



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	気圧の局所急速降下による積雪の飛散Ⅲ : 定速気圧降下飛散による積雪表面の下降
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科学. 物理篇, 34, 35-48
Issue Date	1977-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18296
Type	departmental bulletin paper
File Information	34_p35-48.pdf



気圧の局所急速降下による積雪の飛散 III*

— 定速気圧降下飛散による積雪表面の下降 —

吉 田 順 五

(北海道大学名誉教授)

(昭和 51 年 10 月受理)

I. ま え が き

論文 II で、定速気圧降下ならびに半無限正弦気圧振動によって、積雪の飛散が発生するための条件をもとめた。積雪からの空気の流出が、純粋に積雪内空気の膨脹に起因するばあいである。飛散開始のあと、なお気圧降下がつづけば、雪も飛び去りつづけて、積雪表面は下降すると予想される。この論文 III は、定速気圧降下による積雪内空気の膨脹流出を原因とする飛散のためにおこる、積雪表面下降の理論的考察である。積雪表面の位置が刻々かわる「移動境界」の問題だから、論文 II の、飛散開始条件を定める「固定境界」の問題にくらべ、解くのが難しい。それで、比較的とり扱いやすい定速気圧降下のばあいに考察を限ったわけである。それにしても尚、近似的な解しかえられない。

II. 表面が下降する積雪内空気の圧力関数

1. 無次元変数

すべて、論文 II の第 II 節第 2 項で定義した無次元変数

$$\zeta = z/l, \quad \tau = t/t_0, \quad \psi = \varphi/\Delta p, \quad \varphi = p - p_0 \quad (\text{II, 10})$$

を用いて考察をすすめる。記号 (II, 10) は論文 II の (10) 式を示し、以下これにならう。 z は、下降開始まえの「平常積雪表面」から下方にとった位置坐標、 t は定速気圧降下開始時刻を起点とする時間である。 p_0 は気圧降下開始まえの「平常大気圧」で、 p が積雪内空気の実際の圧力だが、簡単のため、 $\varphi = p - p_0$ を「積雪内空気の圧力」という。 t_0 は、定速気圧降下開始から飛散開始までの時間で、(II, 8) 式によって与えられる。 l と Δp とは、圧力拡散係数 k 、気圧降下速度 β を用いて

$$l = 2\sqrt{kt_0}, \quad \Delta p = \beta t_0 \quad (\text{II, 11})$$

と定義される。

無次元の積雪内空気の圧力 ψ に関する圧力微分方程式は (II, 13) 式の

$$\partial\psi/\partial\tau = (1/4)\partial^2\psi/\partial\zeta^2, \quad \partial\psi/\partial\theta = (1/4)\partial^2\psi/\partial\lambda^2 \quad (1)$$

* 北海道大学低温科学研究所業績 第 1792 号

である。第2の式は、 τ と ζ に代る独立変数として、あとで導入される θ と λ を用いたときの、第1の式の変形にすぎない。基本拉致圧力勾配の無次元表示 Γ_0 は(II, 17)式が与える

$$\Gamma_0 = 4/\sqrt{\pi} = 2.25676 \quad (2)$$

である。積雪表面の雪粒が飛散するためには、積雪表面における $\partial\psi/\partial\zeta$ の値が Γ_0 にひとしいか、 Γ_0 より大でなければならない。

飛散開始時刻の無次元表示は $\tau=1$ である。積雪表面の下降を扱うには、飛散開始時刻を原点とする時間

$$\theta = \tau - 1 \quad (3)$$

を使うと便利である。平常積雪表面の位置を原点とする下降積雪表面の無次元坐標を Z (ギリシャ字 ζ の大文字)としよう。 Z を θ の関数として定めることが、この論文の主な目的である。

2. 積雪内空気の圧力関数

下降する積雪表面での積雪内空気の圧力勾配を Γ で表すことにしよう。すなわち

$$\Gamma = (\partial\psi/\partial\zeta)_{\zeta=Z} \quad (4)$$

である。こんご、 Γ を単に「表面圧力勾配」とよぶ。積雪の飛散が続くか否かは Γ の値の大小にかかると。よって、積雪表面の下降をしらべるには Γ の考察が必要である。そのため、まず、積雪内空気の圧力を表す圧力関数 ψ を求める。

気圧降下速度の無次元表示は1である。よって、気圧降下は(II, 12)式の

$$-\tau = -(1+\theta) \quad (5)$$

で表され、下降しつつある積雪表面はこの降下する気圧に曝される。したがって、積雪内空気の圧力関数 ψ は、 $\zeta=\infty$ では0となり、 $\zeta=Z$ では(5)式と一致する圧力微分方程式(1)の解で与えられる。それゆえ、 ψ を、 θ の未知関数である Z を母数とする ζ , θ の関数

$$\psi(\zeta, \theta; Z) \quad (6)$$

と考えるのが便利である。 ψ が満たすべき、すぐ上に述べた境界条件は

$$\psi(\infty, \theta; Z) = 0, \quad \psi(Z, \theta; Z) = -(1+\theta) \quad (7)$$

と書かれる。 ψ は、更に、飛散開始時刻の $\theta=0$ で、その時刻での圧力分布 $f_0(\zeta)$ と一致するという初期条件を満足しなければならない。 $\theta=0$ では $Z=0$ だから、この初期条件は

$$\psi(\zeta, 0; 0) = f_0(\zeta) \quad (8)$$

と書かれる。 $f_0(\zeta)$ は、 $\tau=1$ とおいた(II, 14)式

$$f_0(\zeta) = -M(\zeta) \quad (9)$$

にほかならない。 $M(\zeta)$ の表式は(II, 3)式に、曲線は論文IIの第1図に示してある。

式(7)および(8)式の条件にかなう圧力微分方程式(1)の解が発見できれば、 Z の関数形も自ら定まり、この論文IIIの目的は達せられる。しかし、それは甚だ困難なことである。この困難は、 Z が θ の関数であること、すなわち、境界である積雪表面が移動することに基く。そ

れで、この移動境界の問題を固定境界の問題にひきなおし、 ψ の近似表式をもとめることにする。

3. 固定境界問題への引なおし

第1図の面は $\psi-\zeta$ 面で、O 点を原点として ψ 軸は左から右むきに、 ζ 軸は上から下むきにとってある。いま θ をある値 θ にとる。そして、時刻 θ に、積雪表面が図の A 点の位置まで下降していると仮定しよう。この積雪表面を面 A、面 A より下に残っている積雪を積雪 A とよぶ。しかし、面 A の位置は積雪表面の仮定位置で、実際の位置であるか否か今のところ不明である。それで A 点の座標には、真の座標 Z の代りに、仮の座標 $OA=Z'$ を用いる。点 A を起点として下むきに位置座標 λ をとり

$$\zeta = Z' + \lambda \quad (10)$$

としよう。そして、積雪 A 内の圧力関数 $\psi(\zeta, \theta; Z')$ を λ と θ の関数 $\psi_A(\lambda, \theta)$ と書くことにする。

面 A を固定すると、関数 ψ_A は、積雪 A 内の空気の $\theta=0$ における圧力分布 $\psi_A(\lambda, 0)$ が λ の関数 $f(\lambda)$ として、また、A 面上での圧力 $\psi_A(0, \theta)$ が θ の関数 $F(\theta)$ として与えられれば決定する。このことは、A 面が積雪内部の面であるか、積雪の表面であるかには関係なく正しい。それで、 θ が 0 から出発して θ に達するまでの間、実際の A 面は積雪内部に埋れてはいるけれども、仮にそれを積雪の表面であると考えよう。面 A を固定境界面と考えるわけである。すると、 ψ_A は、

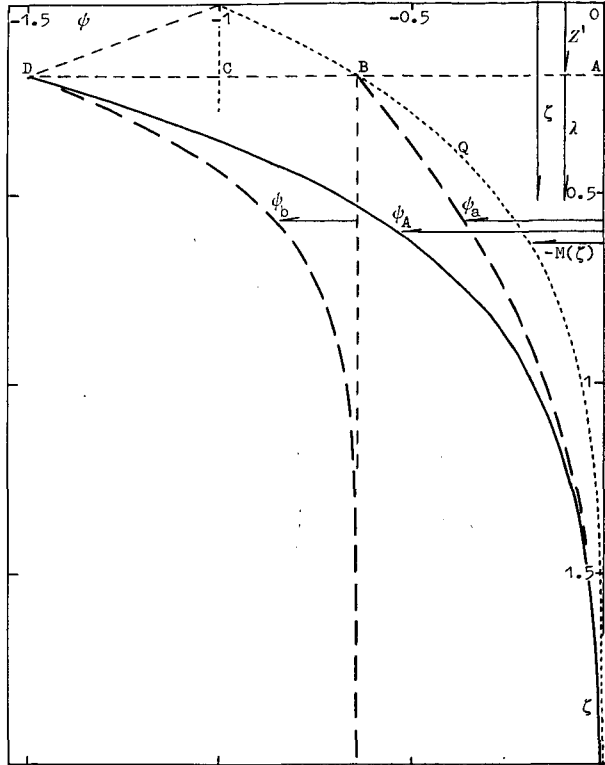
$$\psi_A(\lambda, 0) = f(\lambda), \quad \psi_A(0, \theta) = F(\theta) \quad (11)$$

の条件をみたす圧力方程式(1)の解となるが、その解を求めるには面 A を表面とする半無限固体内の熱伝導に関する定理を用いばよい。

時刻 $\theta=0$ における積雪内空気の圧力分布は、(9)式によって与えられる。第1図の点曲線 Q がそれを表している。 $f(\lambda)$ の曲線は、点曲線 Q の B 点から下につづく部分にほかならない。点 B は、曲線 Q と、A 点をとる水平線との交点である。よって

$$\psi_A(\lambda, 0) = f(\lambda) = f_0(Z' + \lambda) = -M(Z' + \lambda) \quad (12)$$

とおくことができる。



第1図 $\theta=0.5$ における近似圧力関数 ψ_A (実曲線)。 ψ_a は、 $\theta=0$ では曲線 Q と一致していた。 B 点が固定されているため、 $\theta=0.5$ での ψ_a は破曲線 ψ_a で表されるようになった。面 A 上の圧力を表す点が、 θ が 0 から θ に達するまでに、 B 点から D 点へ一定速度で動いた。それに引づられて破曲線 ψ_b ができた。 $\psi_A = \psi_a + \psi_b$ である

面 A 上の $\theta=0$ における圧力 $\psi_A(0,0)$ は第 1 図の B 点で与えられる。すなわち $\psi_A(0,0) = -M(Z)$ である。 $\theta=\theta$ における面 A 上の ψ_A の値は、その時の気圧 $-(1+\theta)$ を示す D 点で表される。すなわち $\psi_A(0,\theta) = -(1+\theta)$ である。 $\theta=\theta$ では、面 A より上にある積雪が飛散しつくして、面 A が積雪表面となり、 $-(1+\theta)$ の値まで降下した気圧に直接に曝されるからである。このように、 $\psi_A(0,\theta)$ は θ が 0 から θ まで増すあいだに $1+\theta-M(Z)$ だけ降下し、第 1 図の上の $\psi_A(0,\theta)$ を表す点は B 点から D 点へ水平に移行する。ただ、その降下の経過がわからない。それで、この降下を一定速度

$$\alpha = \{1+\theta-M(Z)\}/\theta \quad (13)$$

でおこるものと仮定しよう。すると

$$\psi_A(0,\theta) = F(\theta) = -M(Z) - \alpha\theta \quad (14)$$

と書ける。

うへの、 $\psi_A(0,\theta)$ の降下速度が一定であるとの仮定は、 θ が非常に小さいときには実情と合致する。しかし、 θ が大きいばあいは、近似的に正しいにすぎない。これからあと、求められる結果がすべて近似的なのは、このことによる。

4. 圧力関数の表式

ここに

$$\left. \begin{array}{l} \theta=0 \text{ では } \psi_a(\lambda,0) = f(\lambda) = -M(Z'+\lambda) \\ \lambda=0 \text{ では } \psi_a(0,\theta) = f(0) = -M(Z') \end{array} \right\} \quad (15)$$

なる初期条件と境界条件とを満す圧力微分方程式 (1) の解 $\psi_a(\lambda,\theta)$ を考える。固体熱伝導論の定理を用いると

$$\left. \begin{array}{l} \psi_a(\lambda,\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma}^{\infty} e^{-u^2} f(\lambda+u\sqrt{\theta}) du - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma}^{\infty} e^{-u^2} f(-\lambda+u\sqrt{\theta}) du \\ + f(0) \{1 - \Phi(\sigma)\} \\ \sigma = \lambda/\sqrt{\theta} \end{array} \right\} \quad (16)$$

となることが知られる。 $\Phi(\sigma)$ は (II, 5) 式に示した誤差関数である。また、

$$\left. \begin{array}{l} \theta=0 \text{ では } \psi_b(\lambda,0) = 0 \\ \lambda=0 \text{ では } \psi_b(0,\theta) = -\alpha\theta \end{array} \right\} \quad (17)$$

の条件をみたす圧力微分方程式 (1) の解 $\psi_b(\lambda,\theta)$ を考える。その解は

$$\psi_b(\lambda,\theta) = -\alpha\theta M(\sigma) \quad (18)$$

である。式 (II, 14) の $\psi(\zeta,\tau) = -\tau M(s)$ は、 $\psi(\zeta,0) = 0$ および $\psi(0,\tau) = -\tau$ の条件をみたす圧力微分方程式の解である。つまり平常積雪表面が固定され、それにかかる気圧の降下速度が 1 にひとしいばあいの解である。気圧降下速度が α ならば、境界条件は $\psi(0,\tau) = -\alpha\tau$ となり、解は $\psi(\zeta,\tau) = -\alpha\tau M(s)$ になる。したがって、この $-\alpha\tau M(s)$ にある τ と s とを、それぞれ、 θ と σ とでおきかえた (18) 式が、(17) 式の条件を満す圧力微分方程式の解を与える。

関数 ψ_a と関数 ψ_b との和が圧力関数 ψ_A になる。すなわち

$$\psi_A(\lambda, \theta) = \psi_a(\lambda, \theta) + \psi_b(\lambda, \theta) \quad (19)$$

である。この和は圧力微分方程式 (1) を満足し、(15) 式と (17) 式との和で与えられる初期条件と境界条件とに適合する。そして (15) 式と (17) 式との和は、まさに、 ψ_A が満すべき (12) 式と (14) 式とに他ならないからである。

第 1 図の破曲線 ψ_a が ζ 軸を基線とする $\psi_a(\lambda, \theta)$ を表し、破曲線 ψ_b が B 点を通る鉛直線を基線とする $\psi_b(\lambda, \theta)$ を表す。 $\psi_A(\lambda, \theta)$ は、曲線 ψ_a と曲線 ψ_b との和である実曲線 ψ_A によって、 ζ 軸を基線として示されている。第 1 図は $\theta=0.5$ 、 $Z=0.188$ として書いてある。あとでわかるように、0.188 は、 $\theta=0.5$ における積雪表面の真の坐標 Z の値なのである。

III. 積雪表面下降関数

1. 表面圧力勾配

第 II 節の圧力関数 ψ_A は、下降する積雪表面の坐標に仮の値 Z を与えて得たものである。坐標の真の値 Z を定めるため、積雪の飛散を支配する表面圧力勾配 Γ を ψ_A から求め、それと Z との関係をしらべる。

前節で述べた面 A での ψ_A の勾配が Γ である。すなわち、第 1 図の実曲線 ψ_A と水平線 ABCD とが、D 点で挟む角の余角の正切が Γ にひとしい。つまり

$$\Gamma = (\partial\psi_A/\partial\lambda)_{\lambda=0, \theta=\theta} \quad (20)$$

である。面 A における ψ_a 、 ψ_b の勾配を Γ_a 、 Γ_b と書くと、(19) 式により

$$\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b \quad (21)$$

となる。式 (18) の関係を用いると、(II, 6) 式の関数 $N(s)$ を使って

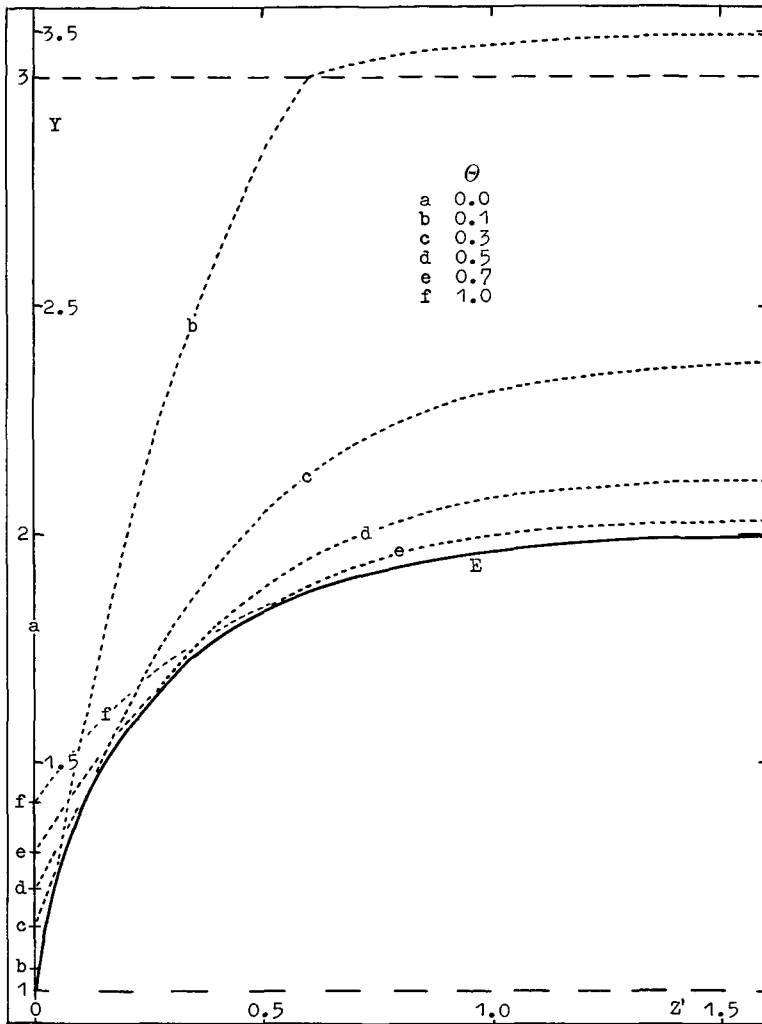
$$\Gamma_b(Z, \theta) = 2\sqrt{\theta} \cdot \alpha N(0) = \Gamma_0 \{1 + \theta - M(Z)\} / \sqrt{\theta}, \quad \Gamma_0 = 4/\sqrt{\pi} \quad (22)$$

がえられる。 Γ_a の方には、 ψ_a を与える (16) 式の右辺にある積分が性情の知られた関数の組合せで表せないため、簡単な表式が与えられない。それで、第 IV 節第 2 項で導く Γ_a の実用近似式 (40) で $\theta=\theta$ とおいたものを、 Γ_a を表す式として採用しよう。すると

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(Z, \theta) &= \Gamma_a(Z, \theta) + \Gamma_b(Z, \theta) = \Gamma_0 Y(Z, \theta) \\ Y(Z, \theta) &= (\sqrt{\pi}/2) N(Z) \left\{ 1 - (1 - 2Z)(1 + 0.5\theta - \sqrt{1 + \theta}) \right. \\ &\quad \left. - (0.503Z + 0.600Z^2) \theta \sqrt{\theta} \right\} + \Phi(Z) \sqrt{\theta} + (\sqrt{\pi}/4) \Phi_1(Z) \theta \\ &\quad + \{1 - M(Z)\} / \sqrt{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

と書くことができる。この式を使えば、数値計算によって、 Γ と Z と θ との関係が調べられる。

第 2 図に、 θ にいくつかの特定値を与えて、 $Y = \Gamma/\Gamma_0$ と Z との関係を示す点曲線 a, b, ... f を書いた。記号 a, b, ... f と θ との対応は、図のなかに示したとおりである。 $\theta=0.0$ の曲線 a



第2図 点曲線は $Y=\Gamma/\Gamma_0$ と下降する積雪表面の座標の仮の値 Z' との関係を与える。実曲線 E は点曲線群の包絡線である。これが Y と座標の真の値 Z との関係を表す

は鉛直線で、 Y 軸の、 $Y=1$ の点より上に立つ部分がそれにあたる。 θ に与えた特定値は、みな、小数値で1より小さい。それは、次の項で知られるように、真の座標 Z が $\theta=1$ で無限大になるからである。すなわち、 θ が1に達するときには積雪は全体が飛散状態にある。よって、1より大きい θ は考える必要がない。

点曲線 a, b, ... f は θ を母数とする曲線群である。実曲線 E は、この曲線群の包絡線を表す。次項で示すように、包絡線 E が $Y=\Gamma/\Gamma_0$ と真の座標 Z との関係を与える。それゆえ、実曲線 E についての第2図の横軸は、 Z' の値ではなく Z の値を示す。

2. 積雪表面下降関数

第2図の点曲線 a, b, ... f が示すように、 θ のある値について、下降する積雪表面の仮の座標 Z' にどんな値をあたえても、 $Y=\Gamma/\Gamma_0$ の値が1より大きい。つまり $\Gamma > \Gamma_0$ である。 $\theta=0$,

$Z=0$ のとき $Y=1$ になるのが唯一の例外だが、これは存在しなければならない例外である。 $\theta=0, Z=0$ は飛散開始の状態に対応し、この状態では $\Gamma=\Gamma_0$ であるべきだからである。

基本拉致圧力勾配 Γ_0 は、水平な積雪表面で飛散がおこるために必要な表面圧力勾配 Γ の最小値である。 Γ が Γ_0 より大きくても飛散はおこる。一方、積雪表面が下降しつづけるためには、 $\theta \geq 0$ なるすべての時刻で積雪は表面で飛散していなければならない。したがって、 θ が 0 でないかぎり $\Gamma > \Gamma_0$ であるという結果は、飛散開始後もなお定速気圧降下がつづけば、積雪も飛散しつづけてその表面が下降するという最初の予想と合致する。かくして、積雪表面下降関数 $Z(\theta)$ を求めるには、仮の坐標 Z' のうちから真の坐標 Z を選びだせばよいことになる。そのために

$$\left. \begin{array}{l} \text{A. } Y=\Gamma/\Gamma_0 \text{ は } \theta \text{ の連続一価関数である。} \\ \text{B. } Z \text{ は } \theta \text{ の連続一価増加関数である。} \end{array} \right\} \quad (24)$$

の条件を用いることにしよう。これは、積雪表面が表面飛散によって下降するばあいに満さるべき最小限の条件である。

前項の終りでのべた第2図の実曲線 E は、うへの条件 A, B にかなる関数をあたえる。仮の坐標 Z' の関数としての Y を表す第2図の点曲線群 a, b, ... f は、 θ の値が異なるにつれ、異った点でその包絡線である曲線 E に接する。よって、その接点における Y の値を、与えられた θ の値に対する Y の真の値にとれば、 Y は θ の一価連続関数 $Y(\theta)$ となる。また、接点の仮の坐標 Z' を真の坐標 Z に定める。すると、 Z は θ の一価連続関数であるうえに、なお、増加関数 $Z(\theta)$ となる。第2図に見られるとおり、点曲線と包絡線との接点の位置は、 θ の増大とともに右の方へ移るからである。かくして、表面飛散のために下降する積雪表面の圧力勾配 Γ と位置坐標 Z とが飛散開始時刻からはかった時刻 θ の関数 $Y(\theta)$ および $Z(\theta)$ として与えられる。

3. 積雪表面下降関数の表式と曲線

第2図の実曲線 E は、(23) 式の θ を母数として書いた点曲線群 a, b, ... f の包絡線である。よって、(23) 式を θ について偏微分した式

$$0 = -\left\{1 - M(Z')\right\} + \Phi(Z')\theta + (\sqrt{\pi}/\sqrt{\theta^3})\Phi(Z') \\ - \sqrt{\pi/2} N(Z') \left\{(\sqrt{1+\theta}-1)\sqrt{\theta^3/(1+\theta)} \cdot (1-2Z') + (1.510Z' + 1.797Z'^2)\theta^2\right\} \quad (25)$$

と(23)式とから Y, Z' と θ との関係を求めれば、それが $Y(\theta), Z(\theta)$ を与える。式(25)には Y がふくまれていない。よって、積雪表面下降関数 $Z(\theta)$ は、方程式(25)を Z' について解き、その Z' を Z とおけばえられる。数値計算によって定めた $Z(\theta)$ の曲線が第3図の実曲線である。飛散開始前の、すなわち $\theta < 0$ についての $Z(\theta)$ は 0 にひとしく、原点 0 から左へむかう水平線で表される。なお、 $0 < \theta \ll 1$ のばあいは、(25)式から

$$Z(\theta) = (\sqrt{\pi}/4)\sqrt{\theta^3} \quad (26)$$

の関係が導かれる。第3図の上部にある点曲線が、この近似式(26)を表す。

第3図が示すように、 $\theta=1$ では Z が無限大である。すなわち $Z(1)=\infty$ である。第II節で、気圧降下開始から飛散開始までの実際の時間を t_0 で表した。 $Z(1)=\infty$ は、飛散開始時刻か

ら t_0 ののちには、つまり、気圧降下開始から $2t_0$ の時間がたつと、無限に深い積雪が全部飛散してしまうことを示す。将来、気圧を人為的に急降下させて、積雪を飛散させる計画がたてられるかも知れない。そのばあい、気圧降下の継続時間を $2t_0$ 以上に延ばす必要がないと、このことから言える。ただ、以上は、一様で無限に深い仮想の積雪について得た結果である。しかし深さが有限な実在の積雪においても、だいたいの目安としては、 $2t_0$ の時間のうちに積雪の大部が飛散すると考えてよいであろう。

関数 $Y(\theta)$ の曲線は、すでに、論文 II の第 2 図に示しておいた。その図の A 点と C 点とを結ぶ実曲線がそれである。

IV. Γ_a の近似式

1. ψ_a および Γ_a の近似式

第 II 節第 4 項の (16) 式で与えられる関数 $\psi_a(\lambda, \theta)$ は、初等関数ないし性質のよく調べられている超越関数の組合せでは表せない。式 (16)

の右辺にある被積分関数 $f(\lambda)$ が誤差関数 $\Phi(\lambda)$ を含む関数 $-M(Z+\lambda)$ だからである。それで、 $M(\lambda)$ が論文 I の第 1 図にある曲線で示される λ の減少関数であることから、 $f(\lambda)$ の代りに

$$g(\lambda) = -M(Z') \exp \left\{ -(a\lambda + b\lambda^2) \right\} \tag{27}$$

を用いることにしよう。定数 a と b とは、 $f(\lambda)$ と $g(\lambda)$ とを λ の冪級数に展開したとき、両展開式の λ の項の係数と λ^2 の項の係数とが等くなるようにえらぶ。こうすれば、少なくとも $\lambda \ll 1$ については、 $g(\lambda)$ が $f(\lambda)$ に一致する。それには、 a と b とを

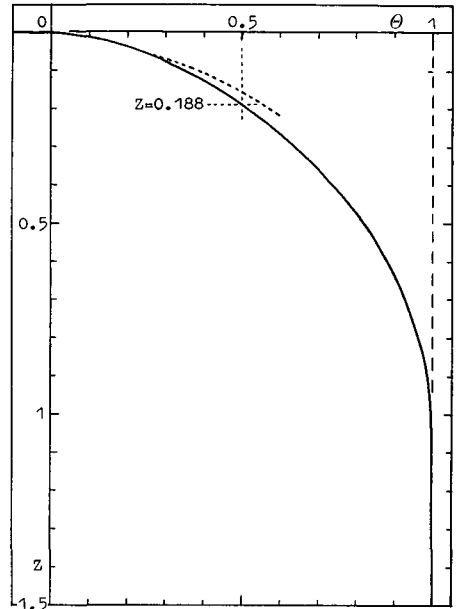
$$a = 2N(Z')/M(Z'), \quad b = 2 \left[\left\{ N(Z')/M(Z') \right\}^2 - \left\{ 1 - \Phi(Z') \right\} / M(Z') \right] \tag{28}$$

にとればよい。

式 (16) の ψ_a を λ で微分すると、このあとの第 2 項にでてくる (32) 式になる。よって、(32) 式の関数 f' を (27) 式の g の導関数 g' に換え、 $\lambda = 0$ とおけば $\Gamma_a(\theta)$ の積分表示の近似式がえられる。この積分表示近似式は、また、(II, 35) 式の右辺第 2 項の積分式で、 g' に (27) 式の導関数を用い、 k を $1/4$ とし、 τ を θ にとりかえたものに等しい。この積分演算をおこなうと

$$\begin{aligned} \lambda_a(\theta) &= (\partial \psi_a / \partial \lambda)_{\lambda=0} = \left\{ M(Z') / (1 + b\theta) \right\} \left[(a/\sqrt{1+b\theta}) \left\{ 1 - \Phi(\eta) \right\} \exp(\eta^2) + 2b\sqrt{\theta/\pi} \right], \\ \eta &= (a/2) \sqrt{\theta/(1+\theta)} \end{aligned} \tag{29}$$

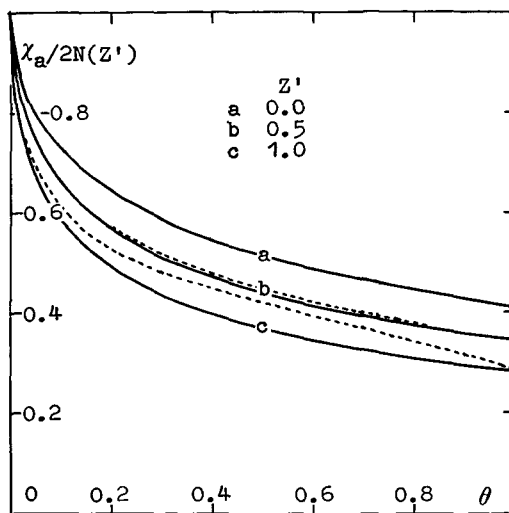
がえられる。これを $\Gamma_a(\theta)$ ではなく $\lambda_a(\theta)$ で表したのは、この式が Γ_a の近似式であることを



第 3 図 積雪表面下降関数 $Z(\theta)$ の曲線。点曲線は θ が非常に小さいばあいになりたつ近似式 (26) を表す。 $\theta = 0.5$ では $Z = 0.188$ である。 $\theta = 0.5$ として書いた第 1 図では、点 A の坐標 Z' にこの真の値 0.188 を用いた

示すためである。

仮に、 $\psi_a(\lambda, \theta)$ を、第 II 節第 3 項でのべた面 A を表面とする半無限固体内の温度と考えよう。すると ψ_a は、表面がいつまでも $-M(Z')$ の温度に保たれるという境界条件のもとに、初期温度分布 $\psi_a = -M(Z' + \lambda)$ から出発する温度を表す。したがって、時間 θ が無限に増大すれば、この温度は一樣に $-M(Z')$ になる筈である。よって、表面における温度勾配 Γ_a は、 $-dM(Z')/dZ' = 2N(Z') > 0$ から出発して減少をつづけ、 $\theta = \infty$ では 0 に近づかなければならない。式 (29) の $\chi_a(\theta)$ は $\Gamma_a(\theta)$ の近似関数にすぎないとはいえ、 θ の増大とともに、正にこのように変化する。第 4 図の実曲線 a, b, c は、それぞれ、 Z' の値に 0, 0.5, 1 を選んで書いた、 $\chi_a/2N(Z')$ と θ との関係を示す曲線である。



第 4 図 実曲線は $\chi_a/2N(Z')$ を、点曲線は $\Gamma_a/2N(Z')$ を表す。 χ_a は、(29)式で与えられる良好な Γ_a の近似値である。 Γ_a は、近似度は悪いが計算には便利な Γ_a の実用近似式 (40) の値である

つぎに、 $\chi_a(\theta)$ の近似の程度を推定することにしよう。特に $Z' = 0$ ならば、近似式ではなく、正確な ψ_a の表式がえられる。 $Z' = 0$ は積雪表面が降下しないことを意味するから、積雪は飛散しない。つまり、これは、飛散開始時刻 $\theta = 0$ に -1 の値までさがった気圧が降下を停止し、そのあと -1 の値のままで止まるばあいにあたる。このばあいの ψ_a の正確な表式は

$$\psi_a(\lambda, \theta) = -(1 + \theta) M(\lambda/\sqrt{1 + \theta}) + \theta M(\lambda/\sqrt{\theta}) \quad (30)$$

で与えられる。実際、この ψ_a は圧力微分方程式 (1) を満し、 $\lambda = 0$ ならば θ の値の如何にかかわらず常に -1 にひとしく、 $\theta = 0$ では $-M(\lambda)$ と一致する。よって、(30) 式を λ で微分して $\lambda = 0$ とおいた

$$\Gamma_a = (\partial\psi_a/\partial\lambda)_{\lambda=0} = 2\sqrt{1 + \theta} \cdot N(0) - 2\sqrt{\theta} \cdot N(0) = (4/\sqrt{\pi}) (\sqrt{1 + \theta} - \sqrt{\theta}) \quad (31)$$

は Γ_a の正確な表式である。式 (29) で $Z' = 0$ とおいて得られる Γ_a の近似値 χ_a と (31) 式が与える正確な Γ_a との値を比較すると、両者の差は $\theta = 0.5$ のあたりで最も大きい。しかし、この最大の差異でも 0.33% にすぎない。つまり、1 にくらべて非常に小さい θ についてのみならず、0 から 1 に至る θ の領域全体にわたってまで、両者はほとんど一致するわけである。このことから、 Z' が 0 でないばあいでも、(29) 式の χ_a は Γ_a の良い近似関数を与えると推定してよいであろう。

2. Γ_a の実用表式

前項 (29) 式の χ_a は、数値計等を行いうる良好な Γ_a の近似式であるとしても、これから先の解析的計算にとっては少し複雑にすぎる。それで、これを、簡単な形に改めよう。

第 II 節第 4 項の ψ_a を与える (16) 式を λ で偏微分すると

$$\partial\psi_a/\partial\lambda = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma}^{\infty} e^{-u^2} f'(\lambda+u\sqrt{\theta}) du + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma}^{\infty} e^{-u^2} f'(-\lambda+u\sqrt{\theta}) du \quad (32)$$

となる。 $f'(\lambda)$ は $f(\lambda)$ の微分導関数を表す。 $f(\lambda) = -M(Z'+\lambda)$ だから

$$f'(\lambda) = 2N(Z'+\lambda) \quad (33)$$

である。式(32)の右辺の被積分関数を $\sqrt{\theta}$ について展開し、 $\theta\sqrt{\theta}$ 以上の項の和を展開剰余としたまま積分をおこなう。得られた式の λ を 0 とおくと

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_a(\theta) &= (\partial\psi_a/\partial\lambda)_{\lambda=0} = S_a(\theta) + R_a(\theta) \\ S_a(\theta) &= 2N(Z') - (4/\sqrt{\pi}) \{1 - \Phi(Z')\} \sqrt{\theta} + \Phi_1(Z') \theta \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

がえられる。よって

$$R_1(Z', \theta) = \lambda_a(\theta) - S_a(\theta) \quad (35)$$

とすれば、 $R_1(Z', \theta)$ は展開剰余に由来する未知関数 $R_a(\theta)$ の近似関数である。そして、 λ_a の近似度がたかいから、 $R_1(Z', \theta)$ の近似度も高い。

しかし、関数 $\Gamma_a(\theta)$ の主要部は $S_a(\theta)$ であって、 $R_a(\theta)$ は補正項にすぎない。したがって、 $R_a(\theta)$ を近似度の低い関数でおきかえても、 $\Gamma_a(\theta)$ に生ずる誤差は小さい値に止まる。それで、 $R_1(Z', \theta)$ にくらべれば近似度の点で劣るけれども、形が簡単な関数を作ることにしよう。いま

$$H(Z', \theta) = -R_1(Z', \theta)/2N(Z') \quad (36)$$

とおくと、数値計算により、 $0 < \theta < 1$ の領域で、 $H(0, \theta)$ が

$$1 + 0.5\theta - \sqrt{1+\theta} \quad (37)$$

と殆ど一致すること、また、 $H(0.5, \theta)$ が

$$0.401 \theta \sqrt{\theta} \quad (38)$$

にかなり近いことが知られる。それで $H(Z', \theta)$ を

$$K(Z', \theta) = (1 - 2Z')(1 + 0.5\theta - \sqrt{1+\theta}) + (0.503Z' + 0.600Z'^2) \theta \sqrt{\theta} \quad (39)$$

で近似することにしよう。 $K(0, \theta)$ と $K(0.5, \theta)$ とが、それぞれ、(37)式と(38)式とに一致するからである。さらにまた、 $Z'=1$ のばあい、 $\theta=1$ では H と K とが等しくなる。つまり、 $H(1, 1) = K(1, 1)$ となるからである。

以上のことにより、 $R_1(Z', \theta)$ を $-2N(Z')K(Z', \theta)$ で近似し、それを(34)式の $R_a(\theta)$ として用いると、 $\Gamma_a(\theta)$ の实用近似式

$$\begin{aligned} \gamma_a(\theta) &= 2N(Z') \left\{ 1 - (1 - 2Z')(1 + 0.5\theta - \sqrt{1+\theta}) - (0.503Z' + 0.600Z'^2) \theta \sqrt{\theta} \right\} \\ &\quad - (4/\sqrt{\pi}) \{1 - \Phi(Z')\} \sqrt{\theta} + \Phi_1(Z') \theta \end{aligned} \quad (40)$$

がえられる。この式の θ を Θ に書きかえたものを、第 III 節第 1 項で $\Gamma_a(Z', \Theta)$ として使った。

第 4 図の点線が、(40)式によって書いた实用近似曲線 $\gamma_a/2N(Z')$ である。 $Z'=0$ のばあいには、近似がよいため、实用近似曲線と $\lambda_a/2N(Z')$ 曲線との差異を、この図のうえでは区別でき

ない。両者の差異は、 $Z'=0.5$ のばあいでも、図に示した程度に小さい。しかし、 $Z'=1$ になるとかなり増大する。ただ、論文 II の第 1 図からわかるように、 $Z'=1$ では $N(Z')$ の値が 0.100 という小さい値だから、 $\Gamma_a(\theta)$ 自体の誤差にしてみれば些細なものとなる。

V. ま と め

(1) 論文 II で、無限に深く広い積雪が、気圧の急速降下による積雪内空気の膨脹流出のために飛散する条件を定めた。飛散がはじまると、雪が飛びさるから、積雪表面は下降する。この論文 III は、この積雪表面下降の理論的考察である。気圧降下としては、論文 II で (A) 様式と呼んだ定速気圧降下をとり、変数には、論文 II の (10) 式で定義される無次元数を用いる。表面が下降運動をおこなっても、積雪内空気の圧力は、論文 II で導いた圧力微分方程式 (13) の解で与えられる。

(2) 飛散開始の時を原点とする無次元時間を θ とする。 θ がある値 θ になったとき、積雪表面が、第 1 図で、はじめの位置 O 点から、仮に、A 点まで下降したとしよう。A 点の仮の坐標を Z' とし、A 点を原点として新たに坐標 λ を下むきにとる。A 点を通る水平面を面 A、面 A の下にある積雪を積雪 A とよぶ。積雪 A 内の空気の圧力 ψ_A は、 $\theta=0$ での圧力分布 $f(\lambda)$ と、 θ が 0 から θ に達するまでの面 A 上の圧力変化 $F(\theta)$ とによって定められる。すなわち、 $\psi_A(\lambda, \theta)$ は、初期条件 $\psi_A(\lambda, 0)=f(\lambda)$ と境界条件 $\psi_A(0, \theta)=F(\theta)$ とを満す圧力微分方程式の解である。

(3) 第 1 図の点曲線 Q が $f(\lambda)=-M(Z'+\lambda)$ を表す。関数 M は論文 II の (3) 式で与えられる。面 A 上の圧力を表す点は、 θ が 0 から θ に達するまでに、第 1 図の B 点から水平に移動して、積雪 A の表面での空気の圧力を表す D 点に至るが、その移動の仕方を前以って知ることはできない。それで、これを一定速度 α での移動と仮定する。すなわち $F(\theta)=-M(Z')-\alpha\theta$ とおく。D 点での圧力は、時刻 θ での気圧 $-(1+\theta)$ にひとしい。よって、 $\alpha=\{1+\theta-M(Z')\}/\theta$ である。

(4) 積雪 A 内の空気の圧力 $\psi_A(\lambda, \theta)$ は、次の $\psi_a(\lambda, \theta)$ と $\psi_b(\lambda, \theta)$ との和で与えられる。 ψ_a は $\psi_a(\lambda, 0)=-M(Z'+\lambda)$ 、 $\psi_a(0, \theta)=-M(Z')$ を満す圧力微分方程式の解、 ψ_b は $\psi_b(\lambda, 0)=0$ 、 $\psi_b(0, \theta)=-\alpha\theta$ を満す圧力微分方程式の解である。 ψ_a も ψ_b も、固体内熱伝導理論の定理を利用すれば求められ、 $\theta=\theta$ においては、第 1 図に示したような破曲線の形をとる。

(5) 積雪 A 内の空気の表面での圧力勾配 Γ は、 $\psi_A(\lambda, \theta)$ を λ で微分し $\lambda=0$ 、 $\theta=\theta$ とおけば得られる。 Γ は θ と Z' との関数になるから、 θ にいくつかの値を与え、 $Y=\Gamma/\Gamma_0$ と Z' との関係を示す。第 2 図に、点曲線群で示した。 Γ_0 は基本拉致圧力勾配の無次元表示で $4/\sqrt{\pi}$ に等しい。

(6) 面 A の真の坐標を Z とすると、 Z は仮の坐標 Z' にふくまれる筈である。 Z' の無限に多くの値から Z を選びだすのに、 Γ が θ の一価連続関数であるべきことと、 Z が θ の一価連続増加関数であるべきことを条件に用いる。このふたつの条件をみたす関数は、点曲線群 $Y(Z', \theta)$ の包絡線、すなわち、第 2 図の実曲線 E で与えられる関数以外にはない。第 2 図の横坐標軸は、包絡線 E に対しては Z 軸となる。

(7) 包絡線 E 上の一点は、 Z と θ と Y との値 3 箇を備えもつ。これによって、これら 3 箇の数のあいだの関係がきめられる。第 2 図の包絡線 E が Y と Z との関係をあたえ、飛散のため

下降する積雪表面での Y は必ず 1 より大きいが 2 を超えないことを示す。 Y が 2 をこえないことから、積雪内空気の流出速度が、拉致流出速度の 2 倍以上にならないことが導かれる。 Y と θ との関係は論文 II の第 2 図にある曲線 AC で与えられる。

(8) この論文 III の第 3 図の曲線が Z と θ との関係を示す。 θ が 1 になると、つまり、飛散開始のあと、気圧降下開始から飛散開始までの時間 t_0 がたつと、 Z が無限大になる。すなわち積雪の全層が飛散状態になる。それゆえ、 θ にせよ θ にせよ、1 以上の値は考えなくてよい。

(9) 以上は、定速気圧降下による積雪飛散に関してえた結果である。気圧降下が定速気圧降下に近いばあいにも、たとえば、論文 II にある半無限振動気圧における気圧降下のばあいにも、大凡のこととしてなら上の結果を用いてよい。

この論文を書くにあたって、北海道大学低温科学研究所の藤岡敏夫、若浜五郎両教授ならびに日本国有鉄道技術研究所の福地合一防災・雪氷研究室長および後藤巖主任研究員から親切なお世話と有益な御教示をいただいた。ここに記して深い感謝の意を表す。

Summary

A snow cover lowers its surface on account of the loss of the snow flying off it, if atmospheric pressure continues dropping even after the initiation of snow flying. Such a descent of the surface of the snow cover is studied in this Paper III for the first case of Paper II, in which atmospheric pressure drops at a constant speed. Use is exclusively made of the dimensionless variables introduced in article (3) of the English summary of Paper II, with some little alteration such as substitution of τ with $\theta = \tau - 1$, time counted from the initiation of snow flying.

(1) Pressure $\psi(\zeta, \theta)$ of the air in the snow cover is given by a solution of

$$\partial\psi/\partial\theta = (1/4) \partial^2\psi/\partial^2\zeta, \quad (1)$$

which satisfies prescribed boundary conditions at the descending surface of the snow cover. The same letter Γ will be used also for the pressure gradient of the air at the descending surface, whereas it represented in Paper II the gradient at the surface while it is standing still at its initial level. Gradient Γ must be equal to or greater than $\Gamma_0 = 4/\sqrt{\pi}$ for the snow flying to be maintained, and so will turn out to be the approximate values that will be obtained for Γ below.

(2) In Fig. 1 of the text, dotted curve Q gives $\psi(\zeta, 0) = M(\zeta)$, the air pressure distributed in the snow cover at the instant when snow starts flying. Its Γ is equal to $\Gamma_0 = 4/\sqrt{\pi}$. Suppose that the surface of the snow cover has at time $\theta = \theta$ descended down to level A and let this level provisionally be bestowed with coordinate $\zeta = Z$. Names 'surface A' and 'snow A' are respectively given to the surface lying at level A and the snow extending below it. New coordinate $\lambda = \zeta - Z$ is conveniently used in place of ζ .

(3) If $\psi_A(\lambda, \theta)$ is used for denoting air pressure in snow A, then $\psi_A(0, \theta)$ decreases from $-M(Z)$ to $-(1+\theta)$ as θ increases from 0 to θ , where $-(1+\theta)$ is nothing but the value which the dropping atmosphere has at time θ . Let this decrease in $\psi_A(0, \theta)$ be represented by function $F_1(\theta)$. Then $\psi_A(\lambda, \theta)$ is given by the solution of equation (1) satisfying

both of the initial condition $\psi_A(\lambda, 0) = -M(Z + \lambda)$ and the boundary condition $\psi_A(0, \theta) = -M(Z) + F_1(\theta)$, while that solution can in its turn be expressed as

$$\psi_A(\lambda, \theta) = \psi_a(\lambda, \theta) + \psi_b(\lambda, \theta), \quad (2)$$

if ψ_a and ψ_b are such solutions of equation (1) as that

$$\psi_a(\lambda, 0) = -M(Z + \lambda), \quad \psi_a(0, \theta) = -M(Z') \quad (3)$$

$$\psi_b(\lambda, 0) = 0, \quad \psi_b(0, \theta) = F_1(\theta) \quad (4)$$

respectively.

(4) Since function $F_1(\theta)$ cannot be known in advance, let it be assumed that $F_1(\theta) = -\alpha\theta$ with $\alpha = \{1 + \theta - M(Z')\}/\theta$; namely, $\psi_A(0, \theta)$ decreases at constant speed α . On this assumption $\psi_b(\lambda, \theta)$ is easily shown to be given by

$$\psi_b(\lambda, \theta) = -\alpha\theta M(\lambda/\sqrt{\theta}), \quad (5)$$

whereas $\psi_a(\lambda, \theta)$ is obtained in a lengthy form after elaborate evaluation of the integrals on the right side of equation (16) in the text practised by replacing $f(\lambda)$ with polynomials nearly equivalent to it. Figure 1 is drawn for $\theta = 0.5$ and $Z' = 0.188$, and the curves marked ψ_a, ψ_b, ψ_A give respectively functions $\psi_a(\lambda, \theta), \psi_b(\lambda, \theta), \psi_A(\lambda, \theta)$ valid for the above assigned values of θ and Z' .

(5) Gradient Γ is given by $\Gamma = [\partial\psi_A/\partial\lambda]_{\lambda=0}$ as a function of θ and Z' , and $Y = \Gamma/\Gamma_0$ is plotted against Z' in Fig. 2 of the text as dotted curves a, b, c... for selected values of θ . As Z' is coordinate which was provisionally adopted as that of the descending surface, its true coordinate Z should be chosen among Z' s. In order to make this choice, the following principles are placed:

- A. $Y = \Gamma/\Gamma_0$ should be a one-valued continuous function of θ ,
- B. Z should be a one-valued continuous function of θ that increases as θ increases.

The only function which agrees with the principles is the one given by envelope E touching at a point every member of the family of curves a, b, c... in Fig. 2.

(6) The abscissa of Fig. 2 turns out to be for curve E true coordinate Z instead of Z' . Curve E shows that Γ does not become greater than $2\Gamma_0$ for any value of Z , and it follows from this that flow out speed W of air from the snow cover never exceeds $2W_0$, because W is proportionate to Γ . This result was used in (4) of English summary of Paper I.

(7) As a definite value of θ belongs to every member of the above family of curves, any point on curve E is associated with three definite values of variables Z, θ and Γ , which situation allows relationships between Z and θ as well as between θ and Γ to be found. The relationship between Z and θ is given by the curve of Fig. 3 of the text. That curve shows that Z grows infinitely great as θ approaches 1, which means that the snow cover comes completely into the flying state when atmospheric pressure continues to drop for $2t_0$, that is, for twice the time needed for the phenomenon of snow flying to be initiated. For very small values of θ , curve of Z versus θ is given by

$$Z = \sqrt{\pi\theta^3}/4 \quad (6)$$

and it appears, when prolonged, as the dotted curve drawn near the top of Fig. 3. The relationship between $Y=\Gamma/\Gamma_0$ and θ is shown by curve AC in the right half of Fig. 2 of Paper II.