



Title	雪内空気の流動理論 III : 透過性壁面近接遷移層内の流動
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科学. 物理篇, 36, 41-54
Issue Date	1979-03-10
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/18354">https://hdl.handle.net/2115/18354</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	36_p41-54.pdf



## 雪内空気の流動理論 III\*

(透過性壁面近接遷移層内の流動)

吉田 順五

(北海道大学名誉教授)

(昭和53年9月受理)

### I. ま え が き

積雪のような透過性多孔物質の表面を透過性壁面と名づける。流体が、水平な透過性壁面の上の自由空間のなかを流れると、多孔物質の空隙内にある流体がそれに引きずられて内部流動をおこす。このとき流体の流速が透過性壁面でみたすべき境界条件を、同名の論文 II で<sup>1)</sup>、(16)式(17)式あるいは(23)式として設定した。ただし、透過性壁面上の外部流動が、乱流ではなく、層流であるばあいについての境界条件である。

多孔物質内の流体は、不規則な形の空隙をぬって構造乱流<sup>2)</sup>として流れる。その平均流速を空隙流速と呼び、 $u$  で示す。透過性壁面外の層流の流速は  $U$  で表わそう。すると透過性壁面の近くでは、 $u$  は  $U$  より小さく、 $u$  は透過性壁面で連続的に  $U$  に移行する筈である。ところが、うゑに述べた境界条件のうちの方の

$$U_0 = bu_0, \quad b = \varepsilon < 1 \quad (1)$$

は、このふたつの条件に違背する。透過性壁面での  $u$  および  $U$  の値である  $u_0$  および  $U_0$  が、この境界条件では、互に一致しないばかりでなく、 $u_0$  の方が  $U_0$  より大きい。

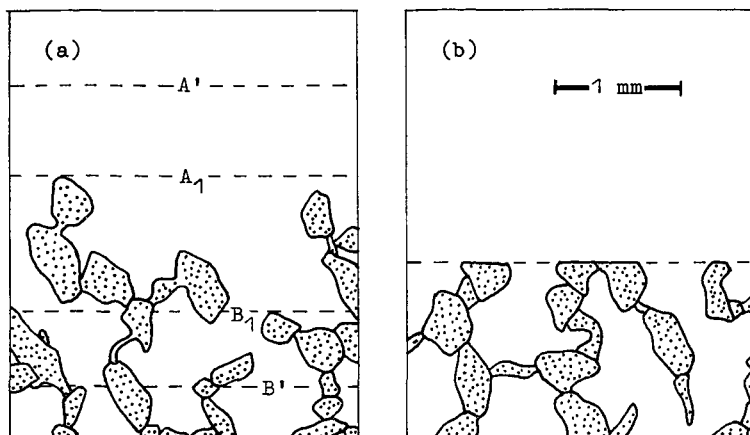
論文 I, II の理論は巨視的理論で、透過性壁面を一枚の幾何学的平面として取扱った。うゑの矛盾は、そのことに由来する。実際の透過性壁面は幾何学的平面ではなく、それには必ず凹凸がある。そのため、透過性壁面付近には、 $u$  から  $U$  への流速の連続的移行がおこなわれる壁面近接遷移層が形成される。この近接遷移層内の流動をしらべて上の矛盾を除去するのが、この論文 III の目的である。

### II. 透過性壁面近接遷移層

#### 1. 積雪表面の凹凸

積雪表面は透過性壁面である。積雪表面をふくむ 2~3 cm 角の積雪試料をとり、アエリンで固める<sup>3)</sup>。固めた試料から、厚さ 0.1 mm 以下の薄片を積雪表面に直角に切りとって顕微鏡で観察すれば、積雪表面の縦断面の形が細かい点までわかる。このような薄片を 8~11 倍に拡大した写真を若浜の論文 (文献 4 の図版 I, II, III, IV, VII) および成田の論文 (文献 5 の第 2 図

\* 北海道大学低温科学研究所業績 第 1947 号



第1図 積雪表面の顕微鏡的構造。点を施した部分が氷の骨組。  
 (a) 粗面。(b) 平滑面。A<sub>1</sub>: 凹凸上界面。B<sub>1</sub>: 凹凸下界面。  
 A'面とB'面との間が近接遷移層

(a)(b) に見ることができる。それによると、積雪を構成する氷の骨組が秩序なく表面で終るばあい(文献4の図版I~IV, 文献5の第2図(a))と、氷の骨組が一直線にそって断ち切られて表面で終るばあい(文献4の図版VII, 文献5の第2図(b))とがある。前者の形の縦断面を示す積雪表面を「粗面」、後者の形の縦断面を示す積雪表面を「平滑面」と名づけよう。第1図の(a)と(b)とのそれぞれに、粗面と平滑面との縦断面を線画で示した。

積雪表面に、極めてうすい膜を、氷の骨組の空隙までは入りこまないようにして、かぶせたとしよう。するとこの膜が、粗面では高さ1~2mmの不規則な凹凸を示し、平滑面では一枚の平面を張ることになる。氷の骨組の構成単位である0.2~0.5mmの大きさの雪粒は、氷の骨組の最外部にあっても、粗面のばあいには健全で本来の形を保つ。これに反し平滑面では、最外部の雪粒は切断され、その切断面が一平面上に並んで表面を形成する。したがって平滑面には、氷の骨組の空隙の切断面である空所をのぞけば、雪粒の大きさの程度の凹凸はもとより、その10分の1程度の凹凸さえ存在しない。

積雪の表面もその他の多孔物質の表面も、透過性壁面は、たいていの場合、粗面である。しかし、平滑面も決して稀ではない。積雪では、氷に融解と昇華とをおこす性質があるため、天然状態でも、しばしば、その表面が平滑面になる。一般の多孔物質の表面も、磨くか鋭い刃物で削るかして平滑面とすることができる。

## 2. 体積空隙流速と面積空隙流速

多孔物質の内部から、透過性壁面を経てその上を流れる層流の内部に移るにつれ、流体の流動は構造乱流から層流に移行する。この移行にともなう平均流速の変化を考えるにあたって、流速の平均値の作りかたを、多孔物質内部での作りかたとは別なものに変更する必要がある。

多孔物質の内部では、論文Iの第II節第4項でのべたように、空隙流速 $v_a$ を平均流速として用いる。空隙率が $\varepsilon$ の多孔物質の内部に一点Pをとる。点Pを中心とする物理的微小体積を $\delta V$ とすると、 $\delta V$ のなかに含まれる空隙の体積は $\varepsilon\delta V$ にひとしい。この $\varepsilon\delta V$ について作

った微視的な実際の流速  $v$  の平均値が、P 点における空隙流速  $v_a$  である。

いま、P 点をふくむ平面  $A$  を考え、その上に P 点を中心とする物理的微小面積  $\delta A$  をとる。すると、 $\delta A$  内にある空隙の切断面の面積は  $\varepsilon \delta A$  にひとしい。この空隙の切断面上の微視的流速  $v$  を  $\varepsilon \delta A$  にわたって平均したものを  $v_b$  としよう。点 P の付近では、空隙の形の無秩序の様相も、構造乱流の無秩序の様相も均一で等方である。よって  $v_b$  は、平面  $A$  をどの方向にとっても変わらない。そして、さらに、 $v_b$  は  $v_a$  と一致する。したがって、論文 I で得た運動方程式 (I, 35) にある  $(u, v, w)$  は、 $v_b$  の成分であるとしても差しつかえない。 $v_b$  を「面積平均空隙流速」と名づける。また、略して「面積空隙流速」とも呼ぶ。これに対し、 $v_a$  を「体積平均空隙流速」あるいは「体積空隙流速」ということにする。

### 3. 透過性壁面付近の面積平均流速

透過性壁面付近では、流体の流動空間の構造が急激に変わるため、構造乱流の無秩序の様相は均一性と等方性を失う。その結果、P 点の位置が壁面に近いと、面積空隙流速  $v_b$  は面  $A$  の方向と無関係ではありえず、面  $A$  の方向によって変わる。したがって、無数にある  $v_b$  のうちのひとつを平均流速として選ぶ必要が生ずるが、実際に、平均流速としての資格のある  $v_b$  は、ただひとつしかない。それは、面  $A$  が透過性壁面に平行なばあいの  $v_b$  である。この  $v_b$  を特に  $v_0$  と書くことにしよう。

平均操作をおこなう範囲の面積  $\delta A$  に、その大きさを定める基準はない。したがって、 $v_b$  が平均流速であるためには、 $v_b$  が  $\delta A$  の大小に無関係であることが必要条件となる。構造乱流の無秩序の様相は、透過性壁面に平行な方向には同一だが直角な方向にはかわる。よって、面  $A$  が壁面に対して傾いていると構造乱流の無秩序の様相は  $\delta A$  のうえで変化し、 $v_b$  は  $\delta A$  の大小に影響される。面  $A$  上で無秩序の様相が均一であり、そのために  $v_b$  が  $\delta A$  の大小に拘らず同じ値を保つのは、面  $A$  が壁面に平行な場合であり、また、このばあいにかぎられる。かくして、無数にある  $v_b$  のうち、うえの必要条件をみたすものは、面  $A$  が壁面に平行なばあいの  $v_b$ 、すなわち  $v_0$  のみとなる。

これからあと、透過性壁面ちかくにある点 P の空隙流速あるいは平均流速としては、この特別な面積空隙流速  $v_0$  を用いる。体積平均流速  $v_a$  も、 $\delta V$  の大きさによってその値が変わるから、平均流速としては用いられない。

透過性壁面の外の自由空間中の流れも、たとえ壁面から遠くはなれた場所で層流であっても、壁面ちかくでは乱流である。これを「壁面外側乱流」とよぶことにしよう。この乱流は、多孔物質を構成する固体の骨組が、その無秩序な形の表面を自由空間中の流体にさらし、自身の上にそれを捕えて静止させることによって生ずる強制乱流である。よって、この乱流には時間的変動も伴うが、空間的変動の方が強く現れる。つまり、実際の流速  $v$  の P 点での時間的 평균が、P 点を空間的に移動させると、微視的に変動する。したがって、壁面外側乱流は自由空間中の乱流ではあっても、その平均流速には  $v$  の空間的平均を用いなければならない。さらに、壁面外側乱流の無秩序の様相は壁面に直角な方向に激しく変わる。それゆえ、上の空間的平均は、壁面に平行な面  $A$  のうえで作った面積空隙流速  $v_0$  とすべきである。

#### 4. 近接遷移層

粗い透過性壁面の縦断面を示す第1図(a)で、破線  $A_1$  および  $B_1$  は、凸部のうちの最高なもの頂き、および、凹部のうちの最低なもの底を通る水平面を表す。これらの水平面を、それぞれ「凹凸上界面」「凹凸下界面」とよび、両界面にはさまれた空間を「凹凸帯」と名づけよう。前項でのべた壁面外側乱流は、凹凸上界面  $A_1$  より上にある破線  $A'$  で示した水平面から、下方にむかって始まる。凹凸下界面  $B_1$  を下にむかって過ぎても、流動状態が、すぐには多孔物質に固有な構造乱流にならない。透過性壁面の影響が消滅し、流動が固有な構造乱流になる水平面を、第1図(a)に破線  $B'$  で示した。破線  $A'$ 、 $B'$  で表される水平面のあいだの空間を「近接遷移層」と名づける。論文IIの第II節の終りおよび同論文第IV節第1項で述べた遷移層と区別するため、これには「近接」の形容詞をつけた。

平滑な透過性壁面は凹凸帯を欠く。しかし、これにも近接遷移層は存在する。壁面のすぐ外には壁面外側乱流があるし、すぐ内側には固有構造乱流への移行帯があるからである。結局、透過性壁面にそっては、それが粗面であれ平粗面であれ、必ず乱流境界層がある。流体全体の流れが衰えても、平滑な非透過性壁面のばあいのように、これが層流境界層に変ルことはない。

### III. 流速、剪断応力およびそれらの勾配の連続性

#### 1. 半巨視的分布

論文IIでと同様、透過性壁面にそい流体の流動方向に  $x$  座標を、鉛直上方に  $z$  座標をとる。近接遷移層内の面空隙流速を、それを表わすベクトル  $v_0$  の  $x$  成分  $u''$  で示す。 $v_0$  が  $x$  の正の方向を指すから、それで充分である。近接遷移層の上下の界面で、 $u''$  は、層流の流速  $U$  および多孔物質内の空隙流速  $u$  に移行する。

流体の平均剪断応力  $\tau_{zx}$  および流速  $u''$  の近接遷移層内での  $z$  方向の分布を、それぞれの量の「半巨視的分布」と名づける。これと論文IIの巨視的理論でえた「巨視的分布」とを次の第IV節で比較する。それにより、まえがきで述べた矛盾が除かれる。この第III節では、半巨視的分布をうるための準備として、剪断応力と流速およびそれらの勾配の連続性を証明する。

平滑な透過性壁面は、凹凸帯を欠く特別な粗い透過性壁面と見ることができる。それで、これから先の考察は、もっぱら、粗い透過性壁面について進める。

さらに、このあとの考察には、便利のため、論文IIの第2図に概念図を示した Beavers の実験<sup>6)</sup>を利用する。それで、多孔質内の流体も、「流路」と呼ばれるその上の自由空間を流れる流体も、一定値の圧力勾配  $-\partial p/\partial x = G$  の作用によって流動することとなる。このように、特殊な実験を利用して、透過性壁面での境界条件に関する限りは、一般性が失われない。

#### 2. 全剪断応力

粗い透過性壁面の縦断面を示す第1図(a)で、凹凸上界面  $A_1$  より下に或る水平面  $H$  を考えると、面  $H$  は多孔物質を構成する固体の骨組を切断する。その切断面における固体内剪断応力の平均値を  $\tau'$  で示す。面  $H$  の単位面積に加わる全剪断力を「全剪断応力」と名づけて  $\tau$  で

表わすと

$$\tau = (1 - \epsilon') \tau' + \epsilon' \tau_{zz} \tag{2}$$

の関係がなりたつ。 $\tau_{zz}$  は面 H 上の流体内部剪断応力の平均値、 $\epsilon'$  は面 H の面積空隙率である。 $\epsilon'$  は面 H の位置がさがるにつれ減少し、面 H が凹凸下界面  $B_1$  に達すると、多孔物質の空隙率  $\epsilon$  に一致する。面 H の位置が凹凸上界面  $A_1$  より上にあれば、 $\epsilon' = 1$  だから、 $\tau$  は流体内部剪断応力  $\tau_{zz}$  と同じものになる。さらに近接遷移層の上界面  $A'$  をぬけて上に出ると流れは層流となる。したがって、ここでは、 $\tau = \tau_{zz}$  が  $\mu dU/dx$  で表わされる。

全剪断応力  $\tau$  は微分方程式

$$\frac{d\tau}{dz} + G = 0 \quad (G = -\partial p / \partial x: \text{正の常数}) \tag{3}$$

を満すから、 $\tau$  の  $z$  方向の分布は第 2 図 (a) の直線  $CA'A_1A$  およびその延長を表わす式

$$\tau = -G(z - z_0) \tag{4}$$

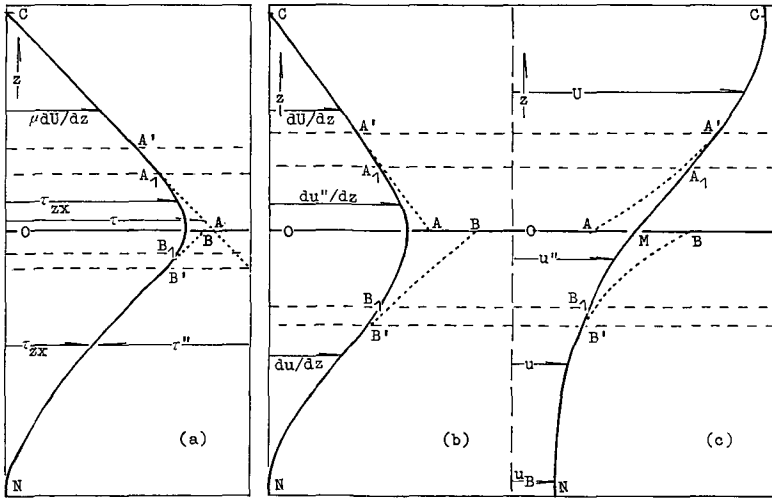
で与えられる。この図では、縦軸の  $z$  軸に対し、剪断応力を横軸にそってとってある。 $z_0$  は、Beavers の実験の流路内、層流の流速  $U$  が最大で  $\tau = \mu dU/dx$  が 0 となる、論文 II 第 2 図にある C 点の  $z$  座標である。

### 3. 流体内部剪断応力の勾配

層流の流速  $U$ 、近接遷移層内の面空隙流速  $u''$ 、多孔物質内の空隙流速  $u$  のいずれかの代りに  $V$  を用いると、流体内部剪断応力  $\tau_{zz}$  がみたすべき微分方程式として

$$d\tau_{zz}/dz + G - KV = 0 \tag{5}$$

がえられる。 $KV$  は、単位体積の多孔物質が流体に加える抵抗である。



第 2 図 透過性壁面付近での (a) 剪断応力, (b) 流速勾配, (c) 流速の分布図。水平線  $A'$  と  $B'$  との間の近接遷移層を特に拡大して書いた。座標  $z$  を下から上にむけ、諸量の大きさを水平右むきに表してある。近接遷移層内の点線は、巨視的理論による諸量の値を示す

凹凸上界面  $A_1$  より上では、固体の骨組が存在しないから、抵抗係数  $K$  は 0 である。界面  $A_1$  から下にむかうと、前記の水平面  $H$  による固体骨組の切断面積が、0 から出発して  $z$  の減少とともに連続的に増大する。したがって  $K$  も 0 から出発して連続的に大きくなる。面  $H$  が近接境界層の下界面  $B'$  までくだるとともに、 $K$  は多孔物質の固有抵抗係数  $\varepsilon/B$  に連続的に到達する。よって、抵抗係数  $K$  は、流体の存在域全体にわたって  $z$  の連続関数である。

平均流速  $V$  もまた、 $z$  の連続関数である。近接遷移層の上界面  $A'$  から下にむかって流動は層流から乱流にかわる。しかし、その微視的な実際の流速  $v$  に不連続が現われることは、物理的にありえない。上記の水平面  $H$  上に物理的微小面積  $\delta A$  をとると、 $\delta A$  のなかで空隙の切断面が占める面積は  $\varepsilon\delta A$  にひとしい。第 II 節第 3 項により、近接遷移層内の平均流速である面空隙流速  $u''$  は、 $\varepsilon\delta A$  にわたって作られる  $v$  の平均で与えられる。面積空隙率  $\varepsilon'$  は、面  $H$  が面  $A'$  の位置にあるときの値 1 から、面  $H$  が下降するにつれ減少する。そして、その減少は連続的である。それ故、面  $H$  の下降にともない、その上の  $v$  も、 $v$  の平均値を作るべき面積  $\varepsilon\delta A$  も、ともに連続的に変ることになる。よって、 $u''$  は  $z$  の連続関数である。近接遷移層の上下界面で  $U$  と  $u''$  および  $u''$  と  $u$  とが連続的に接続することも容易に証明される。かくして、平均流速  $V$  も、流体の全存在域にわたって連続であることが知られた。

水平面  $H$  上の実際の微視的剪断応力にも不連続は生じえず、これを面積  $\varepsilon\delta A$  について平均したものが流体内剪断応力  $\tau_{zx}$  に他ならない。よって、 $\tau_{zx}$  も、流体の存在範囲の全体にわたって  $z$  の連続関数である。

抵抗係数  $K$  と平均流速  $V$  とが  $z$  の連続関数だから、(5) 式により、流体内剪断応力の勾配  $d\tau_{zx}/dz$  が  $z$  の連続関数であることがわかる。しかし、これは、透過性壁面が粗面であるばあいに限る。平滑面だと、壁面で  $\varepsilon'$  が 0 から多孔物質の空隙率  $\varepsilon$  に不連続的に上昇する。よって、 $K$  も  $V$  も  $\tau_{zx}$  も、そこで不連続的飛躍を示し、 $d\tau_{zx}/dz$  は無限大となる。

#### IV. 流速および剪断応力の巨視的分布と半巨視的分布

##### 1. 剪断応力の半巨視的分布曲線

流体内剪断応力  $\tau_{zx}$  の半巨視的分布曲線を書こうとしても、近接遷移層内の事情が不明だから、正確な形を定めうる望みはない。それにしても、凹凸境界面  $A_1$  より上では、 $\tau_{zx}$  が第 2 図 (a) の直線  $CA'A_1$  で与えられることが確定している。また、近接遷移層の下につづく遷移層を過ぎれば、流速  $u$  は深部流速  $u_B$  となって  $z$  によって変化しない。よって、多孔物質内の深所、( $-z$ ) の値の大きい所では、 $\tau_{zx}$  が 0 になることも確かである。それで、これらふたつの事実を材料とし、前節で証明した  $\tau_{zx}$  と  $d\tau_{zx}/dz$  との連続性を利用して、流体の存在域全体にわたって、 $\tau_{zx}$  と  $z$  との関係をできるだけ簡単な曲線に表わすことを試みる。それにより、半巨視的分布も自ら得られる。「できるだけ簡単な」とは「極大極小変曲点の数ができるだけ少い」の意味である。

第 2 図 (a) の曲線  $CA'A_1B_1B'N$  がその曲線である。極大点と変曲点とがひとつずつある。 $d\tau_{zx}/dz$  が連続だから、凹凸上界面を表す  $A_1$  点で、曲線は折れることなく滑らかに、直線  $CA_1A$  から外れて下の方へ曲る。 $\tau_{zx}$  の極大点をすぎたあとは、 $\tau_{zx}=0$  に達すべく左よりに下降する。

B' 点は近接遷移層の下界面上にある。これから下の曲織部分 B'N は、B' 点の位置が定めれば、論文 II の (8) 式と (12) 式とにより、その形が正確にきめられる。

多孔物質の固体骨組のなかの剪断応力  $\tau'$  は、 $\tau'' = \tau - \tau_{zz}$  とおくと、(2) 式により

$$\tau' = \tau + \tau' \epsilon' / (1 - \epsilon') \quad (6)$$

として表わされる。第 2 図 (a) が示すように  $\tau''$  は正だから、 $\tau'$  は  $\tau$  より大きい。また、この図から、多孔物質のなか深いところほど  $\tau'$  の大きいことがわかる。 $\tau'$  のために固体の骨組に剪断歪が生じ、多孔物質の上部は流体の流れの方向に変位する。

### 2. 実剪断応力と理論剪断応力

論文 II で用いた理論は巨視的理論である。巨視的理論では透過性壁面を一枚の幾何学的平面で代表し、近接遷移層を考えない。この幾何学的平面を代表面 O、あるいは単に面 O と名づけ、この面での境界条件を条件 J とよぶことにする。いま、面 O より上の空間にも多孔物質が無限に続いていると仮想して、面 O の上で条件 J にかなり、多孔質内流体の運動方程式の解をつくったとしよう。すると、その解のうち面 O の下に属する部分が、透過性壁面のある多孔物質内流体の流動を与えるとするのが巨視的理論の立場である。したがって、透過性壁面を幾何学的平面と考えるよりほかに、それに構造を与えるわけにはゆかない。 $\tau_{zz}$  にも、この解から求められる剪断応力が用いられる。

第 2 図 (a) の曲線 BB'N が、上の解によって与えられる、多孔物質のなかの流体内部剪断応力の曲線である。近接遷移層の下界面を表わす水平破線 B' から下の部分 B'N は、前項で述べたとおり、実際の  $\tau_{zz}$  曲線を与える。しかし、破線 B' のうえの点線で示した BB' の部分は、実際の  $\tau_{zz}$  曲線である B'B<sub>1</sub>A<sub>1</sub> から外れる。

巨視的理論は、透過性壁面より上にある流路内の流動も同様に取扱う。面 O の下を、多孔物質のない、流体でみたされた自由空間と考える。そして、面 O で条件 J を満す粘性流体の運動方程式の解を求め、その面 O より上に属する部分を流路内の流動とする。したがって、第 2 図 (a) での巨視的理論による  $\tau_{zz}$  曲線は、近接遷移層のなかを、直線 CA'A<sub>1</sub> の延長である点直線 A<sub>1</sub>A と進む。

このように、近接遷移層内では、実際の剪断応力と巨視的理論による剪断応力が一致しない。それで、両者を区別するため、前者を「実剪断応力」、後者を「理論剪断応力」と名づける。つまり、近接遷移層内では、実剪断応力の分布を半巨視的分布、理論剪断応力の分布を巨視的分布と呼ぶことになる。近接遷移層外では、両剪断応力は合致し、半巨視的分布と巨視的分布との区別は失われる。このあと第 5 項で「実流速」「理論流速」が、おなじ意味で、平均流速について使われる。

### 3. 透過性壁面における理論剪断応力の値

論文 II の第 IV 節第 1 項で、透過性壁面での力学的境界条件として

$$(\tau_{zz})_{z=0} = a (\tau_{zz})_{z=-0} \quad (7)$$

とおいた。同論文の (16) 式である。式 (7) の左辺および右辺第 2 因子は、それぞれ、流路内流体および多孔質内流体の理論剪断応力が代表面 O での値を表す。

この代表面 O における理論剪断応力の値は、第 2 図 (a) の A 点と B 点とで示されるが、A 点は B 点の右にある。つまり、(7) 式の左辺は右辺第 2 因子より大きい。したがって、(7) 式の常数  $a$  の値は 1 より大きい。しかし、近接遷移層の厚さや構造が変われば、実剪断応力の曲線は第 2 図 (b) に示した形にもなりうる。このばあいには、A 点が B 点の左に位するから、常数  $a$  の値は 1 より小さい。さらに、面 O の位置を定める基準は、「近接遷移層内にあるべきこと」の他にない。それで、第 2 図 (a) のばあいでも、面 O を上方に移すと A 点と B 点との左右関係が逆になる。このように、B 点に対する A 点の位置は、近接遷移層の様相や代表面 O の選びかたにより、いろいろに変わる。それゆえ、 $a$  の値は 1 より大きいことも小さいこともあるという結果になる。

論文 II の第 III 節第 2 項でのべたように、Beavers は同論文の (15) 式で表わされる境界条件を透過性壁面に関して仮定した。そして、実験により、その式にある無次元常数  $\alpha$  の値として 0.1~4 をえた。 $\alpha$  は多孔物質の種類によって変わる。この  $\alpha$  と、上の (7) 式の無次元常数  $a$  との間には、論文 II の第 IV 節第 2 項の (21) 式に示した  $\alpha = a/\sqrt{\varepsilon}$  の関係がある。透過性多孔物質の空隙率  $\varepsilon$  が 0.5 より小さいばあいは少い、よって、 $\alpha$  と  $a$  とは互に近い値であるといえる。したがって、 $a$  の値が 1 より大きいことも小さいこともあるうとい結論は、Beavers の実験結果と適う。

#### 4. 流速勾配の半巨視的分布

実流速の分布曲線、すなわち、平均流速の半巨視的分布曲線を求めるために、まず、実流速の勾配  $dV/dz$  の分布曲線を作る。まえに述べたように、 $V$  は  $U$ ,  $u''$ ,  $u$  を代表する。 $\tau_{zz}$  および  $d\tau_{zz}/dz$  が連続であることから  $dV/dz$  および  $d^2V/dz^2$  が連続であることがいわれる。さらに、近接遷移層の上界面よりうへの流路内では、 $\tau_{zz} = \mu dU/dz$  の関係があるから、 $dV/dz = dU/dz$  は直線で表される。また、多孔物質の深部では、 $\tau_{zz}$  が 0 であったのと同じく、 $dV/dz = du/dz$  も 0 である。よって、 $dV/dz$  の分布曲線は、第 2 図 (a) に示した  $\tau_{zz}$  の分布曲線と同じ形になる筈である。それを、第 2 図 (b) に曲線  $CA'A_1B_1B'N$  として表わした。ただ、第 2 図の (a)(b) 両図の曲線に違う点がひとつある。それは、(a) 図で  $\tau_{zz}$  曲線が直線から外れるのが  $A_1$  点であるのに対し、(b) 図の流速勾配曲線は  $A'$  点で外れることである。

第 2 図 (b) でも、巨視的理論による理論流速勾配の曲線は、 $A'A$  および  $BB'$  の点線で示した。この流速勾配のばあいにも、剪断応力のばあいと同様、A 点と B 点との位置の左右関係は定まらない。

#### 5. 流速の半巨視的分布

実流速  $V$  の分布曲線を得るには、第 2 図 (b) の  $dV/dz$  曲線を積分すればよい。その積分曲線を第 2 図 (c) の曲線  $CA'A_1MB_1B'N$  で示した。点線  $A'A$  と  $B'B$  とは、巨視的理論による平均流速、すなわち理論流速の近接遷移層内での分布曲線である。これら理論流速の曲線が面 O の上で終る点 A および点 B が、それぞれ、幾何学的平面と見なされる理論透過性壁面での理論流速の値  $U_0$  と  $u_0$  とを与える。

第 2 図 (c) の実流速曲線と面 O との交点を M としよう。すると、流速勾配曲線が第 2 図 (b) の形である限り、近接遷移層内での理論流速の勾配は常に実流速の勾配より大きいから、A

点は必ず M 点の左に、B 点は必ず M 点の右に位置する。三点のこの位置関係は、第 2 図 (b) での A, B 点の左右関係に影響されることはない。また、面 O を上下に動かしても変わらない。よって、巨視的理論で用いる  $U_0$  と  $u_0$  とでは、 $u_0$  の方が必ず  $U_0$  より大きい。

以上のように、透過性壁面上の層流の内部から下降するにつれ、実際の流速は、近接遷移層の上面で理論流速  $U$  から実流速  $u'$  に連続的に変わり、そのあとも、連続的減少をつづけながら、近接境界層の下界面で、多孔物質内の理論流速  $u$  に連続的に移行する。しかし、仮に、近接遷移層内でも巨視的理論がなりたつとすると、 $U_0 < u_0$  という結果に到達する。したがって、 $U_0 < u_0$  の関係は、仮の関係あるいは見掛上の関係というべきものに過ぎない。かくして「まえがき」で述べた矛盾は説明される。

近接遷移層内の剪断応力分布が「簡単な曲線」で表わされることを前提として、以上の結果に達した。自然現象は簡単に表現されることが多いから、この前提が誤ることは殆んどないであろう。しかし、稀な例外はありうる。よって、得られた結果が如何なる場合にも正しいとまではいわれない。

## V. 論 議

### 1. 巨視的透過性壁面の位置と境界条件

巨視的理論では、透過性壁面を一枚の幾何学的平面で代表する。これまで、この面を簡単に面 O とよび、その位置を仮に定めて議論を進めてきた。しかし、面 O の位置が仮のもの、すなわち未知のものままでは、巨視的理論の正確な解が求められない。しかるに、面 O の位置決定には、面 O での境界条件として 3 個が必要である。次にのべるように、先にあげた (1) 式と (7) 式との 2 個では足りない。

さきに理論流速とよぶことにした巨視的理論による流速  $U$  および  $u$  は、いずれも第 2 階微分方程式である運動方程式の解として与えられる。よって、 $U$  にも  $u$  にも積分定数が 2 個ずつある。しかしそのうちの 1 個ずつは、流体全体の流れをはさむ上下 2 枚の壁における境界条件で定められる。したがって、 $U$  および  $u$  には、未知の積分定数が 1 個ずつ残る。それを  $C$  と  $c$  とで表わそう。

前節までは便宜上、仮に定めた面 O の位置を座標  $z$  の原点にえらんできた。ここで、新たに多孔物質に固定した座標  $z$  を設け、面 O の座標を  $z_0$  で示すと同時に、 $U$  と  $u$  とを取りまとめた全巨視的流速を  $(U, u)$  で表すことにしよう。すると  $(U, u)$  には 3 個の未知定数  $C$ ,  $c$ ,  $z_0$  がふくまれることになる。これらの定数は面 O での境界条件で定めるよりほかない。よって先に述べたように、面 O での境界条件は、第三条件を導入して 3 個にする必要がある。それによって初めて、面 O の位置を定める  $z_0$  の値が知られる。

この第三境界条件には、例えば、論文 II の (18) 式で示される  $u_0$  と  $(\tau_{zx})_{z=0}$  との関係を用いることができる。文献 2 で示したように  $G=0$ ,  $\mu=0$  のばあいには、この関係が簡単に

$$(\tau_{zx})_{z=0} = \beta u_0^{5/2}, \quad \beta = \sqrt{2\varepsilon\mu'/3B} \quad (8)$$

で表わされる。しかし、第三条件を用いると、それが (8) 式のような簡単なものであるとしても、解をを求める手続きが複雑になるのを免れない。

透過性壁面が、凹凸が弱くて平滑面に近ければ、近接遷移層はその下につづく遷移層に比べて極めて薄いと予想される。このようなばあいには、第三境界条件を用いずに、面 O を近接遷移層内のどこかに勝手に設定して、解を求めるのが实际的であろう。得られる解は、もちろん不正確ではあるが、不正確の度合は些少に止る。

## 2. 境界条件式の定数の値

近接遷移層の上を流れる層流のなかの一点での流速  $U_1=U(Z_1)$ 、また、近接遷移層の下の多孔物質内の一点での流速  $u_1=u(z_1)$  が実験的に測定されたとしよう。  $Z_1, z_1$  は測定点の座標である。すると、第 1 項であげた 3 個の未知定数のうちの  $C$  と  $c$  との値が、この測定結果から定められる。したがって未知定数は  $z_0$  のみとなり、境界条件式 (1) と (7) とのうち一方は不要となる。

定数  $C, c$  の値が知られたから、理論流速が  $z$  の関数  $U(z), u(z)$  として表わされる。よって、たとえば (1) 式を用いて

$$U(z_0) = bu(z_0) \quad (9)$$

を満足する  $z_0$  を求めれば面 O の位置がきめられる。いま、  $U(z)$  と  $u(z)$  とから導かれる剪断応力を、それぞれ、  $\tau_{zx}(z; U)$  と  $\tau_{zx}(z; u)$  とで表わそう。すると、(7) 式の定数  $a$  の値が正しければ、  $(\tau_{zx})_{z=+0}$  を  $\tau_{zx}(z_0; U)$  で、  $(\tau_{zx})_{z=-0}$  を  $\tau_{zx}(z_0; u)$  でおきかえた (7) 式が満足される筈である。定数  $a$  の値が不明のばあいは、この関係を  $a$  の値の決定に利用できる。

うえのことから、境界条件式 (1) は、面 O の位置決定用の式と見ることができる。ところで、面 O は、元来、どこに置いても差しつかえない性質の面である。ただ、近接遷移層の外におくのは实际的でないから、そのなかに択ぶ。したがって、(9) 式の定数  $b$  には特別な値が定められている訳ではない。その値には、許容範囲が与えられるだけである。ただし、この許容範囲は 0 と 1 との間になければならない。

一方、  $b$  には、許容範囲内にある値ならどんな値を与えても構わない。すると、多孔物質の性質を示す無次元数のうちから、物理的意味が簡単明瞭で、しかもその値が許容範囲内にあるものを選んで、  $b$  の特定値に用いると便利であろう。いままで  $b$  の特定値として用いてきた空隙率  $\varepsilon$  は、正に、物理的意味が簡単明瞭な多孔物質に固有な無次元数である。

はじめに、物理的意味の簡単明瞭だけを基準にして  $b$  の特定値を選ぶと、それが許容範囲を外れることのあるのはいうまでもない。このような時は、別の特定値を探さなければならない。第 2 図 (c) の曲織の配置からわかるように、近接遷移層が厚いほど、点線 A'A と B'B との水平間隔は広く、  $U_0$  と  $u_0$  との差は大きい。したがって、  $b$  の許容範囲は小さい値の方へずれる。それで、たとえば  $\varepsilon=0.8$  の同じ多孔物質であっても、表面の凹凸が弱く近接遷移層が薄いばあいには 0.8 が許容範囲内にあるが、凹凸が激しく近接遷移層が厚いと、許容範囲の上限が 0.8 に達しないことがありうる。このことから、  $\varepsilon$  が  $b$  の特定値として用いられるのは、透過性壁面があまり粗くない時に限られることが知られる。詳細な記載がないためよくは判らないが、Beavers が実験に用いた多孔物質は  $\varepsilon$  が 0.9 ほどで 1 に近く、その表面の凹凸は小さかったようである。

### 3. 透過性平滑壁面

平滑な透過性壁面を凹凸帯が極めてうすい粗面と考えれば、粗面についてえたこれまでの結果を平滑面にも使うことができる。ただ、平滑面のばあいには、はじめから面  $O$  を平滑面そのものと一致させて考えるのが便利であろう。しかし、これは面  $O$  を勝手な位置にえらぶことだから、第1項の終りで述べたように、定数  $b$  として  $\varepsilon$  を用いると、 $U$  および  $u$  に誤差が生ずる。その代り、境界条件式は(1)式と(7)式とで足りる。誤差のない  $U, u$  を求めるには、 $b = \varepsilon$  としたまま、第1項で述べた3個の境界条件を用い  $C, c, z_0$  を定めればよい。そして、面  $O$  を平滑面から座標  $z_0$  の位置へうつす。

この論文 III の議論は、Beavers の研究を利用して進めてきた。しかし、透過性壁面上の層流の流速分布が Beavers の研究のばあいと別のものであっても、おなじ考え方および結果を用いることができる。たとえば、Beavers の実験で、圧力勾配  $G$  を 0 とし、その代りに論文 II 第2図の非透過性壁面  $M$  を一定速度で走らせて流動を起させたとしよう。このときの層流内の流速分布は、積雪表面を層流として吹く風のなかの流速分布と同じである。このばあいには、この論文 III の第2図 (a)(b) にある直線  $CA'A$  を鉛直に立てて考えればよい。

## VI. ま と め

この論文の目的は「まえがき」に述べてある。透過性壁面を、すなわち多孔物質の表面を実際に則して、構造と厚さのある「近接遷移層」とし、定性的にはあるが、そのなかの流体の平均流速  $u'$  の分布を求めた。その結果、近接遷移層の上および下を流れる流体の巨視的理論による流速  $U$  と  $u$  とが、 $u'$  を介して連続的につながることが示された。物理的にみてそうあるべきように、透過性壁面で、実際の流速に不連続的变化が生じることはないのである。しかし、近接遷移層のなかでも巨視的理論がなりたつと仮定すると、 $u_0 > U_0$  の結果に到達することが証明された。すなわち、 $u_0 > U_0$  の関係は実際の平均流速についての関係ではない。したがって、それに矛盾があっても不可解というには当たらない。

なお、 $U$  と  $u$  とを正しく定めるには、論文 II で設定したふたつの境界条件のほかに第三の境界条件を必要とすること、また、「まえがき」の(1)式にある  $b = \varepsilon$  の関係は、透過性壁面が余り粗くないときにだけ用いられることが示された。

この論文を書くにあたっては、北海道大学低温科学研究所の石田完教授をはじめとする気象学部門の研究者にいろいろ検討してもらった。ここに記して感謝の意を表す。

## 文 献

- 1) 吉田順五 1978 雪内空気の流動理論 I, II. 低温科学, 物理篇, **36**, 11-27, 29-40.
- 2) 吉田順五 1977 風が誘起する雪内気流. 低温科学, 物理篇, **35**, 47-65.
- 3) 木下誠一・若浜五郎 1956 アニリン固定法による積雪の薄片. 低温科学, 物理篇, **18**, 77-96.
- 4) 若浜五郎 1963 積雪内における融雪水の移動 I. 低温科学, 物理篇, **21**, 45-74.
- 5) 成田英器 1977 雪面の硬さ, 飛雪形, 温度が地ふぶき現象に及ぼす影響. 低温科学, 物理篇, **35**, 77-89.
- 6) Beavers, G. S. and Joseph, D. D. 1967 Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.*, **30**, Part 1, 197-207.

### Summary

1. When fluid flows over the surface of a permeably porous material, it drags the fluid filling interstices of the material with the result that an internal flow is given rise to near the surface. In the foregoing Paper II, the author proposed the formulae

$$(\tau_{zx})_{z=+0} = \alpha(\tau_{zx})_{z=-0} \quad (1)$$

and

$$U_0 = bu_0 \quad (2)$$

as boundary conditions at the porous surface valid for cases when the external flow flowing over it is laminar. He succeeded in deriving, by use of the equations of motion obtained in Paper I for fluid within porous material, the relations

$$a = \alpha\sqrt{\varepsilon} \quad (3)$$

and

$$b = \varepsilon, \quad (4)$$

where  $\varepsilon$  is the porosity of porous material which is always smaller than unity, while  $\alpha$  is a constant present in the boundary condition of Beavers and Joseph which they assumed for the purpose of explaining results of their experiments.

2. Since the internal flow is given rise to by the drag due to the external flow, mean velocity  $u$  of the former should be smaller than velocity  $U$  of the latter, and, from the physical point of view,  $u$  should be continuously turned into  $U$  at the surface. But formula (2) satisfies neither of these two requirements when combined with relation (4). The cause of these discrepancies lies in that the theory hitherto used was macroscopic and the porous surface was regarded as a geometrical plane. Such discrepancies can be removed if actual aspects of the porous surface are taken into consideration.

3. The surface of snow is found to show two kinds of microscopic structures in its vertical section: (a) rough structure and (b) smooth structure as shown in Fig. 1 of the text. Such must be generally the case for the surface of permeably porous material. In Fig. 1(a), broken lines  $A_1$  and  $B_1$  represent respectively planes passing the top of the highest projection and the bottom of the deepest depression of the matrix composing the porous material. A space between planes  $A_1$  and  $B_1$  shall be called 'zone of roughness'. The smooth surface lacks this zone.

4. Although the porous material disappears completely beyond plane  $A_1$ , it still makes the bottom layer of the external flow turbulent up to plane  $A'$  of Fig. 1(a). On the other hand, a structural turbulence comes to take the form proper to the porous material only on plane  $B'$  lying in a short distance below plane  $B_1$ . The name 'surface transition layer' will be given to the fluid and porous material which lie in a stratiform space between planes  $A'$  and  $B'$ .

5. Qualitative determination will be made in the following Articles on shear stress and velocity of the fluid flowing within the surface transition layer in reference to the experiments of Beavers and Joseph. In Fig. 2 of the text  $A'$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  and  $B'$  have the same meanings as in Fig. 1(a) while horizontal line  $O$  represents the geometrically plane surface needful for the macroscopic theory. If the surface transition layer is introduced, the macroscopic theory is still useful for obtaining shear stress and flow velocity in the spaces extending above and

below the layer.

6. If  $\varepsilon'$  denotes areal porosity on a plane parallel to the porous surface,  $\varepsilon'$  is equal to 1 when the plane is located above plane  $A_1$  and decreases, as the plane lowers, continuously within the surface transition layer to coincide with  $\varepsilon$  when it reaches plane  $B_1$ . Then total shear stress  $\tau$  on the plane is given by

$$\tau = \varepsilon' \tau_{zx} + (1 - \varepsilon') \tau', \tag{5}$$

where  $\tau'$  is the  $zx$ -component of the stress arising in the matrix of porous material. As  $\tau$  satisfies the equation  $d\tau/dz + G = 0$  both inside and outside the surface transition layer,  $\tau$  is shown by straight line  $CA'A$  and its elongation in  $z$ - $\tau_{zx}$  diagram of Fig. 2 (a). It follows from the continuity of  $\varepsilon'$  that  $d\tau_{zx}/dz$  is a continuous function of  $z$ .

7. Relationship between  $\tau_{zx}$  and  $z$  can be given by curve  $CA'A_1B_1B'N$  in Fig. 2 (a), because  $\tau_{zx}$  and  $d\tau_{zx}/dz$  should change continuously with  $z$  and because  $\tau_{zx}$  is to vanish deep in the porous material while it should coincide with  $\tau$  above plane  $A_1$  where  $\varepsilon'$  is equal to unity. The middle portion of the curve from  $A_1$  down to  $B'$  is drawn only in a qualitative way whereas a mathematical expression can be given to its lower portion  $B'N$  by the solutions of macroscopic equations of motion (13) and (14) shown in the English Summary of Paper II.

8. The macroscopic theory prolongs portions  $CA_1$  and  $NB'$  of curve  $\tau_{zx}$ - $z$  into the surface transition layer as dotted lines show in Fig. 2 (a). The respective prolonged portions terminate on line  $O$  at points  $A$  and  $B$  which give respectively  $(\tau_{zx})_{z=+0}$  and  $(\tau_{zx})_{z=-0}$  of formula (1). As point  $A$  lies to the right of point  $B$ , constant  $a$  in formula (1) is greater than unity. The porous surface is full of variety in structure and it is never exceptional that curve  $z$ - $\tau_{zx}$  happens to take such a shape as shown in Fig. 2 (b) with point  $A$  located to the left of point  $B$ . In such a case constant  $a$  is less than one. Constant  $\alpha$  in formula (3) does not very much differ from constant  $a$ , for  $\sqrt{\varepsilon}$  is generally a decimal lying near unity. Therefore  $\alpha$  should possibly be greater as well as smaller than unity, and, indeed, Beavers and Joseph valued  $\alpha$  between 0.1 and 4.0 by their experimentation as stated in Article 5 in the English Summary of Paper II.

9. Let  $u''$  denote velocity of the fluid flowing in the surface transition layer and let  $V$  stand for any one of  $u$ ,  $U$  and  $u''$ . Velocity gradient  $dV/dz$  resembles shear stress  $\tau_{zx}$  in that  $dV/dz$  decreases linearly with increasing  $z$  above the surface transition layer while it vanishes at the great depth in the porous material. Therefore, curve  $z$ - $dV/dz$  shown in Fig. 2 (b) is similar in shape to curve  $z$ - $\tau_{zx}$  in Fig. 2 (a). Point  $A$  can be positioned to the left of as well as to the right of point  $B$  also in this case of  $dV/dz$ . But the two curves for  $z$ - $dV/dz$  and  $z$ - $\tau_{zx}$  differ from each other in one point: curve  $z$ - $dV/dz$  begins to depart from straight line  $CA$  at point  $A'$  while curve  $z$ - $\tau_{zx}$  does at point  $A_1$ .

10. Curve  $z$ - $dV/dz$  in Fig. 2 (b) gives, when integrated, curve  $CA'A_1MB_1B'N$  in Fig. 2 (c) which shows a continuous change with  $z$  of actual velocity  $V$  of the fluid flowing above, within and below the surface transition layer. The macroscopic theory developed in Papers I and II gives, however, curve  $CA'A$  for  $z$ - $U$  and curve  $NB'B$  for  $z$ - $u$  which end on line  $O$  respectively at points  $A$  and  $B$  located away from each other. Point  $A$  in Fig. 2 (c) gives  $U_0$  and it lies always to the left of point  $B$  which gives  $u_0$ , independently of the relative position of points  $A$  and  $B$  for  $dV/dz$  in Fig. 2 (b). Thus  $U_0$  turns out to be invariably smaller than  $u_0$  in agreement with the boundary condition given by combination of formulae (2) and (4), whereas in actuality  $U$  is smoothly connected to  $u$  by way of  $u''$ .

11. As  $U$  and  $u$  are solutions of a differential equation of the second order, they have each one pair of constants of integration. Let these constants be denoted by  $C, C'$  for  $U$  and by  $c, c'$  for  $u$ . One member of each pair, say  $C'$  and  $c'$ , are predetermined by the boundary conditions at the upper and lower walls which bound the whole flow of the fluid. Remaining constants  $C$  and  $c$  are determined by boundary conditions (1) and (2) combined with formulae (3) and (4), if plane  $O$  is placed at a level within the surface transition layer. But, as there is no rule for fixing the level, it cannot be helped that  $C$  and  $c$  are left attached with some arbitrariness.

頁	行	誤	正
16	上から16	統形的	統計的
23	下から1	$(B/\epsilon)$	$(\epsilon/B)$
27	上から10	$S_1 + S_2$	$S'_1 + S''_1$
34	下から12	第3図	第2図
37	" 12	(I, 33)	(I, 35)
39	上から18	Fig. 1	Fig. 2
"	" 21	$-(\epsilon/B)u=0$	$-(\epsilon/B)u=0$
"	" 25	$(2/3)\mu'u/$	$(2/3)\mu'u^*/$
"	下から7	Fig. 1	Fig. 2
44	上から13	変ル	変る
47	" 4	$\tau + \tau'\epsilon'/$	$\tau + \tau''\epsilon'/$
48	" 15	あるうとい	あるという
50	下から8	曲織	曲線