



Title	斜面積雪の挙動の研究 IX : 改良応用算出法
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科学. 物理篇, 40, 37-49
Issue Date	1982-03-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18436
Type	departmental bulletin paper
File Information	40_p37-49.pdf



斜面積雪の挙動の研究 IX*

—改良応力算出法—

吉田 順五

(北海道大学名誉教授)

(昭和56年9月受理)

I. ま え が き

北海道大学低温科学研究所の雪害科学部門は、北海道北部の山地で、数年来、広い平面状の斜面を流下する積雪内部に生ずる二次元歪速度を実測し、その実測値から積雪内部の二次元応力を算出してきた¹⁻⁴⁾。しかし、前の論文 VIII の第 IV 章で説明したように、この算出法では、歪速度を測定した積雪内の点 P が持続上部均一状態にないと、必ずしも正確な応力が得られない⁵⁾。それで、筆者は、点 P が持続上部均一状態にあるなしに拘ず用いられる応力算出法を考えた。点 P をふくむ微小水平面上の応力および点 P をふくむ微小鉛直面上の応力のそれぞれに共軛な応力を使う方法である。この方法を、今まで用いられてきた「従来の応力算出法」と区別するために「改良応力算出法」とよぶことにする。この改良応力算出法を述べるのが、本論文 IX の目的である。

斜面の最大傾斜方向に鉛直に立つ「流動面」と平行に積雪は流下する。前論文 VIII では、流動面内に、斜面と平行に、座標 x を水平面に対し傾けてとった。斜面と平行な面上の応力が重要な役割をもったからである。しかし、本論文では、流動面に直角な鉛直面と水平面とが重要な面となるため、流動面内に、斜面がくだる方向を正として水平に x 座標を、上方を正として鉛直に z 座標をとる。座標 y は、斜面の等高線と平行に水平におかれる。座標原点は、場合に応じ、便宜な所にえらぶ。この座標のとりきめにより流動面は、 xz 面と呼んでもよいことになる。また、流動面と直角をなす鉛直面を、それが座標原点を含まないときでも、 yz 面と呼ぶことにするし、同じ用法で、水平面を xy 面ということもある。

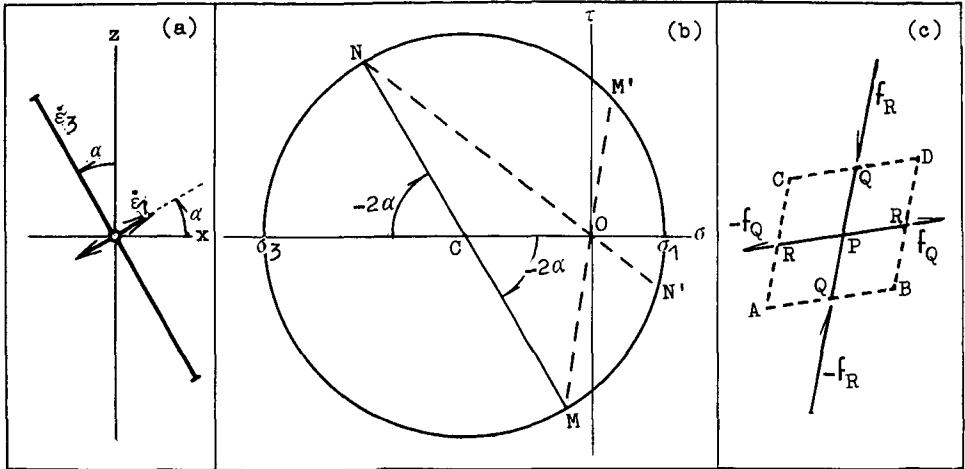
改良応力算出法の説明にとって便宜でもあるため、次の第 II 章で、従来の応力算出法の要点を述べる。また、共軛応力は古くから知られているにも拘らず、近頃の弾性論の教科書には、ほとんどその記載がない。それで、第 II 章には、共軛応力の簡単な説明も加える。

II. 予 備 考 察

1. 主応力と主歪速度

まえがきの始めて述べた雪害科学部門は、実測によってえた第 2 階テンソル量である歪速

* 北海道大学低温科学研究所業績 第 2381 号



第1図 (a) 実測された主歪速度の一例。直角に交る2本の太い線が主歪速度を表す。これらの線
の先端につけた矢尻は伸張歪速度を示す印であり、短い横線は圧縮歪速度を示す印であ
る。(b) モールの応力円。点Mおよび点Nは、それぞれ、鉛直なyz面上の応力および
水平なxy面上の応力を表す。このふたつの応力と共軛な応力は、それぞれ、点M'およ
び点N'で与えられる。(c) 共軛関係を示す図。 f_Q と f_R とは、それぞれ、面QPQと面
RPRとはたらく応力の成分ベクトルである。これらの成分ベクトル同志、また、面同
志は互に共軛である

度を、ふたつの主歪速度で表した。その一例を、図で示したのが第1図(a)である。この図
の中心にある白丸が、歪速度を測定した斜面積雪中の測定点を表す。白丸から発する ϵ_1 と ϵ_3 と
の印をつけたやや太い線が、 zx 面内のふたつの主歪速度を与える。前者を第一主歪速度と、後
者を第三主歪速度と呼ぶことにしよう。この2本の線の方向がふたつの主歪速度の方向、すな
わち主軸の方向に他ならない。両主軸は互に直角に交る。主歪速度の大きさ、つまり歪速度の
主値を ϵ_1 と ϵ_3 とすると、その値は、それぞれを印としてつけた線の、白丸から先端までの長さ
で与えられる。第一主歪速度を示す線の先端につけた矢尻の印は、この主歪速度が伸張歪速度
で ϵ_1 の値が正であることを表す。第三主歪速度を示す線の先端の短い横線は、この主歪速度が
圧縮歪速度で ϵ_3 の値が負であることを表す。もうひとつの第二主歪速度の主軸は zx 面に垂直
に立ち、その主値 ϵ_2 は0である。

面 zx 内のふたつの歪速度の主値は、代数的に大きい方を ϵ_1 に、小さい方を ϵ_3 にえらぶこ
とにする。第1図(a)のばあい、絶対値では ϵ_1 の方が小さい。しかし、 ϵ_1 は正で ϵ_3 は負だから
代数的には ϵ_1 の方が大きく、矢尻の印を先端につけた線が第一主歪速度となる。第一主歪速度
の主軸の方向は、その方向へ水平座標 x の正の方向から反時計まわりにはかった角 α で表示す
ることにする。鉛直座標 z の正の方向から第三主歪速度の主軸の方向へ反時計まわりにはか
った角も α にひとしい。角 α は -90° と $+90^\circ$ との間にえらぶ。

積雪は、性質が等方均一な雪層が数多く重なったものである。歪速度の実測は、いくつかの
雪層をえらんで、そのおのおのの中央部でおこなわれた。したがって、応力が歪速度によって
定められるとする限り、応力と歪速度とは、主軸を共有すると仮定してよいであろう。この仮
定をおけば、主応力の方向も角 α によって定められることになる。第一、第三主歪速度のそれ

それぞれと主軸を共にする主応力を第一、第三主応力とよび、その主値を σ_1, σ_3 で表す。どちらの主値も、主応力が張力のときには正に、圧力のときには負にとる。

2. モールの応力円の決定

斜面積雪を構成する雪層の中の或る点 P で、歪速度が測定されて角 α が定められたとする。さらに、点 P をふくみ、 zx 面に直角な、主歪速度 $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_3$ のいづれにも平行でない或る微小面 dS のうへの応力が知られたとしよう。すると、次のようにしてモールの応力円を描くことができる。すなわち、P 点における応力を決定することができる。

微小面 dS 上の点 P における応力の垂直成分を σ_s 、切線成分を τ_s とする。モールの応力円を描くべき σ - τ 平面内に、 dS 上の応力を示す点 (σ_s, τ_s) を定める。たとえば、その点が第 1 図 (b) の M 点であるとしよう。すると、モールの応力円は M 点を通過する。水平方向 x と微小面 dS の法線との間の角を β とすると、 $\chi = \alpha - \beta$ が、第一主応力 σ_1 の主軸と微小面 dS の法線との間の角を与える。ただし β は、 x 方向から反時計まわりに測るものとする。ところで、応力の第一主軸からみると、 dS の法線は時計まわりに角 χ だけ傾いている。すなわち、 $-\chi$ の方向にある。それで、平面 σ - τ の上で、点 M を通り、 σ 軸の正の方向と -2χ の角をなす直線をひく。それと σ 軸との交点を点 C としよう。すると、点 C がモールの応力円の中心となる。よって点 C を中心とし、M 点を通る円を描けば、求めていたモールの応力円がえられる。

第 1 図 (b) の円は、第 1 図 (a) の主歪速度が与えられたとき、微小面 dS が鉛直な yz 面であるとして描いたモールの応力円である。このばあい σ_s, τ_s は σ_x, τ_{zx} となるが、その値を適当にえらんで、M 点の位置 (σ_x, τ_{zx}) をきめた。鉛直面 yz の法線の方向は水平座標 x の方向と一致するから、 β は 0 で、 -2χ を表す角 OCM は、図に示した通り、 -2α にひとしい。点 M に対称な点 N は、点 P における水平面 xy の上の応力 $(\sigma_x, -\tau_{zx})$ を与える。

以上のように、主応力面と一致しない微小面 dS の上の応力成分 σ_s, τ_s が知られていれば、歪速度の実測でえられる $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_3, \alpha$ のうちの角 α だけを用いて点 P の応力がきめられる。歪速度の主値 $\dot{\epsilon}_1$ と $\dot{\epsilon}_3$ とは、使わずに済む。

3. ランキンの応力状態と従来の応力決定法

斜面積雪内の一点 P を中心とし、積雪表面に平行に傾いた微小面 dS' を考える。微小面 dS' の周辺の上に立って積雪表面に達する鉛直筒面を作る。この鉛直筒面の内部と、外部でも遠くへだたらない範囲とを合せて、点 P の上部近傍とよぶ。いま、上部近傍内では、積雪の応力状態が積雪表面と平行な方向には変化せず均一であるとしよう。すると、上部近傍内の yz 面にはたらく応力の成分ベクトル f_1 が、この鉛直な yz 面上のどの点でも、積雪表面に平行であること、また、微小面 dS' を下から支える力が鉛直上方をむき、鉛直筒面内の雪の重量と釣り合うことが証明される⁶⁾。このことから、積雪表面に平行な微小面 dS' にはたらく応力の成分ベクトル f_2 が鉛直下方をむき、その微小面 dS' についての垂直成分 σ' と切線成分 τ' とが

$$\sigma' = -w' \cos^2 \theta, \quad \tau' = w' \sin \theta \cos \theta, \quad w' = g \int \rho dz \quad (1)$$

で与えられることが知られる。この (1) 式で、 θ は積雪表面の水平面に対する傾斜角、 g は重力加速度、 ρ は雪の密度である。また、 w' を表す積分は、点 P を通る鉛直線にそって、点 P から

積雪表面までおこなう。

点 P の上部近傍内の応力が、持続的に、前文段で述べたように斜面方向に均一であるとき、点 P は「持続上部均一状態」にあると、論文 VII および論文 VIII でよんだ。ところで、傾斜地を形成する土のばあい、そのある範囲内の点が総て持続上部均一状態にあるとき、土圧論では、その範囲が「ランキン (Rankine) の応力状態」にあるという。持続上部均一状態とランキンの応力状態との間には意味に多少の違いがあるが、通りがよさそうだから、以後は、「持続上部均一状態にある」を「ランキンの応力状態にある」ということにする。

藤岡³⁾と清水⁴⁾とは、前節 2 で述べた微小面 dS として積雪表面に平行な上記の微小面 dS' をとった。そして、その上の応力成分が式 (1) で与えられるとして、前節 2 で説明した角 α を用いる方法によって、点 P の応力を定めた。すなわち、点 P の上部近傍がランキンの応力状態にあると仮定したわけである。この「従来の応力決定法」とは異り、まえがきで述べたように、本論文の「改良応力決定法」ではランキンの応力状態を仮定しない。

4. 共軛応力

本論文の改良応力決定法では、まえがきで述べたように、共軛応力を利用する。共軛応力は、次に説明するような特別な相互関係にある一対の二次元応力である。

或る均一な二次元応力場が第 1 図 (c) の紙面に平行に広がっているとす。直線 QPQ をふくみ紙面に垂直な単位面積を面 Q となづける。面 Q の右側にある物質が左側にある物質に加える力をベクトル f_Q で表す。直線 RPR を f_Q に平行にひき、この直線をふくみ紙面に垂直な単位面積を面 R となづける。面 R の上側にある物質が下側にある物質に加える力のベクトルを f_R としよう。すると、 f_R が面 Q に平行であることが証明される。つまり、 f_Q は面 R に平行であり、 f_R は面 Q に平行である。面 Q の方向は任意である。面 Q が方向を変えれば f_Q の方向が変わり、その方向が変わった f_Q と平行になるように面 R をまわすことになる。すると、 f_R が、はじめに方向を変えた面 Q と平行になる。以上のことの証明には、第 1 図 (c) の平行四辺形 ABCD の周辺の上に立つ紙面に垂直な筒面内の物質に、筒面外の物質がおよぼす力の釣合いを考えればよい。この平行四辺形の各辺は、それぞれ、直線 QPQ あるいは直線 RPR に平行である。

ベクトル f_Q , f_R は、点 P における応力の成分ベクトルにほかならない。上のような関係にある面 Q と面 R とを互に共軛 (conjugate) であるという。また、上のような関係にあるふたつの応力成分ベクトル f_Q , f_R も互に共軛であるという。第 1 図 (c) に見られるように、面 Q に対する f_Q の傾きと、面 R に対する f_R の傾きとは相等しい。このことから、互に共軛なふたつの応力を表すモールの応力円上の点が、簡単な位置関係にあることが知られる。第 1 図 (b) で、点 M と点 M' とで表されるふたつの応力は互に共軛である。点 N と点 N' とで表されるふたつの応力もそうである。すなわち、 σ - τ 面の原点 O を通る直線とモールの応力円とのふたつの交点は、互に共軛な一対の応力を与える。

ある点の応力が定められれば、その応力の性質は、その点のまわりの応力が均一であるかないかに影響されない。したがって、上の共軛関係は、不均一な二次元応力についても成り立つ。前節 3 の応力成分ベクトル f_1 は微小面 dS' に平行であり、応力成分ベクトル f_2 は鉛直な

yz 面に平行であった。したがって、点 P において、微小面 dS' と yz 面とは一対の共軛面をなし、 f_2 と f_1 とで表わされるそれぞれの面上の応力は一対の共軛応力を形成する。

まえがきでも述べたように、現今の弾性論の教科書で共軛応力のことを書いたものは少ない。しかし、共軛関係は弾性論でよく知られた定理であると、120 年以上も前の 1857 年に発表された Rankine の論文⁷⁾ の §5 の始めに書いてある。

III. 改良応力算出法の筋道

1. 水平方向および鉛直方向に共軛な曲線群

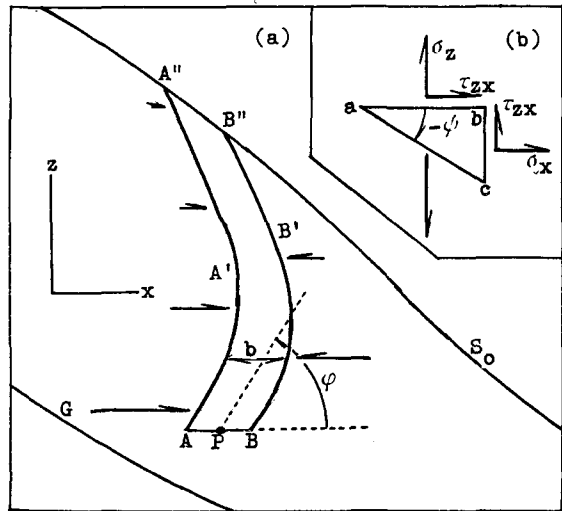
この第 III 章では、斜面積雪内の zx 面上すべての点で歪速度が測定されたと仮想する。あとの第 IV 章第 3 節で説明するように、ある点での歪速度が知られると、それから、その点での xy 面および yz 面に共軛な面の方向が定められる。水平な xy 面に共軛な面を面 C_H 、鉛直な yz 面に共軛な面を面 C_V となづけよう。すると、この仮想のばあいには、 zx 面内のすべての点で面 C_H および面 C_V の方向が知られていると言える。このことから、以下のようにして、斜面積雪内任意の点での応力が求められる。

すべての点で面 C_H の方向が知られているとするから、その上のすべての点でその点での面 C_H に接する曲線を、 zx 面内に描くことができる。この曲線を曲線 C_H と名づけよう。同じようにして、すべての点で面 C_V に接する曲線が描ける。これを曲線 C_V とよぶ。曲線 C_H も曲線 C_V も無数にあるが、曲線 C_H 同志、また、曲線 C_V 同志が交ることはない。

以後、面 C_H あるいは面 C_V を、 C_H 面あるいは C_V 面ということもある。曲線 C_H 、曲線 C_V についても同様である。

2. 水平面上の応力

第 2 図 (a) は、斜面積雪の zx 面による断面である。積雪表面を S_0 で、地面を G で表した。両面は、一般に、平面でもなく平行でもない。任意の点 P をとり、点 P をすぎる単位長さの水平線 AB をひく。この水平線の両端から発して積雪表面 S_0 に達する 2 本の C_H 曲線が曲線 $AA'A''$ と曲線 $BB'B''$ であるとしよう。閉曲線 $AA'A''B''B'BA$ を、紙面に垂直に単位長さだけ奥へ押込んで仕切られる体積内の雪を雪 J とよぶ。雪 J の左右の側面に、雪 J の外にある雪が加える応力は、左右の側面がどこでも面 C_H に接するから、すべて水平にはたらく。雪 J



第 2 図 (a) 斜面積雪の最大傾斜方向の断面。曲線 S_0 が積雪表面を、曲線 G が地面を表す。水平線 AB は単位長さで、点 P を中点とする。曲線 $AA'A''$ と曲線 $BB'B''$ とは共に C_H 曲線である。両 C_H 曲線にはさまれ、奥行きが単位長さにひとしい体積内の雪を雪 J とよぶ。水平面 AB 上の垂直応力成分 σ_z は雪 J の重量にひとしい。(b) 点 P における yz 面上の垂直応力成分 σ_x を求めるために使う図。面 ac は、鉛直面 bc と共軛な C_V 面である

の前後の面に加わる応力も、 y 方向に水平にはたらく。したがって、直線 AB をふくむ雪 J の水平な底面 AB にかかる力は雪 J の重量にひとしい。この底面は単位面積である。よって、点 P における水平面上の応力の垂直成分として

$$\sigma_z = -w, \quad w = g \int \rho b dz \quad (2)$$

がえられる。ここに、 ρ は雪の密度、 b は雪 J の x 方向の幅である。そのどちらも、鉛直座標 z によってのみならず水平座標 x によっても変る、 x と z との関数である。

面 AB 上の応力の成分ベクトルは、点 P における面 C_H に平行である。すなわち、点 P を通る C_H 曲線の点 P における切線と方向が一致する。この切線の、座標 x の正の方向に対する傾きの角を φ とすれば

$$\sigma_z/\tau_{zx} = \tan \varphi = df_H(x, a_H)/dx \quad (3)$$

であり、この式によって雪 J の底面 AB 上の応力の接線成分 τ_{zx} が定められる。式 (3) の $f_H(x, a_H)$ は、曲線 C_H を $z=f_H(x, a_H)$ として表す関数である。副変数 a_H の値により、無数にある曲線 C_H が区別される。

以上のように、 C_H 面および C_H 曲線を用いると、点 P をふくむ水平面上の応力成分 σ_z 、 τ_{zx} が知られる。よって、第 II 章第 2 節の微小面 dS を水平にとることにより、点 P の応力決定をおこない得る。しかし、次の節で述べるようにして、点 P をふくむ鉛直な yz 面上の垂直応力成分 σ_x を C_V 面を用いて求め、 $(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{zx})$ として点 P の応力を定める方法もある。

3. 応力の 3 成分

いま、 zx 面内に或る直線と或る曲線とがあつて、それらに直線 AB および曲線 CDE の名がついているとしよう。そのとき、これらの直線あるいは曲線をふくみ、 zx 面に垂直で奥行きが単位長さにひとしい平面または曲面を、簡単に、面 AB あるいは曲面 CDF とよぶことにする。また、 zx 面上に三角形 ABC があるばあい、それを zx 面に垂直に単位長さだけ押込んで仕切られる体積を、体積 ABC という。

第 2 図 (b) の直線 ab は、同図 (a) の直線 AB の微小部分で点 P をふくむ。面 ab と、 C_V 面である ac と、 yz 面である bc とで体積 abc をかこみ、その中にある雪に周囲の雪が加える力の水平方向の釣合条件を考える。面 ac に加わる力は鉛直だから、水平方向の力の釣合には関係しない。体積 abc は 2 次の微小量だから、その中の雪の重量は無視してよい。それに、この重量も鉛直方向にはたらく。よって

$$\tau_{zx} \cdot \overline{ab} + \sigma_x \cdot \overline{bc} = 0 \quad (4)$$

が求める釣合条件を与える。

曲線 C_V を $z=f_V(x, a_V)$ で表すと、その接線の傾斜角 ψ が

$$\tan \psi = df_V(x, a_V)/dx \quad (5)$$

で与えられる。第 2 図 (b) の直線 ac は、点 P を通る曲線 C_V の点 P での接線にほかならない。ただ、この図ではそれが右下りだから ψ は負で、角 bac は $-\psi$ で表される。よって、式 (4) から

$$\tau_{zx}/\sigma_x = -\overline{bc}/\overline{ab} = -\tan(-\psi) = \tan \psi \quad (6)$$

がえられる。かくして式 (2), (3), (6) により

$$\sigma_x = -w \cot \varphi \cot \psi, \quad \sigma_z = -w, \quad \tau_{zx} = -w \cot \varphi \quad (7)$$

を得、点 P の応力が定められる。

この第 3 節の応力決定法は、理論的に形がととのっている。しかし、曲線 C_v を必要としない第 2 節の方法の方が実際には便利かも知れない。

IV. 改良応力算出法

1. 圧縮性粘性流体としての斜面積雪

前章でその筋道を述べた改良応力決定法に必要な、面 C_H の傾斜角 φ と面 C_v の傾斜角 ψ とを求めるための準備として、応力の主値 σ_1, σ_3 と歪速度の主値 $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_3$ との関係を考える。

斜面積雪を構成する等方均質な雪層内の歪速度を測定するのは、雪層内の応力が歪速度の関数であることを前提として、その応力を算出するためである。この前提に立つ限り、応力の主値のそれぞれが、歪速度の 3 個の主値の一次の同次式で表されると仮定しても、かなりな一般性が保てるであろう。そして、この仮定をおけば、雪層は圧縮性粘性流体となる。また、斜面積雪のように非常に緩慢に流動する積雪は、圧縮性流体とみてよいことが、実験的にも知られる。それで斜面積雪を構成する雪層を圧縮性粘性流体と考える。すると、各雪層の内部では、歪速度の y 方向の主値 $\dot{\epsilon}_2$ が 0 であることから

$$\dot{\epsilon}_1 = \left[(1-\nu)\sigma_1 - \nu\sigma_3 \right] / 2\eta, \quad \dot{\epsilon}_3 = \left[(1-\nu)\sigma_3 - \nu\sigma_1 \right] / 2\eta, \quad \sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (8)$$

の関係がなりたつことになる⁶⁾。この式で、 η は粘性係数を、 ν は塑性ポアソン比を表す。積雪の圧縮性は $\nu=0.5$ のとき 0 で、 ν が減少するにつれ増大する。

雪層ごとに、 η も ν もそれに固有な値を示す。もし、その固有な値が知られるならば、測定によって得られた $\dot{\epsilon}_1$ と $\dot{\epsilon}_3$ とを用いて、式 (8) により、直ちに応力の主値 σ_1, σ_3 がきめられる。すなわち応力を決定することができる。しかし、 η と ν との値は、殊に η の値は、正確に知るのが甚だむつかしい。

2. 粘性係数と塑性ポアソン比

歪速度を測定する雪層について、同時に粘性係数 η の測定もおこなうことは事実上できない。手間がかかりすぎるからである。それで、 η の決定には、簡単に測定できる雪層の密度 ρ と η との関係を用いるよりほかない。小島が、北海道の乾燥しまり雪について圧縮粘性係数 $\eta' = 2\eta(1-2\nu)/(1-\nu)$ を詳しくしらべた^{8,9)}。この η' は、ほぼ、 η に比例するから、 η と ρ との関係は η' と ρ との関係から推定できる。小島がえた測定値によって第 1 表を作った。この表から、まず、 ρ の同じ値に対して広い範囲の η の値が対応することがわかる。その範囲の最大値は最小値の 3 倍から 5 倍にも及ぶ。つぎに、 η は ρ の指数関数であって、 ρ の変化による η の変化が著しい。歪速度の測定には、2 ないし 3 週間の歪測定期間を要するが、その間に雪層の密度は増大する。一方、 η の値としては測定期間中の

第 1 表 乾燥しまり雪の圧縮粘性係数

ρ (g/cm ³)	η' (g-wt·day/cm ²)
0.2	40 ~ 120
0.3	300 ~ 1,200
0.4	2,000 ~ 10,000

平均値をとらなければならない。しかし、 ρ による η の変化がこのように激しくては、正しい平均値の決定は望みがたい。

以上の事情により、式(8)による応力の主値の直接決定は断念しなければならない。藤岡³⁾、清水⁴⁾が、応力決定にあたって、応力の主値と歪速度の主値との間の数量的関係の使用をさせたのは、この事情による。その代り藤岡、清水はランキンの応力状態を仮定した。本論文の改良応力決定法ではランキンの応力状態の仮定をおかない。その代り、次の第3節で述べるように、塑性ポアソン比 ν を使わざるをえない。

いままでに、雪の塑性ポアソン比 ν が実験的に研究されたのは、僅かに、筆者が前々論文VIIの第III章第3節で紹介した3例があるだけである⁵⁾。同じ論文の第V章第4節に、斜面積雪内の特殊な応力である単独鉛直主応力の研究から定めた ν と ρ との関係が、第5図として示してある。この図を見ると、 ν は ρ の増大とともに増大し、両者の間に直線関係がかなりたつらしいとの想像が湧く。つまり、 ν は、 η のようには、 ρ によって激しくは変らないとしてよいであろう。また、 ν の値については、 -0.1 と 0.4 との間のせまい範囲に限定されるとの予想がたてられる。それで、将来の研究によって、 ν が ρ の正確な関数として表されるようになると見込んで、 η は用いないが ν は使って、本論文の議論をすすめる。

3. 面 C_H の傾き角 φ および面 C_V の傾き角 ψ

第1節にある式(8)の第一式を第二式で割れば、確かな値を知ることはできない粘性係数 η が消去される。そして

$$\gamma = \dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_3, \quad \gamma' = \sigma_1/\sigma_3 \quad (9)$$

とおくと、

$$\gamma' = \frac{\{(1-\nu)\gamma + \nu\}}{\{(1-\nu) + \nu\gamma\}} \quad (10)$$

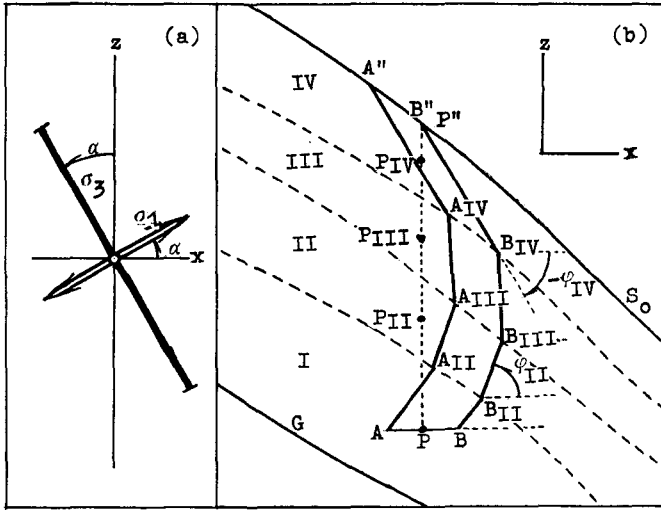
の関係がえられる。比 γ は、歪速度の測定によって知られるから、 γ' の値は既知としてよい。面 C_H の傾斜角 φ も面 C_V の傾斜角 ψ も、次に示すように、 γ' を用いて表わせる。

第3図(a)は、第1図(a)の主歪速度に対応する斜面積雪内の点Pにおける主応力の図である。矢尻の印を先端につけた二重線が第一主応力を、先端が突然に切れた太い黒線が第三主応力を表す。応力の主軸は歪速度の主軸と方向を共にするから、応力の主軸と x 方向および z 方向との間の角も、歪速度の測定によって知られる角 α にひとしい。応力の主値 σ_1, σ_3 の値は不明のままとする。しかし、その比 γ' の値は知られている。

第3図(a)で、第一主応力を示す、白丸から斜め右上にむかう二重線をベクトル σ_1 で表す。同様に、第三主応力を示す、白丸から斜め左上にむかう太い黒線をベクトル σ_3 で表す。座標 x および z の正の方向をむく単位ベクトルを、それぞれ \mathbf{i}, \mathbf{k} とすれば

$$\sigma_1 = \sigma_1(\cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \sin \alpha \cdot \mathbf{k}), \quad \sigma_3 = \sigma_3(-\sin \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \alpha \cdot \mathbf{k}) \quad (11)$$

である。点Pにおける応力の xy 面上の成分ベクトルを σ_y 、 yz 面上の成分ベクトルを σ_z としよう。すると、共軛方向の定義により、 σ_y および σ_z と座標 x の正の方向との間の角が、それぞれ、面 C_H および面 C_V の水平面に対する傾き角 φ および ψ を与える。



第3図 (a) 第1図(a)に対応する主応力。矢印を先端につけた二重線は張力を、短い横線を先端につけた太い黒線は圧力を表す。(b) 第2図(a)と同じ斜面積雪の断面。左上から右下へむかう3本の破線は雪層境界を示す。歪速度の実測から書くことのできるCH曲線は、近似的な屈折線AA_{II}……A''およびBB_{II}……B''にとどまる

ベクトル σ_1 は、 σ_3 をふくむ紙面に垂直な面上の応力成分ベクトルであると同時に、その面の法線でもある。この法線と、 xy 面の法線である z 軸との間の角は $90^\circ - \alpha$ である。ベクトル σ_3 は、 σ_1 をふくむ紙面に垂直な面の法線で、それが z 軸との間にはさむ角は α である。よって

$$\sigma_z = \sin \alpha \cdot \sigma_1 + \cos \alpha \cdot \sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + (\sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha) \mathbf{k} \quad (12)$$

の関係がなりたつ。この式の中央の式から右辺の式への変換は(11)式による。

式(12)の \mathbf{k} の係数を \mathbf{i} の係数で割れば、 σ_z の傾きの角の正切、すなわち、面 C_{II} の水平面に対する傾き角 φ の正切がえられる。よって

$$\tan \varphi = (\gamma' \tan \alpha + \cot \alpha) / (\gamma' - 1) \quad (14)$$

が角 φ を定める式となる。比 γ' を式(10)の右辺でおきかえれば γ の値が既知だから、角 φ を算出することができる。同様な手続きを σ_x について踏めば、面 C_V の水平面に対する傾きの角 ψ を定める式として

$$\tan \psi = (\gamma' - 1) / (\gamma' \cot \alpha + \tan \alpha) \quad (15)$$

がえられる。

斜面積雪内の流動面上すべての点で歪速度が測定されるとする仮想の場合には、式(14)および式(15)により、流動面上すべての点での φ および ψ を求めることができる。この求められた φ および ψ を使って、第III章で述べた道筋にそって、流動面上任意の点での応力を算出するのが改良応力算出法(あるいは改良応力決定法)である。

4. 実際の改良応力算出法

これまでに述べた改良応力算出法を実際におこなうとすれば、以下のようになる。

斜面積雪を構成する雪層のひとつひとつは、性質は等方均一だが、そのなかの応力は均一でない。しかし、応力算出のもとになる歪速度は、雪層の厚さの中央部の一点で測定されるだけである。第 III 章で仮想したように、斜面積雪内ののすべての点で歪速度を測定することの不可能なことは言うまでもない。それで、この雪層の中央部での測定から定められる面 C_H および面 C_V の傾き角 φ および ψ が、測定点付近の雪層内部全体にわたって通用すると仮定する。応力の強さ自体は、雪層内でも、位置によって可成り変化するであろう。しかし、 φ と ψ とには余り大きな変化はおこらないと考えられる。

第 3 図 (b) は、第 2 図 (a) に示したのと同じ斜面積雪の断面図である。破線が雪層の境界を示す。雪層には、下から I, II, III……と番号をつける。応力を定むべき点 P を雪層 I のなかから選ぶとしよう。点 P_{II}, P_{III}, \dots は各雪層の厚さの midpoint で、点 P のまうえにある。点 P, P_{II}, P_{III}, \dots で歪速度を実測し、その結果から、歪速度の主軸の傾き角 α および主値 ϵ_1 および ϵ_3 を算出する。また、これらの点で雪の密度 ρ を測定し、それから塑性ポアソン比 ν の値を定める。前の節の式 (9), (10) によって $\epsilon_1, \epsilon_3, \nu$ の値から γ' を計算し、 γ' と α とを用いて、点 P, P_{II}, P_{III}, \dots での φ と ψ とを式 (14), (15) によって求める。うへの仮定により、この φ と ψ とが、各雪層内、点 P, P_{II}, P_{III}, \dots 付近を通じての、面 C_H と面 C_V との水平面に対する傾きの角 $\varphi, \varphi_{II}, \varphi_{III}, \dots$ および $\psi, \psi_{II}, \psi_{III}, \dots$ を与える。

5. 実際の改良応力決定法 (つづき)

第 3 図 (b) に示したように、点 P を midpoint とする単位長さの水平線の両端 A, B から 2 本の屈折線 $AA_{II} \dots A'', BB_{II} \dots B''$ を上にむかって、積雪表面 S_0 までひく。両屈折線は、ひとつの雪層内では互に平行で水平線と角 $\varphi, \varphi_{II}, \dots$ をはさむ。この 2 本の屈折線が、このばあいの曲線 C_H であって、第 2 図 (a) の曲線 $AA'A'', BB'B''$ にあたる。屈折線をふくみ奥行が単位長さにひとしい 2 枚の屈折面にはさまれた雪が、第 III 章第 2 節で定義した雪 J にはかならない。各雪層の密度 ρ がわかっているから、雪 J の重量 w が計算できる。点 P での角 φ と角 ψ との値は、すでに知られている。かくして、式 (7) により

$$\sigma_x = -w \cot \varphi \cot \psi, \sigma_z = -w, \tau_{zx} = -w \cot \varphi \quad (7)$$

として、点 P における応力が定められる。

あるいは、点 P における微小水平面を第 II 章第 2 節で述べた微小面 dS とし、上の式の σ_z, τ_{zx} を σ_s, τ_s に用いて、点 P における主応力を求めてもよい。ただし、第 II 章第 2 節で述べたような ϵ_1, ϵ_3 を使わずに済むこと、にはならない。応力成分 σ_z, τ_{zx} を求めるのに ϵ_1 と ϵ_3 との比 γ' が使われているからである。

前節で述べた雪 J の重量 w の定めかたには手数がかかる。この重量 w は、第 3 図の水平単位面 AB 上に立つ鉛直な筒のなかの雪の重量、すなわち式 (1) の w' とあまり違わないと推定される。それで

$$w = kw' \quad (16)$$

とおけば、係数 k は 1 に近い値であろう。情況がいろいろ異なる斜面雪雪内の場所で w と w' とを実際に計算して k の値をあらかじめ求めておけば、個々の場合ごとに、その時の情況から適当な k の値が選べるであろう。こうなれば、改良応力算出法も簡単になる。

第 II 章第 4 節の最後に書いたように、ランキン応力状態にある点 P を中心とし、積雪表面に平行な微小面 dS' は、点 P をふくむ鉛直な yz 面と共軌である。すなわち微小面 dS' は点 P における面 C_V にはかならない。また、従来の応力算出法は、第 II 章第 3 節で述べたように、微小面 dS' を同章第 2 節の微小面 dS として使い、応力を算出する。それゆえ、改良応力算出の立場からする法と、従来の応力算出法は、 $-\psi$ を、はじめから、積雪表面の傾斜角 θ に等しいとおく簡略法であるともいえる。

V. あとがき

まえがきで述べたように、斜面積雪内で測定された歪速度から応力を算出するために、共軌応力を用いる方法を案出した。ただし、斜面積雪を構成する各雪層が等方均質な圧縮性粘性流体であると仮定する必要があった。そう仮定しても、雪層の粘性係数の値を知ることは事実上不可能である。それで、粘性係数は使わず、雪層の塑性ポアソン比だけを用いるように工夫した。それゆえ、改良応力算出法となづけた本論文の方法の正しさは、圧縮性粘性流体の仮定の事実に対する近似度と、塑性ポアソン比を積雪の密度からどの程度正確に定めうるかにかかるといえる。

従来の応力算出法には、斜面積雪の表面と地面との平行性および積雪内のランキン応力状態を前提とする代りに、歪速度と応力との間の不正確で不安定な数量的関係を全く使わないという特長があった。改良応力算出法は、従来の方法の前提をはずして一般適用性を得たかわりに、従来の方法の特長は失ったことになる。

この論文を書くについては、低温科学研究所の藤岡敏夫教授から多くの教示と助言とをうけた。ここに記して感謝の意を表す。

文 献

- 1) 藤岡敏夫, 清水 弘他 1978 斜面積雪の歪速度と応力, I. 低温科学, 物理篇資料集, **36-37**, 39-69.
- 2) 藤岡敏夫, 清水 弘他 1979 斜面積雪の歪速度と応力, II. 低温科学, 物理篇資料集, **38**, 33-37.
- 3) 藤岡敏夫 1974 斜面積雪の挙動の研究, IV. 斜面積雪内の応力. 低温科学, 物理篇, **32**, 105-112.
- 4) 清水 弘 1968 斜面積雪内の内部歪, I. 低温科学, 物理篇, **26**, 143-168.
- 5) 吉田順五 1980 斜面積雪の挙動の研究, VII. 単独鉛直主応力. 低温科学, 物理篇, **39**, 1-16.
- 6) 吉田順五 1981 斜面積雪の挙動の研究, VIII. 論文 VII の補遺. 低温科学, 物理篇, **40**, 25-35.
- 7) Rankine, W. J. M. 1857 On the stability of loose earth. Trans. Roy. Soc., London, **147**, 9-27.
- 8) 小島賢治 1957 積雪層の粘性圧縮, III. 低温科学, 物理篇, **16**, 167-196.
- 9) Kojima, K. 1967 Densification of seasonal snow cover. In Physics of Snow and Ice, Part 2 (H. Oura ed.), Inst. Low Temp. Sci., Sapporo, 929-952.

Summary

1. Some of the staffs of the Institute of Low Temperature Science calculated internal stresses arising in a snow cover on a mountain slope from the strain rates which they actually measured in its interior. But, as their method of calculation had such drawbacks as described in the English summary of the previous Paper VIII⁰⁾, a reformed method is presented in this Paper IX as will be explained below. The reformation consists in the use of two planes respectively conjugate to a horizontal plane and a vertical plane crossing each other at a point in the snow cover.

2. The snow cover flows down two-dimensionally parallel to a vertical plane, which stands in the steepest direction of the mountain slope. In this vertical plane are placed coordinates x and z in horizontal and vertical directions respectively, with axis of coordinate y lying perpendicular to the axes of x and z . The plane of the paper will be regarded as plane zx and terms such as 'plane AB' or 'curved surface CDE' will be used to mean a plane or a curved surface, which extend one unit length in the direction of y from straight line AB or curve CDE drawn on the paper.

3. Vectors f_Q and f_R in Fig. 1(c) of the text show respectively stresses on planes QPQ and RPR, while these planes lie respectively parallel to vectors f_R and f_Q . Thus plane QPQ and plane RPR are conjugate to each other, while vectors f_Q and f_R make a couple of conjugate stresses. Any combination of a plane and a stress upon it has a corresponding combination of a conjugate plane and a conjugate stress upon it; a plane conjugate to a combination of a horizontal plane and a stress upon it shall be called 'plane C_H ', while a plane conjugate to a combination of a vertical plane and a stress upon it shall be called 'plane C_V '. Let φ and ψ denote respectively the angles at which a plane C_H and a plane C_V tilt against the horizontal. As will be shown later, angles φ and ψ can be determined at a point in the snow cover if strain rate of snow is given at the point by the measurement.

4. If curve CDE touches planes C_H everywhere it passes, that is, if its tangent makes angle φ with the horizontal at all points upon it, curved surface CDE will be named 'curved surface C_H '. 'Curved surface C_V ' is defined in the similar manner. Stresses work on a curved surface C_H always horizontally, while they work on a curved surface C_V always vertically.

5. In Fig. 2(a) of the text, curves G and S_0 show respectively surfaces of the ground and the snow cover. In the same figure curved surfaces AA'A'' and BB'B'' are both curved surfaces C_H starting upwards from the side edges of plane APB which is horizontal and of a unit area. Let 'snow J' denote the snow which is bounded by curved surfaces AA'A'' and BB'B'' on either side. Stresses on these curved surfaces work horizontally and so do the stresses on the vertical planes which make front and back surfaces of snow J. Therefore, if the weight of snow J is denoted by w , vertical component of the force exerted on plane APB must be equal to a pressure of magnitude w , namely, σ_z at point P is given by $-w$. From this and by the use of angles φ and ψ at point P, three components of the stress at point P can be determined as

$$\sigma_x = -w \cot \varphi \cot \psi, \quad \sigma_z = -w, \quad \tau_{zx} = -w \cot \varphi \quad (1)$$

6. A snow cover is composed of many snow layers which are each isotropic and homogeneous in nature. It was assumed in Papers VII⁰⁾ and VIII⁰⁾ that the snow layers are made of compressive viscous fluids of enormously large viscosity and that the relationship between

stress and strain rate of the snow layers is formally the same as that between stress and strain of elastic materials. Each snow layer is characterised in physical nature by its own values of density ρ , coefficient of viscosity η and plastic Poisson's ratio ν . These assumptions are preserved in the present paper.

7. Figure 1(a) of the text shows an example of the first principal strain rate $\dot{\epsilon}_1$ and the third principal strain rate $\dot{\epsilon}_3$ calculated from the strain rate measured in the snow cover; the second principal strain rate stands perpendicular to plane zx and its magnitude $\dot{\epsilon}_2$ is always equal to zero. Angle α shown in the same figure fixes in plane zx the directions of the first and the third principal strain rates.

8. As the snow layers are isotropic and homogeneous, strain rate and stress must have common principal axes in them. Therefore the first principal stress σ_1 and the third principal stress σ_3 corresponding to the principal strain rates of Fig. 1(a) will appear as illustrated in Fig. 3(a). The principal strain rates are related to the principal stresses by Eqs. (8) of the text, and from them is derived the equation

$$\gamma' = \left\{ (1-\nu)\gamma + \nu \right\} / \left\{ (1-\nu) + \nu\gamma \right\}, \quad (2)$$

where

$$\gamma = \dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_3 \quad \text{and} \quad \gamma' = \sigma_1/\sigma_3. \quad (3)$$

9. If σ_z denotes the stress vector on horizontal plane at point P in the snow cover, σ_z and plane C_{II} at the same point have their directions coincided, that is, they make the same angle φ with the horizontal. As σ_z is a component of the stress at point P, its direction should be determined by γ' and α , which are two out of the three quantities necessary for characterising the principal stresses at point P. Thus angle φ turns out to be given by

$$\tan \varphi = (\gamma' \tan \alpha + \cot \alpha) / (\gamma' - 1). \quad (4)$$

The following equation can likewise be derived for angle ψ :

$$\tan \psi = (\gamma' - 1) / (\gamma' \cot \alpha + \tan \alpha). \quad (5)$$

If the measurement of strain rate is done at point P in the snow cover, angles φ and ψ are determined at point P by the above two equations, because their right sides can be changed by Eq. (2) into functions of γ and α whose values are known from the measured strain rate.

10. The section of the snow cover shown in Fig. 2(a) is copied in Fig. 3(b) with boundaries of the snow layers added. The snow layers are numbered I, II, III, ... from below and strain rate is measured in each of them at points P, P_{II}, P_{III}, ... which are located on vertical straight line PP'' starting upward from point P. Let angles φ determined at those points be denoted by φ , φ_{II} , φ_{III} , ... If it is assumed that angle φ does not change its magnitude within one and the same snow layer in the neighbourhood of vertical line PP'', curved surfaces C_{II} starting from the both sides of plane APB will be given in the form of two angular lines A, A_{II}, ... A'' and B, B_{II}, ... B''.

11. Weight ω of snow J defined in Article 5 is approximately given by the weight of the snow which is of a unit thickness and lies between the above two angular lines. Now that φ , ψ and ω are known in magnitude at point P in Fig. 3(b), three stress components can be calculated at the same point by the use of Eqs. (1). The three stress components can similarly be obtained also at the other points P_{II}, P_{III}, ...