HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	プラウ除雪の理論　I ： 流動型高速プラウ前縁蹴あげ
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科學. 物理篇, 32, 39-53
Issue Date	1974-03-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18244
Type	departmental bulletin paper
File Information	32_p39-53.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Zyungo YOSIDA 1974 Theoretical Studies on Snow Removal by a Plough. I. Flow-Type Kick Up of Snow Caused by a Plough Moving at High Speeds. *Low Temperature Science, Ser. A, 32.* (With English Summary p. 52)

プラウ除雪の理論 I*

——流動型高速プラウ前縁蹴あげ——

吉田順五
(北海道大学名誉教授)

(昭和49年10月受理)

I. まえがき

鉄道や道路の雪をとり除くのに一番ひろく用いられる方式は「推し分け方式[1]」である。動力で動く車輛の先頭に金属製の鋤(すき)をとりつけて，鉄道や道路のうえの雪を脇へ推しやる。近頃は，英語のプラウ(plough または plow)が鋤を意味するところから，この方式を「プラウ除雪方式」ということが多い。また「排雪方式」ともいう[2]。これは，回転力で雪を投げとばす「投雪方式」や，遠くの雪捨て場へ雪を運びさる「搬出方式」との対比のために作られた名前である。

プラウ除雪に使われる車輛を，ここでは「排雪車」ということにする。排雪車には，投雪車にくらべ，構造が簡単でしかも高速で走れるという特長がある。しかし，雪を側方に移動させる距離は，投雪車より遙かに短い。ラッセル車は大型のプラウをとりつけた排雪車だが，国有鉄道のラッセル車は毎時50 kmまでの線路の雪を排除する。しかし，やがて，雪国にも新幹線がしかれ，毎時200 km以上の速度で除雪をおこなう必要がうまれるであろう。このような高速でのプラウ除雪には，毎時50 km以下の速度での排雪ではおこらなかった，新しい事柄が見られるかも知れない[3-6]。この論文は，その種の新しい事柄の予測を主な目的とする，プラウ除雪の理論的考察である。ただし考察は，排雪車が一定速度で水平直線にそって走るばあいに限る。

理論上の困難を軽減するため，次の第II節でのべるように，積雪の性質や状態，また，プラウの形を簡単化して考える。

II. 予備考察と仮定

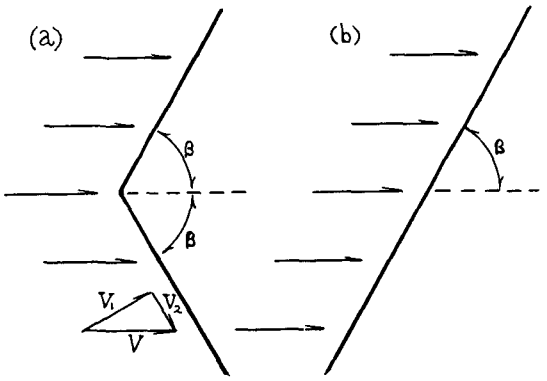
1. プラウの前縁蹴あげ

プラウは，まず，その前縁で雪を蹴あげる。これを「前縁蹴(け)あげ」あるいは簡単に「蹴あげ」と呼ぶことにしよう。排雪車の速度が20～30 km/hrより大きい場合には，蹴あげはふたつの型に分類される。ひとつは，蹴あげられた雪がこなごなに砕けて飛びちる「飛散型」である。もうひとつは，プラウの前縁で著しく折れ曲り破壊しながらも，粉砕はしないで，雪がプ

* 北海道大学低温科学研究所業績 第1325号

ラウの傾斜面を流れのぼる「流動型」である。飛散型蹴あげのばあいでも，多くのばあい，飛散した雪はプラウ傾斜面の上部に衝突する。それ故，蹴あげられたあとの雪の運動は，蹴あげ直後の雪の速度の大きさおよび方向と，プラウ傾斜面の形とで定められることになる。ところが，傾斜面の形は個々のプラウごとに違う。それで，この理論では，前縁蹴あげだけを考え，蹴あげ直後の雪の速度の大きさと方向とを求めることに目標をしぼることにする。プラウ傾斜面上での雪の運動，および，プラウから飛び去る雪の運動は，個々のプラウについて考えるよりほかない。

この論文Ⅰは流動型「高速」蹴あげの考察である。飛散型高速蹴あげは，この論文につづく同名の論文Ⅱで考察する。ここに使われた「高速」という言葉の意味は，この論文Ⅰの第Ⅲ節の最後で定める。また，ふたつの型の前縁蹴あげの実際の有様は，写真を利用して，論文Ⅱのはじめで詳しく説明する。



第1図 上から見おろしたプラウ前縁の形
プラウは右から左へむかって進む。水平な矢印は，プラウに固定された運動坐標系からみたときの雪の流動速度を表わす。(a) V型プラウの前縁。(b) 直線プラウの前縁。

プラウを上から見たときの前縁の形は，第1図 (a) のような，右から左へむかう進行方向に頂点をむけた二等辺三角形の二辺か，同図 (b) のような進行方向に対して傾いた一直線かである。前縁が (a) の形のものをV型プラウ，(b) の形のものを直線プラウという。V型プラウのばあい，前縁の頂角2βを「開き角」という。しかし，頂角の半分βを開き角ということもある。この論文では，あとの用語法にしたがい，直線プラウの傾き角βも，おなじく開き角の名で呼ぶことにする。

前縁に直角な鉛直断面には，プラウの傾斜面が曲線として現われる。この曲線の前縁における切線と水平線との間の角を「すくい角」という。以後，すくい角をαで表わす。

2. 直角直線プラウ

まえがきで述べたように，排雪車は一定速度Vで水平直線にそって走るものとする。また，雪は密度ρ_0の均一な雪で，平らな地面に一様な厚さで積っているとしよう。実際には，すなわち静止坐標系から見れば，雪が静止し排雪車が動いている。しかし，この種の問題でよく行われるように，排雪車に固定した運動坐標系に乗って考察を進めることにする。運動坐標系を用いると，排雪車が静止し雪が排雪車にむかって速度Vで流れることになる。その結果，雪の運動全体が定常流動として観察され，理論的考察が容易になるからである。運動坐標系での考察から得られるいろいろな量の値を，静止坐標系での値に変換することは簡単におこなえる。

プラウに衝突すればもとより，プラウに接近するだけでも雪の速度は変わり，Vとは異る値になる。速度Vは，静止したプラウの前方隔った所にあって，未だプラウの影響をうけていない処女雪の速度である。処女雪は速度Vで流れると言えるから，Vを「雪の流れ速度」

と呼ぶことにしよう。

雪の流れ速度 V のプラウ前縁に垂直な成分を V_1，平行な成分を V_2 とすると

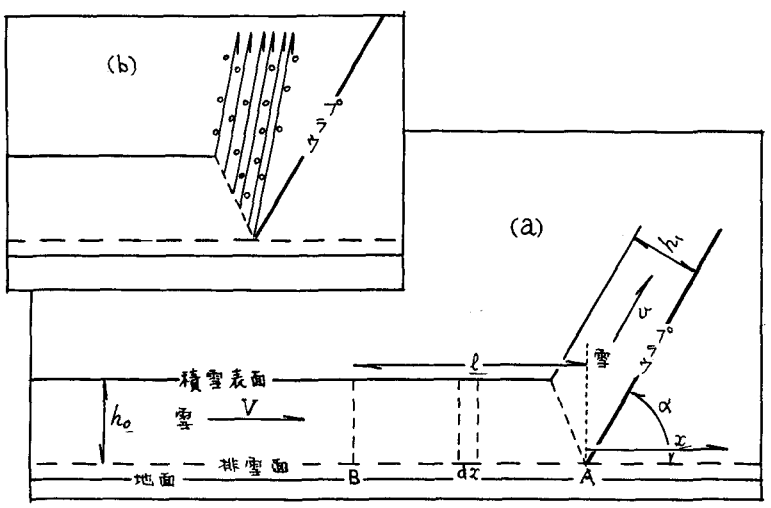
$$V_1 = V\sin\beta, \qquad V_2 = V\cos\beta$$

である。蹴あげ直後の雪の速度を v とし，それのプラウ前縁に垂直な成分を v_1，平行な成分を v_2 としよう。すると，v_1 は V_1 と異るが，v_2 と V_2 とは相等しい。プラウ前縁と雪とのあいだの摩擦力は小さく，プラウ前縁が雪に及ぼす力は，事実上，前縁に直角にはたらくと考えられるからである。このことから，ひらき角 β が 90° の直線プラウ，すなわち，前縁が雪の流動方向に直角な「直角直線プラウ」について考察すれば充分なことがわかる。直角直線プラウによる蹴あげ直後の雪の速度 v は，V とすくい角 α と雪の性質との関数である。この関数の V を $V_1 = V\sin\beta$ でおきかえれば v_1 の値がえられるからである。

3. 排雪模型図

第2図 (a) が，直角直線プラウと雪とを側方から見た模型図である。プラウは静止し，一様な厚さの雪が地面とともに，プラウにむかって左から右へ，速度 V で流れている。プラウの前縁は，普通，地面より数 cm 浮きあがっている。それで，第2図 (a) でも，直角直線プラウの前縁を表わす A 点を地面より少し上においた。プラウによって排除されるのは，A 点を通る水平線より上にある雪で，その下にある雪は地面のうえに残される。このことから，プラウ前縁と同じ高さの水平面を「排雪面」と名づけた。排雪面より上にある雪の厚さを h_0 とする。また，プラウ前縁を表わす A 点を原点とし，水平右方に坐標 x をとる。

流動型蹴あげのばあいには，第2図 (a) に示したように，雪が飛散せずにまとまったまま，プラウの傾斜面から離れずに傾斜面を流れのぼる。飛散型蹴あげのばあいには，雪は粉砕飛散し，飛散する雪の平均運動方向と水平方向との間の角は，第2図 (b) の矢印が示すように，プラウのすくい角 α より大きい。つまり，飛散する雪とプラウの傾斜面との間には隙間があ



第2図 排雪模型図

(a) 流動型前縁蹴あげ。 (b) 飛散型前縁蹴あげ

く。ただし，この飛散型蹴あげの模型図 (b) は，論文 II で，飛散機構を考慮して画かれた第5図として訂正を受ける。

4. プラウによる雪の圧縮

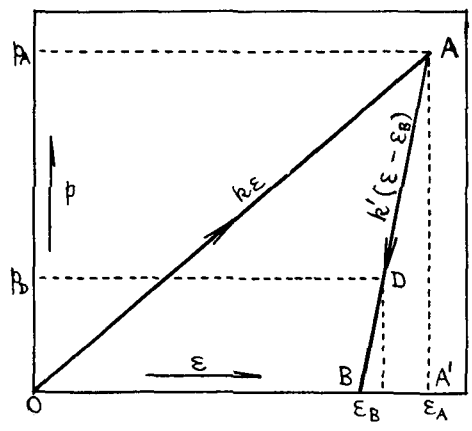
雪がプラウに接近すると，プラウからうける力のため，雪は圧縮される。その結果，雪の内部に応力および歪が発生する。この応力および歪は複雑な性質のものに違いない。しかし，ここでは，それらが x 方向の圧縮応力 p および圧縮歪 ε であると仮定する。さらに，x 軸に直角な鉛直面内では p と ε との値が同一であるとし，かつ，この鉛直面に沿う方向の応力および歪は0であるとする。つまり，雪のなかに生ずる応力および歪を，x 方向に軸をもつ，横方向の伸縮を伴わない，一軸性の均一圧縮応力および均一圧縮歪と考えるわけである。

雪がプラウに衝突して流動型蹴あげをうけるとき，雪の流動方向は急激にではあるが連続的に変わる。この蹴あげのあいだでも，雪の応力と歪とは，変化する流動方向に絶えず軸の方向を合わせる一軸性の均一圧縮応力および均一圧縮歪であるとする。ただし，蹴あげによる雪の変形は大きいから，横方向の伸縮が第2図の紙面内ではおこりうるとしよう。それで，流動型蹴あげの後，プラウの傾斜面を流れのぼる雪の厚さ h_1 は，一般に，h_0 に等しくない。

5. 雪の塑性圧縮

うえに述べた仮定のもとに議論を進めるにあたって，雪の一軸圧縮応力 p と一軸圧縮歪 ε とをつなぐ関係が必要となる。雪の一軸圧縮実験の結果によると，p と ε との関係は，雪の種類によって異ることは勿論，おなじ雪においても圧縮速度の大小によって著しく変わる。詳しくおこなわれたのは，圧縮速度が毎分1mm以下から数cmまでの範囲にある低速圧縮実験である[7-10]。それによると，圧縮速度が変わると，おなじ値の ε で p が異る値を示すばかりか，ある値の ε で雪が砕けたり砕けなかったりする。排雪車のプラウが雪を圧縮する速度は1秒間に1mをこえる。圧縮速度が1m/sec以上の高速圧縮実験もおこなわれている[11-14]。ただ，実験方法が，その実験結果から p と ε との関係を正確に導きだすのに適していない。それにしても，この高速圧縮実験結果から，高速圧縮における p と ε との関係が低速圧縮のばあいのものと非常に異ることを窺い知ることはできる。

結局，現在のところ，排雪車のプラウによるような高速度の雪の圧縮については，p と ε との間の正確な関係がわからない。しかし，p が ε の増大につれて増大することに間違いはあるまい。それで，第3図の直線 OA が示すように，p は ε に比例して増大すると仮定する。すなわち，比例常数 k を用いて $p=k\varepsilon$ とおく。将来，p と ε との間に正確な関係が知られ，それ



第3図 一軸圧縮における雪の応力 p と歪 ε との関係を，この図に示したように仮定する。直線 OA は負荷過程を，直線 AB は除荷過程を表わす。流動型高速蹴あげでは，雪の状態が0点から出発して A 点に達し，蹴あげ終了とともに D 点にくだる。しかし，D 点は B 点に近い。それで，D 点は B 点と一致するものと見なす。

によって以下の排雪理論に訂正を加えるとしても，理論の大筋を変更する必要は生じないであろう。

外力により雪が一軸圧縮をうけて第3図のO点の状態からA点の状態に達したあと，外力が消失して応力 p が0になったとしても，歪 ε は0に戻らない。応力が消失したあとの状態は第3図のB点で表わされる。しかも，この状態での歪を ε_B とすると，ε_B は状態Aでの歪 ε_A より僅かに小さいだけである。第3図では，便宜上，A点の ε 軸上の射影点 A′ からB点を離してかいたが，実際のB点はA′点に極めてちかい。つまり，負荷過程 O→A で生じた歪は，除荷過程 A→B によって殆ど減少せず，そのままと言ってよい程の値で残留する。このことから，雪の一軸圧縮は，弾性をほとんど含まない，純粋にちかい塑性圧縮であるといえる。なお雪の圧縮には，実用材料である金属や高分子物質の塑性ではみられない，密度の著しい増大がともなう。

6. 雪の粉砕応力 p_C

雪の性質について，もうひとつの仮定をおく。それは，一軸圧縮をうけて，応力 p がある限界値 p_C に達すると雪が粉砕するという仮定である。限界値 p_C を「粉砕応力」と呼ぶことにする。粉砕応力の値が雪の種類によって異るのは当然だが，おなじ種類の雪でも，圧縮速度が変われば変わるであろう。しかし，この理論では，圧縮速度による p_C の変化は無視する。

前項5で述べた仮定により，圧縮応力が p_C に達したときの雪の圧縮歪 ε_C は p_C/k にひとしい。ε_C を「粉砕歪」と名づける。

このプラウ除雪理論では，流動型蹴あげを基本型とし，飛散型蹴あげは，粉砕歪の存在のために，流動型蹴あげが中断されて生ずると考える。それで，流動型蹴あげだけを考察するこの論文Iでは，これからあと，p_C も ε_C も現われない。

7. 流動型高速蹴あげによる雪の運動エネルギー損失

第3図の直線OAで表わされる負荷曲線および直線ABで表わされる除荷曲線に対する数式を，それぞれ

$$p = k\varepsilon, \qquad p = k'(\varepsilon - \varepsilon_B) \tag{2}$$

としよう。比例常数 k' は比例常数 k にくらべ著しく大きい。

「高速」という言葉を次の第III節で定める意味に用いると，「高速蹴あげ」では，処女雪がそのままでプラウに衝突する。よって，高速蹴あげ直前での雪の応力 p は0である。さらに高速蹴あげが流動型のばあいには，蹴あげの間に p は増大して最高値 p_A に達し，そのあと，蹴あげ終了とともにある値 p_D まで下降する。しかし，p_D は非常に小さいと推定されるから，蹴あげ直後の雪の応力，すなわち，プラウの傾斜面を流れのぼろうとする雪の応力 p は0であると仮定しよう。すると，ある単位体積内にある処女雪に着目すれば，この雪がプラウ前縁に到着して流動型高速蹴あげを受けはじめると，この雪にまず第3図の三角形OAA′の面積で表わされる仕事がなされる。そして，そのあと，おなじ雪が三角形BAA′の面積にひとしい仕事を外へ仕かえして蹴あげが終了する。結局，流動型高速蹴あげでは，三角形OABの面積にひとしい仕事を雪がうけることになる。ところが，三角形OAA′の面積にくらべると，三角形BAA′の面積は著しく小さい。よって，流動型高速蹴あげでは，そのあいだに，処女雪の単位

体積ごとに，第3図の三角形 OAA′ の面積で表わされる仕事

$$w = \frac{1}{2} p_A \varepsilon_A = \frac{1}{2k} p_A^2 = \frac{k}{2} \varepsilon_A^2 \qquad (2)$$

がなされるものと考えてよい。

蹴あげをうけつつある雪，すなわち，第2図 (a) の A 点から斜め左上にむかう破線にそう薄い板状空間内にある雪を「雪 J」となづけよう。雪 J は，左手にあたる前方では処女雪に，右手にあたる後方ではプラウ傾斜面を流れのぼろうとする雪に接し，下端ではプラウ前縁に乗っている。ところで，処女雪もプラウ傾斜面をのぼろうとする雪も，その応力 p がともに0だから，雪 J に仕事をしない。プラウ前縁は，たしかに，雪 J に力を加えはする。しかし静止しているから，雪 J に仕事をすることはない。結局，雪 J には外部から仕事が為されないわけである。

蹴あげの際に処女雪におこる状態変化は，処女雪が雪 J になるということだけである。よって，蹴あげのあいだに，処女雪は外部から仕事をうけない。それにも拘らず，処女雪の単位体積についてみると，(2) 式で表わされる仕事 w がなされる。したがって，仕事 w を行うのに要するエネルギーの供給源としては，処女雪自体がもつ運動エネルギーのほかにはないことになる。仕事 w は，雪 J の各部分が互に及ぼしあう力がおこなう仕事，すなわち，雪 J の内部に現われる応力 p が行う仕事なのである。

雪の熱伝導度は小さく，蹴あげに要する時間は極めて短いから，蹴あげの際の雪の塑性圧縮は断熱的におこなわれる。したがって，運動エネルギーから供給されるエネルギーが，着目した単位体積の処女雪から熱の形で流出することはない。その全部が仕事 w のために費やされ，雪の内部エネルギーに転化する。すなわち，着目した雪の流動型高速蹴あげによる運動エネルギーの減少量は，仕事 w に等しいという関係がなりたつ。高速蹴あげ直前の処女雪の速度は V で密度は ρ_0 だから，着目した雪の蹴あげまえの運動エネルギーの値は $\rho_0 V^2/2$ にひとしい。蹴あげ直後の雪の速度を v と書くと，おなじ雪の運動エネルギーが蹴あげの直後では $\rho_0 v^2/2$ に変わる。よって，流動型高速蹴あげにおけるエネルギーの関係を示す式として

$$\rho_0 (V^2 - v^2)/2 = w \qquad (3)$$

がえられる。この式は，(2) 式を用いて

$$1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2 = \frac{p_A^2}{k\rho_0 V^2} = \frac{\varepsilon_A^2}{\gamma} \qquad (4)$$

の形に書きなおされる。γ は，次の第 III 節第2項の (11) 式で定義される無次元の数である。式 (4) は第 IV 節以降で使われる。

III. プラウの前方にある雪の運動

第2図の排雪模型図に平行な平面内でおこる現象はすべて同一だから，これからあとは，横幅が単位長さにひとしい直角直線プラウの排雪現象を考察することにする。

1. プラウの前方にある雪の運動方程式

プラウは雪の流れを妨害するから，プラウの前方ある範囲内の排雪面より上にある雪は圧縮される。この圧縮された雪の密度を ρ とすると，ρ が処女雪の密度 ρ_0 より大きいことは言うまでもないが，その速度 u も変化して処女雪の速度 V より小さい値になる。ただし，ρ も u も坐標 x の関数である。一方，地面とともに，排雪面の下の雪は速度 V のままで運動している。よって，排雪面上の厚さ h_0 の雪は，排雪面下の雪によって，プラウの方にむかって引きずられる。それで，第2図 (a) に示した微小区間 $\mathrm{d}x$ 内にある雪には，排雪面の上下にある雪のあいだの摩擦係数を μ とすると，$\mu h_0 \rho g\,\mathrm{d}x$ にひとしい剪断力が x の正の方向に働くことになる。この $\mathrm{d}x$ 内の雪に働く力としては，さらに，圧縮のために雪のなかに発生する一軸圧縮応力 p によるものがある。それは，大きさが $h_0(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$ にひとしく，x の負の方向にむく。雪の加速度は，雪の運動が定常だから，$u(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)$ で表わされる。以上のことから，微小区間 $\mathrm{d}x$ 内にある質量 $\rho h_0\,\mathrm{d}x$ の雪についての運動方程式として

$$(\rho h_0\,\mathrm{d}x)\,u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -h_0\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \mu h_0 \rho g\,\mathrm{d}x$$

が得られる。これは，共通項を消去すれば

$$\rho u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \mu\rho g \tag{5}$$

にかわる。

2. 運動方程式の書きかえ

雪は圧縮されても厚さ h_0 を変えないと仮定しているから，連続方程式として $h_0\rho_0 V = h_0\rho u$，すなわち

$$\rho_0 V = \rho u \tag{6}$$

がなりたつ。一方，雪の一軸圧縮歪 ε によって，ρ_0 と ρ とは

$$\rho_0 = \rho(1-\varepsilon)$$

の関係で結ばれる。よって，この式と (6) 式とから

$$\varepsilon = 1-\frac{\rho_0}{\rho} = 1-\frac{u}{V} \tag{7}$$

が導かれる。プラウの前方にある雪は圧縮される一方で負荷過程にあるから，(1) 式の第一式によって

$$p = k\varepsilon = k\left(1-\frac{u}{V}\right)$$

と書くことができる。これからえられる

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{k}{V}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

を (5) 式に代入するとともに，(6) 式によって ρ を u におきかえると

$$\left(1-\frac{k}{\rho_0 V^2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu g}{u} \tag{9}$$

なる，u だけを未知量とする運動方程式がえられる。

密度が ρ_0 で，負荷過程での応力 p と歪 ε とが $p=k\varepsilon$ の関係で結ばれる雪の柱の一端に，ある時刻から弱い圧力を加えつづけるとしよう。すると，弱い塑性圧縮状態が柱のなかを，柱の軸の方向に拡がる。塑性圧縮状態になった領域の先端面の進行速度は

$$c=\sqrt{k/\rho_0} \tag{10}$$

で与えられる。つまり，雪の柱の一端に加えられた力による塑性変形は「塑性波速度」といわれるこの c なる速度で雪の柱のなかを拡播する。瞬間的に柱全体に拡がるわけではない。

プラウが処女雪に与える塑性圧縮状態も，上と同じ塑性波速度 c で処女雪のなかを伝播する。いま排雪車の速度，つまり処女雪の流れ速度と処女雪内の塑性波速度との比の二乗を γ で表わそう。すなわち

$$\gamma=\left(\frac{V}{c}\right)^2=\frac{\rho_0 V^2}{k} \tag{11}$$

とおく。この γ は，以後，主要な変数として用いられる。航空力学では，空気の流動速度と空気中の音速との比であるマッハ数 M が重要な役目をする。γ は M^2 に対応する無次元数である。雪の塑性波速度 c の大きさは，論文 II の第 IV 節で考察する。

運動方程式 (9) は，両辺に u を乗じ，いま定義した γ を用いることにより

$$\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\mathrm{d}(u^2)}{\mathrm{d}x}=2\mu g \tag{12}$$

の形に書きかえられる。

3. 圧縮開始点。高速排雪の定義

第 2 図 (a) の A 点，すなわちプラウ前縁の位置での u の値を u_A として運動方程式 ((12) をとくと，A 点は坐標原点だから

$$u^2-u_A^2=-\frac{\gamma}{1-\gamma}2\mu g x \tag{13}$$

の解がえられる。処女雪の圧縮がはじまる点，すなわち，u が V より小さくなり始める点を「圧縮開始点」となづけると，圧縮開始点の坐標は (13) 式の u を V とおいたときの x の値 x_1 で与えられる。第 12 図 (a) のうえで圧縮開始点が B 点にあるとしよう。B 点は坐標原点 A の左にあるから x_1 は負である。よって圧縮範囲の長さを，すなわち A 点と B 点との間の距離を l とすれば

$$l=-x_1=\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{V^2-u_A^2}{2\mu g} \tag{14}$$

となる。

圧縮範囲の長さ l は正値であるし，u_A は V より小さいから，(14) 式は $\gamma<1$ のときにだけなりたつ。すなわち，排雪車の速度 V が処女雪の塑性波速度 c より小さい場合にのみ，プラウはその前方にある雪を圧縮する。V が c より大きければ，圧縮範囲は存在しない。つまり，プラウはその前方にある雪を圧縮できず，処女雪がそのままでプラウに衝突する。c は塑性圧縮状態が雪のなかを伝播する速度だから，雪の流れの速度 V が c より大きければ，塑性圧縮状

態はその流れを遡りえない。これが $V>c$ のとき，プラウがその前方の雪を圧縮しないことの物理的理由である。

以上のことを目安として排雪速度の高低を区分することにしよう。すなわち，$V<c$ の場合の排雪を「低速排雪」，$V>c$ の場合の排雪を「高速排雪」とする。こんご「高速」を「高速排雪」に限らず，いま述べたのと全く同じ意味で，たとえば「高速蹴あげ」というようにも使う。しかし，これはこの論文だけでのことである。塑性波速度 c は雪の種類によって変わる。それゆえ，この定義にしたがうと，排雪車のある速度だけでは排雪速度の高低がわけられないことになる。この点で，この区分法は，実用上，適切でないかも知れない。

IV. 流動型高速蹴あげ

これからあとは，直角直線プラウによる，雪の高速前縁蹴あげの理論的考察である。すぐ前に述べたとおり，形容詞の「高速」は，排雪車の速度 V が処女雪内の塑性波速度 c より大きいこと，すなわち $\gamma>1$ であることを意味する。この論文 I では考察を流動型高速蹴あげに限り，飛散型高速蹴あげは続く論文 II で考察する。また，この第 IV 節の主な目的は，流動型高速蹴あげ直後の雪の速度 v を求めることにある。v/V の値がわかれば，プラウ前縁が雪からうける抵抗その他，蹴あげに関連のあるいろいろな量の値がきめられる。

1. プラウ前縁が雪に加える力

プラウの前縁が雪に加える力のベクトル $\boldsymbol{F}$ は，第 4 図 (a) の太い矢印のように，斜め前方上むきであろう。$\boldsymbol{F}$ の x 方向の成分を F_x とすると，F_x が，雪の運動量の x 成分に単位時間に生ずる変化と等しいことから

$$h_1\rho_1 v\cdot v\cos\alpha - h_0\rho_0 V\cdot V = F_x$$

の関係式がえられる。h_1 と ρ_1 とは，蹴あげの後プラウの傾斜面を流れのぼる雪の厚さと密度とである。雪の流れは定常だから，連続方程式 $h_1\rho_1 v = h_0\rho_0 V$ がなりたつ。よって上の式は

$$-\frac{F_x}{h_0} = \rho_0 V^2\left(1-\frac{v}{V}\cdot\cos\alpha\right) \tag{15}$$

に書きかえられる。

実際のプラウの前縁は幾何学的直線ではない。厚味のある，円筒面にちかい表面である。それ故，雪を蹴あげるのは，プラウの傾斜面のうちの，前縁ちかくにある狭い表面にちがいない。この狭い表面を「蹴あげ面」と名づけよう。蹴あげ面の各部分が雪に加える力の合力が上記の力 $\boldsymbol{F}$ にほかならない。第 4 図 (a) にこの事情が，プラウを幾何学的平面に模型化したうえで，示してある。プラウの先端を表わす A 点から，プラウの面にそって少しのぼった B 点までの間が蹴あげ面である。多くの細い矢印 $\boldsymbol{f}$ が，蹴あげ面の各部分が雪に加える力のベクトルを表わす。

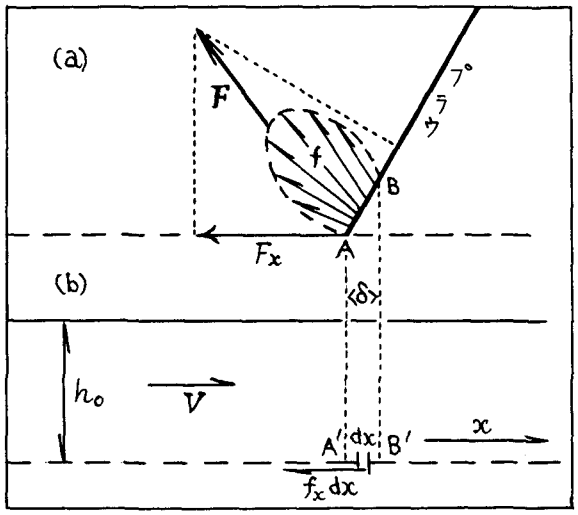
第 4 図 (b) の A′ 点と B′ 点とは，同図 (a) の A 点と B 点との x 軸上への投影である。距離 A′B′ を δ とすれば，A′ 点と B′ 点との x 坐標は，それぞれ，0 と δ とになる。区間 A′B′ 内に微小区間 $\mathrm{d}x$ を考え，$\mathrm{d}x$ に対応する蹴あげ面上の微小面積が雪に加える力の x 成分を $f_x\mathrm{d}x$ としよう。すると，F_x は蹴あげ面上のすべての $f_x\mathrm{d}x$ を加えあわせたものだから

$$F_x = \int_0^\delta f_x \mathrm{d}x \qquad (16)$$

と書くことができる。

2. 前縁最大応力 p_A および前縁最大歪 ε_A

第III節第7項の(4)式にある p_A は，流動型高速蹴あげの間に，雪のなかに発生する一軸圧縮応力の最高値である。これを「前縁最大応力」と名づけよう。もし p_A を蹴あげ直後の雪の速度 v の関数として表わすことができれば，(4)式は v だけを未知量として含む方程式になる。よって，それから v が定められる。それで，次のようにして，v の関数としての p_A を求める。



第4図 プラウの前縁が雪に加える力 $\boldsymbol{F}$。プラウ前縁部のせまい面 AB 内の各部分が雪に加える力 $\boldsymbol{f}$ の合力が $\boldsymbol{F}$ である。面 AB を「蹴あげ面」と名づける。

第4図(b)に示すように，プラウを除去して，処女雪を，厚さを h_0 に保たせたまま，A′ 点をこえて x 方向に流れさせる。ただプラウを除去した代りに，A′ 点と B′ 点との間の排雪面で，前項で考えた力 $f_x\mathrm{d}x$ を雪に作用させる。つまり，プラウの存在を $f_x\mathrm{d}x$ の作用でおきかえる。そして，この雪のなかに生ずる一軸圧縮応力 p の最高値を p_A とするわけである。このばあいの p に関する微分方程式は，第III節第2項の(6)から(9)までの式を導いたのと同じ方法で

$$(1-\gamma)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{f_x}{h_0} \qquad (17)$$

の形に求められる。ただ，第III節では $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ を $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ でおきかえたが，ここでは逆に $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ を $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ でおきかえた点が違う。

第4図(b)に示すように f_x は左向きだから，負である。また γ は1より大きい。よって $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ は正で，p は A′ 点から B′ 点にむけて増大する。したがって，B′ 点での p の値が最高値 p_A となる。それで，(17)式を0から δ までの範囲で積分し，A′ 点での p が0であることと(16)式の関係とを用いると

$$p_A = \frac{1}{(1-\gamma)h_0}\int_0^\delta f_x \mathrm{d}x = \frac{-F_x}{(\gamma-1)h_0}$$

がえられる。$F_x<0$ だから $p_A>0$ である。式(15)を用いると，この式は v の関数

$$p_A = \frac{\rho_0 V^2}{\gamma-1}\left(1-\frac{v}{V}\cos\alpha\right) \quad \text{あるいは} \quad \varepsilon_A = \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(1-\frac{v}{V}\cos\alpha\right) \qquad (18)$$

に書きかえられる。$\varepsilon_A = p_A/k$ は流動型高速蹴あげにおける雪の最大歪である。これを「前縁最大歪」と名づける

3. γ の関数としての v/V

前項のはじめで述べた方針にしたがい，(4) 式の p_A を (18) 式でおきかえる。それを v/V について解けば

$$\frac{v}{V}=\frac{\gamma\cos\alpha\pm(\gamma-1)\sqrt{(\gamma-1)^2-\gamma\sin\alpha}}{\gamma\cos^2\alpha+(\gamma-1)^2} \tag{19}$$

がえられる。すなわち，この第 IV 節の目的とした v/V が γ の関数として表わされた。速度 v の方向は，プラウの傾斜面にそう方向，すなわち，x 軸から α だけ偏った方向である。

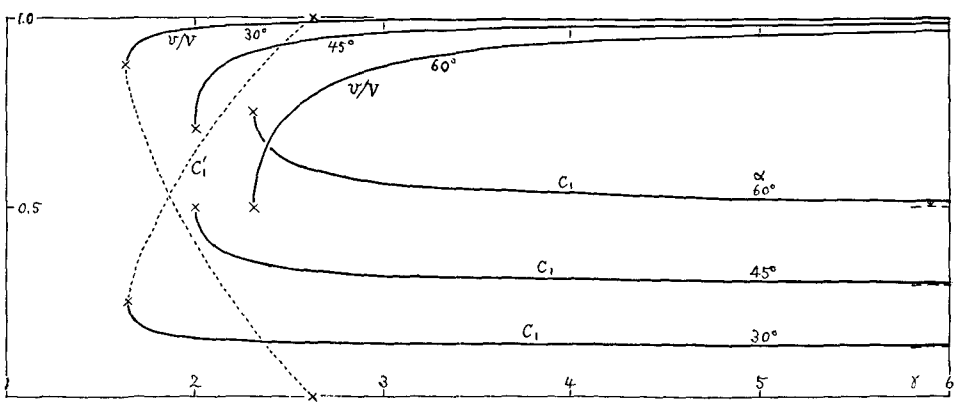
式 (19) の分子にある根号の内部を 0 にする γ は

$$\gamma_0,\ \gamma_0'=A\pm\sqrt{A^2-1},\qquad A=1+(\sin^2\alpha/2) \tag{20}$$

で与えられる。この式の復号を正にとったときの値を γ_0，負にとったときの値を γ_0' とすれば，$\gamma_0>1$ および $\gamma_0'<1$ である。そして，γ が γ_0 より大きいか γ_0' より小さいときにだけ，(19) 式の分子の根号内部は正になる。よって，v/V を実数に保つためには，γ を γ_0 より大きくとらなければならない。いまは，$\gamma>1$ の条件をみたす高速排雪を考えているからである。

上のことは，1 よりは大きいが γ_0 よりは小さい γ では，流動型高速蹴あげがおこり得ないことを意味する。論文 II でわかるように，この範囲の γ でおこる蹴あげは飛散型になる。

第 5 図の上部にある 3 本の実線の曲線が，(19) 式の分子にある復号を正号としたときの，v/V と γ との関係を示す「正号曲線」である。各曲線ごとに，すくい角 α の値がちがう。その違う値 30°, 45°, 60° が各曲線に書きそえてある。v/V は γ の増大関数であるが 1 を超えることはなく，γ が無限大になると 1 に漸近する。斜め十字印をつけた点で，γ はその下限 γ_0 にひとしく，v/V の値は $\cos\alpha$ に等しい。α が 30° の曲線には，斜め十字印から右下へむかう点線の曲線が付属している。これは，(19) 式の分子の復号を負にとった時の「負号曲線」である。v/V は正でなければならないから，負号曲線は γ 軸との交点で終る。γ はいくらでも大きくなりうるに拘らず，ある値以上の γ が許されないことは不自然である。よって，負号曲線は実現



第 5 図　流動型高速蹴あげにおける速度比 v/V および走行抵抗係数 C_1 と γ との関係。上部にある 3 本の実線が v/V の曲線，中部から下部にかけてある 3 本の実線が C_1 の曲線である。速度 v の方向はプラウの傾斜面の方向である。各曲線につけた角度はプラウのすくい角 α の値。

することがないと考えてよいであろう。このことから，α が 45° と 60° とのばあいについては，負号曲線の書き入れを省略した。

4. γ の関数としての前縁最大応力 p_A および流動型高速蹴あげの走行抵抗係数 C_1

この節の第1項の(15)式にある F_x は，プラウ前縁が雪に加える力の x 成分である。よって，雪がプラウ前縁に加える力，すなわち，排雪車のプラウ「前縁走行抵抗」は $-F_x$ にひとしい。前縁抵抗を走行抵抗係数 C_1 を用いて

$$-F_x = C_1 h_0 \rho_0 V^2 \tag{21}$$

の形にかけば，(15)式により

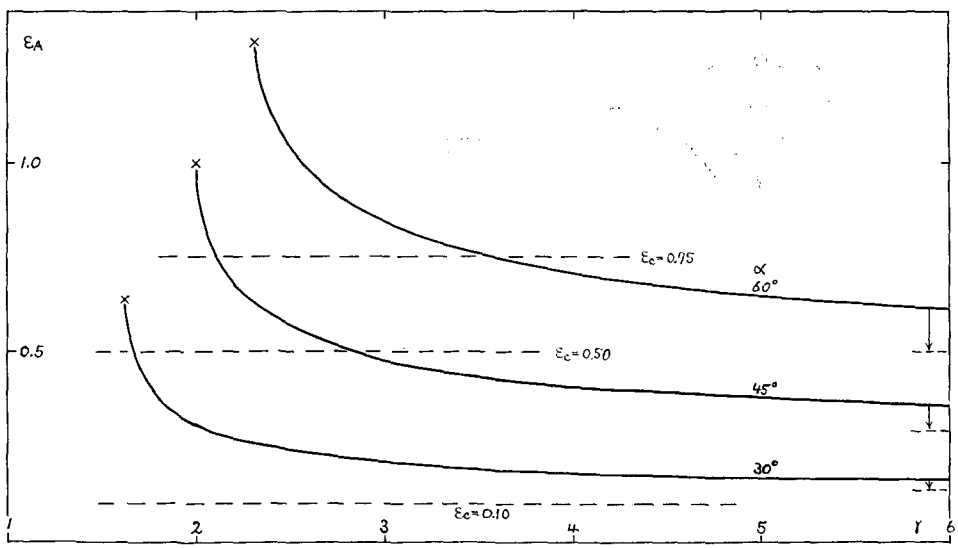
$$C_1 = 1 - \frac{v}{V}\cos\alpha \tag{22}$$

となる。式(19)を利用して v/V を書きかえれば，C_1 を γ の関数として表わすことができる。流動型高速蹴あげの走行抵抗係数であることを示すために，1を添えて C_1 とした。飛散型高速蹴あげの走行抵抗係数は C_2 で表わし，論文 II で考察する。式(18)と(21)式とから

$$\varepsilon_A = \frac{\gamma}{\gamma - 1} C_1 \tag{23}$$

の関係がえられる。よって，γ が大きければ，前縁最大歪 ε_A と C_1 とは値が一致する。

第5図の下半分にひかれた3本の曲線が，(22)式で与えられる C_1 と γ との関係を表わす C_1 曲線である。おなじ γ の値では，すくい角 α が大きいほど C_1 は大きい。一定値の α については，γ の増大とともに C_1 は減少する。しかし前縁走行抵抗 $(-F_x)$ 自体は，C_1 が γ の下限 γ_0 ちかくで急降下するばあいを除き，γ と共に増大する。各曲線の右端ちかくにある水平破線は，



第6図 流動型高速蹴あげにおける前縁最大歪 $\varepsilon_A = p_A/k$ と γ との関係。粉砕歪 ε_C の3箇の異る値 0.1, 0.5, 0.75 を示す水平破線は論文 II で使うためのものである。

γ が無限に増大したときの各曲線の漸近位置である。すくい角 30° の曲線の左端からは，斜め右方に点線 C_1' が上昇している。これは，v/V の負号曲線に対応する前縁走行抵抗係数を表わす曲線，すなわち，負号 C_1 曲線である。

第 6 図が，(23) 式によって画いた，前縁最大歪 ε_A と γ との関係図である。ε_A は，したがって前縁最大応力 p_A もまた，γ が増大すると減少する。つまり，排雪車の速度 V が大きいほど，雪がプラウから受ける影響が小さい。しかし，おなじ γ の値については，すくい角 α の増大は ε_A の増大をもたらす。各曲線の右端，下向きの矢印の先端にある水平破線は，各曲線の漸近位置である。この漸近位置は，(23) 式が示すとおり，第 5 図の C_1 曲線の漸近位置と一致する。歪は，その性質上，1 より大きい値はとりえない。それゆえ，第 6 図の α が 60° のばあいの ε_A 曲線が，その左端ちかくで 1 以上の値に昇るのは矛盾である。しかし，ε_A が 1 より大きくなるこの γ の範囲では，蹴あげが流動型から飛散型に転換することが論文 II でわかる。これにより，ε_A が 1 を超えるばあいは除外される。

V. ま と め

除雪用のプラウは，まず，その前縁で雪を蹴あげる。この前縁蹴あげを，蹴あげ後雪がプラウ傾斜面を流れのぼる流動型と，蹴あげのときに雪が飛散する飛散型との二形式に分類した。プラウを，前縁が進行方向に直角な直線プラウとし，流動型「高速」蹴あげのあとの雪の速度 v とプラウの進行速度 V との比 v/V を，理論的に，$\gamma=(V/c)^2$ の関数として定めた。c は，プラウの前方にあって未だプラウの影響をうけていない処女雪内の塑性波速度である。プラウによる雪の変形は，常に一軸塑性圧縮であるとし，応力 p と歪 ε とは $p=k\varepsilon$ (k は常数) の関係で結ばれるとした。処女雪の密度を ρ_0 とすれば，c は $\sqrt{k/\rho_0}$ で与えられる。「高速」は，$V>c$ であること，すなわち $\gamma>1$ であることを意味する。v/V の値を用いて，流動型高速蹴あげによる排雪車の走行抵抗係数 C_1 を γ の関数として求めた。C_1 は，直角直線プラウのすくい角 α が大きいほど大きい。しかし，γ が増大すれば減少する。1 からある値 γ_0 にいたる γ の領域では，流動型高速蹴あげが起りえない。この領域内での高速蹴あげは，この論文 I につづく同名の論文 II で示されるように，飛散型である。

この論文を書くにあたって，日本国有鉄道鉄道技術研究所の福地合一防災・雪氷研究室長，篠島健二雪氷研究室主任研究員をはじめとし杉山博，中栄周三，高橋 脩その他の所員から多くの有益な御教示をいただいた。ここに記して深い感謝の意を表わす。

文 献

1) 羽島金三郎 1941 除雪車の変遷 (其二). 雪氷, **3**, 64–73.
2) 下田 茂 1967 道路用除雪機械について. 長岡工業会時報, 33 号, 4–8.
3) 鉄道技術研究所土木機械研究室 1973 除雪時における走行安定性および耐寒雪車輛構造の研究. 模型翼による排雪実験 (中間報告) S 3101.
4) 中栄周三・橋本秀夫・小林久夫 1973 降積雪時の自力走行除雪試験. 鉄道技術研究所速報, No. 72–150, 1–14.

5) 荘田幹夫・須藤伊佐夫 1973 高速スノウプラウによる排雪実験. 鉄道技術研究所速報, No. 72-216, 1-21.
6) 篠島健二 1974 鉄道の高速排雪用プラウによる飛雪の研究. 鉄道技術研究報告, No. 912 (施設篇第**415**号), 1-71.
7) 木下誠一 1957 積雪における変形速度と変形形式との関係 I. 低温科学, 物理篇, **16**, 139-166.
8) 木下誠一 1958 積雪における変形速度と変形形式との関係 II. 低温科学, 物理篇, **17**, 11-30.
9) 木下誠一 1960 積雪における変形速度と変形形式との関係 III. 低温科学, 物理篇, **19**, 135-146.
10) Shinojima, K. 1967. Study on the visco-elastic deformation of deposited snow. *In* Physics of Snow and Ice. Part 1 (H. Ôura, *ed.*), Inst. Low Temp. Sci. Sapporo, 875-907.
11) 木下誠一 1955 衝撃による積雪の破壊 I. 低温科学, 物理篇, **14**, 95-116.
12) 木下誠一 1956 衝撃による積雪の破壊 II. 低温科学, 物理篇, **15**, 149-170.
13) 木下誠一 1957 衝撃による積雪の破壊 III. 低温科学, 物理篇. **16**, 119-138.
14) 杉山 博・木下真夫・遠藤 徹 1973 圧縮時の雪の反抗力. 鉄道技術研究報告, No. 875 (共通篇第**90**号), 1-28.

Summary

The first thing a snow plough does is to kick up snow with its front edge. The main purpose of this Paper I and the following Paper II is to derive formulae for velocity v or v_C which the snow has immediately after the kick up. As the shape varies among ploughs, the motion of snow given rise to by a plough will conveniently be determined by using the value of v or v_C as an initial condition for the movement of snow on the sloping surface of the plough. Use is made of coordinates moving together with the plough. The following assumptions are made:
(1) The snow to be removed by a plough is homogeneous in nature, of density ρ_0, of thickness h_0 and lies on a flat ground; (2) the plough runs at a constant speed V along a straight line; (3) the front edge of the plough is perpendicular to this straight line; (4) the snow undergoes uniaxial compression with the axis always in the direction of its instant motion, not only when it is nearing the plough but also during the very short interval in which it is being kicked up; (5) uniaxial stress p of the snow increases in proportion to an increase in its uniaxial strain ε, that is, there holds relation $p=k\varepsilon$, during a loading process, while p decreases with no change in ε during an unloading process: the uniaxial compression of the snow is completely plastic; (6) the snow is pulverized when p reaches a critical value p_C which shall be called 'stress of pulverization'.

A weak plastic deformation is propagated within the snow at the speed given by $c=\sqrt{k/\rho_0}$. Let γ be defined by

$$\gamma = (V/c)^2 = \rho_0 V^2/k . \qquad (1)$$

If $\gamma>1$, that is, if $V>c$, it is shown that the snow undergoes no compression before it reaches the edge of the plough. In Papers I and II, the term 'high speed' means V is greater than c and studies are limited to the kick up of snow caused by a plough moving at 'high speeds'.

There are two types of kick up: flow type and spray type. In case of the flow type the kicked-up snow flows up the sloping surface of a plough, maintaining its own consistence and keeping in contact with the surface. In case of the spray type the

snow is pulverized by the kick up and flies in a direction deviating from the horizontal by more than scooping angle α of the plough. The two types of kick up will be studied separately in Paper I and Paper II. Velocities v and v_C written above are those of snow just after kick up of the flow type and of the spray type respectively.

As uniaxial stress p in the snow flowing up the sloping surface of the plough will be small, let it be assumed zero. Then the law of energy gives

$$1-(v/V)^2 = p_A^2/k\rho_0 V^2 , \tag{2}$$

where p_A is the maximum value that p attains during the flow-type kick up. The value of p_A is estimated in the following way. In Fig. 4 (a) of the text, AB is a small area at the edge of the plough over which are distributed forces $\boldsymbol{f}$'s to kick up the snow. The thin arrows represent $\boldsymbol{f}$'s and the thick arrow $\boldsymbol{F}$ represents the resultant of $\boldsymbol{f}$'s. If the plough were fictitiouly removed and the snow were let go straight beyond the position of the edge of the plough with the horizontal components f_x's of $\boldsymbol{f}$'s acting on it as shown in Fig. 4 (b), the stress in the snow would increase to attain a maximum value given by

$$p'_A = -F_x/(\gamma-1)\, h_0 , \tag{3}$$

where F_x is the horizontal component of $\boldsymbol{F}$. It is assumed that p'_A gives the value of p_A. The law of momentum gives

$$-F_x/h_0 = \rho_0 V^2 \left\{1-(v/V)\cos\alpha\right\} . \tag{4}$$

From equations (2), (3) and (4), v/V is obtained as a function of γ with α as a prameter:

$$v/V = \left\{\gamma\cos\alpha+(\gamma-1)\sqrt{(\gamma-1)^2-\gamma\sin^2\alpha}\right\}\Big/\left\{\gamma\cos^2\alpha+(\gamma-1)^2\right\} . \tag{5}$$

Running resistance of the plough due to the flow-type kick up is equal to $-F_x$. If $-F_x$ is written in the form of $C_1 h_0 \rho_0 V^2$, coefficient of running resistance C_1 is given by

$$C_1 = 1-(v/V)\cos\alpha . \tag{6}$$

In Fig. 5 of the text, curves of v/V and C_1 are drawn against γ for three different values 30°, 45° and 60° of α. The flow-type kick up does not occur in the regions of γ ranging from 1 to γ_0s which are the values of γ corresponding to the cross marks located at the left extreme of each curve. It will be shown in Paper II that kick up of snow is realized in the form of the spray type in these regions.