



Title	プラウ除雪の理論 V : 鋭角直線プラウによる前縁蹴あげ 1
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科学. 物理篇, 33, 75-90
Issue Date	1976-03-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18275
Type	departmental bulletin paper
File Information	33_p75-90.pdf



プラウ除雪の理論 V*

(鋭角直線プラウによる前縁蹴あげ 1)

吉田 順五

(北海道大学名誉教授)

(昭和50年10月受理)

I. ま え が き

同名の論文 I, II¹⁾ および論文 III, IV²⁾ は、直角直線プラウによる雪の前縁蹴あげの理論的考察であった。直角直線プラウの形容詞「直角直線」は、プラウの前縁がプラウの進行方向に直角な直線であることを意味する。しかし、実際に用いられるプラウでは、V型プラウのばあいであれ一文字プラウのばあいであれ、前縁がプラウの進行方向に対して斜めに傾いた直線である。稀に、前縁が直線ではなく曲線をなした場合もある。しかし、この論文では、曲線の場合は考えない。(論文 I で、前縁が二等辺三角形の二等辺の形をしたプラウを「V型プラウ」とし、前縁が一直線をなすプラウを「直線プラウ」と呼んだ。しかし後者は「一文字プラウ」と言われることが多い。それで、これからあと、論文 I で直線プラウと呼んだものは一文字プラウと呼ぶことに改める。そして、前縁の形が直線分で形成されたプラウを、すべて「直線プラウ」と称することにする。この言いかたにしたがえば、一文字プラウはもとより、V型プラウもまた直線プラウである。) プラウの進行方向と前縁との間の角を「開き角」といい、この論文ではそれを β で表す。直角直線プラウでは β が 90° であるのに対し、實用プラウの開き角は鋭角で 90° より小さいわけである。開き角が 90° より小さい直線プラウを「鋭角直線プラウ」と名づけよう。この論文 V の目的は、直角直線プラウについて得られた結果を利用して、鋭角直線プラウによる雪の蹴あげを理論的に考察することである。

直角直線プラウが実用に全く適さないわけではない。むしろ、排雪車が大きな速度で走るときには、いくつかの利点が予想されるくらいである。しかし、大速度で走ることのできる排雪車でも、停止から動きだした時の速度は小さい。排雪車の速度が小さいと、雪が、直角直線プラウの上や前方に堆積して、排雪車の運動に非常に大きな抵抗を加える。直角直線プラウには、雪を側方に排除する力がないからである。多くのばあい、排雪車はこの抵抗に耐えられずに停ってしまう。これが、直角直線プラウが広くは用いられない主な理由である³⁾。

II. 無限幅鋭角直線プラウによる蹴あげ

今までと同様、鋭角直線プラウと共に動く運動坐標系に乗って考察をすすめる。静止坐標

* 北海道大学低温科学研究所業績 第1698号

系に対し速度 V で動くという意味で、この運動坐標系に V 坐標系の名を与えよう。 V 坐標系では、プラウが静止し、処女雪が地面とともに速度 V でプラウにむかって流れる。この第 II 節では直角直線プラウについて得た結果を有限幅鋭角直線プラウに応用するための準備として、前縁が無限に長い無限幅鋭角直線プラウによる雪の蹴あげを考える。処女雪も無限に広くつもっている。

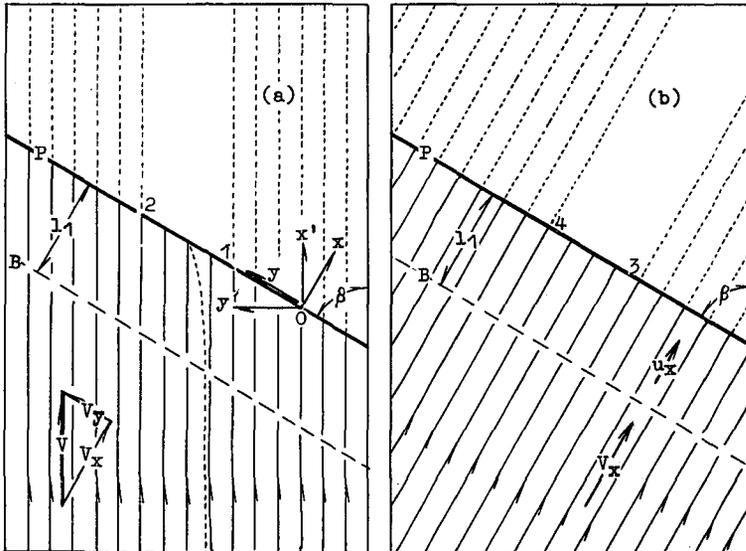
1. 無限幅鋭角直線プラウによる蹴あげ

第 1 図 (a) は、 V 坐標系におけるプラウと雪とを上から見おろした平面図である。斜めの太い直線 P が無限幅鋭角直線プラウの無限に長い前縁を表し、無限に広くつもった処女雪が図の下から上にむかって速度 V で流れる。直線 P 上に坐標原点 O をえらび、直角坐標 $x, y; x', y'$ を図に示した方向にとる。 x 軸は直線 P に直角、 x' 軸は処女雪の流れの方向に平行である。プラウの開き角 β を用いると、速度 V の x, y 成分は

$$V_x = V \sin \beta, \quad V_y = V \cos \beta \quad (1)$$

として表される。

プラウは、ほとんど例外なく、鉄製である。小島⁴⁾によると、しまり雪としまり雪との間の動摩擦係数は 0.8 附近の値であるのに対し、鉄としまり雪との間の動摩擦係数は小さくて、0.1 の程度にすぎない。藤岡はいろいろな種類の固体と雪との摩擦を温度、荷重、摩擦速度を変えて詳しく研究した⁵⁻⁷⁾。鉄としまり雪との間に限っても、摩擦現象は複雑である⁶⁾。しかし、大まかには、しまり雪と鉄との温度が -1°C か -2°C かのとき動摩擦係数 μ が最小になると言える。この μ の最小値は 0.02 である⁵⁾。温度がさがると μ は大きくなるが、 -20°C でも 0.08



第 1 図 無限幅鋭角直線プラウと雪とを上から見おろした図。直線 P がプラウの前縁を表す。破線 B は、雪のプラウまえ圧縮の開始線である。図 (a) は V 坐標系での有様で、処女雪は速度 V で下から上にむかって流れる。 W 坐標系での有様を示す (b) 図では、処女雪の速度の値は V_x で方向はプラウ前縁 P に直角である。この (b) 図の蹴あげを「無限幅正面蹴あげ V_x 」と名づける。

をこえない。気温が 0°C 以上にのぼりだすと、 μ は急速に増す。このときは μ が 0.1 以上の値に達することもある。

このように鉄と雪との間の動摩擦係数は小さい。それで雪とブラウとの間に摩擦力は現れないと仮定しよう。すると、前縁が無限に長いから、ブラウを前縁の方向にどのような速度で動かしても、雪の運動に変化は起こらない。そこで、ブラウを前縁の方向に速度 V_y で走らせ、ブラウとともに移動する坐標系に乗って雪の運動を観察しよう。この坐標系を W 坐標系と名づける。つまり、第 1 図 (a) の直線 P を y 方向に速度 V_y で走らせたうえ、図の全体に、速度 $-V_y$ を重ねるわけである。第 1 図 (b) がその時の有様である。ブラウの前縁 P は静止し、処女雪は前縁 P に直角に速度 V_x で流れる。したがって、雪の流れの流線は、ブラウまえ圧縮がおこってもおこらなくても、第 1 図 (b) の平行実線群が示すように、ブラウ前縁に直角な直線である。それゆえ、ブラウは直角直線ブラウとして雪を蹴あげる。この蹴あげを「無限幅正面蹴あげ V_x 」と名づけよう。無限幅正面蹴あげ V_x の考察に、論文 I-IV で直角直線ブラウについてえた結果が用いられることは言うまでもない。

第 1 図 (b) のばあいの、すなわち W 坐標系での処女雪の流れ速度は V_x だから、論文 I-IV で使った速度変数 γ のかわりに

$$\gamma_1 = V_x^2/c^2 = \gamma \sin^2 \beta \quad (2)$$

を用いる。しかし実用には、 γ を使う方が便利である。それで γ を「実用速度変数」とよび、理論的考察に適していることから γ_1 を「理論速度変数」と呼ぶことにしよう。式 (2) の c は処女雪のなかの塑性波の伝播速度で $c = \sqrt{k/\rho_0}$ で与えられる。 ρ_0 は処女雪の密度、 k は処女雪が一軸圧縮をうけるときに現す応力 p と歪 ε との比例常数である。すなわち $p = k\varepsilon$ である。

論文 I および III で述べたことにより、 $\gamma_1 > 1$ ならば、すなわち $V_x > c$ ならば、ブラウ前縁 P に達するまで処女雪は圧縮をうけない。この $\gamma_1 > 1$ のばあいの蹴あげを「高速蹴あげ」と名づける。 $\gamma_1 < 1$ のばあいには、第 1 図 (b) において、ブラウ前縁 P の前方ある距離 l_1 にある破線 B に達すると雪の圧縮がはじまる。論文 III で、この圧縮を「ブラウまえ圧縮」、 l_1 を「ブラウまえ圧縮の長さ」と呼んだ。破線 B は「圧縮開始線」という。 $\gamma_1 < 1$ のばあいの蹴あげを「低速蹴あげ」と名づける。実用速度変数 γ でいえば、 γ が $1/\sin^2 \beta$ より大きいかわりに小さいかによって、蹴あげが高速または低速になる。低速蹴あげにおけるブラウまえ圧縮範囲内の雪の速度を u_x で表そう。 u_x は V_x より小さい。

蹴あげが高速のばあいも低速のばあいも、前縁最大歪 ε_M が雪の粉碎歪 ε_C より小さければ蹴あげは流動型であり、大きければ飛散型である。

ここで第 1 図 (b) のブラウを、直線 P に平行に左上から右下にむかって速度 $-V_y$ で走らせ、そのブラウと共に動く坐標系にうつる。この坐標系は V 坐標系にはかならない。それゆえ、この W 坐標系から V 坐標系への乗り換えによって、第 1 図 (b) での雪の蹴あげから第 1 図 (a) での蹴あげが得られることになる。したがって、第 1 図 (a) での雪の速度を求めるには、第 1 図 (b) での雪の速度に、直線 P にそって右下から左上にむかう速度 V_y をベクトル的に加えればよい。以上のことを「無限幅正面蹴あげ V_x に横移動 V_y を重量する」という言葉で表すことにする。横移動 V_y の重量による雪の速度の変化に応じて、雪の流線の形も変わる。しかし高

速, 低速, 流動型, 飛散型などの蹴あげ型式, また, 雪のなかに生ずる応力や歪, さらには雪とプラウとの間に作用する力は, この坐標系乗り換えによって変化をうけない。

2. 無限幅鋭角直線プラウによる雪の片寄せ

蹴あげが高速ならば, W 坐標系での雪の速度は, プラウ前縁 P に至るまで V_x のままである。それで横移動 V_y を重畳して V 坐標系にうつっても, 雪の流線はプラウ前縁に達するまで直線で, 第 1 図 (a) の鉛直方向に走る実線の平行線群で表される。これに対し, 蹴あげが低速のばあいには, 第 1 図 (a) の点線が示すように, プラウまえ圧縮の範囲内で流線が弯曲する。W 坐標系での雪の速度が, まえ圧縮範囲内では, V_x より小さい値の u_x になるからである。

このプラウまえ圧縮範囲内の V 坐標系での流線の方程式は

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{V_y} \quad (3)$$

で与えられる。式 (III, 8) により, u_x は

$$u_x^2 = u_A^2 - \left\{ \gamma_1 / (1 - \gamma_1) \right\} 2\mu g x \quad (4)$$

と書ける。式 (III, 8) は論文 III の (8) 式のことである。こんごも, まえの論文にでた式はこの書き方であらわす。式 (4) の u_A はプラウ前縁の直前での u_x の値である。式 (4) を用いて (3) 式を積分したあと, プラウまえ圧雪の長さ l_1 と u_A との関係を用いて u_A を消去し, さらに坐標 x, y を

$$\xi = (x + l_1) / l_0, \quad \eta = y / l_0 \quad (5)$$

に変換すると

$$\eta = 2 \cot \beta \cdot (1 - \gamma_1) \left[1 - \sqrt{1 - \{ \xi / (1 - \gamma_1) \}} \right] \quad (6)$$

の形で流線を表す式がえられる。 l_0 は論文 III でプラウまえ圧雪の「特性長さ」と呼んだもので, $c^2 / 2\mu g$ にひとしい。プラウまえ圧雪の長さ l_1 を, 無元数としては, $\lambda_1 = l_1 / l_0$ と書く。

無元数 ξ を表す式の分子 $x_1 = x + l_1$ は, プラウまえ圧縮の開始線 B から測った x 方向の距離である。よって ξ は λ_1 より大きくはならない。論文 III の第 IV 節第 2 項のおわりで注意したことにより, $\lambda_1 < 1 - \gamma_1$ である。したがって (6) 式の左辺は常に実数である。式 (6) で与えられる, 無限幅鋭角直線プラウのまえ圧雪の流線を, あとでの便宜のため「基準流線」とよぶ。

開き角 $\beta = 60^\circ$, すくい角 $\alpha = 75^\circ$ のプラウのばあいの基準流線を (6) 式によって書くと, 第 2 図の曲線群となる。実用速度変数 γ を 0.5 とした。理論速度変数 γ は $0.5 \sin^2 60^\circ = 0.375$ である。プラウまえ圧縮開始線 B を図の上で固定すると, 蹴あげが流動型のときのプラウ前縁は実線 P_1 の位置にある。雪の粉碎歪 ϵ_c が 0.5 および 0.1 のばあいには, プラウ前縁は直線 P_2 および P_3 の位置にうつり, 蹴あげは飛散型になる。直線 P_1, P_2, P_3 から発する多数の矢印は, プラウ前縁で蹴あげられた雪の速度ベクトルを水平面へ投影した成分である。

鋭角直線プラウをその前縁に直角な鉛直面で切断すると, プラウの表面が線となって現れる。論文 I でのべたとおり, この線のプラウ最先端における切線と水平線との間の角がすくい角 α である。V 型プラウのばあいには, プラウの左右の表面の交線の, すたわちプラウの鼻すじの, 水平面に対する傾き角 α' をすくい角ということもある。 $\tan \alpha' = \tan \alpha \cdot \sin \beta$ の関係がな

りたつ。

蹴あげが低速ならば、第2図の基準流線が示すとおり、プラウ前縁で蹴あげられるより先に、雪はプラウ前縁の下手の方向に片寄せられる。第2図の坐標 (ξ, η) の原点 O をとおり直線 P_1, P_2, P_3 と点 M_1, M_2, M_3 で交る点線は、 O 点を通過した雪が片寄せられずに直進するとした仮想のばあいの流線である。それゆえ、 O 点を通る基準流線が直線 P_1, P_2, P_3 と交る点 N_1, N_2, N_3 から点 M_1, M_2, M_3 までの距離 λ は、プラウまえ片寄せの目安として使えるであろう。それで λ を「プラウまえ片寄せ幅」ということにする。片寄せ幅の実長は $l_0 \lambda$ である。

3. プラウまえ片寄せ幅

前項2で定義したプラウまえ片寄せ幅 λ を表す数式は次のようにして求められる。第2図の直線 P_1 と ξ 軸との交点を K としよう。ただし、図の外に位置するため第2図のうえには K 点を示してない。距離 OK は、プラウまえ圧雪の長さ $\lambda_1 = l_1/l_0$ にひとしい。よって

$$\lambda = N_1 M_1 = N_1 K - M_1 K = \eta(\lambda_1) - \lambda_1 \cot \beta \quad (7)$$

となる。 $\eta(\lambda_1)$ は、(6)式の ξ を λ_1 とおいたときの η の値である。前縁最大歪 ε_M を用いると、(III, 28)式により

$$\lambda_1 = (1 - \gamma_1)(2 - \varepsilon_M) \varepsilon_M \quad (8)$$

と書ける。この式により、(7)式は

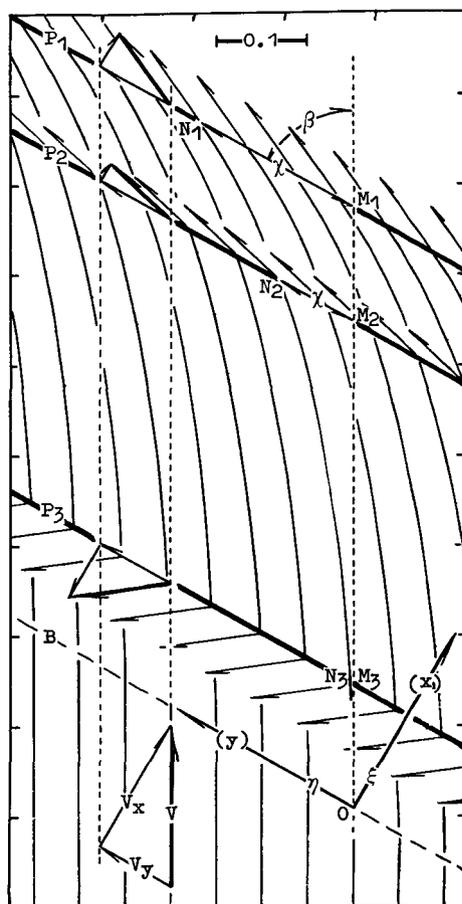
$$\lambda = (1 - \gamma_1) \varepsilon_M^2 \cot \beta \quad (9)$$

に書きかえられる。低速蹴あげが飛散型ならば、 $\varepsilon_M = \varepsilon_C$ だから、 λ と γ_1 とは直線関係でむすばれる。流動型のときの ε_M は(III, 27)式により

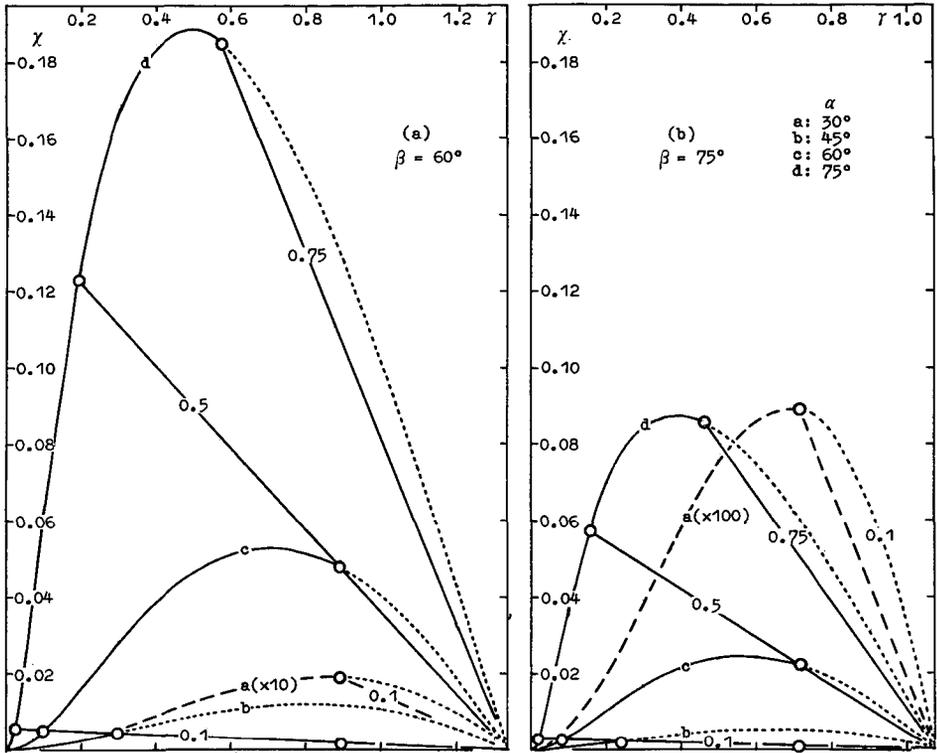
$$\varepsilon_M = \gamma_1 / (\gamma_1 + 2 \cot^2 \alpha) \quad (10)$$

で与えられる。以上は、プラウ前縁がどこにあっても、たとえば第2図の直線 P_2, P_3 の位置にあっても、言えることである。

第3図の2枚の図(a), (b)に λ と γ との関係を示す。独立変数に実用速度変数 γ を使ったから、独立変数の領域の上限が、開き角 β が 60° のばあいの(a)図では1.333であり、 $\beta = 75^\circ$ のばあいの(b)図では1.072となっている。曲線につけた記号 a, b, c, d は、すくい角 α がそれぞれ



第2図 基準流線、すなわち無限幅直角直線プラウのまえ圧縮範囲内の雪の流線、の図。すくい角 α が 75° 、開き角 β が 60° 、速度変数 γ, γ_1 がそれぞれ 0.5, 0.375 のばあい。圧縮開始線 B を固定すると、流動型蹴あげのときのプラウ前縁の位置が直線 P_1 の位置となる。雪の粉砕歪 ε_C が 0.5, 0.1 ならば蹴あげは飛散型である。直線 P_2, P_1 がそのときのプラウ前縁の位置を表す。長さは、すべて、実長を l_0 で割った無元数で示してある。



第3図 無限幅鋭角直線プラウでの、雪のプラウまえ片寄せ幅 λ と実用速度変数 γ との関係。

30°, 45°, 60°, 75°であることを表す。 $\alpha=30^\circ$ のばあいの λ は、値があまりに小さいため、図の目盛をそのまま使ったのでは曲線に書きにくい。それで(a)図のばあいには λ を10倍し、(b)図のばあいには100倍して、破線の曲線として表した。直線は蹴あげが飛散型のばあいの λ を与える。直線につけた小数值は粉砕歪 ϵ_c の値である。流動型蹴あげのばあいの λ が実線の曲線部で与えられる。この図の読みかたは、プラウまえ圧雪の長さ λ の図、すなわち論文 III の第4図の読みかたと同じである。両方の図を見くらべると、プラウまえ圧雪の長さが長いほどプラウまえ片寄せ幅が広いことがわかる。

III. 有限幅鋭角直線プラウによる高速蹴あげ

実用の鋭角直線プラウは前縁の長さが有限である。つまりプラウの幅が有限である。この第 III 節で、無限幅鋭角直線プラウについてえた第 II 節の結果を利用して、有限幅鋭角直線プラウによる高速前縁蹴あげを求める。

1. 有限幅直角直線プラウによる蹴あげ

第 II 節でみたように、無限幅のばあいならば、V 座標系から W 座標系へ乗りかえると、鋭角直線プラウも第 1 図 (b) のように直角直線プラウとして現れる。直角直線プラウならば、無限幅のばあいの蹴あげから有限幅のばあいの蹴あげが簡単に引きだせる。第 1 図 (b) で、プラウの前縁を表す直線 P 上に点 3 と点 4 とをえらぶ。これらの 2 点で、無限にうすい板を、2

枚、直線 P に直角にさしこみ、雪とブラウとを切断したとしよう。ただし、板と雪との間に摩擦力は働かないとする。雪は板に平行に動く。また、圧縮開始線 B と直線 P とのあいだの雪のブラウまえ圧縮も、ブラウ前縁の蹴あげ面（論文 I の p. 47 参照）上での雪の圧縮も、軸が雪の運動方向をむいた一軸圧縮だから、雪と板とのあいだに力は作用しない。したがって、板を挿入した後と前とでの雪の運動は全く同じである。

二枚の板のあいだにある雪およびブラウの部分、それぞれ、「雪 M」および「ブラウ M」と呼ぶ。それ以外の雪とブラウの残りを「雪 N」、「ブラウ N」と名づけよう。ブラウ N をとり去ると雪 N は、蹴あげはもとよりブラウまえ圧縮もうけないで、第 1 図 (b) の平行点線群が示すように、直線 P をこえて直進する。ここで 2 枚の板をとり去り、圧縮開始線 B より前方にある雪の切れ目を癒着させる。こうしても、雪の運動は板をとり去るまえと変わらない。圧縮開始線 B より前方では雪 M と雪 N とは速度がおなじだし、それより後方では、両方の雪のあいだに速度の差があるけれども、両方の雪のあいだの圧力が 0 で、摩擦力の発生がないからである。この板を抜き去ったあとの場合、有限幅直角直線ブラウであるブラウ M による蹴あげを与えることは言うまでもない。蹴あげは高速、低速のどちらでも構わない。この蹴あげを「有限幅正面蹴あげ V_x 」と名づける。

しかし、このブラウ M による有限幅正面蹴あげ V_x を、第 II 節で用いたのと同じ手法で、W 座標系から V 座標系に移すことはできない。有限幅の直角直線ブラウは、移動方向が前縁と平行であっても、移動すれば雪の運動を変えるからである。それで、V 座標系での有限幅鋭角ブラウによる蹴あげは、V 座標系における無限幅鋭角ブラウによる蹴あげから導かなければならないことになる。

2. 有限幅鋭角直線ブラウによる高速蹴あげ

ブラウまえ圧縮がおこらない高速蹴あげなら、多少の誤差は伴うとしても、前項でのべた板による切断法を V 座標系における無限幅蹴あげに適用して、有限幅蹴あげを導くことができる。

蹴あげを高速とするから、V 座標系での無限幅鋭角直線ブラウによる蹴あげを表す第 1 図 (a) で、圧縮開始線 B とブラウの前縁 P との間の距離 l_1 は 0 である。直線 P 上に点 1 と点 2 とを取り、これらの点で、雪との摩擦係数が 0 の 2 枚の鉛直薄板を x' 軸に平行に差しこみ、雪とブラウとを切断する。第 1 項でと同様、2 枚の板の間にある雪およびブラウの部分を M の名で、それ以外の雪およびブラウの部分を N の名でよぼう。ブラウ N を除去すると雪 N は直線 P をこえて速度 V で直進する。その有様が平行点線群で示してある。雪 M の運動は、全体として見れば切断まえと変らない。ただ、点 1 と点 2 との近傍で、次ののべるように少し変わる。

ブラウは前縁にそう細長い蹴あげ面で雪を蹴あげる。論文 I で知ったように、直角直線ブラウによる高速蹴あげでは、蹴あげ面上を進むにつれ雪の速度が落ちる。それゆえ、第 1 図 (a) のばあいの蹴あげ面上の雪の速度の x 成分は V_x より小さい。このため、蹴あげ面を昇りながら、雪はその運動方向を、図のうえて、次第に左へ偏らせようとする。ところが点 2 に立つ板は、雪を押し返して自分と平行に進ませる。このために雪 M の運動は板を挿入するまえとは違ったものになる。しかし、蹴あげ面の幅はその長さにくらべ非常にせまいから、雪を押しか

えす板の力は蹴あげ面全体が雪に加える力にくらべ著しく小さい。よって、雪 M の運動に変化がおこるとしても、その範囲は点 2 の近傍にかぎられる。

点 1 では、雪が板から離れる方向に進むから、板が雪を押返すことはない。しかし、次の理由により、点 1 の近傍でも雪の運動は変わる。蹴あげ面上の雪は一軸圧縮をうけて、その圧縮軸の水平面上の投影は、その方向が x 軸の方向とおなじである。つまり、圧縮軸の方向が板の面に平行でない。それで、雪が板の挿入前とおなじ運動をして板から離脱したとすると、離脱のために生じた雪の新しい自由面上の表面応力が 0 でないことになる。よって雪は、この自由面上の応力の矛盾が消えるように運動を変えなければならない。しかし、表面応力の自由面全体にわたっての積分は、蹴あげ面全体が雪を蹴あげる力にくらべれば非常に小さい。したがって、この表面応力調整のために起るべき雪の運動の変化も、点 1 の近傍に限られる。

ここで 2 枚の板をとりさる。すると、雪 M は板の拘束から自由になるから点 1 および点 2 の近傍で更に運動をかえ、その影響が雪 N におよぶ。しかし、雪 N の運動が影響される範囲も点 1 と点 2 との近傍に限られる。これが有限幅のプラウ M による高速蹴あげの実際の有様である。

無限幅鋭角直線プラウによる蹴あげのうらからプラウ M による蹴あげを、変更を加えずにそのまま取り出した蹴あげを「蹴あげ M」と名づけよう。また、プラウ N をとり去ったときの雪 N の直進運動を「直進運動 N」と呼ぶ。すると、プラウ M による実際の蹴あげは、蹴あげ M と直進運動 N とを組合せ、プラウ M の前縁の両端附近で速度分布および応力分布に適当な修正を施したものとなる。しかし、この修正を施すべき範囲は極めてせまい。それで、修正はとりやめ、蹴あげ M と直進運動 N との単なる組合せで、プラウ M による有限幅の高速蹴あげが与えられると考える。

うえにのべた蹴あげ M の定義から、蹴あげ M がプラウ M による有限幅正面蹴あげ V_x と横移動 V_y との重畳によって与えられることは明かである。かくして、有限幅鋭角直線プラウによる蹴あげも、それが高速ならば、直角直線プラウによる高速蹴あげから簡単に導かれることになる。論文 I, p. 41 の上段にある文章は、この意味で書かれたわけである。

IV. 有限幅鋭角直線プラウによる低速蹴あげ

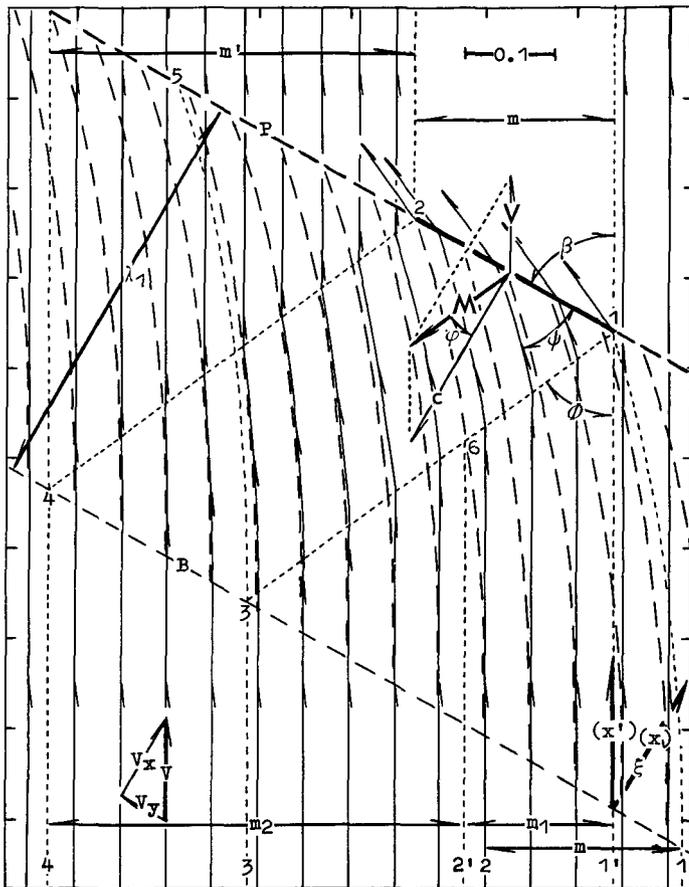
1. 圧縮作用範囲 M

蹴あげが低速のばあいには、雪のプラウまえ圧縮がおこる。そのため、 V 座標系における無限幅蹴あげから有限幅蹴あげを導くのに、高速蹴あげでは有効だった前節第 2 項の切断法が襲用できない。

第 4 図は、第 2 図の無限幅鋭角直線プラウの前縁 P_2 から下の部分を横幅を広げて書いたものである。 P_2 をとったのは、単に、便宜のためにすぎない。 P_1 あるいは P_3 を選んでもよい。斜めの破線 P と B とが、第 2 図の直線 P_2 と破線 B とにあたる。第 4 図では基準流線が破線で書いてある。第 2 図でと同様、第 4 図でも、長さは l_0 を単位にとった無元数で表してある。たとえば坐標 x のかわりに $\xi = (x + l_1)/l_0$ が使っている。ただ便宜上、プラウの前縁に直角な方向を ξ 方向といわず x 方向ということにする。そして処女雪の進行方向を x' 方向という。

第4図の直線P上の点1と点2との間が有限幅鋭角直線プラウMの前縁であるとしよう。無限幅鋭角直線プラウのまえ圧雪は、前節第2項でのべた蹴あげ面上の雪と同様に、 x 方向に一軸圧縮をうけ、その流線は z' 方向から左へ傾く。それゆえ、点1と点2とで x' 方向に2枚の板を挿入すると、前項2でのべた、蹴あげ面上の雪におこるのと同じ変化が、2枚の板のあいだにある、まえ圧雪の速度分布および応力分布に生じなければならない。ところが、プラウまえ圧縮範囲の長さ s_1 はプラウの蹴あげ面の幅にくらべ非常に長い。したがって雪の速度分布および応力分布に生ずべき変化も広い範囲におよび、前節第2項のばあいのようには無視することができない。それで切断法の踏襲はとりやめる。そして、以下に説明する「圧縮作用範囲法」により、無限幅鋭角直線プラウによる低速蹴あげから、有限幅鋭角直線プラウの低速蹴あげを導く。

プラウまえ圧縮がおこるのは、プラウ前縁の圧縮作用が塑性波速度 c で処女雪の流れを遡



第4図 圧縮作用範囲Mの図。破線Pが無限幅鋭角直線プラウの前縁を表し、そのうえの点1と点2との間が有限幅鋭角直線プラウMの前縁である。ベクトル M は、処女雪の流れ速度のベクトル V と処女雪内の塑性波伝播速度のベクトル c との合成である。圧縮作用範囲Mは、プラウMの前縁からベクトル M の方向に伸びだし、圧縮開始線Bに達しておわる。

るためである。第4図の直線P上の点1と点2との間を前縁とするプラウをM, 残りの部分を前縁とするプラウをNとしよう。プラウMの圧縮作用は、もし雪が静止していれば、つまり静止座標系からみれば、図のベクトル \mathbf{c} で表される速度で前縁に直角な方向に伝播する。しかし、第4図は、静止座標系に対して処女雪の流れ速度 V で動く運動座標系 V からみた有様である。よって、第4図のうえでは、プラウMの圧縮作用は、ベクトル \mathbf{c} とベクトル \mathbf{V} との合成ベクトル \mathbf{M} の方向へ進む。したがって、プラウMの圧縮作用が及ぶ範囲は平行四辺形1243の内部となる。平行四辺形の辺13と辺24とはベクトル \mathbf{M} に平行である。辺34は圧縮開始線の一部で直線Pに平行である。平行四辺形の内部を「圧縮作用範囲M」, そのなかにある雪を「まえ圧雪M」と呼ぶことにしよう。無限幅プラウのまえ圧縮範囲の全体から圧縮作用範囲Mを取り去った残りを「圧縮作用範囲N」, そのなかにある雪を「まえ圧雪N」と名づける。これらがプラウNの圧縮作用によることは言うまでもない。

第4図の基準流線は、第2図でのと同じく、 $\gamma=0.5$ のばあいのものである。しかしベクトル \mathbf{M} は $V=c/2$, すなわち $\gamma=0.25$ として書いた。 $\gamma=0.5$ のばあいのベクトル \mathbf{M} を使うと、ベクトル \mathbf{M} と直線Pとの方向が互に近いため、図が見にくくなるからである。

2. 有限幅鋭角直線プラウのまえの雪の運動

まえ圧雪Mとまえ圧雪Nとの境界面、つまり圧縮作用範囲Mの辺13と辺24とを含み図面に直角に立つ面を「横境界面」と言うことにしよう。辺34を含む境界面は「前方境界面」と名づける。

有限幅鋭角直線プラウMによる蹴あげに達するために、プラウNを除去しよう。すると圧縮作用範囲Nは消え、そこにあった雪はプラウNの圧縮作用から解放されて、地面とともに速度 V で直進しだす。しかし、そのうちには、残っている圧縮作用範囲Mの横境界面13と前方境界面とに出会う雪がある。この雪は、プラウMの圧縮作用をうけて基準流線にそい、プラウNが除去されるまえと同じ運動をおこなう。圧縮作用範囲Mを通り抜けると、一部はプラウMの前縁の直前に出てプラウMにより蹴あげられる。他の雪は横境界面24に達し、それを越えたあと、地面から摩擦力をうけて、速度 V で x' 方向に直進しだす。このようにして出来あがる雪の運動の流線が、第4図に、矢印をつけた平行直線群と平行曲線群とで示してある。

しかし、プラウNを除去したあと、圧縮作用範囲Mは、うえに述べた形のままで存続できない。横境界面で応力の境界条件が満されないからである。圧縮作用範囲Mのなかの一軸圧縮の軸は、プラウ前縁Pに直角だから、ベクトル \mathbf{c} に平行である。よって、圧縮軸は横境界面に対し、ベクトル \mathbf{c} とベクトル \mathbf{M} とがはさむ角 φ だけ傾いている。 φ は

$$\tan \varphi = (V/c) \cos \beta / \{1 - (V/c) \sin \beta\} = \sqrt{\gamma_1} \cot \beta / (1 - \sqrt{\gamma_1}) \quad (11)$$

で与えられる。このために、まえ圧雪Mは、横境界面上に

$$\sigma = p \sin^2 \varphi, \quad \tau = p \sin \varphi \cos \varphi \quad (12)$$

の表面応力を現す。 σ および τ は表面応力の垂直および平行成分で、 p は圧縮作用範囲M内の一軸圧縮応力である。これに対し、プラウNを除去したあとの雪Nの応力は到るところで0

だから、横境界面でも雪 N は表面応力を持たない。よって、横境界面では応力の連続条件が満たされない。

圧縮開始線の位置では $p=0$ だから、前方境界面でのまえ圧雪 M の表面応力は 0 である。前方境界面の外側にある処女雪にも応力はない。よって、前方境界面では応力境界条件が満足されている。

うえに述べた横境界面での応力の不連続を解消するために、まえ圧雪 M はその形も、内部の速度分布も応力分布も変えなければならない。しかし、この変化を理論的にさだめることは非常に困難である。それで、横境界面における応力不連続の矛盾はそのままに残して、ブラウ前縁のまえの雪の運動状態は第 4 図によって与えられると仮定する。つまり、圧縮作用範囲 M の形は平行四辺形のままとし、そのなかの雪の速度と応力とは、無限幅正面蹴あげ V_x と横移動 V_y との重量によってえられる速度と応力とに等しいと仮定するわけである。したがって、この速度および応力を求めるには、直角直線ブラウの低速蹴あげについて得た結果を利用すべし。圧縮作用範囲 M の外の雪では、応力は 0 で処女雪の速度 V がそのまま保持される。

しかし、圧縮作用範囲 M 内にあるまえ圧雪 M の状態が、無限幅鋭角直線ブラウのまえ圧雪の状態と、すべての点で同じというわけではない。ブラウ M の正面幅を、第 4 図にあるように、 m で表わそう。鋭角直線ブラウが無有限幅ならば、処女雪流線 1 と 2 との間にある同じ幅 m の処女雪が、点 1 と点 2 との間でブラウ前縁に衝突して蹴あげられる。しかし有限幅のブラウ M が蹴あげるのは、処女雪流線 1' と 2' との間にある幅 m_1 の処女雪である。図から明らかなように $m_1 < m$ である。したがって、有限幅ブラウ M のすぐまえにある圧雪は、密度が無有限幅ブラウまえの圧雪のと同じなら、厚さが処女雪の厚さ h_0 より薄くなる。厚さが同じなら密度が小さくならなければならない。また、処女雪流線 2' と 4 との間の幅 m_2 の処女雪は、圧縮作用範囲 M を通過したあと、幅が m' に減る。よって幅が減ったこの雪は、速度は処女雪と同じであっても、厚さあるいは密度が処女雪と異らなければならない。

雪に鉛直上向き速度成分が与えられるのは、雪がブラウ前縁に実際に衝突してからである。このブラウによる鉛直速度成分付与を「真正蹴あげ」と名づけよう。有限幅「直角」直線ブラウによる低速蹴あげは、真正蹴あげと雪のブラウ前圧縮とからなる。有限幅「鋭角」直線ブラウによる低速蹴あげでは、それに雪の「ブラウまえ片寄せ」が加わる。まえの段落で述べた雪の密度あるいは厚さの変化の原因は、このブラウまえ片寄せである。次の論文 VI で、ブラウまえ片寄せを考察する。

3. 切断法と圧縮作用範囲法

有限幅鋭角直線ブラウによる低速蹴あげを導くのに、切断法を用いることは取やめた。雪の切断面に応力の不連続が現われることが、その主な理由であった。前項の圧縮作用範囲法を用いても、圧縮作用範囲 M の横境界面に (12) 式で与えられる応力の不連続が現われる。それにも拘らず、この応力不連続は容認した。

切断法を用いると、ブラウの両端を通る処女雪流線の延長線と圧縮開始線とで区切られた形の圧縮範囲が残る。ブラウを正面に見る方向に伸びる範囲だから、これを「正面圧縮範囲」と呼ぼう。ところで、ブラウまえ圧縮範囲が、この正面圧縮範囲の形をとることに対しての物

理的理由は無い。これに反し、圧縮作用範囲 M の形については、第 1 項で述べた物理的理由が存在する。これが、圧縮範囲の境界面に応力不連続をもたらす点はおなじでも、切断法を捨て、圧縮作用範囲法を採る根拠である。

有限幅鋭角直線プラウが V 型プラウならば、プラウの左右の翼がそれぞれ圧縮作用範囲を作りだし、それが、プラウの前で、扇形をした処女雪の領域をはさむことになる。扇形は、要がプラウの先端にあって 2ϕ の角度で開く。角 ϕ は、第 4 図の点線 13 と点 1 を通る処女雪流線の延長とがはさむ角である。プラウの翼が作りだすのが正面圧縮範囲だとすれば、扇形は閉じ、扇形処女雪領域が現れない。

圧縮作用範囲 M の境界面における矛盾は、応力不連続だけではない。境界面では雪の流線が屈折することになるが、これも矛盾である。雪の慣性のため、流線の曲りは滑かでないといけない。しかし、この種の粗削りな理論では、これらの矛盾を許容せざるをえないし、また、そうした方が理論全体の釣合いがよくなるとも言える。

4. 圧縮作用範囲 M の開き角 ϕ

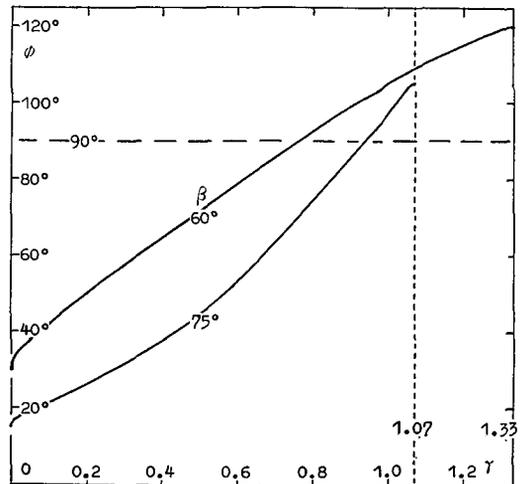
前項でのべた、第 4 図に示してある角 ϕ を「圧縮作用範囲 M の開き角」と名づけよう。

$$\phi = \varphi + (90^\circ - \beta) \tag{13}$$

で、角 φ は(11)式により r あるいは r_1 の関数として知られる。角 φ は $r_1=0$ では 0° 、 $r_1=1$ では 90° である。よって $r_1=0$ のときの ϕ は β の余角に、 $r_1=1$ のときの ϕ は β の補角にひとしい。したがって、 $\beta=90^\circ$ でないかぎり、前項でのべた扇形の処女雪領域が消失することはない。プラウの開き角 β が 60° および 75° のときの ϕ と実用速度変数 r との関係を図 5 に示した。

理論速度変数 r_1 が 1 に近づいて蹴あげが低速領域から高速領域にうつろうとすると、第 4 図の圧縮作用範囲 M の境界線 13 はプラウ前縁を表す直線 P に合体しようとする。それゆえ、もしプラウまえ圧縮の長さ λ_1 が有限ならば、圧縮作用範囲 M は直線 P にそって無限に長く左上方に伸びるのであろう。しかし $r_1=1$ では $\lambda_1=0$ だから、そのようにはならず、圧縮作用範囲 M は消滅する。処女雪の速度 V が 0 のときも、 $\lambda_1=0$ だから、圧縮作用範囲 M は存在しない。

有限幅鋭角直線プラウ M の前縁の長さを L とし、 $\omega=L/l_0$ とおこう。 r_1 が 0 あるいは 1 に充分ちかければ $\lambda_1 \ll \omega$ となる。このようなあいには、圧縮作用範囲 M 内でおこる雪の片寄せの幅 λ も ω にくらべ非常に短い。よって、雪は、プラウまえ圧縮はうけつつも、プラウ前縁まで直進すると、近似的に考えられる。したがって、 $\lambda_1 \ll \omega$ ならしめるほど r_1 が 0 または 1 に近いときは、有限幅鋭角プラウによる低速蹴あげも、有限幅低速正面蹴あげ V_x と横移動 V_y と



第 5 図 圧縮作用範囲 M の開き角 ϕ と実用速度変数 r との関係

の重畳で与えられる。

開き角 β が 0 のプラウは存在しないが、無理に作れば、処女雪の流れにそって鉛直に立つ、厚さのない一枚の板となる。したがって $\beta=0$ のプラウは、処女雪を切断するだけで、処女雪の運動には全然影響をあたえない。よって、このプラウは、処女雪の速度 V がどんな値であっても、圧縮作用範囲 M を作りださない筈である。実際、 $\beta=0$ ならば、 $V_x=V \sin \beta$ が 0 だから、 V の値の如何に拘らず、 $r_1=0$ である。すなわち $\lambda_1=0$ である。よって圧縮作用範囲 M は存在しない。 $\beta=90^\circ$ のばあいの圧縮作用範囲 M が、有限幅直角直線プラウのまえ圧縮範囲と一致することも容易にわかる。

V. ま と め

実用される有限幅鋭角直線プラウの蹴あげを取扱う準備として、まず、無限幅鋭角直線プラウの蹴あげを論じた。処女雪の速度を V 、鋭角直線プラウの開き角を β とする。雪とプラウとの間の摩擦力を無視すると、坐標変換法によって、無限幅鋭角直線プラウによる蹴あげが「無限幅正面蹴あげ V_x 」と「横移動 V_y 」との重畳によって与えられることが知られる。無限幅正面蹴あげ V_x は、速度 $V_x=V \sin \beta$ の処女雪に対して、プラウが無限幅直角直線プラウとして働いたときに起こす蹴あげである。横移動 V_y は、速度 $V_y=V \cos \beta$ の、プラウの前縁にそう方向の移動である。

無限幅正面蹴あげ V_x から、有限な幅を切りとって「有限幅正面蹴あげ V_x 」と名づける。有限幅鋭角直線プラウによる蹴あげも、それが高速ならば、雪のプラウまえ圧縮がおこらないため、有限幅正面蹴あげ V_x と横移動 V_y との重畳で与えられる。低速のばあいには、有限幅プラウの圧縮作用が、処女雪のなかの塑性波伝播速度 c で、処女雪の流れを、無限幅プラウによる雪のまえ圧縮開始線まで、さかのぼる。この有限幅鋭角直線プラウの圧縮作用が及ぶ範囲を「圧縮作用範囲 M 」と名づけ、その内部での雪の運動は無限幅鋭角直線プラウのまえ圧雪の運動に等しいと仮定した。つまり、圧縮作用範囲 M 内の雪の運動が、低速の無限幅正面蹴あげ V_x と横移動 V_y とを重畳してえられる運動と同じであると仮定したわけである。圧縮作用範囲 M 外の運動は処女雪の運動と同じとする。

蹴あげ現象のうち、プラウ前縁が雪に鉛直方向の速度成分をあたえる現象をとりだして「真正蹴あげ」と名づけた。有限幅鋭角直線プラウによる低速蹴あげは真正蹴あげ、雪のプラウまえ圧縮および片寄せの三要素からなる。まえの二要素は、すでに、論文 III および IV で考察した。次の論文 VI でプラウまえ片寄せを論ずる。

この論文を書くにあたって、日本国有鉄道技術研究所の福地合一防災・雪氷研究室長、後藤巖、篠島健二両雪氷研究室主任研究員をはじめとし杉山博、中柴周三、高橋脩その他の所員から多くの有益な御教示をいただいた。ここに記して深い感謝の意を表す。

文 献

- 1) 吉田順五 1974 ブラウ除雪の理論 I, II. 低温科学, 物理篇, **32**, 39-53, 55-70.
- 2) 吉田順五 1975 ブラウ除雪の理論 III, IV. 低温科学, 物理篇, **33**, 39-55, 57-73.
- 3) 日本国有鉄道鉄道技術研究所高橋楯氏の談話による.
- 4) 小島賢治 1966 雪の剪断凍着力. 低温科学, 物理篇, **24**, 299-303.
- 5) 藤岡敏夫・疋田 裕 1954 雪櫃の抵抗 II. 低温科学, 物理篇, **13**, 37-47.
- 6) 藤岡敏夫 1958 雪櫃の抵抗 IV. **17**, 31-51.
- 7) 藤岡敏夫 1962 雪櫃の抵抗 V. **20**, 159-179.

Summary

A snow plough put to actual use is acute angled in the sense described in the English summary of Paper IV and has a front edge finite in length. Such a plough will be called 'acute angled finite plough'. In the first half of this Paper V studies are made on kick up of snow by an acute angled infinite plough, namely, an acute angled plough with its front edge infinitely long, by taking advantage of the results obtained in the foregoing Papers on kick up of snow caused by a right angled plough. Results of the studies are then used in the second half for discussing kick up by an acute angled finite plough.

(1) It is assumed that no friction appears between the front edge of a plough and the snow to be kicked up by it. Indeed, a coefficient of friction between iron and snow is so small as to be a few hundredths of a unit. The above assumption of no friction leads to the result that no change occurs to motion of the snow advancing towards an acute angled infinite plough if the plough is moved parallel to its front edge, quite independent of at whatever speed this parallel movement takes place.

Let coordinates x and y be placed perpendicular to and parallel with the front edge of the infinite plough respectively. If the course of virgin snow meets the front edge of the plough at angle β , x - and y -components of velocity V with which the virgin snow advances are respectively given by

$$V_x = V \sin \beta \text{ and } V_y = V \cos \beta. \quad (1)$$

Let here be imagined 'right angled kick up V_x ' and 'parallel movement V_y '. The former is a fictitious right angled kick up in which the infinite plough kicks up virgin snow coming towards it at speed V_x , while the latter is a fictitious movement which moves the whole snow at speed V_y parallel to the front edge of the infinite plough. It is derived from what was stated in the preceding paragraph that the simple superposition of the right angled kick up V_x and the parallel movement V_y yields the kick up which the acute angled infinite plough gives to virgin snow advancing at speed V .

The virgin snow is or is not compressed before it reaches the front edge of the infinite plough, and 'low speed' or 'high speed' is applied to the kick up as either adjective, according as

$$\gamma_1 < 1 \text{ or } \gamma_1 > 1,$$

if γ_1 is defined by

$$\gamma_1 = (V_x/c)^2 = \gamma \sin^2 \beta. \quad (2)$$

Figure 2 of the text shows streamlines of the snow and the front edge of the acute angled infinite plough looked at downwards from above. In case the kick up is of low speed, the virgin snow begins to be compressed on line B and its streamlines are curved beyond this line as shown in the figure. Lines P₁, P₂ and P₃ give positions of the front edge of the infinite plough which depend upon the value of strain ϵ_c of pulverization of the snow; the smaller ϵ_c is, the nearer the front edge is positioned to line B. If the x -component of the velocity of snow in the 'zone of compression before the plough' is denoted by u_x , then u_x is less than V_x and the differential equation for the streamlines in the zone is given by

$$dx/u_x = dy/V_y. \quad (3)$$

Solution of this differential equation is obtained in the form

$$\eta = 2 \cot \beta \cdot (1 - \gamma_1) \left[1 - \sqrt{1 - \{\xi/(1 - \gamma_1)\}} \right], \quad (4)$$

if u_x is expressed as a function of x by use of equation (3) in the English summary of Paper III and when x and y are replaced with coordinates

$$\xi = x/l_0 = \lambda_1 + (x/l_0) \text{ and } \eta = y/l_0. \quad (5)$$

Length l_0 and number λ_1 are such that their product $l_0 \lambda_1$ is equal to breadth l_1 of the zone of compression before the plough.

Points M's in Fig. 2 show the points where one of the streamlines of virgin snow would meet front edges P's if it was elongated straight, whereas that very streamline meets them actually at points N's. The distances between points M's and N's give a measure of a lateral shift which the snow undergoes before it arrives at the front edge of the infinite plough. If this distance divided by l_0 is denoted by χ , the following function of γ_1 is found for χ

$$\chi = (1 - \gamma_1) \epsilon_M^2 \cos \beta. \quad (6)$$

Uniaxial compressive strain ϵ produced in the snow has its axis directed perpendicular to the front edge of the plough. Maximum value ϵ_M of ϵ is equal to ϵ_c when the low speed kick up is of the spray type, while it is given by

$$\epsilon_M = \gamma_1 / (\gamma_1 + 2 \cot^2 \alpha), \quad (7)$$

when the low speed kick up is of the flow type. Curves in Fig. 3 show χ against γ for some values of ϵ_c and α .

(2) Vertical full lines in Fig. 1(a) give streamlines along which the virgin snow flows before it undergoes the high speed kick up caused by an acute angled infinite plough. Suppose that both the plough and the snow are cut by two thin plates along the streamlines passing through points 1 and 2 located on front edge P of the infinite plough. Motion of the snow is left as it was before the cut except in the neighbourhoods of points 1 and 2. The snow deviates from its straight course while it is passing the narrow zone of kick up at the front edge of the plough if the two thin plates are absent. Prevention of this deviation by the plates must disturb the original motion

of the snow. But, as this disturbance is weak and its extension is limited in the neighbourhoods of points 1 and 2, let it be neglected. Then the kick up of snow occurring between the plates gives high speed kick up caused by an acute angled finite plough. After all a right angled kick up V_x of finite breadth superposed with parallel motion V_y makes this high speed kick up.

Compression of the snow starts when it passes broken line B in case kick up by the acute angled infinite plough is of low speed. The snow deviates from its straight path beyond line B so largely that a great disturbance is bestowed upon the original motion of the snow if the plough and the snow are cut in the same way as described above. Therefore the problem must be treated in some other way.

Snow lying in front of a plough moving at a low speed is compressed by a wave of compressive action which starts from every part of the front edge of the plough and is propagated in the snow with velocity c in the direction perpendicular to the front edge. Velocity vector \mathbf{M} of the wave is given by the resultant of vector \mathbf{c} and vector \mathbf{V} as shown in Fig. 4, in the coordinate system moving together with the plough. Vectors \mathbf{V} and \mathbf{c} represent respectively velocities of the virgin snow and the wave in the still coordinate system bound to the ground. Line P in Fig. 4 gives the infinitely long front edge of an acute angled infinite plough which stands still in the moving coordinate system. Let the portion of line P limited on both sides by points 1 and 2 and the remainder be called 'edge M' and 'edge N' respectively. The wave of compressive action starting from edge M advances parallel to vector M and vanishes when it arrives at broken line B, thus covering the area bordered by parallelogram 1243. Let this area and the snow lying in it be called 'domain M of compressive action' and 'snow M' respectively; let 'snow N' denote the snow lying in the zone of compression in front of the plough deprived of domain M of compressive action. It is then assumed that, if edge N is removed, snow N changes its motion into that of the virgin snow, whereas snow M retains its motion before the removal of edge N, and that this gives the state of snow in front of an acute angled finite plough. Curved broken lines in Fig. 4 represent the streamlines of snow in front of the acute angled infinite plough and they change into the full streamlines when edge N is removed. Both velocity and stress of the snow change discontinuously on the margin of domain M of compressive action, in contradiction to the general law of continuity. But these discrepancies are ignored.

プラウ除雪の理論 II, IV, V 正誤表

吉田 順五

論 文 II

ページ	上からの行数	誤	正
4 2	6	動運量	運動量
4 5	4	おぎなり	おこなり
"	6	外間	外界
5 0	1 3	言うまでない。	言うまでもない。
5 1	2 6	(3)	(3 3)
"	2 7	(3 1)	(3 4)
5 3	2 2	(3)	(4)
5 4	3 0	amount of internal	amount internal

論 文 IV

6 6	1 8	(II, 19)	(II, 20)
6 7	3	(III, 27) 式の中央項で	(II, 27) 式で
"	"	(6) と比較	(6) 式と比較
7 1	6	0.75 のばあい	0.75 とのばあい

論 文 V

7 6	1 1	速度 V	速度 V (ゴチ, イタ)
8 2	1 5	のうらから	のうちから
8 4	1 6	つまり圧雪作用	つまり圧縮作用