



Title	斜面積雪の挙動の研究 IV : 斜面積雪内の応力
Author(s)	藤岡, 敏夫; HUZIOKA, Tosio
Citation	低温科学. 物理篇, 32, 105-112
Issue Date	1974-03-31
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/18250">https://hdl.handle.net/2115/18250</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	32_p105-112.pdf



## 斜面積雪の挙動の研究 IV\*

### 斜面積雪内の応力

藤岡敏夫

(低温科学研究所)

(昭和49年10月受理)

#### I. まえがき

雪崩は、斜面上の雪の一部に切れ目が入り、接地面や積雪層内の迂り面に沿って、雪が崩落する現象である。迂り面においても、雪粒同志の連結が断たれ、雪は破壊される。雪の破壊は、その部分における緊張状態に雪が耐えられなかった結果であるが、緊張状態をあらわす指標のうち重要なものは、雪の中の主応力の方向と大きさ、その分布である。斜面積雪は成層構造をもち、雪はクリープによる変形をうけるが、クリープを利用して主応力の方向を定め、釣合いの条件からその大きさをもとめる方法を以下にのべる。同様な報告は、筆者をふくむ雪崩研究者達が、北大天塩地方演習林の山地で行っている斜面積雪内の応力の実験的研究に関連して、すでに清水<sup>1)</sup>や筆者<sup>2)</sup>が行っている。この報告は上記研究において積雪内の主応力を求める計算の根拠を取りまとめたものである。

#### II. 独立した円柱状の雪の中の主応力

斜面積雪で最も簡単な場合として、傾斜角 $\theta$ の斜面上に、円柱状の雪が鉛直に立っている場合を考えてみる。円柱の雪は単位の水平断面積をもつものとし、周囲の雪とは切りはなされているとする。この場合雪の中のP点における3つの直交する主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (但し引張り応力を正,  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  とする)のうち、 $\sigma_1$ と $\sigma_2$ は円柱の縦の軸に垂直な水平面内であって、 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ である。 $\sigma_3$ は軸方向をもち、 $\sigma_3 = -w$ である。ここで $w$ は、P点を通る水平面より上にある雪の目方で、以下に垂直応力 $\sigma$ は引張りを正、圧縮を負にとってある。

P点を通り、斜面に平行な面に働く垂直応力 $\sigma$ 、剪断応力 $\tau$ は、釣合いの条件から

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -w \cos^2 \theta, \\ \tau &= w \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

となる。

周囲とは切り離された円柱状の雪の場合、3つの主応力は上のように簡単に決定できる。しかし、このようなきびしい制限がなくても(1)式が成りたつ場合のあることを第IV節、第V節でのべる。

\* 北海道大学低温科学研究所業績 第1319号

### III. 横方向に起伏のない斜面に積った雪の変形、主応力の方向

斜面の最大傾斜の方向に凹凸があっても、横方向に起伏がなく、等高線が互に平行な直線になっている斜面に積った雪を考える。勿論、等高線は雪の厚さにくらべて充分長い距離にわたって直線であればよいので、必ずしも無限に長い直線である必要はない。

このような斜面に様に積った積雪は、斜面の最大傾斜線をふくむ鉛直面について、幾何学的な対称になっているのであるから雪の変形による歪も、この対称面についての平面歪となる。簡単のため、最大傾斜線をふくむ鉛直面を今後単に対称面とよぶことにする。平面歪であるため、雪の歪の3つの主軸のうち、2つはこの対称面内にあり、他の1つは対称面に垂直である。

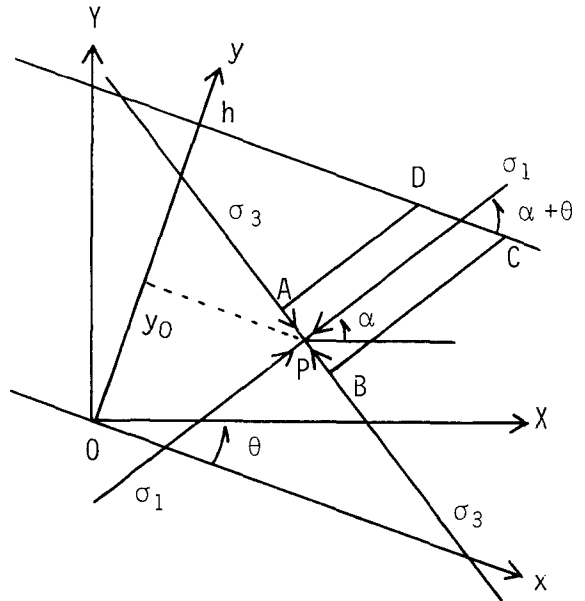
積雪は成層構造をもち、層が異なれば雪の性質も異なるが、1つの雪の層の中では雪の性質は一樣で、しもざらめ雪のように構造的に異方性の強い雪を除いては、力学的に等方質であると考えてよい。したがって、雪の歪の主軸の方向と主応力の方向とは一致し、2つの主応力は対称面内にあり、他の1つは対称面に垂直である。対称面内の2つの主応力のうち、代数的に大きいものを $\sigma_1$ 、小さいものを $\sigma_3$ 、対称面に垂直なものを $\sigma_2$ と名付けることにする。

斜面の積雪はそれぞれの点を通る対称面内を斜面の下手に流下し、雪は歪をうけるが、2週間程度の期間内ならば、1つの雪の層内における歪は、有限均質歪<sup>3)</sup>とみなすことができる<sup>1,2)</sup>。すなわち、対称面内で、1つの層の雪の面に直線を刻みこんでおけば、この直線は雪の流動とともに方向をかえ、直線方向に伸び縮みはしても、直線性を保つ。又、2本の平行線を書いておけば、平行線の間隔や方向がかわっても平行のままである。

上にのべた平面歪と有限均質歪の性質を利用して、雪の中の主歪の方向を、次のようにして求めることができる。

第1図に対称面で切った積雪断面

を示した。図のように、斜面上の一点Oを座標原点とし、 $x, y$ 軸、 $X, Y$ 軸をとる。第1図の積雪断面の上で、1つの層の雪に、直線上にない3点をえらび、目印をつける。3点の $X, Y$ 座標を $X_i, Y_i (i=1, 2, 3)$ 、3点を通る円の中心を $P(X_0, Y_0)$ 、円の半径を $r$ とする。3点の位置は、雪の流動によってかわるわけであるが、ある日数の後、3点が $X'_i, Y'_i$ に、円の中心P点が $X'_0, Y'_0$ に移動したとすれば、均質歪の仮定によって



第1図 対称面による積雪断面。積雪が一層構造の場合

$$\left. \begin{aligned} a(X_i - X_0) + b(Y_i - Y_0) &= X'_i - X'_0, \\ c(X_i - X_0) + d(Y_i - Y_0) &= Y'_i - Y'_0, \\ (X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2 &= r^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

が成り立つ。ここで、 $a, b, c, d$ はこの部分の雪の歪の性質をあらわす常数である。

歪の主軸の方向は、 $X$ 軸から反時計廻りに測った $\alpha$ と $\alpha + 90^\circ$ の方向で、 $\alpha$ は

$$\left. \begin{aligned} \tan(\alpha' + \alpha) &= (b+c)/(a-d), \\ \tan(\alpha' - \alpha) &= (c-b)/(a+d) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

で与えられる。

第1図には、このようにして求められた主応力 $\sigma_1, \sigma_3$ の方向がP点に記入されている。主歪や主応力の方向は、一般に物体が歪をうける前後において直交性を保つ唯一組の方向であることが証明されている。同一の雪の層の中では、雪の歪は平行線の平行性を変えない均質歪をうけるのであるから、この層内のどの点においても、 $\sigma_1, \sigma_3$ に平行にひいた方向は、その点における主応力の方向を与える

P点を中心とし、雪に刻まれた3点を通る円は、均質歪によって楕円にかわる。単位の長さの半径をもつ同心円がおなじ歪によって変化した楕円は歪楕円とよばれるが、この楕円の長軸の方向を、 $X$ 軸から反時計廻りに測った角度が(3)式の $\alpha'$ である。歪楕円の長軸、短軸の長さを、 $2A, 2B$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} (A+B)^2 &= (a+d)^2 + (b-c)^2, \\ (A-B)^2 &= (a-d)^2 + (b+c)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

の関係がある。

#### IV. 単層構造の積雪内の主応力の大きさ

斜面積雪が単一の雪の層より成る場合の主応力の大きさを先ず求めることにする。前節で述べた方法で、第1図P点における2つの主応力 $\sigma_1, \sigma_3$ の方向が決定されたとする。他の1つの主応力は紙面に垂直である。

第1図で、四辺形ABCDの辺ABは、P点を通り、 $\sigma_1$ に垂直で単位の長さをもつものとする。辺BC, ADは共に $\sigma_3$ に垂直である。四辺形ABCDで周囲をかこまれ、紙面に垂直に単位の厚さをもった雪の柱の $\sigma_1$ 方向の力の釣合いを考えてみる。辺BC, ADをふくむ紙面に垂直な面は、 $\sigma_3$ に垂直であるからこの面に働く剪断応力 $\tau$ は0である。辺CDを含む面は積雪表面の自由面であるから $\sigma, \tau$ は0である。面ABCDは $\sigma_2$ に垂直な面であるから $\tau$ は0である。したがって、

$$\sigma_1 = -w'(y_0) \sin \alpha / \sin(\alpha + \beta). \quad (5)$$

但し

$$w'(y_0) = \int_{y_0}^h \rho g dy.$$

$y_0, h$ はP点及び積雪表面の $y$ 座標、 $\rho$ は雪の密度、 $g$ は重力加速度である。今の場合、雪の密

度  $\rho$  は積雪のどの部分でも一定と仮定しているから  $w'(y_0) = (h - y_0) \rho g$  である。又、 $w'(y_0)$  と (1) 式の  $w$  との間には

$$w'(y_0) = w \cos \theta \tag{6}$$

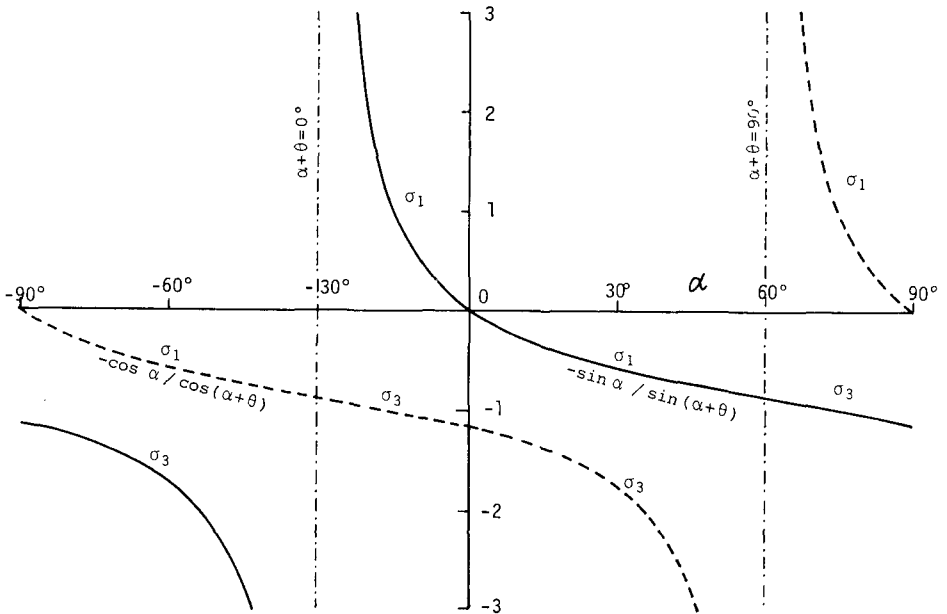
の関係がある。

$\sigma_3$  の方向についても、同様な釣合いの条件を考えれば、

$$\sigma_3 = -w'(y_0) \cos \alpha / \cos(\alpha + \theta), \tag{7}$$

がえられる。

$\sigma_1$  と  $\sigma_3$  については、 $\sigma_1 > \sigma_3$  のとりきめを先に行ったが、(5) 式の右边が (7) 式の右边よりも常に大きいわけではない。第 2 図に  $\theta = 30^\circ$  とし、 $-90^\circ$  から  $+90^\circ$  までの  $\alpha$  を横軸に、 $-\sin \alpha / \sin(\alpha + \theta)$  と  $-\cos \alpha / \cos(\alpha + \theta)$  の値を縦軸に示しておいた。実線が  $-\sin \alpha / \sin(\alpha + \theta)$ 、破線が  $-\cos \alpha / \cos(\alpha + \theta)$  である。



第 2 図 横軸は  $\alpha$ 、縦軸は  $-\sin \alpha / \sin(\alpha + \theta)$  (実線) と  $-\cos \alpha / \cos(\alpha + \theta)$  (破線)、 $\theta = 30^\circ$

図の縦の鎖線で示されているように、 $\alpha + \theta = 90^\circ$  で  $-\cos \alpha / \cos(\alpha + \theta)$  が、 $\alpha + \theta = 0^\circ$  で  $-\sin \alpha / \sin(\alpha + \theta)$  が無限大になり、2本の鎖線の外側で  $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  とが入れかわることになる。実線と破線とは  $90^\circ$  の位相差をもつおなじ形の曲線であるから、 $0 < \alpha + \theta < 90^\circ$  の条件にあわない  $\alpha$  がえられた時は、 $\alpha + 90^\circ$  又は  $\alpha - 90^\circ$  を  $\alpha$  とすれば何時でも (5), (7) 式が成立つ。

第 3 図に P 点を通る水平線 AA、斜面に平行な BB、線斜面に垂直な CC 線が記入されている。 $\alpha$  が 1, 3 と記入されている領域に入る角である時、その方向が (5) 式で与えられる  $\sigma_1$  を、それに垂直な方向が (7) 式の  $\sigma_3$  を与える。又  $\alpha$  が 2 の領域の角である時は、それとは直角の方向が (5) 式の  $\sigma_1$  を与えるのである。

第3図の3を記入してある領域は、第2図で $\sigma_1$ が正の値、すなわち $\sigma_1$ が引っ張りの応力となる領域である。しかも $\alpha$ が $0^\circ$ から $\alpha+\theta=0$ の鎖線に近よるにしたがい、 $\sigma_1$ の引っ張り応力は急激に増加する。

斜面に新たな積雪がなくて、 $w'(y_0)$ が一定でも、あるいは、積雪粒子の変態による積雪の強度の低下がなくても、主応力の方向の変化のために、斜面方向の引っ張り応力が急激に増加し、雪が破壊され、雪崩が発生することが予想されることになる。

以上のようにしてP点における $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ の方向と大きさがえられたので、P点を通り、法線が対称面内にある任意の面に働く垂直応力 $\sigma$ 、剪断応力 $\tau$ を求めることもできる。そのうち、P点を通り、斜面に平行な面に働く $\sigma$ 、 $\tau$ は、 $\sigma_1$ とこの面の法線との間の角を $\beta$ として、

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_3 \sin^2 \beta,$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\beta$$

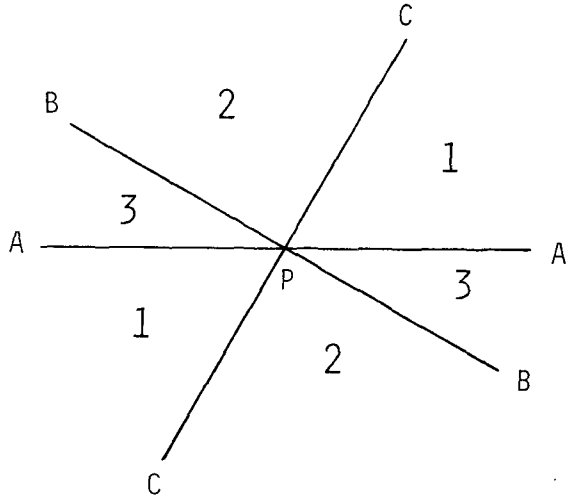
となり、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ の値及び $\beta = 90^\circ - (\alpha + \theta)$ を代入して、

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -w'(y_0) \cos \theta, \\ \tau &= w'(y_0) \sin \theta \end{aligned} \right\} (8)$$

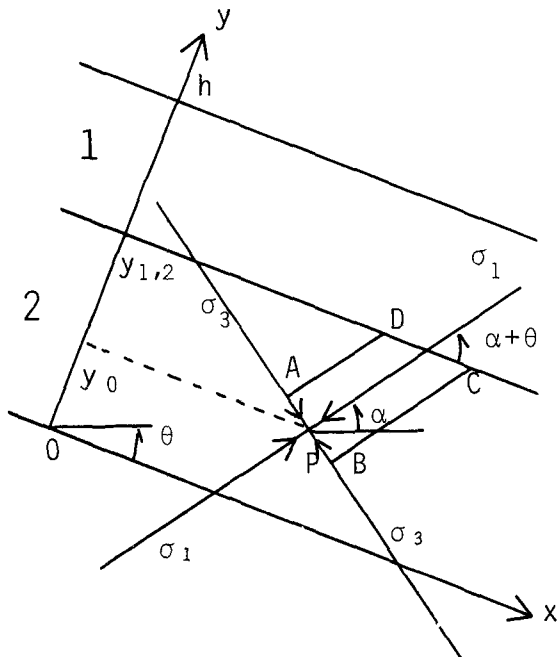
がえられる。(6)式を考慮すれば、(8)と(1)はおなじ結果である。吉田<sup>4)</sup>は、すでに斜面積雪の流動が平面歪で且 $y$ だけの関数である場合、積雪が単一層であれば(8)式が何時でも成立つことを示している。(8)式には $\alpha$ をふくんでいない。 $\alpha$ がどんな値であっても、斜面に平行な面に働く $\sigma$ 、 $\tau$ は $w'(y_0)$ と $\theta$ 、又は $w$ と $\theta$ のみによって決定されることになる。

### V. 多層構造の積雪内の主応力の大きさ

積雪はいくつかの雪の層が重なりあった成層構造をもっている。そのうち最も簡単なものとして2層構造の積雪の場



第3図 P点を通りAAは水平線、BBは斜面に平行線、CCは斜面に垂直な線、 $\alpha$ が2の角度を示す時、 $\sigma_1$ はそれと直角な方向をとる。 $\sigma_1$ は3の領域にある時引っ張り応力になる



第4図 2層構造の積雪断面

合を考えてみる(第4図)。第III節でのべたように、対称面の上で、上から2番目の層の雪に3つの目印をつけ、これらの点の一定期間の前後の座標を(2)式に入れて $a, b, c, d$ を求め、(3)式によって主応力の方向 $\alpha$ と $\alpha+90^\circ$ を計算することができる。この方向をP点を通る $\sigma_1, \sigma_3$ の方向として第4図に記入してある。

前節と同様に、四辺形ABCDを画き、 $\sigma_1$ 方向の力の釣合いを考えてみる。ただし辺CDは、第1層と第2層との境界にあって、斜面に平行である。CD面に働く垂直応力 $\sigma$ 、剪断応力 $\tau$ は、境界の $y$ 座標を $y_{1,2}$ とすれば、

$$\begin{aligned}\sigma &= -w'(y_{1,2}) \cos \theta, \\ \tau &= w'(y_{1,2}) \sin \theta.\end{aligned}$$

但し

$$w' = \int_{y_{1,2}}^h \rho g dy$$

である。辺CDの長さは辺ABの長さを1とした時 $1/\sin(\alpha+\theta)$ であるから、面CDに働く $\sigma_1$ 方向の力 $f$ は

$$\begin{aligned}f &= \frac{\sigma}{\sin(\alpha+\theta)} \cdot \sin(\alpha+\theta) + \frac{\tau}{\sin(\alpha+\theta)} \cdot \cos(\alpha+\theta) \\ &= -w'(y_{1,2}) \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\theta)}\end{aligned}$$

となる。四辺形ABCDの雪に働く力で $f$ 以外の力は前節の場合とおなじであるから、P点の $y$ 座標を $y_0$ とすれば

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\int_{y_0}^{y_{1,2}} \rho g dy \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\theta)} - w'(y_{1,2}) \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\theta)} \\ &= -w'(y_0) \sin \alpha / \sin(\alpha+\theta)\end{aligned}\tag{9}$$

同様にして

$$\sigma_3 = -w'(y_0) \cos \alpha / \cos(\alpha+\theta)\tag{10}$$

がえられる。(9)式は(5)式と、(10)式は(7)式と全くおなじ形の式である。すなわち、第2層の $\sigma_1, \sigma_3$ の方向と大きさは、第1層の $\sigma_1, \sigma_3$ の方向、大きさとは全く無関係に、第2層の主応力の方向 $\alpha$ がもとまれば計算できることになる。このことは3層以上の成層構造をもつ積雪の場合にもあてはまる。このような結果になったのは、層の境界が斜面と平行であるため、(8)式で与えられる境界面における $\sigma, \tau$ が $\alpha$ をふくまないことに原因している。

2層以上の層構造の場合においても、 $\sigma_1 > \sigma_3$ の条件をみたすため、 $\alpha$ が第3図の2の領域の角をもつ時には、それと直交する方向が $\sigma_1$ の方向になる。

## VI. 検 討

上にのべた $\sigma_1, \sigma_3$ の求め方は、平面歪を仮定し、積雪に印した3つの点の移動から有限均質歪の性質を利用して $\alpha$ を求め、釣合いの条件によって $\sigma_1, \sigma_3$ の大きさを決定したのである。

Haefeli<sup>5)</sup> はおなじく雪につけた目じるしの移動から平面歪の仮定の下に幾何学的な作図で  $\alpha$  を求め、釣合いの条件によって  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  の大きさを決定している。しかし、幾何学的な作図をすするため、斜面方向では、雪の伸び縮みはないものとした。この仮定は、実際に雪崩発生の危険のある、したがって、斜面方向の伸び縮みのある雪に対して  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  の決定を妨げる結果になった。又 Haefeli は、暗々裡に、雪に刻まれた直線は、雪の変形によっても直線性を保つことを仮定している。すなわち、有限均質歪の一部を仮定することによって作図を行っているのである。

本報告は、有限均質歪を明らかに仮定することによって、斜面方向の無歪の条件をとり去り、Haefeli の理論の欠点を補ったと云うことができよう。

本報告では、1つの雪の層の中では、おなじ有限均質歪がおこることを仮定している。しかし、これは斜面の全長にわたって、1つの層ではただ1組の歪の常数  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  をもつ均質歪の存在を必要とするものではない。考慮している点の近傍で同一の常数をもつ均質歪が存在すればよいからである。

本研究は文部省の雪崩研究に対する特別事業費で行われた。

## 文 献

- 1) 清水 弘 1968 斜面積雪の内部歪 I. 低温科学, 物理篇, **26**, 143-168.
- 2) Shimizu, H. and Huzioka, T. 1974 Strain and stress in snow cover on slope. Proc. Int. Symp. on Snow Mechanics, Grindelwald, 1974 (準備中).
- 3) Jaeger, J. C. 1964 Elasticity, Fracture and Flow, Mathuen & Co. London. 152 pp.  
飯田汲事訳 1968 弾性・破壊・流動論. 共立全書 535, 213 pp.
- 4) 吉田順五 1963 一様な斜面上の積雪の内部応力. 低温科学, 物理篇, **21**, 1-12.
- 5) Haefeli, R. 1939 Schneemechanik. Beiträge zur Geologie der Schweiz, Geotechnische Serie-Hydrologie, Lieferung **3**, 65-241.

## Summary

Stresses within a snow cover on a slope were calculated on the assumption that a finite homogeneous strain was exerted on the creeping movement of snow. Figure 1 shows a longitudinal profile of a snow cover on a slope of inclination  $\theta$ . If a slope is sufficiently wide in its transversal direction, compared with the thickness of a snow cover, the creeping movement of snow must take place in the  $X$ - $Y$  plane; that is, a strain in the snow cover can be analysed as a plane strain.

A snow cover is composed of a number of snow layers, whereby the physical properties of snow is uniform in each layer. Besides, in each snow layer, snow deforms in the mode of a finite homogeneous strain in a short period of time. A straight line marked in a snow layer remains straight and two parallel lines marked remain parallel after the deformation of snow.

The directions of the principal axes of a strain are obtained as follows. Three points  $X_i$ ,  $Y_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) are marked on the  $X$ - $Y$  plane of a snow layer. After a short period of time, for example, one or two weeks later, the marked points will be moved

to  $X'_i, Y'_i$  by the deformation of snow. And the center of the circle passing through the three points changes its coordinates from  $X_0, Y_0$  to  $X'_0, Y'_0$ . The assumption that a strain is finite and homogeneous gives eq. (2), where  $a, b, c, d$  are constants characteristic to the deformation of snow and  $r$  is the radius of the circle. Equation (3) gives the directions of principal axes of strains  $\alpha, \alpha+90^\circ$  and those of the major axes of strain ellipse  $\alpha'$  measured counterclockwise from  $X$ -axis.

Snow is mechanically isotropic, except for a case of depth hoar, and the directions of principal axes of strains coincide with those of principal axes of stresses. Then, in Fig. 1, the equilibrium of the tetragon ABCD along the direction  $\sigma_1$  gives eq. (5) the magnitude of  $\sigma_1$  and the same procedure along the direction  $\sigma_3$  gives eq. (7) the magnitude of  $\sigma_3$ . As  $\sigma_1$  is taken so as to be larger than  $\sigma_3$  algebraically,  $\alpha$  in eqs. (5) and (7) must be changed by  $\alpha-90^\circ$  when  $\sigma_1 < \sigma_3$ .

The normal stress  $\sigma$  and the shear stress  $\tau$  on the plane parallel to the slope are calculated from  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  as  $-\omega'(y_0) \cos \theta, \omega'(y_0) \sin \theta$ , respectively, where  $\omega'(y_0) = \int_{y_0}^h \rho g dy$  and  $h, y_0, \rho$ , and  $g$  are the  $y$ -coordinate of the snow surface, that of the point P (Fig. 1) in the snow cover, the snow density and the acceleration of gravity, respectively. The value of  $\sigma$  is taken positive when it is extensive.

The values of  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  obtained in this way can be applied to the surface layer (first layer) of a multi-layer structure of the snow cover. In the second layer, the directions of  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  can be determined from the creeping movement of three points marked in this snow layer. The equilibrium of the tetragon ABCD along the direction of  $\sigma_1$  (Fig. 4) gives the magnitude of  $\sigma_1$  (eq. (9)). As the plane CD is parallel to the slope,  $\sigma$  and  $\tau$  on this plane are expressed by eq. (8) with the replacement of  $y_0$  with  $y_{1,2}$ , the  $y$ -coordinate of the boundary between the first and the second layer. The same procedure gives the magnitude of  $\sigma_3$  (eq. (10)). Equations (5) and (9), or (7) and (11) are very much the same.

Now,  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  in any snow layer can be determined by simple equations, and have the following characteristics:

Firstly,  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  in a snow layer of a snow cover are determined by  $\omega' \left( = \int_{y_0}^h \rho g dy \right)$  and  $\alpha$  in that layer without any dependence on the principal axes of stresses or strains in neighbouring layers.

Secondly,  $\sigma_1$  is extensive when  $-\theta < \alpha < 0$ , and rapidly increases with the decrease of  $\alpha$  from 0 to  $-\theta$ .

A snow layer is broken when the tensile stress  $\alpha$ , overcomes the tensile strength of the snow layer, possibly resulting in an avalanche.