



Title	斜面積雪の挙動の研究 X : 曲線CH、曲線CVの簡単な例ならびに主歪速度比 $\gamma$ と主応力比 $\gamma'$ との関係
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科学. 物理篇, 41, 25-42
Issue Date	1983-03-22
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/18454">https://hdl.handle.net/2115/18454</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	41_p25-42.pdf



Zyungo YOSIDA 1982 Studies of the Behavior of a Snow Cover on a Mountain Slope. X. Examples of Curves  $C_H$  and  $C_V$ , Relationship Between Ratio  $\gamma$  of Principal Strain Rates and Ratio  $\gamma'$  of Principal Stresses. *Low Temperature Science, Ser. A, #1.* (With English Summary p. 40)

## 斜面積雪の挙動の研究 X\*

— 曲線  $C_H$ , 曲線  $C_V$  の簡単な例ならびに  
主歪速度比  $\gamma$  と主応力比  $\gamma'$  との関係 —

吉田 順五

(北海道大学名誉教授)

(昭和57年10月受理)

### I. ま え が き

#### 1. 本論文の内容

水平に長くつづく平行直線群で等高線が表されるような斜面では、その上につもった雪が、等高線に直角な鉛直面内で、2次元的に平面歪をおこしつつ流動する。この2次元流動のおこる鉛直面を「流動面」となづけよう。低温科学研究所の雪害科学部門は、2次元流動をおこしつつある実際の積雪の内部の多くの点で、流動によって生ずる歪速度を実測した<sup>4)</sup>。筆者は、この論文とおなじ表題の前論文 IX<sup>3)</sup> で、曲線  $C_H$  および曲線  $C_V$  と呼ぶ曲線を流動面内に定義し、それを応用して、歪速度の実測値から積雪の内部応力を算出する方法を提案した。その応用にあたっては、両曲線の特徴を知っておくと便利である。この論文の第II章で、ランキン応力状態にある斜面積雪内の曲線  $C_H$  および曲線  $C_V$  を図に示し、両曲線の特徴の一部をうかがうことにした。

前論文 IX の理論では、斜面積雪が密度  $\rho$ 、粘性係数  $\eta$ 、塑性ポアソン比  $\nu$  によってその性質がきめられる圧縮性粘性流体であると仮定した。この仮定をおくと、実測によってえられる主歪速度比  $\gamma$  から、 $\nu$  だけを含む数式によって主応力比  $\gamma'$  が定められ、その  $\gamma'$  を用いて曲線  $C_H$  および曲線  $C_V$  の切線方向が算出できる筈である。しかし、今までに得られている  $\nu$  の測定値が極めて乏しいため、この数式を実際に利用することができない。それで、第III章で、この数式のもつ性質のうちから、 $\nu$  と関係がないか  $\nu$  との関係が薄いものを探しだし、それに基づいて、第IV章で、歪速度の実測値から、応力や曲線  $C_H$ 、曲線  $C_V$  についての知見をいくつか導きだす。

#### 2. 曲線 $C_H$ および曲線 $C_V$ の定義の要点

便宜のため、曲線  $C_H$  および曲線  $C_V$  の定義の要点を次に述べる。流動面内に座標  $x$  および  $z$  を、それぞれ、水平方向と鉛直上方にとる。座標  $y$  を、座標  $x$  および  $z$  と直角に、等高線と平行におく。斜面積雪内の任意の点  $P$  をふくむ微小水平面を「点  $P$  における  $xy$  微小面」と、点  $P$  をふくみ流動面に直角な微小鉛直面を「点  $P$  における  $yz$  微小面」とよぶことにする。

\* 北海道大学低温科学研究所業績 第2475号

点 P における  $xy$  微小面上の応力成分を表すベクトルをふくみ流動面に直角な面を、すなわち水平な  $xy$  微小面と共軛<sup>3)</sup>な面を、点 P における面  $C_H$  となづける。曲線  $C_H$  は、流動面内にある平面曲線で、その上のすべての点で、その点での  $C_H$  面に切する。点 P における  $yz$  微小面上の応力成分ベクトルをふくみ流動面に直角な面を、すなわち鉛直な  $yz$  微小面に共軛な面を、点 P における面  $C_V$  となづける。曲線  $C_V$  は、流動面内にある平面曲線で、その上のすべての点で、その点での面  $C_V$  に切する。曲線  $C_H$  も曲線  $C_V$  も、その形は積雪内の応力分布によって定められる。よって、同一の積雪であっても、内部の応力分布が変化すれば、両曲線の形も変化する。

曲線  $C_H$  も曲線  $C_V$  も、それぞれが、別箇の曲線群を形成する。両曲線群を、それぞれ、副変数  $a_H, a_V$  を含む方程式

$$z = f_H(x, a_H), \quad z = f_V(x, a_V) \quad (1)$$

で表すと、上の定義は、応力成分  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{zx}$  を用いて

$$df_H/dx = \sigma_z/\tau_{zx}, \quad df_V/dx = \tau_{zx}/\sigma_x \quad (2)$$

と書くことができる。

曲線  $C_H$  および曲線  $C_V$  をふくみ流動面に直角な曲面を、それぞれ、曲面  $C_H$  および曲面  $C_V$  となづけよう。曲面  $C_H$  にはたらく応力成分ベクトルは、曲面  $C_H$  の上のすべての点で、流動面内において方向が水平である。曲面  $C_V$  にはたらく応力成分ベクトルは、曲面  $C_V$  の上のすべての点で、流動面内において方向が鉛直である。

## II. ランキン応力状態における曲線 $C_H$ および曲線 $C_V$

### 1. 曲線 $C_H$ および曲線 $C_V$ の特性の探索

いまの論文 X とおなじ表題の論文 VIII<sup>2)</sup> で、ランキン応力状態にある斜面積雪内の応力を理論的に決定した。この応力に適合する曲線  $C_H$  と曲線  $C_V$  とを計算によって求めて図に表し、両曲線の特性を探ることにしよう。ランキン応力状態は最も簡単な応力状態のひとつだから、求められる曲線は、特性の見やすい簡単な形をとるであろうと期待される。しかし、その反面、特性が縮退して特性の一部が隠れてしまう虞れもある。

### 2. 曲線 $C_V$

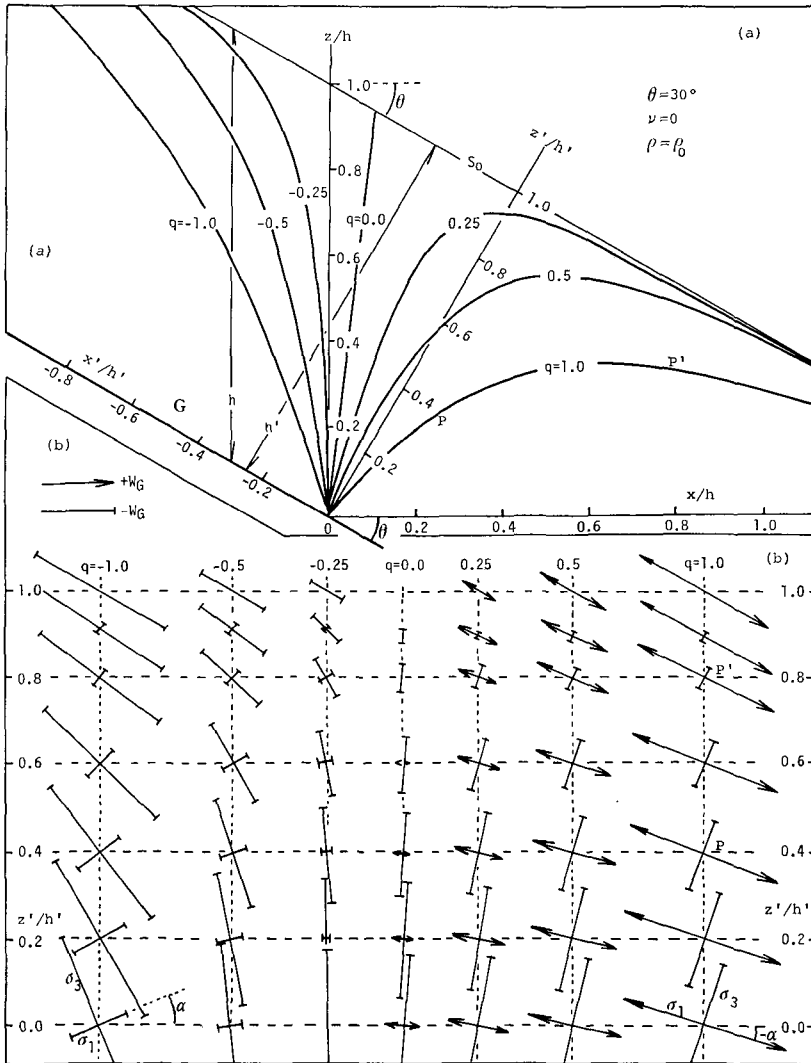
第 1 図上半部の (a) 図は、一様な傾斜角  $\theta$  の斜面の上に一様な厚さでつもった積雪の縦断面である。直線  $S_0$  が積雪表面を、直線  $G$  が地面を表す。水平座標  $x$ 、鉛直座標  $z$  のほかに、斜面にそい斜面がくだる方向に座標  $x'$  を、斜面に直角上方に座標  $z'$  をとる。雪の性質も応力も、 $z'$  の方向には変るが  $x'$  の方向には均一であるとする。つまり積雪は、その全体がランキンの応力状態<sup>2)</sup> にあって、そのなかのすべての点で上部均一の条件<sup>1)</sup> をみたしているとする。上のような斜面積雪では、論文 VII の第 IV 章第 2 節<sup>1)</sup> にあるように、鉛直な  $yz$  微小面上の応力ベクトル  $\mathbf{f}$  が流動面内のどの点でも、積雪表面に平行であること、すなわち  $x'$  の方向を指すことが知られる。(論文 VII および VIII では、本論文の座標  $(x, z)$  と  $(x', z')$  とを、それぞれ、 $(x', z')$  と  $(x, z)$  とにしてある)。定義により、曲線  $C_V$  は、そのうえのすべての点でベクトル  $\mathbf{f}$  に

切する。よって、曲線  $C_V$  は、地面および積雪表面に平行な直線群で、その方程式は

$$z = f_V(x, a_V) = z_0 - x \tan \theta \quad (3)$$

で表される。ここに、 $z_0$  は  $z$  軸上での座標原点  $O$  からの高さで、副変数  $a_V$  にあたる。曲線  $C_V$  と水平方向との間の角  $\psi$  は

$$\tan \psi = df_V(x, a_V)/dx = -\tan \theta \quad (4)$$



**第1図** ランキン応力状態にある斜面積雪内の (a) 曲線  $C_H$  と (b) 主応力。図 (a) で、直線  $S_0$  が積雪表面を、直線  $G$  が地面を表す。曲線  $C_V$  は、図に示していないが、直線  $S_0$  および  $G$  に平行な直線群である。図 (b) の十字線は、図 (a) の曲線  $C_H$  上のいろいろな点での主応力を表す。十字に交る直線のうち、矢尻をつけた直線は張力を、端に短い横線のある直線は圧力である。これらの直線の長さは、 $w_G = \rho_0 g h$  を単位とする主応力の大きさである。図 (b) の左上隅にある2本の水平線の長さが単位  $w_G$  にひとしい

の関係にある。よって、斜面積雪内のすべての点で  $\psi = -\theta$  である。

積雪の鉛直方向の厚さを  $h$  とし、副変数  $z_0$  を  $h$  に等しくすると、方程式 (1) は積雪表面をあたえる。すなわち、積雪表面も曲面  $C_V$  である。積雪表面が曲面  $C_V$  であることは、いずれ発表する論文で示すとおり一般になりたち、曲面  $C_V$  のひとつの特性である。地面は  $z_0 = 0$  としたときの曲面  $C_V$  にあたる。しかし、これは、このばあいの特殊な応力状態によって生じた偶然の結果にすぎない。地面は、一般に、曲面  $C_V$  にならない。

方程式 (3) の直線群に属する各直線は互に交叉しない。しかし、この不交叉も曲線  $C_V$  の特性とはいえない。応力が完全単独鉛直主応力<sup>1)</sup> である点では、 $yz$  微小面上の応力成分が 0 であるため、曲線  $C_V$  の切線の方向がただひとつには定まらない。このような点では曲線  $C_V$  の交叉がおこりうる。その例をいずれ発表する論文で示す予定である。

### 3. 曲線 $C_H$ の微分方程式

曲線  $C_H$  の形の決定は、前項の曲線  $C_V$  のばあいのようには容易でない。その困難をできるだけ軽減するため、雪の性質を単純なものに考える。まず、雪の密度が斜面積雪全体にわたって一様であるとし、その密度を  $\rho_0$  で表す。つぎに、雪の塑性ポアソン比  $\nu$  が斜面積雪全体にわたって 0 に等しいとおく。すると、論文 VIII の (3) 式

$$\sigma'_x = -\frac{\nu}{1-\nu} w \cos \theta + c \quad (5)$$

は

$$\sigma'_x = c \quad (\text{常数}) \quad (6)$$

となり、斜面に直角に立つ  $yz'$  面上の応力の垂直成分  $\sigma'_x$  が、 $yz'$  面上で均一な一定値をとることになる。つまり、斜面積雪が、斜面に直角な断面全体にわたる均一な強さで、斜面の方向に引張られているか押されているかになる。上の式の常数  $c$  には、論文 VIII で附加応力の名をあたえた。

曲線  $C_H$  を表す方程式を、まえがきで述べたように

$$z = f_H(x, a_H) \quad (7)$$

とする。常数  $a_H$  は副変数である。流動面内の任意の点  $P(x, z)$  で、曲線  $C_H$  の切線が、水平方向と角  $\varphi$  をはさむとしよう。すると、式 (2) により、点  $P$  での応力成分  $\sigma_z, \tau_{zx}$  を用いて

$$dz/dx = df_H/dx = \tan \varphi = \sigma_z / \tau_{zx} \quad (8)$$

の関係式を書くことができる。それゆえ、 $\sigma_z$  と  $\tau_{zx}$  とを  $(x, z)$  の関数として表すことができれば、式 (8) は曲線  $C_H$  の微分方程式をあたえることになる。

座標  $x'$  の方向の単位ベクトルを  $\mathbf{i}'$  とすると、 $yz$  微小面上の応力成分ベクトル  $\mathbf{f}$  は、 $f\mathbf{i}'$  とかけられる。これにより、点  $P$  における  $yz$  微小面上の応力の切線成分は

$$\tau_{zx} = -f \sin \theta \quad (9)$$

と表され、これは同時に点  $P$  における  $xy$  微小面上の応力の切線成分でもある。点  $P$  をふくむ水平な単位面積の直上にある雪の重量は

$$w = \int_z^{\text{表面}} \rho_0 g dz = \rho_0 g (h - x \tan \theta - z) \quad (10)$$

である。この式の右辺の括弧内は、点 P から積雪表面までの鉛直距離にほかならない。この  $w$  を用いて、点 P における  $xy$  微小面上の応力の垂直成分  $\sigma_z$  が

$$\sigma_z = f \sin \theta \tan \theta - w \quad (11)$$

として与えられる。かくして、式 (8) は

$$dz/dx = \tan \varphi = \sigma_z / \tau_{zx} = (w - f \sin \theta \tan \theta) / f \sin \theta \quad (12)$$

の形に書きあらわされる。

さらに、 $f$  と  $\sigma'_x = c$  (常数) とが、論文 VII の式 (9) と同じ内容の

$$f = (\sigma'_x + w \sin^2 \theta) \cos \theta \quad (13)$$

なる関係で結ばれることが証明できる。微分方程式 (12) を、その右辺にある  $w$  と  $f$  とを式 (10) と式 (13) とでおきかえて積分すれば、曲線  $C_H$  を表す方程式がえられる。

#### 4. 曲線 $C_H$ の微分方程式 (つづき)

ここに考えている斜面積雪では、応力が斜面の方向には均一で座標  $x'$  によって変化しない。それゆえ、座標  $(x, z)$  の代わりに座標  $(x', z')$  を用いた方が便利である。微分方程式は解きやすくなるし、すべてのことが簡単に表されるようになる。

任意の点 P における曲線  $C_H$  の切線と  $x'$  の方向との間の角は  $\varphi + \theta$  にひとしい。よって、座標  $(x', z')$  で表した曲線  $C_H$  の微分方程式は

$$dz'/dx' = \tan(\varphi + \theta) = (\tan \varphi + \tan \theta) / (1 - \tan \theta \tan \varphi) \quad (14)$$

と書かれる。この式の  $\tan \varphi$  に (12) 式の右端を代入し、座標  $(x', z')$  を使えば式 (10) が

$$w = \rho_0 g h \left\{ 1 - (z'/h) \right\}, \quad h' = h \cos \theta \quad (15)$$

なることを用いると、座標  $(x', z')$  に関する曲線  $C_H$  の微分方程式として

$$\left\{ \frac{q}{1 - (z'/h')} - \cos^2 \theta \right\} \frac{d(z'/h')}{d(x'/h')} = \cot \theta \quad (16)$$

に達する。ここに、 $h'$  は積雪の斜面に直角な方向の厚さであり、 $q$  は

$$q = \sigma'_x / w_G, \quad w_G = \rho_0 g h \quad (17)$$

を表す。応力成分  $\sigma'_x$  は式 (6) が示すとおり常数だから、 $q$  も常数である。

#### 5. 曲線 $C_H$

初期条件を  $x' = x'_0, z' = 0$  として微分方程式 (16) を積分すると、 $x'_0$  を副変数とする曲線群  $C_H$  の方程式

$$-\left[ q \ln \left\{ 1 - (z'/h') \right\} + (z'/h') \cos^2 \theta \right] = \left\{ (x'/h') - (x'_0/h') \right\} \cot \theta \quad (18)$$

がえられる。第 1 図 (a) の座標原点 O から発する 7 本の曲線は、式 (18) で  $x'_0$  を 0 とし  $q$  に 0,  $\pm 0.25, \pm 0.5, \pm 1.0$  の値を与えてえられる曲線  $C_H$  である。初期条件が  $x' = x'_0 \neq 0, z' = 0$  の

ばあいの曲線  $C_H$  は、第 1 図 (a) の曲線を、その根元が  $(x'_0, 0)$  の点にうつるように、 $x'$  の方向に平行移動させれば得られる。

常数  $q$  が正ならば、 $\sigma'_x = c$  は正で張力を表す。すなわち、斜面積雪は斜面の方向に引張られている。式 (18) から、 $q$  が正ならば、 $z'$  が  $h'$  に近づくにつれ、 $x'$  が正の無限大になることが知られる。すなわち、第 1 図 (a) に示されているように、曲線  $C_H$  は斜面の下手にむかって弯曲しつつ積雪表面に漸近する。このばあい、曲線  $C_H$  は地面から発して、 $\varphi$  が 0 になる所で最高点に達する。最高点をすぎると、曲線  $C_H$  は右にむかって下りはじめるが、それでも、積雪表面に平行な曲線  $C_V$  と交るとき、曲線  $C_V$  を下から上に抜けるようにして交る。最高点に達する前も、この交りかたに変わりはない。

常数  $q$  が負のときは、積雪は斜面の方向に押されており、曲線  $C_H$  は斜面の上手にむかって積雪表面に漸近する。このばあいにも、曲線  $C_H$  を地面を出発点として迎ると、曲線  $C_H$  は曲線  $C_V$  を下から上に抜けるようにして曲線  $C_V$  と交りつつ、積雪表面に漸近する。以上のことから、曲線  $C_V$  上の一点から、曲線  $C_V$  の上側にむかって出発する曲線  $C_H$  は、たとえ水平方向に対しては下側にむかうばあいでも、積雪表面に漸近し、曲線  $C_V$  の下側に向って出発する曲線  $C_H$  は、たとえ水平方向に対しては上側にむかうばあいでも、結局は地面に到達するといえる。曲線  $C_V$  上の一点から出発する曲線  $C_H$  に関するこの結論には可成りな一般性がある。それで、この種の曲線  $C_H$  を「通常型」とよぶことにしよう。通常型でない曲線  $C_H$  も稀にはあるが確かに存在することが、歪速度実測値との対比によって、第 VI 章第 3 節で知られる。

例外として、 $q$  が 0 にひとしいときは、曲線  $C_H$  は直線となって積雪表面と有限な角で交る。これは、 $\sigma'_x$  が 0 にひとしくて積雪表面に応力が全く存在しないからである。表面に応力が存在し、 $\sigma'_x$  が 0 でないばあいに曲線  $C_H$  が積雪表面に漸近することは、あとで書く予定の論文で示すように、一般になりつつ。

## 6. 曲線 $C_H$ (つづき)

実際の斜面積雪は、密度  $\rho$  や塑性ポアソン比  $\nu$  の値を異にする多数の等方均質な雪層からなる層状積雪である。前節 5 でえた結果を利用すると、ランキン応力状態にある層状斜面積雪内の曲線  $C_H$  を、次のようにして、近似的にはあるが、描くことができる。曲線  $C_V$  は、このばあいにも、積雪表面に平行な直線群である。

前節で積雪の塑性ポアソン比  $\nu$  を 0 としたのは、 $\sigma'_x$  を  $z'$  によって変らない常数とし、曲線  $C_H$  を簡単な方程式で表すためであった。式 (5) であたえられる  $\sigma'_x$  は、 $w$  が  $z'$  によって変るから、 $\nu$  が 0 でないと常数にならない。それで  $\nu = 0$  としたわけである。

層状斜面積雪を構成する雪層のひとつに注目し、それを雪層 A となづける。雪層 A のなかでの  $w$  の平均値を  $w_A$  とし、 $w$  を  $w_A$  でおきかえた (5) 式の左辺  $X'_A$ 、すなわち、

$$X'_A = -\frac{\nu}{1-\nu} w_A \cos \theta + c \quad (19)$$

を  $\sigma'_x$  の近似値として使うことにすると、 $\nu$  が 0 でなくても、 $\sigma'_x$  は雪層 A のなかで常数となる。雪層 A が地面に近い深い雪層のときは、雪層 A のなかでの  $w$  の変化量が平均値  $w_A$  に比べて小さい。よって、うへの近似の度合は高い。雪層 A が浅くなるにつれ、その近似度は低

下する。

雪層 A 以外の雪層を、各雪層の密度が雪層 A の密度と一致するように、 $z'$  方向に伸張あるいは圧縮したと仮想する。こうして出現した仮想積雪のなかの  $w$  は、 $\rho_0$  を雪層 A の密度  $\rho_A$  でおきかえた (10) 式で与えられる。その  $w$  のうちで雪層 A に属する部分は、実際の層状積雪内にある雪層 A のなかの  $w$  にひとしい。式 (9), (11), (13) から知られるように、雪層 A のなかの応力成分は、 $w$  と  $\sigma'_x$  とが与えられれば定る。よって、仮想積雪内の  $\sigma'_x$  が座標  $z'$  によって変化しない式 (19) の  $X'_A$  であるとすれば、雪層 A のなかの応力は、実際の層状斜面積雪と仮想積雪とで同じものとなる。

この仮想積雪は密度も  $\sigma'_x$  も全体にわたって一定であるから、そのなかの曲線  $C_H$  は式 (18) で表される。この曲線  $C_H$  から雪層 A に属する部分を取りだせば、その部分が近似的に実際の層状斜面積雪の雪層 A 内の曲線  $C_H$  をあたえる。以上の方法で各雪層内の曲線  $C_H$  を求め、それらを次つぎに繋げば、層状斜面積雪内の近似的な曲線  $C_H$  となる。

うえのように式 (18) により曲線  $C_H$  を表すばあい、 $h'$  には仮想積雪の厚さ  $h'_A$  を、 $q$  には  $q_A = X'_A/w_G$  を用いる。積雪の底における  $w$  の値  $w_G$  は、雪層 A の選びかたには無関係で、実際の層状斜面積雪の  $w_G$  にひとしい。しかし、 $\nu$  も  $w_A$  も、更には論文 VII の第 II 章第 3 節でのべたように附加応力  $c$  も雪層ごとに変る。よって  $q_A$  は、雪層 A の選びかたにより値を異にする。

### III. 主歪速度比 $\gamma$ と主応力比 $\gamma'$ との関係式

#### 1. 角 $\varphi$ および角 $\psi$ と主応力

角  $\varphi$  および角  $\psi$  は、それぞれ、水平方向から曲線  $C_H$  および曲線  $C_V$  の切線にむかって測った角である。流動面内のある点での  $\varphi$  および  $\psi$  は、その点における流動面内主応力によって定る。それで、その主応力と  $\varphi$  および  $\psi$  との関係を見るため、第 1 図の下半分に、上半分の図 (a) にある曲線  $C_H$ 、曲線  $C_V$  に対応する主応力を、図 (b) として示した。角  $\varphi$ 、 $\psi$  と主応力との間の関係は、応力場がランキン応力状態にあるかないかにはよらない、一般的な関係である。しかし、第 1 図にその関係のすべてが見られるわけではない。第 1 図が示すのは、 $\psi = -30^\circ$  のばあいのものという点では特殊な、一般的関係である。

第 1 図 (b) の縦にならんだ十字線が、同図 (a) にある曲線  $C_H$  のうちの一本の上のいろいろな点での主応力である。点の位置は  $z'/h'$  の値で区別される。たとえば、図 (a) で、 $q=1.0$  の曲線  $C_H$  のうえにある点 P、点 P' は、 $z'/h'$  の値が、それぞれ 0.4, 0.8 である。それで、これらの点での主応力は、それぞれ、図 (b) の  $q=1.0$  の列にある十字線 P、十字線 P' で表される。図 (b) に示した主応力は、座標  $(x', z')$  に関する応力成分

$$\sigma'_x = qw_G, \quad \sigma'_z = -w_G \cos^2 \theta \left\{ 1 - (z'/h') \right\}, \quad \tau'_{zx} = w_G \sin \theta \cos \theta \left\{ 1 - (z'/h') \right\} \quad (20)$$

から計算によって求めた。

第 1 図 (b) の十字に交る線のうち、先端に矢尻の印をつけた直線は、それが表す主応力が正で張力であることを示す。先端に短い横線のある直線は、それが表す主応力が負で圧力であることを示す。十字に交るふたつの主応力のうち、代数的に大きい方を第 1 主応力とよび、その

値を  $\sigma_1$  で表す。代数的に小さい方は第3主応力とよび、その値を  $\sigma_3$  とする。第2主応力は流動面に直角に立つ。水平な  $x$  方向から第1主応力にむかって反時計まわりに測った角を  $\alpha$  とする。

角  $\varphi$  および角  $\psi$  は、それぞれ、 $xy$  微小面および  $yz$  微小面上の応力成分ベクトルの方向によって定まる。ベクトルの値自体は、それに無関係である。したがって、ふたつの主応力の値  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  そのものは  $\varphi$ ,  $\psi$  と関係ない。関係するのは両主応力の比  $\gamma' = \sigma_1/\sigma_3$  である。実際、 $\varphi$  も  $\psi$  も、論文 IX<sup>3)</sup> の式 (14) および (15) が示すように、 $\gamma'$  と角  $\alpha$  とによって定められる。

まえがきで述べたように、低温科学研究所の雪害科学部門が、斜面積雪内の歪速度の実測をおこなっている。その結果から流動面内にあるふたつの主歪速度が決定される。歪速度の正負を、伸張歪速度のとき正とし、圧縮歪速度のとき負であるとする。主応力のばあいと同様、代数的に大きい主歪速度を第1主歪速度  $\dot{\epsilon}_1$  とよび、代数的に小さい主歪速度を第3主歪速度  $\dot{\epsilon}_3$  と名づけ、両者の比を  $\gamma = \dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_3$  で表す。第2主歪速度  $\dot{\epsilon}_2$  は0である。主応力と主歪速度とは方向がおなじだから、角  $\alpha$  は歪速度の実測により直接に定められる。それゆえ、 $\gamma$  の値から  $\gamma'$  の値を導くことができれば、歪速度の実測から角  $\varphi$  および角  $\psi$  の値を知り、曲線  $C_H$  および曲線  $C_V$  が描けることになる。次の第2節で準備をしたあと、第3節以下で  $\gamma$  と  $\gamma'$  との関係を考察する。ただし、その考察には論文 VII<sup>3)</sup>, VIII<sup>3)</sup>, IX<sup>3)</sup> だと同様に、積雪が圧縮性粘性流体であるとの仮定をおく。

第1図 (b) の主応力は、いずれも、その  $\sigma_3$  が負である。しかし、歪速度の実測値のなかには、あとで示されるように、 $\sigma_1$  はもちろん  $\sigma_3$  をも正ならしめるものが、少数ではあるが存在する。

## 2. 主応力と主歪速度との値の対応

さきに定義した第1, 第3主応力と第1, 第3主歪速度とは、常に、第1主応力と第1主歪速度とが、また、第3主応力と第3主歪速度とが方向を共にするという関係にある。第1主応力と第3主歪速度との方向が一致することはない。これは、次のようにして証明される。

いま、さきの定義とはちがって、 $\dot{\epsilon}_1$  を第1主応力と方向を共にする主歪速度の値とし、 $\dot{\epsilon}_3$  を第3主応力と方向を共にする主歪速度の値としよう。すると、塑性ポアソン比  $\nu$ 、粘性係数  $\eta$  を用いて、論文 IX<sup>2)</sup> の (8) 式

$$\dot{\epsilon}_1 = [(1-\nu)\sigma_1 - \nu\sigma_3]/2\eta, \quad \dot{\epsilon}_3 = [(1-\nu)\sigma_3 - \nu\sigma_1]/2\eta \quad (21)$$

を書くことができる。これは、圧縮性粘性流体が平面歪を生じつつ、2次元的に流動するときになりたつ一般的関係である。式 (21) の両方の式の差をとると

$$\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2\eta \quad (22)$$

がえられる。粘性係数  $\eta$  の値は正だから、この式から  $\sigma_1 > \sigma_3$  ならば、必ず、 $\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_3$  であることが知られる。よって第1, 第3主応力と方向が一致するものと定義した  $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_3$  の値の主歪速度は、それぞれ、さきに定義した第1, 第3主歪速度に他ならない。かくして、うゑに述べた事柄が証明された。

3. 主歪速度比  $\gamma$  と主応力比  $\gamma'$  との関係式

この第3節からさきは、主歪速度の値の比  $\gamma = \dot{\epsilon}_1 / \dot{\epsilon}_3$  と主応力の値の比  $\gamma' = \sigma_1 / \sigma_3$  との関係の考察である。斜面積雪内で歪速度を実測すれば、角  $\alpha$  とともに  $\gamma$  の値が知られる。よって、 $\gamma$  と  $\gamma'$  との関係がわかれば、この章の第1節のおわりで述べたことにより、歪速度の実測から角  $\varphi$  および角  $\psi$  が定められることになる。

式(21)のふたつの方程式の比をとると

$$\gamma' = \frac{\{(1-\nu)\gamma + \nu\}}{\{(1-\nu) + \nu\gamma\}} \quad (23)$$

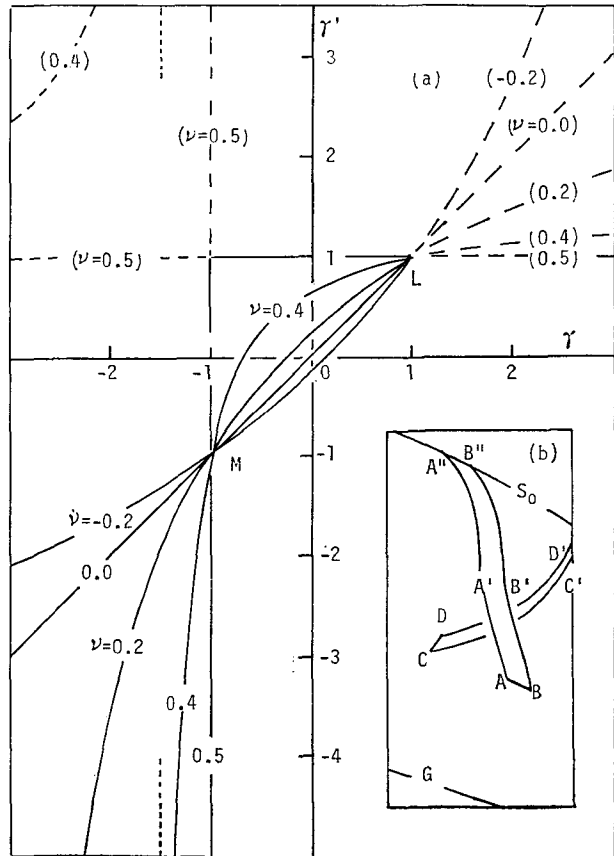
という簡単な形で  $\gamma$  と  $\gamma'$  との関係が表される。上式の分母を0ならしめる  $\gamma$  の値、すなわち、 $\gamma'$  を正または負の無限大にする  $\gamma$  の値を  $\gamma_N$  とすると

$$\gamma_N = -(1-\nu)/\nu \quad (24)$$

である。

圧縮性粘性流体としての雪の特性である密度  $\rho$ 、粘性係数  $\eta$ 、塑性ポアソン比  $\nu$  のうち、上の関係式にふくまれるのは  $\nu$  だけである。しかし  $\nu$  の値の測定例はきわめて乏しく、今までのところ、論文 VII の第 III 章第3節にあげた3例しかない。よって、現在は、式(23)を利用して  $\gamma$  の値から  $\gamma'$  の値を求めることは不可能である。それで、式(23)の実際の利用は、 $\nu$  の値が知られるであろう将来にまつこととし、ここではまえがきで述べたように、 $\nu$  の値には、全くあるいは殆ど、無関係になりつつ  $\gamma$  と  $\gamma'$  との関係を表す式(23)から探すことにする。

第2図(a)に、式(23)で与えられる  $\gamma$  と  $\gamma'$  との関係を、横軸に  $\gamma$  を縦軸に  $\gamma'$  をとって、図示した。曲線に書きそえてある数字は、その曲線の  $\nu$  の値である。これらの  $\nu$  の値は、論文 VII<sup>1)</sup> の第 III 章第2節で述べ



第2図 (a) 圧縮性粘性流体とみなした斜面積雪内の、主歪速度比  $\gamma$  と主応力比  $\gamma'$  との関係。各曲線に付した数字は塑性ポアソン比  $\nu$  の値である。曲線の破線部分では、両主応力の値  $\sigma_1, \sigma_3$  が共に正である。(b) 2次元的に流動する任意の斜面積雪の鉛直断面。曲線  $S_0$  が積雪表面を、曲線  $G$  が地面を表す。微小線分  $AB$  および  $CD$  は、共に曲線  $C_V$  の微小部分である。曲線  $AA'A''$ ,  $BB'B''$  は曲線  $C_V$  の上側の点から出発して積雪表面  $S_0$  に達する「通常型」の曲線  $C_H$  である。曲線  $CC'$ ,  $DD'$  も曲線  $C_H$  だが、曲線  $C_V$  の下側の点から出発して  $S_0$  に達するから「通常型」でない。

たことに基づいて、 $-0.2$  から  $0.4$  までの間にえらんだ。

第2図(a)の曲線は、 $\nu$ の値の如何にかかわらず、その全部が、 $(\gamma, \gamma')$ の値が $(1, 1)$ に等しい点Lと $(-1, -1)$ に等しい点Mとを通過する。点Lと点Mとのこのような特異性を利用して、この2点と原点Oとを境界に用い、 $\gamma$ と $\gamma'$ との値の全範囲を、それぞれ、次節に示す4箇の領域に分割する。これにより、 $\nu$ の値が不明でも、実測で得られた $\gamma$ がある領域に属するとき、それに対応する $\gamma'$ がどの領域に属するかを定めることができる。つまり、 $\gamma'$ の値を、ある程度限定することができる。

#### 4. 主歪速度比 $\gamma$ および主応力比 $\gamma'$ の全領域の分割

(a) 領域A, 領域A' 主歪速度比 $\gamma = \dot{\epsilon}_1 / \dot{\epsilon}_3$ の領域 $\infty > \gamma > 1$ を領域Aとし、主応力比 $\gamma' = \sigma_1 / \sigma_3$ の領域 $\infty > \gamma' > 1$ を領域A'とする。定義により $\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_3$ ,  $\sigma_1 > \sigma_3$ であるから、 $\gamma > 1$ ,  $\gamma' > 1$ であるためには $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_3$ また $\sigma_1, \sigma_3$ が皆正であればよい。よって、領域Aでは $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_3$ が共に正であり、領域A'では $\sigma_1, \sigma_3$ が共に正である。逆に $\dot{\epsilon}_1$ と $\dot{\epsilon}_3$ とが共に正ならば $\gamma$ は領域Aに属し、 $\sigma_1$ と $\sigma_3$ とが共に正ならば $\gamma'$ は領域A'に属する。論理記号を用いると、上の関係は

$$A \ni \gamma \leftrightarrow (\dot{\epsilon}_1 > 0) \wedge (\dot{\epsilon}_3 > 0), \quad (25)$$

$$A' \ni \gamma' \leftrightarrow (\sigma_1 > 0) \wedge (\sigma_3 > 0) \quad (26)$$

と書き表される。

斜面積雪内のある点Pで $\sigma_1, \sigma_3$ が共に正ならば、点Pを中心とするすべての微小面dSについて、dS上の応力の垂直成分 $\sigma_s$ は正、すなわち、張力である。斜面積雪にかかる外力には、重力と地面の束縛力としかない。このことから、すべての $\sigma_s$ が張力になるのは、特別な稀な場合に限られると考えられる。すなわち、 $\gamma'$ が領域A'に属する場合は非常に少いと推定される。この推定を表すため、第2図(a)では、領域A'に属する曲線部分を破線でかいた。

第2図(a)の点Lから右上にひろがる二次元領域では $\gamma, \gamma'$ がそれぞれ領域A, 領域A'に属する。この二次元領域を(A, A')で表す。破線で示された(A, A')内の曲線を見ると、 $\gamma$ が無限に増大すれば $\gamma'$ も無限に増大するように思われる。しかし、それは、 $\nu$ が正の場合に限られる。塑性ポアソン比 $\nu$ が負であると、式(24)で与えられる $\gamma_N$ が正で1より大きいから、領域A内に $\gamma_N$ が存在する。よって、 $\nu$ が負の曲線は、点Lから発したあと上昇して鉛直線 $\gamma = \gamma_N$ に漸近する。そして、 $\gamma$ が $\gamma_N$ を超えると、下方無限遠にあるこの鉛直線の下端にまで降下したあと、上昇しつつ右へ湾曲し、水平線 $\gamma' = (1 - \nu) / \nu (< -1)$ に次第に近づく。したがって、 $\gamma'$ は、 $\gamma$ が $\gamma_N$ に達するまでは領域A'に属し、 $\gamma$ が $\gamma_N$ をこえると、あとの(d)項で定義する領域D'に属することになる。塑性ポアソン比 $\nu$ が正のときは $\nu_N$ が負であるから、上のようなことは起らず、曲線は二次元領域(A, A')の外に出ることがない。よって次のように書くことができる。

$$(A \ni \gamma) \wedge (\nu \geq 0) \leftrightarrow (A' \ni \gamma') \wedge (\gamma \geq 0), \quad (27)$$

$$(A \ni \gamma) \wedge (\gamma < \gamma_N) \wedge (\nu < 0) \rightarrow (A' \ni \gamma') \wedge (\nu < 0), \quad (28)$$

$$(A \ni \gamma) \wedge (\gamma > \gamma_N) \wedge (\nu < 0) \rightarrow (D' \ni \gamma') \wedge (\nu < 0). \quad (29)$$

上に述べた、 $\nu$ が負のばあいの事柄は、情報量は減少するが、「 $\gamma$ が領域Aに属するなら、それに対応する $\gamma'$ は領域A'か領域D'かのいずれかに属する」といってもよい。これは

$$(A \ni \gamma) \wedge (\nu < 0) \rightarrow \{(A' \cup D') \ni \gamma'\} \wedge (\nu < 0) \quad (30)$$

で表される。つまり、情報量のある程度犠牲にすれば、式(28)と式(29)とは、ひとつの式(30)にまとめられる。

(b) **領域 B, 領域 B'** 領域  $1 > \gamma > 0$  を領域 B と名づけ、領域  $1 > \gamma' > 0$  を領域 B' と名づける。第1主値  $\epsilon_1, \sigma_1$  も第3主値  $\epsilon_3, \sigma_3$  も負ならば、それらの比  $\gamma, \gamma'$  は正である。しかも、第3主値の方が第1主値より絶対値が大きいため、 $\gamma$  および  $\gamma'$  の値は1より小さい。逆に  $\gamma, \gamma'$  が正で1より小さければ、第1主値も第3主値も、みな、負でなければならない。よって

$$B \ni \gamma \leftrightarrow (\epsilon_1 < 0) \wedge (\epsilon_3 < 0), \quad (31)$$

$$B' \ni \gamma' \leftrightarrow (\sigma_1 < 0) \wedge (\sigma_3 < 0) \quad (32)$$

とかける。また、領域 B に属する  $\gamma$  と、それに対応する  $\gamma'$  の属する領域との関係が

$$(B \ni \gamma) \wedge (\nu \geq 0) \leftrightarrow (B' \ni \gamma') \wedge (\nu \geq 0), \quad (33)$$

$$(B \ni \gamma) \wedge (\nu < 0) \rightarrow \{(B' \cup C') \ni \gamma'\} \wedge (\nu < 0) \quad (34)$$

で表せることを、第2図(a)から知ることができる。式(34)にある  $C'$  は、次の(c)項で定義される領域  $C'$  を示す。

(c) **領域 C, 領域 C'** 領域  $0 > \gamma > -1$  を領域 C、領域  $0 > \gamma' > -1$  を領域 C' とする。第1主値が正、第3主値が負で、第1主値が第3主値の絶対値より小さければ、 $\gamma$  と  $\gamma'$  とは、それぞれ、領域 C と領域 C' とに属する。また、その逆も真である。よって

$$C \ni \gamma \leftrightarrow (\epsilon_1 > 0) \wedge (\epsilon_3 < 0) \wedge (\epsilon_1 < -\epsilon_3), \quad (35)$$

$$C' \ni \gamma' \leftrightarrow (\sigma_1 > 0) \wedge (\sigma_3 < 0) \wedge (\sigma_1 < -\sigma_3) \quad (36)$$

の関係がある。また、第2図(a)から

$$(C \ni \gamma) \wedge (\nu > 0) \rightarrow \{(B' \cup C') \ni \gamma'\} \wedge (\nu > 0), \quad (37)$$

$$(C \ni \gamma) \wedge (\nu \leq 0) \leftrightarrow (C' \ni \gamma') \wedge (\nu \leq 0) \quad (38)$$

であることがわかる。

(d) **領域 D, 領域 D'** 領域  $-1 > \gamma > -\infty$  を領域 D とし、領域  $-1 > \gamma' > -\infty$  を領域 D' とする。領域と主値との関係で前項(c)と異なる点は、第1主値が第3主値の絶対値より大きいことである。よって

$$D \ni \gamma \leftrightarrow (\epsilon_1 > 0) \wedge (\epsilon_3 < 0) \wedge (\epsilon_1 > -\epsilon_3), \quad (39)$$

$$D' \ni \gamma' \leftrightarrow (\sigma_1 > 0) \wedge (\sigma_3 < 0) \wedge (\sigma_1 > -\sigma_3) \quad (40)$$

と書くことができる。

塑性ポアソン比  $\nu$  が正のばあいには、 $\gamma_N$  の値が  $-1$  より小さい。よって、 $\nu$  が正ならば  $\gamma_N$  が領域 D のなかにあり、 $\gamma$ - $\gamma'$  曲線は  $\gamma = \gamma_N$  で表される鉛直漸近線にそって無限に上昇し、また、下降する。第2図(a)に、 $\nu = 0.4$  のばあいの  $\gamma$ - $\gamma'$  曲線と鉛直漸近線とが示してある。領域 D に属する  $\gamma$  と、それに対応する  $\gamma'$  の帰属領域との関係は次のように表される。

$$(D \ni \gamma) \wedge (\nu \leq 0) \leftrightarrow (D' \ni \gamma') \wedge (\nu \leq 0), \quad (41)$$

$$(D \ni \gamma) \wedge (\gamma > \gamma_N) \wedge (\nu > 0) \rightarrow (D' \ni \gamma') \wedge (\nu > 0), \quad (42)$$

$$(D \ni \gamma) \wedge (\gamma < \gamma_N) \wedge (\nu > 0) \rightarrow (A' \ni \gamma') \wedge (\nu > 0), \quad (43)$$

$$(D \ni \gamma) \wedge (\nu > 0) \rightarrow \left\{ (A' \cup D') \ni \gamma' \right\} \wedge (\nu > 0). \quad (44)$$

#### IV. 歪速度実測値に基く考察

##### 1. 歪速度実測値の分布

低温科学研究所雪害科学部門が昭和47年(1972)1月から昭和56年(1981)3月までの10年間にえた主歪速度( $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_3$ )の実測値は361にのぼる。前章の最後の節で、 $\gamma = \dot{\epsilon}_1 / \dot{\epsilon}_3$ の四つの領域を定義した。その各領域に属する実測値( $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_3$ )の数を $n$ で表すと、第1表の上部2行に示したようになる。領域Cに属するものが非常に多く、全体の83%に達する。

第1表 各領域に属する実測主歪速度比 $\gamma$ の数 $n$

領域	A	B	C	D	計	
$n$	5	10	302	44	361	
$n_D$	15	11	10	4	4	
$\gamma_N$	-1	-1.5	-2.33	-4	-9	$-\infty$
$\nu$	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0

論文VIIおよび論文VIIIで、実測主歪速度から「従来の方法」によって算出した斜面積雪内応力には、単独鉛直主応力の多いことを述べた。単独鉛直主応力では、 $\gamma' = \sigma_1 / \sigma_3$ の絶対値が0に近い。第2図(a)が示すように、塑性ポアソン比 $\nu$ が正の $\gamma$ - $\gamma'$ 曲線が $\gamma$ 軸と交るのは領域Cにおいてである。したがって、 $\nu$ が正ならば、 $\gamma'$ の絶対値が0に近い値をとりうるのは領域Cに限られる。そして、大部分の雪の $\nu$ は正である。かくして、領域Cの $n$ が大きいことと、単独鉛直主応力の多いこととは互に符合する。

うへの「従来の方法」は、ランキンの応力状態を仮定して、実測主歪速度から応力を算出する方法である。この方法に必ずしも一般性のないことを、論文IXで示した。しかし、算出された応力が単独鉛直主応力である場合には、論文VII、論文VIIIの結論からみて、「従来の方法」が正しい結果を与える可能性は高いといえる。

##### 2. 共に正の主応力

主応力 $\sigma_1, \sigma_3$ が共に正でありうるのは、すなわち $A' \ni \gamma'$ でありうるのは、式(27)、式(28)、式(43)が成り立つ場合である。すなわち、 $\gamma$ に関していえば $A \ni \gamma$ と $D \ni \gamma$ の場合に限られる。

(i)  $A \ni \gamma$ のばあい。式(27)が示すように、 $\nu$ が正ならば、必ず、 $A' \ni \gamma'$ である。しかし、また、 $\nu$ が負のばあいでも、すぐあとで説明するように、 $\gamma$ が2より小さければ、必ず、 $A' \ni \gamma'$ であるといえる。もちろん、 $\nu$ が正のときにも、 $\gamma$ が2より小さいとき $A' \ni \gamma'$ である。よって、 $\nu$ が不明でも

$$(A \ni \gamma) \wedge (\gamma < 2) \rightarrow (A' \ni \gamma') \quad (45)$$

と書くことができる。式(28)は、 $\gamma_N$ に $\gamma_N$ の最小値を代入しても成立する。式(26)からわかるように、 $\gamma_N$ は、負の $\nu$ の絶対値が減少すると増大する。よって、 $\gamma_N$ の最小値は、負の $\nu$ の絶対値が最大になったときの $\gamma_N$ の値にひとしい。論文VIIのまえがきで述べたように、負の $\nu$ の絶対値の理論的最大値は1である。したがって、 $\gamma_N$ の最小値は、式(26)で $\nu = -1$ とおいた $\gamma_N = 2$ で与えられる。つまり、 $\gamma_N$ が2より小さくはなりえないから、 $\gamma < 2$ ならば、 $\nu$ が負であっても、 $\gamma$ が $\gamma_N$ を超えることはなく、 $A' \ni \gamma'$ となるわけである。式(45)は、式(27)と、 $\gamma_N$ を2とした式(28)との組合せである。

第1表が示すように、 $\gamma$ が領域Aに属するばあいが5回あった。これら5箇の $\gamma$ のうち、4箇は15より大で、残りの1箇は1.58 (0.001/dayの単位で $\epsilon_1 = 8.74$ ,  $\epsilon_3 = 5.54$ ; 1976/III/11)であった。この1.58にひとしい $\gamma$ は式(45)の左辺の仮定をみたす。よって、ここに、両主応力が共に正である場合がひとつ確認された。

残りの4箇の $\gamma$ 、すなわち15より大きい $\gamma$ に対応する $\gamma'$ には、 $\nu$ が負のばあい領域D'に属する可能性がある。しかし、 $\nu$ が負になるのは稀だから、4箇のうち少なくとも2箇は $\nu$ が正の場合のものであるとしてよいであろう。すると、 $A \ni \gamma$ のとき、両主応力が共に正であるばあいが少くとも3回おこったことになる。

(ii)  $D \ni \gamma$ のばあい。式(43)が示すように、 $\nu$ が正で、負の $\gamma$ の絶対値が負の $\gamma_N$ の絶対値よりも大きければ、 $A' \ni \gamma'$ である。第1表の第3行に、領域Dを $\gamma_N$ の値によって5箇の小領域に分け、各小領域に属する $\gamma$ の実測値の箇数を $n_D$ として示した。塑性ポアソン比 $\nu$ の値は、多くのばあい、0.1と0.3との間にあると推定される。それで $\nu = 0.2$ と仮定すると、 $\nu = 0.2$ に対応する $\gamma_N = -4$ を絶対値において超える $\gamma$ の実測値の箇数は、第1表により、 $4 + 4 = 8$ となる。このことから、 $D \ni \gamma$ の歪速度実測のうち、両主応力が共に正である場合が少くとも8回はあったと言えるであろう。

以上、361箇の $\gamma$ の実測値のうち、確実に両主応力を共に正ならしめるものが1箇あることを知った。ほとんど確実に正ならしめるものを合せると11箇になる。それでも、実測値全体の3%にあたる数にすぎない。第III章第4節で、両主応力が共に正のばあいは稀であろうと推定した。上の結果は、この推定を裏づける。

斜面積雪がランキン応力状態にあるときは、第1図(b)のばあいと同様に、両主応力が共に正になることはない。したがって、両主応力が共に正になると予想される場合に、ランキンの応力状態を仮定する「従来の方法」を、実測主歪速度から主応力を算出する方法として使うのは、適当でない。

### 3. 通常型でない曲線 $C_H$ の存在

第II章第5節で、斜面積雪内の一点Pから、点Pを通る曲線 $C_V$ の上側にむかって出発して、積雪表面に達するかそれに漸近する曲線 $C_H$ を通常型ということとした。(これからあと、「積雪表面に達するかそれに漸近する」を、単に「積雪表面に達する」で表す)。さらに、大抵のばあい、曲線 $C_H$ は通常型であるとも述べた。そして実際に、前の第2節で知った、両主応力が共に正である場合の稀な存在が、次に示すように、通常型でない曲線 $C_H$ の稀な存在の証拠

となるのである。

第2図 (b) は、2次元的に流動する斜面積雪の最大傾斜方向の鉛直断面である。曲線  $S_0$  が積雪表面を、曲線  $G$  が地面を表す。微小線分  $AB$  および  $CD$  は、それぞれ、曲線  $C_V$  の微小部分である。曲線  $AA'A''$  と  $BB'B''$  とは、通常型の曲線  $C_H$  として積雪表面に達する。曲線  $CC'$ 、 $DD'$  も曲線  $C_H$  であって、図には示していない点  $C''$  および点  $D''$  で積雪表面に到達する。ただ、このふたつの曲線は、点  $C$  および点  $D$  から出発するとき、曲線  $C_V$  の微小部分である微小線分  $CD$  の下側にむかう。それゆえ、曲線  $CC'C''$  と曲線  $DD'D''$  とは、曲線  $C_H$  ではあっても通常型ではない。

閉曲線  $AA'A''B''B'BA$  および閉曲線  $CC'C''D''D'DC$  の内部にあって厚さが単位長さにひとしい雪を、それぞれ、雪  $J_A$  および雪  $J_C$  と名づける。両方の雪の前後左右の側面に外の雪が加える力の方向は、側面上のすべての点で水平であり、両方の雪の上端面に加えられる力は存在しない。一方、両方の雪の底面は面  $C_V$  である。したがって雪  $J_A$  と雪  $J_C$  とが、それぞれの底面を通して外部の雪に加える力は、それぞれの雪の重量  $dw_A$  と  $dw_C$  とに等しい。重量  $dw_A$  は底面  $AB$  を通して、その下の雪を下方へ押す。よって底面  $AB$  上の応力の垂直成分  $\sigma_A$  は圧力である。すなわち負である。他方、重量  $dw_C$  は、底面  $CD$  のうへの雪を下方へ引張る。よって底面  $CD$  上の応力の垂直成分  $\sigma_C$  は張力である。すなわち正である。

斜面積雪内のある点  $P$  で両主応力が共に正ならば、点  $P$  を中心とする微小面  $dS$  上の応力の垂直成分  $\sigma_s$  は、微小面  $dS$  の方向の如何にかかわらず、常に正でなければならない。それ故、微小面  $dS$  が面  $C_V$  であるときも、 $\sigma_s$  が正であることが、両主応力が共に正であるための必要条件となる。よって、点  $P$  から発して積雪表面に達する曲線  $C_H$  は、第2図 (b) の曲線  $CC'C''$ 、 $DD'D''$  のような通常型でない曲線  $C_H$  でなければならない。曲線  $AA'A''$ 、 $BB'B''$  のような通常型の曲線  $C_H$  ではありえない。さきに述べたように、両主応力を共に正ならしめる主歪速度が実測された。したがって、以上により、正常型でない曲線  $C_H$  の存在が、実測にもとづいて証明されたことになる。

次に発表する論文でそれを説明する予定だが、曲線  $C_H$  は地面から発して積雪表面におわる。上の議論は、このことを前提として成り立つ。両主応力が共に正であるのは稀だから、地面と積雪表面とをつなぐ1本の曲線  $C_H$  のうえで両主応力が共に正であるとしても、それは曲線の極めて短い部分に限られる。通常型でない曲線  $C_H$  とは、その極めて短かい部分内に始点をもち積雪表面上に終点をもつ曲線部分である。通常型であるかないかは、1本の曲線  $C_H$  の全長にかかわることではない。

#### 4. 2次元静水圧の欠如

第2図 (a) の点  $L$  では、 $\nu$  の値とは無関係に、 $r=r'=1$  である。それ故、 $r$  が領域  $B$  内で1に近づけば、 $r'$  が領域  $B'$  内で1に近づく。つまり、 $\epsilon_1$  と  $\epsilon_3$  とが共に負で互に等しくなれば、 $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  とは同じ負の値をとり、2次元静水圧が生ずる。「2次元」と限定するのは、 $\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3)$  の関係により、 $\nu$  が0.5でない限り、 $\sigma_2$  が  $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  とに一致することがないからである。

第1表にみられる通り、領域  $B$  に属する  $r$  の数は10である。そのうちにひとつ0.81 (1977/II/24) という、割合に1に近い値のものがある。しかし、 $\epsilon_1$  も  $\epsilon_3$  も絶対値が非常に小さいから、

測定誤差を考えると、この  $\gamma$  の値は信用できない。次に 1 に近いのは 0.58 (1972/III/3) で、残りの 8 箇所は 0.4 より小さい。結局、歪速度の実測を 361 回おこなっても、2 次元静水圧は見つからなかったわけである。それで、一般にも、斜面積雪のなかに 2 次元静水圧は発生しない、あるいは、発生するとしても非常に稀である、と言ってよいであろう。

6. 純粋剪断歪

第 2 図 (a) の点 M では、塑性ポアソン比  $\nu$  の大小には無関係に  $\gamma = \gamma' = -1$  である。それ故、 $\epsilon_1 = -\epsilon_3 > 0$  ならば必ず  $\sigma_1 = -\sigma_3 > 0$  であると言える。すなわち、点 M で表される状態の雪は、流動面内のふたつの主応力の方向を二等分する二り面にそって剪断歪をおこしつつある。二り面上の応力に剪断成分はあるが垂直成分はないし、流動面に直角な第 2 主応力の値  $\sigma_2$  も 0 である。それ故、この雪がおこしつつある歪は純粋剪断歪 (pure shear) にほかならない。

歪速度実測の結果  $\gamma = -1$  となったら、 $\nu$  の値が不明でも、 $\gamma' = -1$  であることが判る。いま、 $\gamma' = -1$  のばあいの  $\varphi$ ,  $\psi$  を  $\varphi_M$ ,  $\psi_M$  で表すと、論文 IX の式 (14), 式 (15) から

$$\varphi_M = 2\alpha - 90^\circ, \quad \psi_M = 2\alpha \tag{46}$$

の関係がえられる。斜面積雪内の純粋剪断歪をおこしつつある点では、曲線  $C_H$  と曲線  $C_V$  とが直角に交ることになる。

第 2 表 実測された純粋剪断歪速度 ( $\epsilon_1, \epsilon_3$  の単位は 0.001/day)

	年	月 日	$\epsilon_1$	$\epsilon_3$	$\gamma$	$\alpha$	$\varphi_M$	$\psi_M$	$\theta$
1	1972	II 1	2.98	-2.98	-1.000	20°	-50°	40°	32°
2	"	II 16	3.03	-3.18	-0.953	-5°	80°	-10°	33°
3	"	III 3	0.915	-0.949	-0.964	-7°	76°	-14°	32°
4	1973	III 7	3.43	-3.32	-1.033	13°	-64°	26°	32°
5	"	III 27	6.94	-6.93	-1.002	17°	-56°	34°	29°
6	1976	II 26	3.73	-3.91	-0.954	-35°	20°	-70°	31°
7	1977	II 24	2.55	-2.47	-1.032	13°	-64°	26°	32°

純粋剪断歪速度に近い歪速度が、第 2 表のように、361 回の実測のうち 7 回現れた。いずれの場合も、 $\gamma$  が -0.95 と -1.05 との間であり、 $\epsilon_1$  と  $-\epsilon_3$  とが 5% の誤差以内で一致している。よって、主応力比  $\gamma'$  の値も -1 に近いに違いない。したがって、第 1 表にある実測された  $\alpha$  を用いて式 (46) から算出した同じ表の  $\varphi_M$ ,  $\psi_M$  は、実際の  $\varphi$ ,  $\psi$  にほぼ等しい筈である。ところで、歪速度の実測値からランキンの応力状態を仮定して応力を求める「従来の方法」では、論文 IX の第 IV 章第 5 節の最後で指摘したように、はじめから、 $-\psi$  を実測点の斜面の傾斜角  $\theta$  と同じであると仮定する。しかるに、第 1 表では、 $-\psi_M$  と  $\theta$  とがかけ離れて違う。よって、 $\gamma$  が -1 に近いときに「従来の方法」で応力を求めると、それには大きな誤差が伴うことになる。

IV. あとがき

面  $C_H$  および面  $C_V$  が水平面となす角  $\varphi$  および  $\psi$  と主応力との関係を眼で理解するための一助として第 1 図をかいた。この図は、主応力も  $\varphi$ ,  $\psi$  も計算によって定めやすい、ランキン応

力状態にある斜面積雪についてのものである。斜面の傾斜角 $\theta$ は $30^\circ$ とした。同様な図を $\theta$ をいろいろに変えて描けば、三つのものの間の関係を更に詳しく見ることができる。しかし、論文 VIII<sup>3)</sup>の第 III 章第 1 節の終りで述べたように、ランキン応力状態では現れえない応力も存在するから、それで全部の関係が見つくされるとは言えない。

論文 IX の理論では、積雪を圧縮性粘性流体と仮定するから、まえがきで述べたように、積雪の塑性ポアソン比 $\nu$ の値が知られば、実測される主歪速度比 $\dot{\gamma}$ から主応力比 $\dot{\gamma}'$ がきめられる。しかし、現在は、 $\nu$ の値が殆ど知られていない。それで、この論文 X では、 $\dot{\gamma}$ と $\dot{\gamma}'$ との間の関係のうちから $\nu$ の値の如何に拘ずなりたつものを探しだし、それを低温科学研究所の雪害科学部門がえた 361 にのぼる斜面積雪内歪速度実測値と対比した。その結果、斜面積雪内に 2 次元静水圧が極めて発生しにくいこと、また、従来の応力決定法が用いられないような主歪速度が実際に存在することを示すことができた。

この論文を書くにあたっては、低温科学研究所雪害科学部門主任の藤岡敏夫教授から多くの教示と助言とをえた。ここに記して感謝の意を表す。

## 文 献

- 1) 吉田順五 1980 斜面積雪の挙動の研究 VII. 低温科学, 物理篇, **39**, 1-16.
- 2) 吉田順五 1981 斜面積雪の挙動の研究 VIII. 低温科学, 物理篇, **40**, 25-35.
- 3) 吉田順五 1981 斜面積雪の挙動の研究 IX. 低温科学, 物理篇, **40**, 37-49.
- 4) 藤岡敏夫・他 1978, 1979, 1980 斜面積雪の歪速度と応力 I, II, III. 低温科学, 物理篇資料集, **36-37**, 39-69; **38**, 33-37; **39**, 13-33.

## Summary

1. The author defined in the previous Paper IX curves  $C_H$  and  $C_V$  in order to use them in a method for calculating two-dimensional stresses from the strain rates actually measured within a snow cover lying on a mountain slope. Horizontal coordinate  $x$  and vertical coordinate  $z$  are placed in the vertical plane parallel to which the snow cover flows down the slope two-dimensionally. Curves  $C_H$  and  $C_V$  lie in that vertical plane ( $zx$ ).

2. Figure 1 of the text shows in its upper half (a) curves  $C_H$  which lie in the vertical section of an imaginary snow cover uniformly deposited on an infinitely long plane ground inclined at  $30^\circ$  against the horizontal. Curves  $C_V$  are not drawn in the figure, because they are simply straight lines extending parallel to surface  $S_0$  of the snow cover.

3. Crossing straight lines in Fig. 1(b) give principal stresses in the same imaginary snow cover. The straight lines have respectively an arrow head or a nail head at their ends according as the principal stresses which they represent are tension or pressure.

4. The above imaginary snow cover is assumed to be uniform in nature and to be subjected to a tension or a pressure, in the direction of the sloping ground, whose value  $\sigma'_x$  is constant throughout the snow cover. Such assumptions make easy the calculations needful for determining curves  $C_H$  and the principal stresses. Let  $w_G$  denote the weight of a vertical snow pillar of a unit sectional area cut out of the snow cover. Curves  $C_H$  and the principal stresses in Fig. 1 each differ in the value of the ratio  $q = \sigma'_x / w_G$ .

5. If figures similar to Fig. 1 are made with angles other than  $30^\circ$  for the slope of the

ground, it will make a useful means for visualizing the relationship that relates the principal stresses with  $\phi$  and  $\psi$ , respective angles at which the tangents to curves  $C_H$  and  $C_V$  tilt against the horizontal. But the relationship cannot be known exhaustively in that way, because there can be such stresses as called 'strees N' in the English summary of Paper VIII.

6. Of the two principal stresses in plane  $(zx)$ , an algebraically greater one is designated the first principal stress  $\sigma_1$ , while the other is designated the third principal stress  $\sigma_3$ . The second principal stress  $\sigma_2$  lies perpendicular to plane  $(zx)$ . The first and third principal strain rates  $\dot{\epsilon}_1$  and  $\dot{\epsilon}_3$  are defined in the similar manner:  $\dot{\epsilon}_1$  is algebraically greater than  $\dot{\epsilon}_3$ . The principal stresses and the principal strain rates have their axes in common. Directions of the axes are given by angle  $\alpha$  measured from the horizontal toward the axis of the first principal strain rate  $\dot{\epsilon}_1$ .

7. The subject is here changed to the determination of curves  $C_H$  and  $C_V$  in actual snow covers. These curves can be drawn when angles  $\phi$  and  $\psi$  are given, and these angles can be given by Eqs. (4) and (5) in the English summary of Paper IX, when  $\gamma' = \sigma_1/\sigma_3$  and  $\alpha$  are known. Angle  $\alpha$  and principal strain rates  $\dot{\epsilon}_1$  and  $\dot{\epsilon}_3$  can be determined by actual measurements made on the actual snow covers. Thus there remains a problem of finding a means for determination of  $\gamma'$  from  $\dot{\epsilon}_1$  and  $\dot{\epsilon}_3$ .

8. The snow is assumed, as done in Papers VII, VIII and IX, to be a compressive viscous fluid of density  $\rho$ , viscosity  $\eta$  and plastic Poisson's ratio  $\nu$ . Then  $\gamma'$  can, as shown in Paper IX, be determined from  $\dot{\epsilon}_1$  and  $\dot{\epsilon}_3$  by use of the relation

$$\gamma' = \left\{ (1-\nu)\gamma + \nu \right\} / \left\{ (1-\nu) + \nu\gamma \right\}, \quad (1)$$

where  $\gamma = \dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_3$ . If  $\gamma$  approaches the value

$$\gamma_N = -(1-\nu)/\nu, \quad (2)$$

$\gamma'$  increases or decreases infinitely.

9. It is proved, on the above assumption of compressive viscous fluid, that the first (third) principal strain rate  $\dot{\epsilon}_1$  ( $\dot{\epsilon}_3$ ) and the first (third) principal stress  $\sigma_1$  ( $\sigma_3$ ) have the same axis in common. The first (third) principal strain rate  $\dot{\epsilon}_1$  ( $\dot{\epsilon}_3$ ) never has its axis coincided with that of the third (first) stress  $\sigma_3$  ( $\sigma_1$ ).

10. Actual use cannot, however, be made of Eq. (1), because  $\nu$  has so far been scarcely studied with the result that its measured values are at present very few in number. So the following discussions will be limited to such aspects of Eq. (1) that do not depend upon the value of  $\nu$ .

11. Equation (1) is graphed in Fig. 2 (a) of the text with different values given to  $\nu$ . In that figure, all the curves pass through points L and M, at which  $(\gamma, \gamma')$  equals (1, 1) and (-1, -1) respectively. Therefore, if  $\nu$  is unknown in magnitude, the value of  $\gamma'$  is determined as 1 and -1 respectively when  $\gamma$  is equal to 1 and -1.

12. Let the whole ranges of  $\gamma$  and  $\gamma'$  be each divided into the following intervals:

$$A(\gamma > 1), \quad B(1 > \gamma > 0), \quad C(0 > \gamma > -1), \quad D(-1 > \gamma)$$

and

$$A'(\gamma' > 1), \quad B'(1 > \gamma' > 0), \quad C'(0 > \gamma' > -1), \quad D'(-1 > \gamma').$$

This division into intervals serves for relating  $\gamma'$  with  $\gamma$  if loosely. Equations (25) to (45) of the text determine the interval or intervals to which  $\gamma'$  should belong when  $\gamma$  is found to lie in any of its intervals.

13. Some of the staff of the Institute of Low Temperature Science made 361 measurements on the strain rates  $(\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_3)$  which a snow cover induced within itself by flowing down a mountain slope. The angle of the slope was about  $30^\circ$  and the period of the measurements was ten years from 1973 to 1981. They calculated stresses from the measured strain rates by a method which is not always correct as pointed out by the present author in the previous Paper VIII. A stress thus calculated by them shall be called 'stress A'.

14. The above measurements give 361 values of  $\gamma = \dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_3$ . Table 1 of the text shows the distribution of the obtained  $\gamma$ 's among intervals A, B, C and D,  $n$  being the number of  $\gamma$ 's which belong to any one of the intervals. The majority of  $\gamma$ 's, 83% of the total, lies in interval C.

15. As stated in Papers VII and VIII, more than half of the stresses A are found to be 'single vertical principal stresses', stresses characterized by  $\gamma'$  which is small in absolute value and, in addition to it, by a third principal axis which stands nearly vertical. It was shown in the same Papers that a stress A can be correct if it happens to be a single vertical principal stress. As seen from Fig. 2(a), if  $\nu$  is positive,  $\gamma'$  can be small in absolute value only when  $\gamma$  lies in interval C. Thus the presence of numerous single vertical principal stresses makes the main cause for the dominant presence of  $\gamma$  in interval C.

16. Ratio  $\gamma' = \sigma_1/\sigma_3$  is greater than 1 on those portions of the curves in Fig. 2(a) that are drawn by broken lines, and, as seen from Eq. (26) of the text, for  $\gamma'$  greater than 1 both  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  are positive, that is, the snow is subjected to tension in all directions. It is shown that  $\gamma'$  is greater than 1 for all allowable values of  $\nu$  when  $\gamma$  lies between 1 and 2 (Eq. (45) of the text), and, such a  $\gamma$ , if only one at all, is really found in the 361 measurements of  $(\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_3)$ : it is  $(8.74, 5.54) \times 10^{-3}/\text{day}$  which gives  $\gamma$  equal to 1.58. It is noted that a stress A can never have  $\gamma'$  greater than 1.

17. The stress corresponding to point L of Fig. 2(a) may be called 'two-dimensional hydrostatic pressure', because the equation  $\sigma_1 = \sigma_3 < 0$  results when  $\gamma'$  approaches 1 in increasing. As  $\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3)$  is not of the same value as  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  unless  $\nu$  is equal to 0.5, the above stress is not generally a true hydrostatic pressure. Equation  $\sigma_1 = \sigma_3 < 0$  can be valid only when  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3 < 0$ . But, among the 361 measurements mentioned above, there is no case in which  $\dot{\epsilon}_1$  and  $\dot{\epsilon}_3$  are both negative and are equal to each other even approximately. The two-dimensional hydrostatic pressure seems unlikely to occur in a snow cover on a mountain slope.

18. The flowing state of snow represented by point M of Fig. 2(a) is a pure shear, because Eq.  $\gamma = -1$  gives Eq.  $-\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3 < 0$ . The snow is making a Couette flow in the direction which bisects the right angle between the two principal axes of stress or of strain rate. Angles  $\varphi$  and  $\psi$  are found to be  $2\alpha - 90^\circ$  and  $2\alpha$  respectively by putting  $\gamma'$  equal to  $-1$  in Eqs. (4) and (5) of the English summary of Paper IX.

19. Among the 361 measurements of strain rates, there are seven cases shown in Table 2 of the text in which  $-\dot{\epsilon}_1$  is nearly equal to  $\dot{\epsilon}_3$ , the difference between them being less than 5% of their magnitude. In that Table  $\theta$  is the sloping angle of the ground at the spot of measurement. Angles  $\varphi_M$  and  $\psi_M$  are respectively equal to  $2\alpha - 90^\circ$  and  $2\alpha$  calculated from the measured angle  $\alpha$  shown in the Table.

20. Angle  $\psi$  turns out to be equal to  $-\theta$ , if the stress of snow is in 'state A' defined in the English summary of Paper VII, while the stresses A defined in Article 13 above are stresses calculated on the assumption of state A. All the angles  $\psi_M$  much differ from  $-\theta$  in Table 2. Therefore stresses A cannot make correct stresses in these seven cases of pure shear.