



Title	融解点付近での凍土の熱伝導率と水分移動
Author(s)	伊豆田, 久雄; IZUTA, Hisao; 鈴木, 義男 他
Citation	低温科学. 物理篇, 39, 181-187
Issue Date	1981-03-18
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/18428">https://hdl.handle.net/2115/18428</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	39_p181-187.pdf



## 融解点附近での凍土の熱伝導と水分移動\*

伊豆田久雄\*\*

(北海道大学大学院 理学研究科)

鈴木義男

(低温科学研究所)

(昭和55年10月受理)

### I. ま え が き

凍土内で水は全部は氷とならず一部は不凍水とよばれる液体状態で氷と共存している。凍土の温度があがるにつれ、氷はしだいに融ける。氷の消える温度が融解点である。融解点付近で生ずる不凍水の物性は普通の氷に近いと考えてよい。それゆえ、その熱伝導率は氷のその1/4程度であろう。したがって凍土の熱伝導率は融解点に近づくにつれ減少し、融解点では連続的に未凍土の熱伝導率につながると考えられる。しかし、筆者らがサーマルプローブ法により凍土の熱伝導率を測定した所、融解点に近づいても凍土の熱伝導率が予想されるように減らず、未凍土のそれと不連続となる場合があることが判った。この論文では、温度勾配による水の移動を考えた熱伝導方程式を導き、これによりこの不連続が説明できることを示し、あわせて、熱伝導率測定の概要をのべる。

### II. 凍土の熱伝導方程式

含水土は土粒子の作る骨格内に水分が分布している系である。系の温度を下げると、水分の一部は氷に変わる。氷の発生し始める温度が融解点である。水分の一部は当然水蒸気であるが、低温では水蒸気の絶対量は少なく、また水蒸気の熱伝導におよぼす効果は、融解点で連続であるから、ここでは簡単のため水蒸気は無視し、系を土粒子、氷、水、空気の4成分系と考え、各成分について物理量を添字  $s, i, w, a$  で示す。一般的にはこの添字は  $\lambda$  と書く。また、土粒子骨格は剛体と考える。

いま、比容を  $v_i$ 、密度を  $\rho_i$  とすると、

$$\theta = v_i \cdot \rho_w \cdot \rho_i^{-1} + v_w \quad (1)$$

は体積含水率である。含水土は土粒子骨格と  $\theta$  によって規定される。とくに土粒子骨格が与えられると、温度の単調増加関数  $\bar{v}_w(T)$  がきまり、融解点  $T_m$  は次式で与えられる。

$$\theta = \bar{v}_w(T_m) \quad (2)$$

\* 北海道大学低温科学研究所業績 第2296号

\*\* 現在 株式会社 精研

また,

$$\left. \begin{aligned} v_w &= \bar{v}_w(T), & T < T_m \text{ (凍土)} \\ v_w &= \theta, & T > T_m \text{ (未凍土)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

さて, 含水土内に温度勾配のある時の現象を考えよう。水の化学ポテンシャルは温度が低いほど低いので, 水は低温側に流れる。この流れ  $\vec{q}_w$  は顕熱輸送を伴うので熱流  $\vec{q}$  に影響する。厳密には不可逆過程の熱力学の立場から, 水と熱の移動を論じなければならないが, 水流による顕熱輸送は小さいので無視し, 熱流, 水流は各々独立に温度勾配によって起こるものとする。含水土を均質とすれば,

$$\vec{q} = -k \text{ grad } T, \quad k > 0 \quad (4)$$

$$\vec{q}_w = -h \text{ grad } T, \quad h > 0 \quad (5)$$

$k$  は, 土粒子構造, 各成分の熱伝導率  $k_i$ , 温度  $T$ , 含水量  $\theta$  に,  $h$  は土粒子構造, 含水量  $\theta$ , 温度  $T$  に依存すると考えられるが, いずれも融解点で連続であると考えられる。

いま含水土内の微小領域  $\Delta V$  には微小時間  $\Delta t$  には,  $\Delta Q$  の熱と,  $\Delta W$  の水が流れこむ,

$$\Delta Q = \text{div } k \text{ grad } T \cdot \Delta V \cdot \Delta t \quad (6)$$

$$\Delta W = \text{div } h \text{ grad } T \cdot \Delta V \cdot \Delta t \quad (7)$$

領域  $\Delta V$  の温度が, この間に  $\Delta T$  だけ変化したとする。最初, 領域が凍土であるとすれば,  $\Delta t$  を充分小さくすれば  $\Delta t$  後でも領域は凍土のままである。したがって  $\Delta V$  内の  $v_w$  は

$$\Delta v_w = \frac{d\bar{v}_w}{dT} \cdot \Delta T \quad (8)$$

だけ増加せねばならない。したがって,  $\Delta V$  内で

$$\begin{aligned} \Delta Q' &= L \cdot \rho_w \cdot \left( \Delta W - \Delta v_w \cdot \Delta V \right) \\ &= L \cdot \rho_w \cdot \left( \text{div } h \cdot \text{grad } T \cdot \Delta t - \frac{d\bar{v}_w}{dT} \cdot \Delta T \right) \Delta V \end{aligned} \quad (9)$$

の発熱 (負なら吸熱) が起こる。ここに  $L$  は氷の融解潜熱である。一方,  $\Delta V$  内の物質の温度を  $\Delta T$  だけあげるには,

$$\Delta Q'' = \left( \sum_{\lambda} c_{\lambda} \rho_{\lambda} v_{\lambda} \right) \cdot \Delta V \cdot \Delta T = c\rho \cdot \Delta V \cdot \Delta T \quad (10)$$

の熱量を要する。ここに  $c_{\lambda}$  は各成分の比熱であり, また

$$c\rho = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \rho_{\lambda} v_{\lambda} \quad (11)$$

とおいた。 $\Delta Q''$  は  $\Delta Q$  と  $\Delta Q'$  の和に等しい。(6), (9), (10) より,

$$c\rho \Delta V \cdot \Delta T = \left( \text{div } k \text{ grad } T \cdot \Delta t + L \cdot \rho_w \left( \text{div } h \text{ grad } T \cdot \Delta t - \frac{d\bar{v}_w}{dT} \Delta T \right) \right) \Delta V \quad (12)$$

整理し,  $\Delta V \cdot \Delta t$  でわって  $\Delta t \rightarrow 0$  とすれば,

$$\left( c\rho + L \cdot \rho_w \frac{d\bar{v}_w}{dT} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (k + L \cdot \rho_w \cdot h) \text{grad } T \quad (12a)$$

いま,

$$\bar{c}\rho = c\rho + L \cdot \rho_w \cdot \frac{d\bar{v}_w}{dT} \quad (13)$$

$$\bar{k} = k + L \cdot \rho_w \cdot h \quad (14)$$

とおけば, (12) は,

$$\bar{c}\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div } \bar{k} \cdot \text{grad } T \quad (15)$$

(15) は, 普通の物質の熱伝導方程式と全く同じ形である。凍土の場合, 実験的に測定される比熱, 熱伝導率は,  $\bar{c}\rho, \bar{k}$  であって,  $c\rho, k$  ではない。未凍土では,  $dQ'$  は存在しないから (13), (14) で  $L=0$  とおくことになる。このため, 含水土の比熱, 熱伝導率は, 融解点でそれぞれ  $L \cdot \rho_w \cdot (d\bar{v}_w/dT)_{T \rightarrow T_m-}, L \cdot \rho_w \cdot h(T_m)$  の不連続性を持つ。

比熱の補正式 (13) はよく知られているが, 熱伝導率の補正式 (14) は筆者らの知る限り, これまでに指摘されていない。

### III. 凍土の熱伝導率の測定

熱伝導率の不連続性をみるため, サーマルプローブ法による測定を行った。

試料は次のようにして準備した。炉乾燥した苫小牧シルトを 1 mm 目のふるいを通し, 必要な水を加えて湿土を作り, 内径 88 mm, 深さ約 120 mm の円筒型断熱容器に, 2 cm ずつ,  $\rho_s$  が  $1.0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  になるように 10 cm の厚さに詰め, その中心軸にプローブを差しこんだ。プローブは自作したもので, 外径 1.2 mm, 内径 0.8 mm, 長さ 100 mm のステンレス管内に, ヒーターとして径 0.07 mm の被復コンスタンタン線を 2 往復させた。ヒーターと管壁の熱接触をよくし, また軸方向の対流による熱伝導をさまたげるため, 管内には不凍液 50% 水 48% セラチン 2% の溶液を満した。プローブの測温は, 外壁の長さの中心点につけた細い熱電対で行なった。他に試料内の数点にも熱電対を埋めた。

プローブと熱電対を埋めた試料は, 蒸発を防ぐため表面をプラスチック膜でおおい, 室温で一日放置した後, 上面より  $-28^\circ\text{C}$  の強風をあてて凍結させた。こうして作った凍土の  $\theta$  の分布の均質性はよく, ふれは数 % 以内に収まっていた。

測定では, 断熱材の上ぶたをかぶせた容器を, 設定温度の  $\pm 0.1^\circ\text{C}$  以内に温度制御したブライン槽内にひたし, 試料全体が設定温度になったのを確認した後, プローブのヒーターに定電流 (20~60 mA) を通し, プローブの温度上昇を連続記録した。ヒーターの有効抵抗値は  $36 \Omega$  であったので, ヒーター単位長あたり単位時間の発熱量は  $0.34 \sim 3.0 \text{ mcal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  である。サーマルプローブ法の解析は, 熱伝導率, 体積比熱が一定であるとして行うが, 前節にのべたよう凍土ではいずれも温度に大きく依存するので, 温度上昇は  $0.2 \sim 0.4^\circ\text{C}$  内に止めた。

一回の測定が終ると, 槽のブライン温度をあげ, 順次未凍土領域までの測定を行った。

## IV. 測定 の 解析

試料の熱伝導率  $\bar{k}$ , 体積比熱  $\bar{c}\rho$  が一定の時, プローブ半径を  $a$  として無次元時間パラメーター

$$\tau = \bar{k} \cdot \bar{c}\rho^{-1} \cdot a^{-2} \cdot t \quad (15)$$

を導入すると,  $\tau > 1$  でのプローブ温度  $T(t)$  の漸近解は, カースロウとイエガー<sup>1)</sup> によれば (一部の記号と配列を変えた)

$$T(t) = T(0) + \frac{Q}{4\pi\bar{k}} \left[ 2\Omega + \ln \frac{4\tau}{C} + \frac{1}{2\tau} \left\{ (1-\beta) \ln \frac{4\tau}{c} + (1-2\beta) \cdot \Omega \right\} + O(\tau^{-2}) \right] \quad (16)$$

ここで,  $T(0)$  は初期温度,  $Q$  はプローブの単位長・単位時間の発熱量,  $C$  は常数 1.7811...,  $\beta$  はプローブと試料との体積比熱比  $c_0\rho_0/\bar{c}\rho$ , である。また  $\Omega$  はプローブと試料との接触抵抗 (界面での温度差と試料単位長に流れこむ熱流の比) を  $R$  とする時,

$$\Omega = 2\pi R \cdot \bar{k} \quad (17)$$

で定義される無次元量である。

いま,  $\tau_0 \gg 1$  で (16) で  $\tau^{-1}$  のオーダーの項を省略できると,

$$t > t_0 = \frac{\bar{c}\rho \cdot a^2}{\bar{k}} \tau_0 \quad (18)$$

に対し,

$$T(t) - T(t_0) = \frac{Q}{4\pi\bar{k}} \ln \frac{t}{t_0} \quad (19)$$

したがって  $T(t)$  を  $\ln(t)$  に対しプロットすれば直線がえられ, その傾きから  $\bar{k}$  を求めることができる。しかし著者らの場合,  $t_0=120$  秒とした時, とくに融解点付近の測定で下に凸の曲線となり,  $\tau^{-1}$  のオーダーの項がきいていた。こういう場合の  $\bar{k}$  は曲線上の 4 点から求められる<sup>2)</sup> のであるが, 実験整理の段階ではこれに気づかず, 次のような便法をとった。

石崎・木下<sup>3)</sup> は  $\rho_s=1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  の苦小牧シルトに対し,

$$-T(^{\circ}\text{C}) = 112 \times 10^4 (100 \bar{v}_w)^{-3.14} \quad (20)$$

すなわち

$$\bar{v}_w = 0.195 (-T)^{-0.318} \quad (21)$$

を与えた。筆者らの試料は, 1 mm のふるいを通したため, 彼らのものより比表面積が増大し,  $\bar{v}_w$  は (21) と異なると考えられるが, 一応 (21) を用いる。式 (14) の熱伝導率にあらわれる付加項は, (21) を使うと,

$$L\rho_w \frac{d\bar{v}_w}{dT} = 5(-T)^{-1.318} \quad (22)$$

式 (1), (11), (13), (21) から, 含水量  $\theta$ , 温度  $T$  の時の  $\bar{c}\rho$  が計算できる ( $c_s=0.2 \text{ cal}\cdot\text{cm}^{-3}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1}$ , 以下同じ単位,  $c_i=0.5$ ,  $c_w=1$ ,  $c_a=0$  とした)。

さて, 時刻  $t_1$  から  $t_2$  までの昇温を  $\Delta T = T(t_2) - T(t_1)$  とすれば, (16) から

$$\begin{aligned}\bar{\kappa} &= \frac{Q}{4\pi \cdot \Delta T} \left[ \ln \frac{t_2}{t_1} + \frac{a^2}{2\kappa} \left( \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right) (1 - 2\beta \cdot \Omega) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{2\kappa} (1 - \beta) \left( \frac{1}{t_2} \ln \frac{4\kappa t_2}{Ca^2} - \frac{1}{t_1} \ln \frac{4\kappa t_1}{Ca^2} \right) \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi \cdot \Delta T} \ln \frac{t_2}{t_1} \left( 1 - A(\kappa, \beta, \Omega, t_1, t_2, a) \right)\end{aligned}\quad (24)$$

ここで、

$$A = \left( \ln \frac{t_2}{t_1} \right)^{-1} \cdot \frac{a^2}{2\kappa} \left\{ \left( \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right) (1 - 2\beta \Omega) + (1 - \beta) \left( \frac{1}{t_1} \ln \frac{4\kappa t_2}{Ca^2} - \frac{1}{t_2} \ln \frac{4\kappa t_2}{Ca^2} \right) \right\} \quad (25)$$

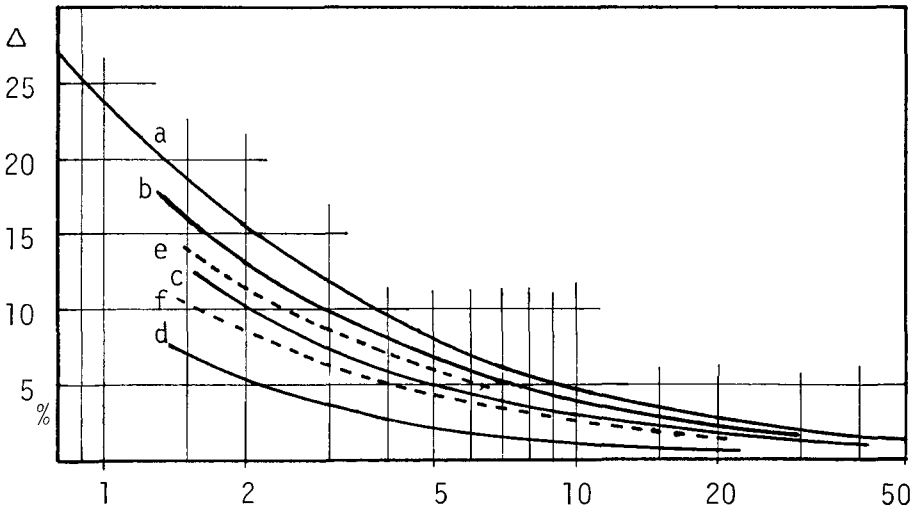
$$\kappa = \bar{\kappa} \cdot c\rho^{-1} \quad (26)$$

筆者らの場合、 $t_2=300$  秒、 $t_1=120$  秒をとった。 $a=6 \times 10^{-2}$  cm である。 $\kappa=\xi \times 10^{-4}$  cm<sup>2</sup>・s<sup>-1</sup> とすると

$$A(\xi, \beta, \Omega) = \xi^{-1} \left\{ 0.14(1 - \beta) + 0.1 - 0.2\beta\Omega + 0.1(1 - \beta) \ln \xi \right\} \quad (27)$$

となる。予想される  $\beta$ 、 $\Omega$  の値に対し、 $A$  を予め  $\xi$  の関数として計算しておき、(24) で  $A=0$  とし、求めた  $\bar{\kappa}$  を第 0 近似値とし、これと  $c\rho$  から  $A$  に使う  $\xi$  をきめ、再び (24) から  $\bar{\kappa}$  の第 1 近似値を求め、順次同様にして  $\bar{\kappa}$  の高次近似値をうる。実際には第 1 近似で充分である。 $c_0\rho_0=0.4$  cal・cm<sup>-3</sup>・°C<sup>-1</sup> とすると、 $\beta$  は  $-2^\circ\text{C}$  で 0.2、 $-0.6^\circ\text{C}$  で 0.05 程度である。 $\Omega$  は (16) 式を変形した

$$2\Omega = 4\pi\bar{\kappa} \left( T(300\text{s}) - T(0) \right) / Q - \left( \ln \xi - \ln(9C) + \ln 300 \right) \quad (28)$$



第 1 図 補正曲線、 $A(\xi, \beta, \Omega)$

- a:  $A(\xi, 0, \Omega)$ ,  $-0.6^\circ\text{C}$  附近用
- b:  $A(\xi, 0.2, 0)$ ,  $-2^\circ\text{C}$  附近用
- c:  $A(\xi, 0.5, 0)$ ,  $-11^\circ\text{C}$  および未凍土 ( $\theta \geq 48\%$ ) 用
- d:  $A(\xi, 1, 0)$ ,  $-11^\circ\text{C}$  および未凍土 ( $\theta = 29\%$ ) 用
- e:  $A(\xi, 0.2, 0.2)$
- f:  $A(\xi, 0.5, 0.2)$  は  $\Omega$  の効果を示すために加えた

から推定したが、 $2\Omega \ll 1$  であり、 $\beta \simeq 1$  でない限り、(27) で  $0.2\beta\Omega$  の項は無視できる。 $\beta \simeq 1$  は、未凍土、および低温 ( $-11^\circ\text{C}$ ) の時で、この時は  $d$  自体がもともと小さく、結局  $\Omega$  の正確な値は必要なかった。筆者らはプローブ内に不凍水をいれたため、 $\beta \simeq 1$  の場合が生じたが、プローブ内の物質は比熱の低いものを用いつねに  $\beta \ll 1$  とするのが望ましかった。こうすれば、補正曲線は  $\beta=0$  のもの 1 本ですむ。

第 1 図に、用いた補正曲線を示す。

## V. 測定結果と考察

体積含水率  $\theta$  が、29, 48, 62% の時の測定結果を第 1 表に示す。

第 1 表 熱伝導度 (単位:  $10^{-4} \cdot \text{cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ ) 括弧内は第 0 近似値:  $Q \cdot (4\pi d T)^{-1} \cdot \ln \frac{300}{120}$  下段は測定温度 (単位:  $^\circ\text{C}$ )

29%	$\frac{14.1 (14.4)}{-11.7}$	$\frac{14.3 (15.2)}{-2.1}$	$\frac{11.7 (15.1)}{-0.57}$	$\frac{8.6 (8.7)}{+3.7}$
48%	$\frac{36.4 (37.5)}{-10.8}$	$\frac{36.2 (37.0)}{-2.3}$	$\frac{36.0 (40.3)}{-0.56}$	$\frac{19.6 (19.7)}{+5.0}$
62%	$\frac{47.8 (47.8)}{-11.2}$	$\frac{45.4 (46.3)}{-2.5}$	$\frac{46.2 (50.3)}{-0.63}$	$\frac{21.4 (21.5)}{+5.0}$

第 1 表から、体積含水率が 48% と 62% の時は、熱伝導率は融解点で不連続を示しているように思われる。第 0 近似値は含水率にかかわらず融解点付近で不連続を示す。これは容積比熱の不連続性は含水率にかかわらないからであろう。

$\bar{k}$  と  $k$  がわかると (14) から温度勾配による水の拡散係数  $h$  がわかる。土粒子構造がきまれば、 $k$  は各成分の熱伝導率  $k_i$  と比容  $v_i$  だけの関数である。適当なモデル構造についてこの関数を求める試みはいろいろあるが、ここでは、与えられた  $\theta$  に対し  $k$  は  $v_w$  の一次関数で、また  $-11^\circ\text{C}$  付近では  $v_w \simeq 0$ ,  $h \simeq 0$  と仮定しよう。すると

$$\left. \begin{aligned} k(\theta, T) &= A(\theta) + B(\theta) v_w(T) \\ A(\theta) &\simeq k(\sim -11^\circ\text{C}) \simeq \bar{k}(\sim -11^\circ\text{C}) \\ B(\theta) &\simeq (\bar{k}(T > 0) - \bar{k}(\sim -11^\circ\text{C})) \cdot \theta^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$\theta = 0.29, 0.48, 0.62$  に対して、 $k(\theta, T)$  は

$$\left. \begin{aligned} k(0.29, T) &= (14.1 - 19.0 v_w(T)) \times 10^{-4} \cdot \text{cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} \\ k(0.48, T) &= (36.4 - 35.0 v_w(T)) \\ k(0.62, T) &= (47.8 - 42.6 v_w(T)) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式 (30), (21), (14) と第 1 表から

$$\left. \begin{aligned} h(\theta = 0.29, T = -0.56^\circ\text{C}) &= 0.26 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} \\ h(\theta = 0.48, T = -0.64^\circ\text{C}) &= 0.94 \times 10^{-5} \\ h(\theta = 0.62, T = -0.63^\circ\text{C}) &= 1.02 \times 10^{-5} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

となりヘクストラ<sup>4)</sup>が凍結前線を通しての水分移動より測定した値と同じオーダーの値がえられる。

## 結 語

含水土中における温度勾配による水の移動を考慮した熱伝導方程式を導き、熱伝導率が融解点において不連続であることを示し、実際に苫小牧シルトについての測定で、その存在を確かめた。また、水の移動を考えない時の熱伝導率と測定した熱伝導率との差から、温度勾配による水の拡散係数として妥当な値をえた。今後の課題として、融解点を含む温度領域内で、よりこまかい温度間隔での測定が望まれる。

凍土学部門福田助手には実験について多くの助力をえた。また、論文の作製にあたっては、木下教授・福田助手より多くの助言をえた。ここに感謝の意を表する次第である。

## 文 献

- 1) Carslaw, H. S. and J. C. Jaeger 1959 *Conduction of Heat in Solid* (2nd. ed.), Oxford. Cf. eq. (18) of p. 345.
- 2) 鈴木義男 1980 サーマル・プローブ法のデータの解析について. 低温科学物理篇, **39**, 189-192.
- 3) 石崎武志・木下誠一 1979 上載荷重条件における凍上について. 低温科学物理篇, **38**, 169-178.
- 4) Hoekstra, P. 1966 Moisture Movement in Soils under Temperature Gradients with the Cold-Side Temperature below Freezing. *Water Resources Research*, **2**, 241-250.

## Summary

Assuming that the liquid (unfrozen) water content of frozen soil is a function of temperature and that a thermal gradient in frozen soil induces not only heat flow but also independent liquid water flow, we deduce an equation of thermal conduction in frozen soil, eq. (15), which shows that both the volumetric specific heat and the heat conductivity of frozen soil should be modified as indicated by eqs. (13) and (14). Since the modification is only for soil in a frozen state, the experimentally measured specific heat and heat conductivity of wet soil should show discontinuities at the melting point. The discontinuity of specific heat has been well known, while that of heat conductivity has been little noticed.

In order to look into the latter discontinuity, we measured the heat conductivity of wet soil around the melting point. The results are shown in Table 1, where at least the soils of 48% and 62% in volumetric water content seem to show the discontinuity.

Using simple but reasonable assumptions, we estimated the values of  $k$  in eq. (14) and obtained the values of  $h$  at around  $-0.6^\circ\text{C}$  as shown in (31). The driest soil, 29% in volumetric water content, has a smaller value of  $h$  than others, though the soil should have the liquid water content as others. The reason is not clear.