜面内部の温度分布を求める (19) の偏微分方程式は Sauliev の数値積分法<sup>10),11),12)</sup> によって解いた。

計算の手順は第 2 図に示すように、まづ時刻が定まると日射が計算される。従って表面温度の 4 次方程式で表わされている熱収支の式 (20) において、伝導熱の項を  $\Delta t$  時間前の時刻における  $T$  の値を使って、また顕熱の項を  $\Delta t$  時間前の時刻における  $\theta$  と  $K$  の値を使ってそれぞれ求めれば、この 4 次方程式は解くことができる。表面温度が決まると  $\Delta t$  時間前の時刻の  $u, \theta, T$  の値を併用することにより、現時点の  $u, \theta, T$  の分布が求められる。さらに求められた  $u, \theta$  の分布により (27), (28), (29) 式で  $K$  の垂直分布が計算される。そして再び熱収支の式にもどって次の時刻の計算に進むというのがおおよその計算方法の流れである。

Flow Chart of the Computation



第 2 図 計算の手順

破線の右側が現時点、左側は  $\Delta t$  時間前の時点

およその計算方法の流れである。偏微分方程式を差分方程式に直すとき、高さ或いは深さのきざみ  $\Delta z$  は、その対数をとったとき間隔が等しくなるように分割した。時間のきざみ  $\Delta t$  の値としては 15 秒と 30 秒とについて計算してみたが最大、風速で数 cm/s, 温度で 0.1°C の違いしかなかった。従って計算の誤差はこの範囲であると考えてよい。

VI. 計算例と実測値との比較

(1) 伯方島での観測との比較

今岡は、瀬戸内海の伯方島で 1961 年の 10 月から 11 月にかけて、斜面下降風の観測を行なった<sup>2)</sup>。第 3 図に、その観測点周辺の地図を示す。観測点は谷から海岸にかけて幾つかあったが、そのうち V2, V3, V5 の 3 点におけるデータを用いた。IV 節で示したモデルを用いて数値計算を実行する際、第 1 表の 1) で示すパラメータの値を用い、地温の初期分布が直線分布であるということを仮定した。

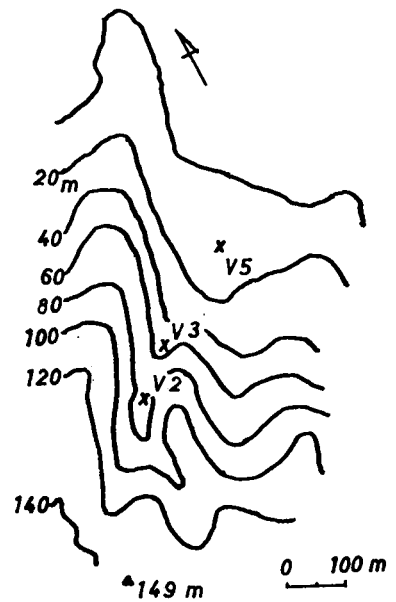
計算で得られた地上 1 m の風速、30 cm の気温、および地表面における正味輻射、顕熱、伝導熱の各熱流量の時間変化を第 4 図の実線で示す。破線と一点鎖線は観測値であり、各観測点

名を付記してある。また第5図に計算で得た風速と気温の高度分布の時間変化を示す。この図の中で白丸は19時におけるV5点での観測値である。観測を行なった場所が谷状の地形で、モデルの無限に広がった斜面とは異なるが、風速と気温について時間変化・高度分布ともほぼ実測値と一致した。また第4図から明らかのように、斜面の傾斜が数度以上ある場合は、日没と共に下降風はほぼ定常になることが確かめられた。

(2) パラメーターの値が及ぼす影響

このモデルで計算される風速や気温が、計算する際に与えられるパラメーターの値を1個だけ変えたとき、どのような影響を受けるかを調べてみた。第1表の2)代表値で示すパラメーターの値を仮定した場合(斜面は雪でおおわれているとした)、最も下降風が発達する日の出時における風速と気温の高度分布を第6図の実線で示す。ここで、これらの代表値の内、粗度定数だけを大きくして10 cmに変えた場合(点線)、斜面を構成している物質を雪から土に変えた場合(熱伝導率、熱拡散係数が変わる。アルベードは変えなかった。一点鎖線)、斜面の傾斜角だけを小さくして5度に変えた場合(破線)の計算結果をあわせて示してある。

粗度定数が大きくなると表面での顕熱が増加するため、また斜面が熱伝導率の大きな土に変わると伝導熱が増すため表面は冷えにくくなり、下降風はやや衰えることが判った。ここで



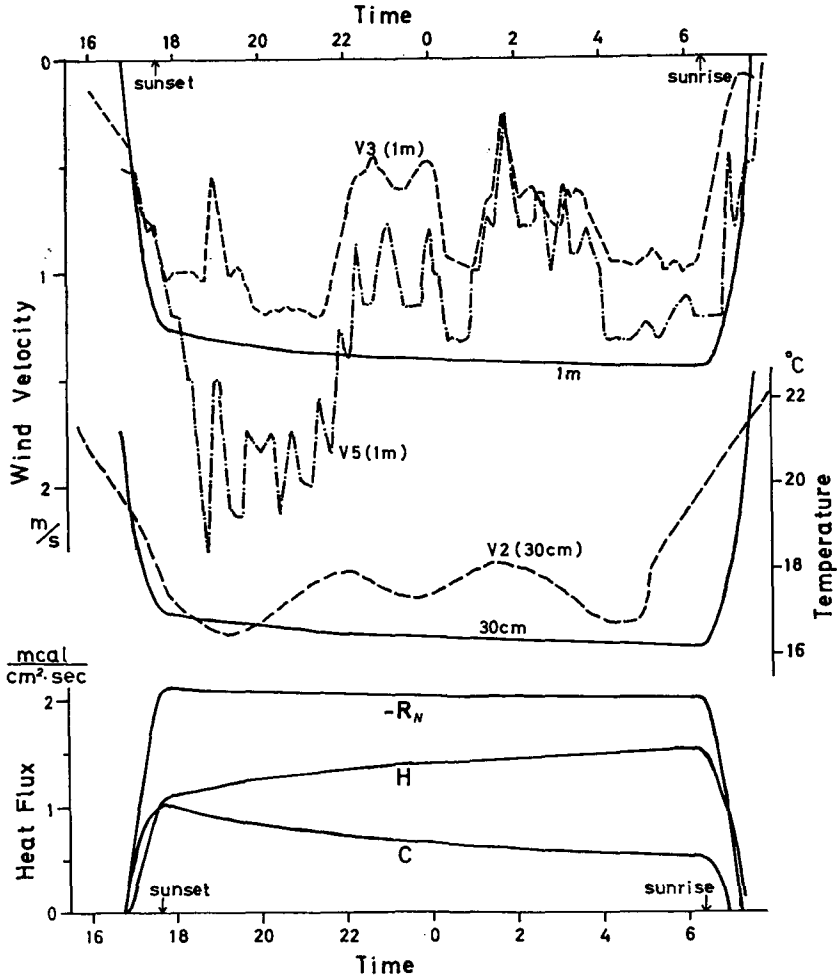
第3図 伯方島の地図の一部  
V2, V3, V5は観測点を示す

第1表 数値計算をするとき仮定されたパラメーターの値の一覧表

| パラメーター            | 1) 伯方島                | 2) 代表値               | 3) みずほ基地             | 単位                 |
|-------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|--------------------|
| 緯度: $\varphi$     | 34.23                 | 43.0                 | -70.7                | deg.               |
| 太陽赤緯: $\delta$    | -8.23 (15. Oct.)      | 10.0 (Feb.)          | -23.0 (Dec.)         | deg.               |
| アルベード: $\alpha_s$ | 20.0                  | 60.0                 | 77.0                 | %                  |
| 粗度定数: $z_0$       | 25.0                  | 1.0                  | 0.05                 | cm                 |
| 熱伝導率: $\lambda$   | $2.63 \times 10^{-3}$ | $3.0 \times 10^{-4}$ | $1.0 \times 10^{-3}$ | cal/cm·s·°C        |
| 熱拡散係数: $\kappa$   | $5.0 \times 10^{-3}$  | $2.5 \times 10^{-3}$ | $4.0 \times 10^{-3}$ | cm <sup>2</sup> /s |
| 傾斜角: $\alpha$     | 10.0                  | 10.0                 | 0.332                | deg.               |
| 温位勾配: $B$         | 0.6                   | 1.0                  | 0.6                  | °C/100 m           |
| 水蒸気圧: $e_m$       | 12.0                  | 1.5                  | 0.0                  | mb                 |
| 上限の高さ: $D$        | 100.0                 | 200.0                | 280.0                | m                  |
| 下限の深さ: $S$        | 1.0                   | 0.5                  | 1.0                  | m                  |
| 上限の気温: $T(D)$     | 20.9                  | -2.0                 | -11.0                | °C                 |
| 下限の温度: $T(-S)$    | 21.3                  | 0.0                  | -28.2                | °C                 |

註: 雪の熱伝導率と熱拡散係数、雪面の粗度定数の値は文献 13), 14), 15), 16)による

Oct. 15, 1961 at Hakatajima



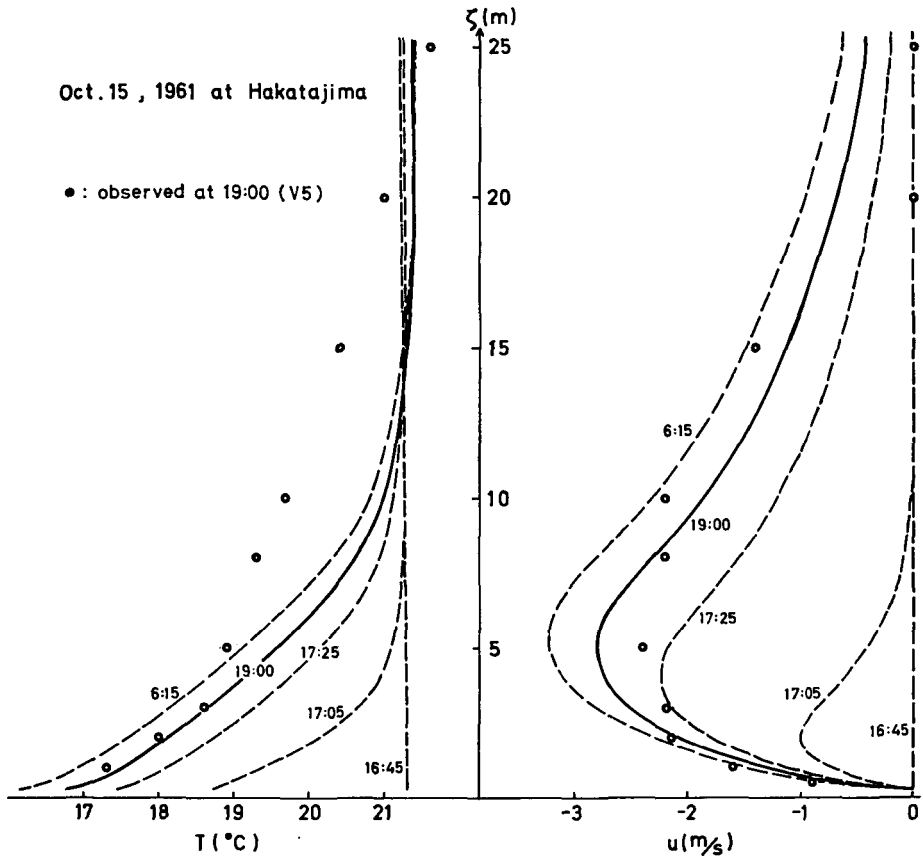
第4図 伯方島で観測された一定高度での風速と気温の時間変化と計算値  
実線が計算値、破線と一点鎖線が観測値

注目されるのは、斜面の傾斜角が小さくなると、かえって下降風は発達するということである。このことは斜面傾斜が小さくなると大気は流れにくくなるが、風が弱ければ斜面がよく冷えるため、結果的に傾斜が大きなきより強い流れになった時点で平衡に達するためであると解釈される。

そこで斜面の傾斜角以外の条件が同じとき、日の出時に最も強い流れになる傾斜角を求めてみた。第7図は各傾斜角に対して、日の出時における高度5, 15, 25, 35 mでの風速を表わしたものである。傾斜角以外のパラメーターは第1表2)の代表値を用いた。傾斜角以外のパラメーターがこのような値をとるときは、約0.2度の斜面で最も強い流れとなる。

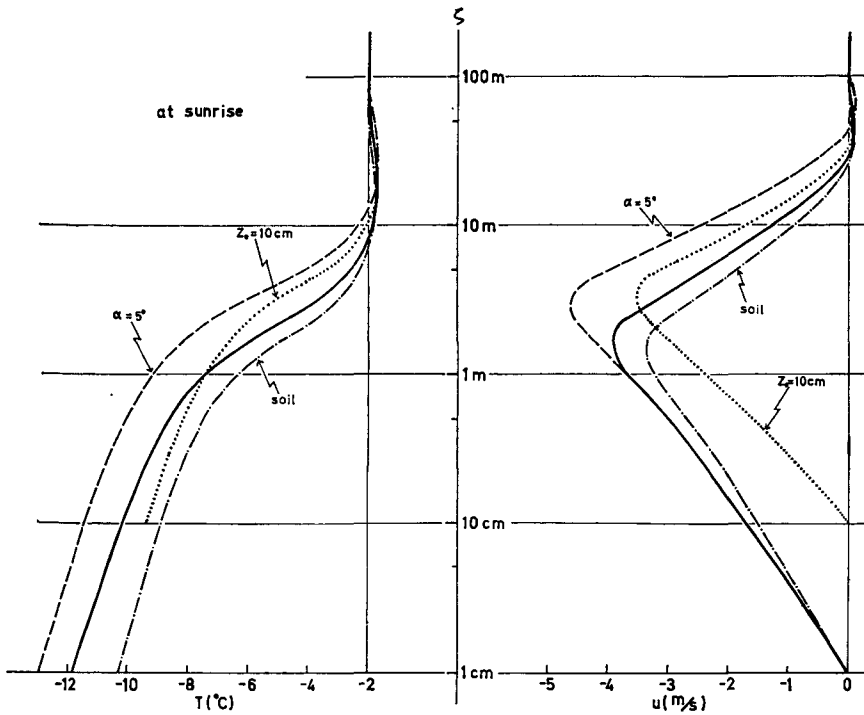
(3) 南極大陸の斜面下降風とその日変化

最後に興味ある例として、南極みずほ観測拠点における観測データとの比較を試みた。



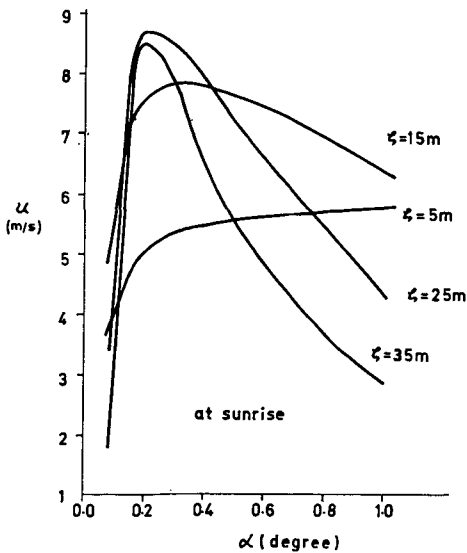
第5図 伯方島で観測された風速と気温の高度分布, および計算で求めた高度分布の時間変化  
 白丸が19時における観測値, 実線が同時刻における計算値

第8図に第11次日本南極観測隊雪水部門, 清水弘らの測量によるみずほ観測拠点周辺の地図を示す。斜面の傾斜角は一定ではないが, 大きな峰や谷はなく, このモデルを用いるのに適している。観測は第12次隊山田知充, 他によって1971年10月から翌年1月まで行なわれたが, そのうち12月27日から29日にかけての正味輻射量, 気圧, 地上1.8 mにおける気温, 深さ18 cmにおける雪温, 地上5 mにおける風速と風向を第9図に示す。風向がほぼ一定であることと, 風速の高度分布を調べてみると高度5~10 cmに最大値が現われていることから, ここで観測された風は斜面下降風にちがいない。第9図で注目されることは, 気温が最高を14時から16時の間に, 最低を2時から4時の間に示しているのに対して, 風速も日変化して, 最大を8時から12時の間に, 最小を20時から22時の間に示していることである。つまり気温と風速は一定の位相差をもって日変化している。風速と気温がこのような日変化を示すことは, それほど稀れたことではなく, 1971年10月初旬から1972年1月中旬にかけて約50%がこのような日変化を示し, 長いときは1週間以上も持続したことがあった。もし下降風の変化が斜面の表面温度の変化に完全に対応しているものならば, 気温が最低値をとるときに風速は最大値をと

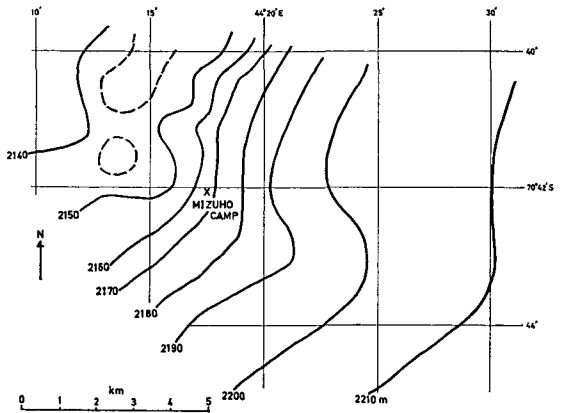


第6図 パラメーターの値の変化が風速と気温の高度分布に及ぼす影響

実線は第1表の2)代表値を与えたとき、点線は粗度定数だけを10cmに変えたとき、破線は傾斜角だけを5度に変えたとき、一点鎖線は熱伝導率と熱拡散係数だけをそれぞれ  $2.5 \times 10^{-3} \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C}$ ,  $6.0 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$  に変えたときの日の出時における計算結果

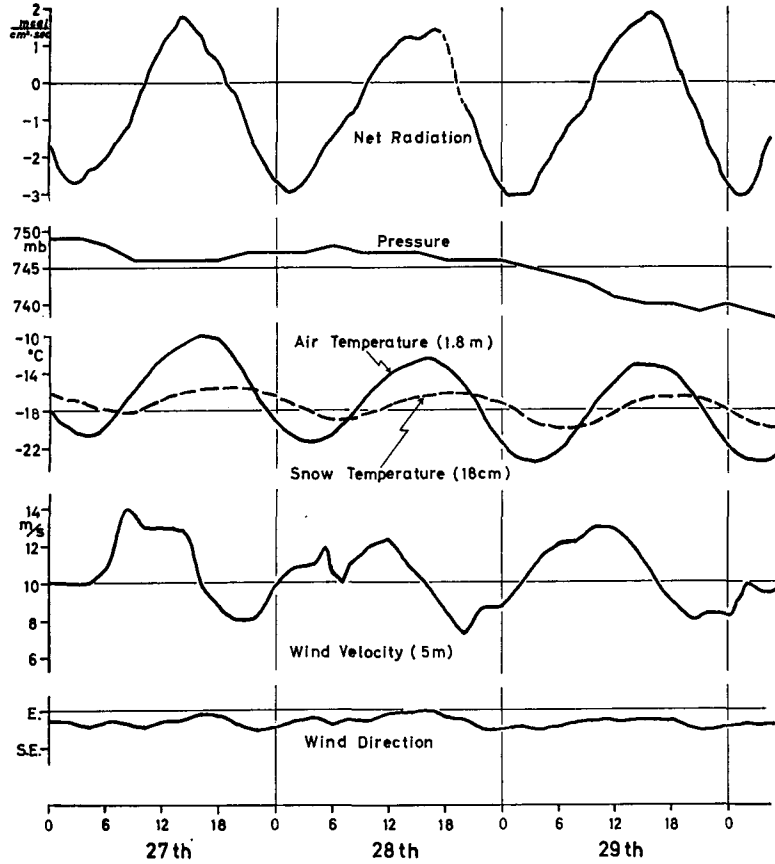


第7図 斜面の傾斜角が風速に及ぼす影響  
風速はすべて日の出時における値

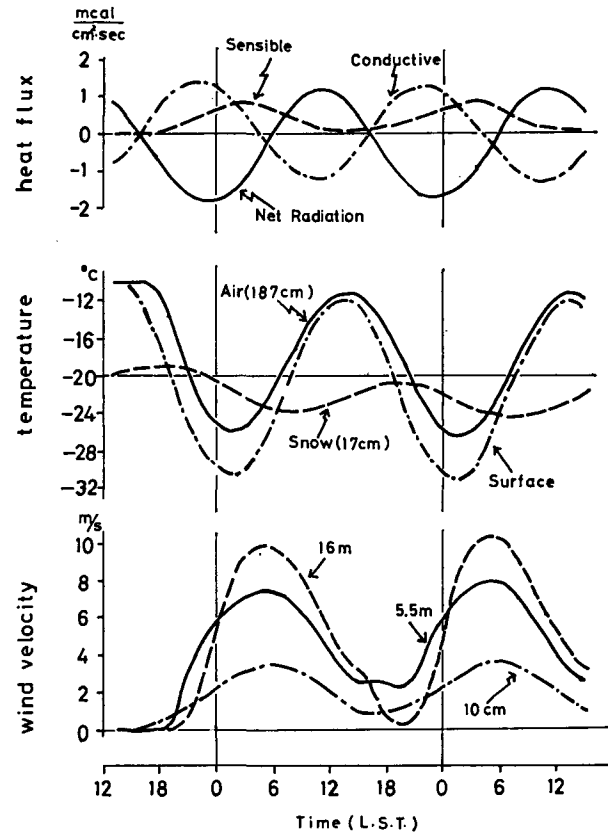


第8図 みずほ観測拠点周辺の地図

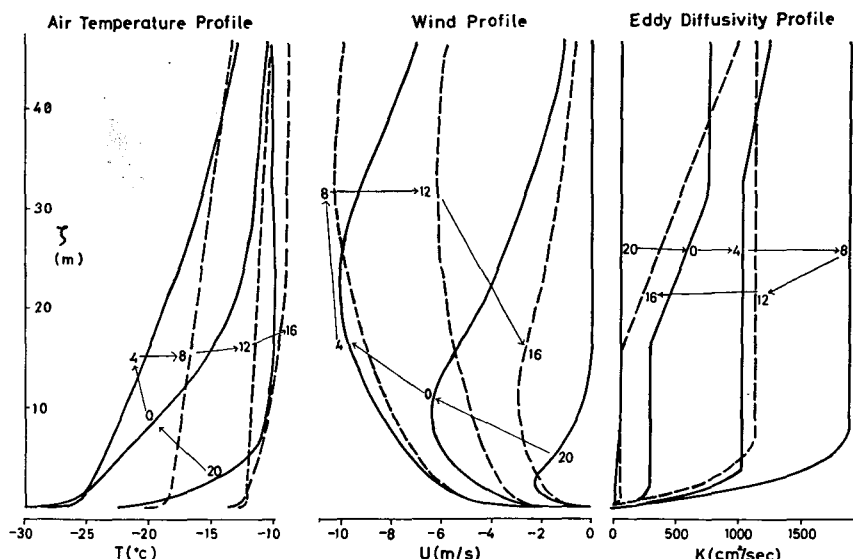
December 1971 at Mizuho Camp



第9図 みずほ観測拠点に於ける観測データ



第10図 計算で求めた熱流量、気温、雪温、風速の日変化



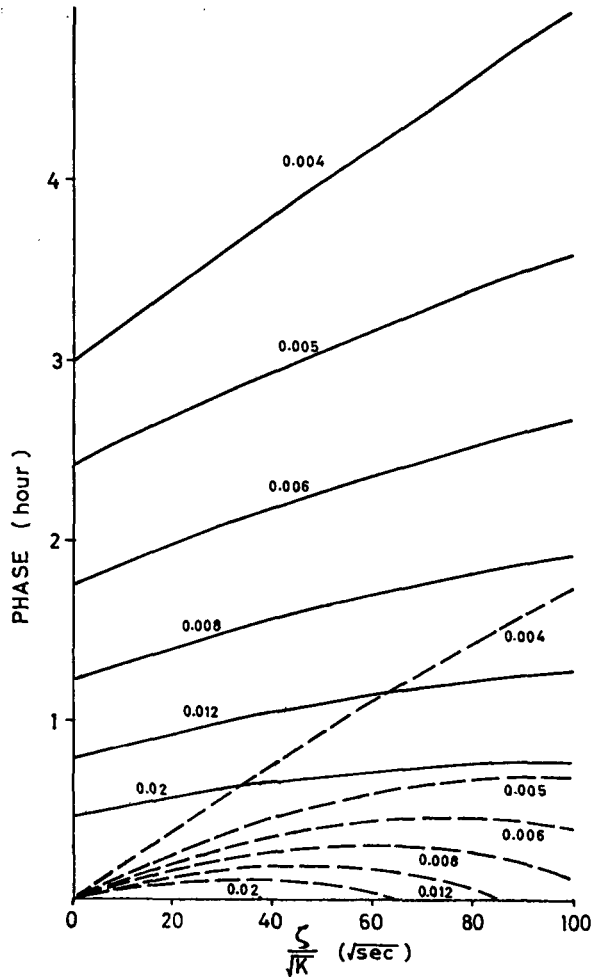
第 11 図 計算第 1 日目における気温・風速・渦動拡散係数の高度分布の時間変化  
図中の数字は時刻を示す

て完全な逆位相となるはずである。事実、この節の (1) で明らかなように、斜面が数度以上の傾斜角を持っている場合は、気温と風速の時間変化はほぼ完全に対応していた。ところが斜面の傾きが緩くなると、気温が下がっても大気はすぐには流れださず、風速は気温に対して遅れて変化するであろう。このような予想の下に第 1 表の 3) で示すパラメーターの値と、日平均気温が  $-22^{\circ}\text{C}$ 、初期の雪温分布が指数関数で表わされると仮定して 2 日間の計算を行なった。その結果を第 10, 11 図に示す。第 11 図では第 9 図の実測値に対応して、表面における熱流量、地上 187 cm の気温、表面温度、深さ 17 cm の雪温、地上 16, 5.5, 0.1 m の風速をそれぞれ時間に対して記入してある。第 11 図は気温、風速、渦動拡散係数の高度分布の時間変化である。これらの計算結果を第 9 図の実測値と比較すると以下ようになる。

i) 南極の斜面下降風の特徴である気温と風速の位相差は、計算でも 4~5 時間というほぼ実測値と一致する結果が得られた。しかし気温・風速・正味放射量の個々の日変化を比べると、それらの最大値・最小値が計算では実測値より 2~3 時間早く現われている。

ii) 日変化の振幅や絶対的な値については、計算では最低気温が低くなり過ぎたため、正味放射量の変化においても最小放射量が実測値より大きな値となった。しかし最低気温がこのように実測値より低くなったにもかかわらず、計算で得た風速は全体として実測値より 5 m/s ほど小さい値である。これらの不一致は計算するときの初期条件を静止大気と仮定したことと、モデルが 1 次元であることに原因があると思われる。

iii) 風速と気温の高度分布について計算結果と比較しうるような詳しい観測はなかった。しかし、山田らの観測によると風速が最大を示す高度は雪面上 10 cm 位のことが多かったようである。この観測が正しければ、第 11 図から明らかなように計算で得た最大風速の高度は大きすぎることになる。



第12図 斜面の傾斜角が風速と気温の位相に与える影響

種々の  $\alpha$  値を仮定したときの  $\zeta/\sqrt{K}$  に対する  $\varphi_u/\omega$  と  $\varphi_\theta/\omega$  の値を実線と破線で示す。図中の数字は、そのとき仮定された  $\alpha$  の値で radian で示してある。ただし  $B=0.6 \times 10^{-4} \text{K/cm}$ ,  $\theta_0=253^\circ\text{K}$ ,  $\omega=7.27 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$

(4) 斜面の傾斜角が気温の位相差に与へる影響

気温と風速の日変化における位相差については、斜面の傾斜角の値が大きく影響しているので、以下のような理論的考察を行なった。この考察では渦動拡散係数を一定と仮定したので、その結果は厳密には正しくないが、傾斜角の値が及ぼしている影響の程度を知るには十分であらう。

今、(12), (14) において、 $K_M=K_H=K$  =一定と仮定すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\theta'}{\theta_0} g \sin \alpha + K \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + uB \sin \alpha = K \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \zeta^2} \tag{31}$$

となる。この偏微分方程式の解として

$$u = U(\zeta) \exp(i\omega t), \quad (32)$$

$$\theta' = \Theta(\zeta) \exp(i\omega t) \quad (33)$$

なる周期解を仮定する。さらに境界条件

$$U(0) = U(\infty) = \Theta(\infty) = 0, \quad (34)$$

$$\Theta(0) = \Theta_0 = \text{constant} \quad (35)$$

を考慮すると、 $u$  と  $\theta'$  の実数解は

i)  $\sin \alpha \geq \omega \sqrt{\frac{\theta_0}{gB}}$  のとき

$$u = \frac{U_0}{2} \left\{ -\exp(-\mu_1 \zeta) \sin(\omega t - \mu_1 \zeta) + \exp(-\mu_2 \zeta) \sin(\omega t + \mu_2 \zeta) \right\}, \quad (36)$$

$$\theta' = \frac{\Theta_0}{2} \left\{ \exp(-\mu_1 \zeta) \cos(\omega t - \mu_1 \zeta) + \exp(-\mu_2 \zeta) \cos(\omega t + \mu_2 \zeta) \right\} \quad (37)$$

ii)  $\sin \alpha < \omega \sqrt{\frac{\theta_0}{gB}}$  のとき

$$u = \frac{U_0}{2} \left\{ -\exp(-\mu_1 \zeta) \sin(\omega t - \mu_1 \zeta) + \exp(-\mu_2 \zeta) \sin(\omega t - \mu_2 \zeta) \right\}, \quad (38)$$

$$\theta' = \frac{\Theta_0}{2} \left\{ \exp(-\mu_1 \zeta) \cos(\omega t - \mu_1 \zeta) + \exp(-\mu_2 \zeta) \cos(\omega t - \mu_2 \zeta) \right\}, \quad (39)$$

ただし

$$\mu_1 = \sqrt{m^2 + \frac{\omega}{2K}}, \quad \mu_2 = \sqrt{\left| m_2 - \frac{\omega}{2K} \right|},$$

$$m = \left( \frac{gB \sin^2 \alpha}{4\theta_0 K^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad U_0 = \Theta_0 \sqrt{\frac{g}{B\theta_0}}$$

となる。なお(30)(31)との定常解として

$$u_1(\zeta) = u_0 \exp(-m\zeta) \sin(m\zeta), \quad (40)$$

$$\theta_1(\zeta) = \theta'_0 \exp(-m\zeta) \cos(m\zeta), \quad (41)$$

ただし

$$u_0 = \theta'_0 \sqrt{\frac{g}{B\theta_0}}$$

が得られるが、これらの解を(36)~(39)の $u$ と $\theta'$ の周期解に重ね合わせたものも(30)と(31)を満足する。(36)と(38)を $u = A_u \cos(\omega t - \varphi_u)$ , (37)と(39)を $\theta' = A_\theta \cos(\omega t - \varphi_\theta)$ という形に書きなおすと、風速と気温に関する位相 $\varphi_u$ ,  $\varphi_\theta$ は次のように与えられる。

i)  $\sin \alpha \geq \omega \sqrt{\frac{\theta_0}{gB}}$  のとき

$$\varphi_u = \tan^{-1} \left( \frac{-C_1 + C_2}{S_1 + S_2} \right), \quad (42)$$

$$\varphi_\theta = \tan^{-1} \left( \frac{S_1 - S_2}{C_1 + C_2} \right) \quad (42)$$

ii)  $\sin \alpha < \omega \sqrt{\frac{\theta_0}{gB}}$  のとき

$$\varphi_u = \tan^{-1} \left( \frac{-C_1 + C_2}{S_1 - S_2} \right), \quad (44)$$

$$\varphi_\theta = \tan^{-1} \left( \frac{S_1 + S_2}{C_1 + C_2} \right) \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし} \quad C_1 &= \exp(-\mu_1 \zeta) \cos(\mu_1 \zeta), & C_2 &= \exp(-\mu_2 \zeta) \cos(\mu_2 \zeta), \\ S_1 &= \exp(-\mu_1 \zeta) \sin(\mu_1 \zeta), & S_2 &= \exp(-\mu_2 \zeta) \sin(\mu_2 \zeta) \end{aligned}$$

である。いま  $\alpha$  が  $\varphi_u$  と  $\varphi_\theta$  の値にどのような影響を及ぼすかを知りたいのであるが、(42)~(45)で判るように  $\mu_1 \zeta$  と  $\mu_2 \zeta$  の値を与えれば、 $\varphi_u$  と  $\varphi_\theta$  は決定される。そこで

$$\mu_1 \zeta = \frac{\zeta}{\sqrt{K}} \left\{ \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{gB}{\theta_0}} \sin \alpha + \omega \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \mu_2 \zeta = \frac{\zeta}{\sqrt{K}} \left\{ \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{gB}{\theta_0}} \sin \alpha - \omega \right| \right\}^{\frac{1}{2}}$$

であるから値を決めにくい  $\zeta/\sqrt{K}$  を独立変数と考え、 $\alpha$  をパラメーターとして  $\varphi_u$  と  $\varphi_\theta$  を計算した。1例として、 $g=980 \text{ cm/s}^2$ ,  $B=0.6 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$ ,  $\theta_0=253 \text{ K}$ ,  $\omega=2\pi/1 \text{ day}=7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  とした場合の  $\zeta/\sqrt{K}$  に対する  $\varphi_u/\omega$  と  $\varphi_\theta/\omega$  の変化を種々の  $\alpha$  の値に対してグラフにし第12図に示した。実線が風速の位相、破線が気温の位相を表わし、それぞれに傾斜角が radian で付記されている。渦動拡散係数  $K$  として、どの程度の値を選ぶかが大きな問題ではあるが、傾斜角  $\alpha$  を小さくしてゆけば、 $\varphi_\theta$  の増加より  $\varphi_u$  の増加の方が遙かに大きいので、風速と気温の位相差が急激に大きくなることは明白である。

## VII. む す び

表面での熱収支を考慮することによって、ある斜面が与えられた場合、どの程度の斜面下降風が吹くかということが計算できることを示した。しかし、このモデルの適用性については、さらに検討の余地が残っている。とくに、南極大陸などのように規模の大きな斜面では、このような1次元モデルでは説明できない現象が起っていることが十分予想される。このことを確かめるには2次元モデルを作成しなければならないが、数値実験の第1段階の範囲では本論文で示した1次元モデルでも、ある程度満足できる結果が得られた。

おわりに、みずほ観測拠点で観測を行ない、そのデータを提供された低温科学研究所物理学部門の山田知充助手に深く感謝します。なお、計算は北海道大学大型計算機センターのFACOM 230-60によって行なった。

## 文 献

- 1) Lettau, H. H. 1966 A case study of katabatic flow on the South Polar Plateau. *Antarctic Res. Ser.*, **9**, 1-11.
- 2) 今岡円七 1964 斜面下降風の構造に関する観測とその考察. 農業気象, **20**, 17-23.
- 3) Perov, V. L., Mal'Bakhov, V. M. and Gutman, L. N. 1967 Non-linear non-stationary model of slope winds. *Izv. Atmos. Oceanic Phys. Ser.*, **3**, No. 11, 694-698.

- 4) Ball, F. K. 1956 The theory of study katabatic wind. *Austral. J. Phys.*, **9**, No. 3, 373-386.
- 5) Ball, F. K. 1960 Winds on the ice slope of Antarctica. *In Antarctic Meteorology* (Pergamon Press, New York), 9-16.
- 6) Sutton, O. G. 1953 *Micrometeorology*. McGraw-Hill. 333 pp.
- 7) 浅井富雄 1971 П. H. ГYТMAH によるメソ気象学的過程の非線型理論序説. 気象研究ノート, 第108号. 149 pp.
- 8) Kondo, J., 1967 Analysis of solar radiation and downward long-wave radiation data in Japan. *Sci. Rep. Tohoku Univ., Ser. 5*, **18**, 91-124.
- 9) Yamamoto, G. and Shimanuki, A. 1966 Turbulent transfer in diabatic conditions. *J. Meteorol. Soc. Japan*, **44**, 301-307.
- 10) Maykut, G. A. and Untersteiner, N. 1969 Numerical Prediction of the Thermodynamic Response of Arctic Sea Ice to Environmental Changes. United States Air Force Project Rand. MEMORANDUM RM-6093-PR, 173 pp.
- 11) Sauliev, V. K. 1957 A method of numerical solution for the diffusion equation (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR (NS)*, **115**, 1077-1079.
- 12) Sauliev, V. K. 1957 Numerical integration of parabolic equations (in Russian). *Ibid.*, **117**, 36-39.
- 13) Dalrymple, P. C., Lettau, H. H. and Wollaston, S. H. 1966 South pole micrometeorology program: Data analysis. *Antarctic Res. Ser.*, **9**, 13-57.
- 14) Budd, W. F., Dingle, W. R. J. and Radok, 1966 The Byrd snow drift project: Outline and basic results. *Antarctic Res. Ser.*, **9**, 71-134.
- 15) 吉田順五・岩井 裕 1950 積雪塊の熱伝導率の測定. 低温科学, **3**, 79-87.
- 16) 大浦浩文・小林大二・小林俊一 1967 地ふぶき時における風速の垂直分布特性 I. 低温科学, 物理篇, **25**, 73-88.

### Summary

Prandtl's stationary theory has been renewed in the theoretical studies of slope winds. It has been specified in several works that distributions of wind and temperature predicted by him are in good agreement with observed ones. Height dependency of eddy diffusivity, however, was taken no account of in his theory. Furthermore, the value of the temperature disturbance  $\theta_0$  on the surface of a slope, which makes a great contribution to a wind speed, must be arbitrarily determined as a boundary value. Therefore, a wind profile cannot be obtained theoretically, even though we know atmospheric conditions and the characteristics of the slope, whereby the value of  $\theta_0$  should be determined by considering a heat balance at a surface, i. e. a balance among net radiation, sensible heat, latent heat, conductive heat from under the surface and so forth.

Now, the discussion is restricted to the case of a katabatic wind. Air is cooled from the lower layer because of a large amount of emission of radiative heat from the surface in the clear night. Then, the cooled air parcel is heavy enough to flow out down the slope. The sensible heat from the upper layer increases because of turbulent mixing with an increase of a wind speed. At last, the upward radiative heat begins to balance the sensible heat, so that cooling at the surface is suppressed. As a consequence, a katabatic wind develops no longer.

According to such considerations, the pattern of the katabatic wind development during the night could be simulated by giving the characteristics of the slope and the initial conditions of the atmosphere. The numerical model of katabatic winds was con-

structed although it is a one-dimensional one.

The following were adopted as equations of momentum and energy :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{\theta}{\theta_0} - 1 \right) g \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + uB \sin \alpha = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} \quad (3)$$

where  $\zeta$  is coordinate measured normal to the slope (Fig. 1),  $u$  component of wind velocity parallel to the slope,  $\theta$  potential temperature,  $\theta_0$  potential temperature in the initial state,  $K$  eddy diffusivity,  $B$  lapse rate of potential temperature in the initial state,  $\alpha$  angle of inclination of the slope,  $T$  temperature of the material forming the slope,  $\kappa$  its thermal diffusivity. (2) is connected with (3) by the following equations with regard to the energy budgets at the interface :

$$R_N + H + C = 0, \quad (4)$$

$$R_N = (1 - \alpha_S) I_S + I_L - \sigma T_S^4, \quad (5)$$

$$H = \rho C_p \left( K \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=z_0}, \quad (6)$$

$$C = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0}, \quad (7)$$

where  $R_N$  is net radiative flux,  $H$  sensible heat flux,  $C$  conductive heat flux,  $I_S$  solar radiation,  $I_L$  incoming long wave radiation,  $\alpha_S$  albedo for solar radiation,  $T_S$  surface temperature,  $\rho$  density of air,  $C_p$  specific heat of air,  $z_0$  roughness parameter of the slope,  $\lambda$  heat conductivity of the material forming the slope. But the latent heat was considered negligible in (4). The empirical formulae by Kondo (1967) were used to estimate  $I_S$  and  $I_L$ .

For the purpose of calculating eddy diffusivities from a wind and temperature distributions, the equations obtained by Yamamoto and Shimanuki (1966) were rewritten as follows :

$$\frac{\zeta^*}{\phi} = - \frac{\sigma g \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}}{\theta \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2} \cos \alpha, \quad (8)$$

$$\phi^4 - \left| \frac{\zeta^*}{\phi} \right|^{1-2p} \phi^{4-2p} - 2\phi^2 + 1 = 0, \quad (9)$$

$$K = \left( \frac{k \zeta^*}{\phi} \right)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right| + \nu, \quad (10)$$

where  $\phi$  nondimensional shear function,  $\zeta^*$  dimensionless height,  $k$  Karman constant,  $\nu$  kinematic viscosity of air,  $\sigma=15$ ,  $p=0$  for an unstable condition,  $p=1/6$  for a stable condition. Plausible values of eddy diffusivities could be calculated by assuming  $\frac{\partial K}{\partial \zeta} \geq 0$ , besides these equations.

Numerical integration of (1), (2) and (3) was carried out, and the results were compared with the data observed actually.

Firstly, a comparison was made with the wind and temperature profiles obtained by Imaoka (1961). The calculated results agree fairly well with the observational data (Figs. 4 and 5) though observations were made in the valley (Fig. 3). Secondly, effects of some important parameters used in this model on a wind profile were investigated. Consequently, the following were found (Fig. 6):

1) A katabatic wind develops somewhat better on the slope covered with snow than on the slope where soil is exposed.

2) A relatively strong air flow occurs with a decrease of the roughness parameter of the slope.

3) A wind speed increases with a decrease of the angle of inclination of the slope though it takes a longer time to develop a katabatic wind. But a katabatic air flow is the strongest at the sunrise at places where  $\alpha=0.2^\circ$  (Fig. 7).

Finally, the katabatic winds in Antarctica were simulated. A katabatic air flow occurs all day long on the slopes in Antarctica where radiational cooling dominates at all times. Furthermore, it was found from the data obtained at Mizuho Camp that winds had diurnal variations with an amplitude of 4~6 m/s at 5 m and the phase difference from variations of temperature at 1.8 m of 4~6 hours (Fig. 9). The simulation showed that the phase difference between the wind speed and the temperature agreed fairly well with the actual data, though their absolute values contradicted (Figs. 11 and 12). The assumption of a static air condition as the initial condition and the one-dimensionality of this model might have yielded the discrepancies. However, results obtained from this model are looked on as satisfactory for a one-dimensional simulation.