



Title	斜面積雪の挙動の研究 X II : 楔形積雪のなかの曲線CHと曲線CV
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科学. 物理篇, 42, 21-38
Issue Date	1984-03-05
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18480
Type	departmental bulletin paper
File Information	42_p21-38.pdf



斜面積雪の挙動の研究 XII*

— 楔形積雪のなかの曲線 C_H と曲線 C_V —

吉田 順五

(北海道大学名誉教授)

(昭和 58 年 9 月受理)

I. ま え が き

筆者は、この論文とおなじ表題の論文 VII¹⁾, VIII²⁾, IX²⁾ ならびに X³⁾ で、平面歪の条件をみたしつつ山の斜面を 2 次元的に流下する積雪について、応力と歪速度との理論的考察を進めてきた。その間、論文 IX で曲線 C_H および曲線 C_V と名づける 2 種類の曲線を導入し、論文 X では、無限に長い平面状斜面に一樣に堆積した仮想積雪のなかの両曲線を図に表した。両曲線の特性を、その図からうかがうためであった。この仮想積雪は、斜面積雪としては最も単純な状態にあるため、そのなかの応力は簡単な数式で表される。それにつれ、応力によって定められる曲線 C_H 、曲線 C_V も簡単な形となり、両曲線の特性で、そこに現れ損ったものが多々あったと想像される。それで、今の論文 XII と次の論文 XIII とでは、曲線 C_H と曲線 C_V とを、多少複雑ではあるがその中の応力が理論的に定められる仮定の斜面積雪について、描く。そして、先の例では出現をみなかった両曲線の特性を探すことにする。

斜面の最大傾斜の方向に立つ鉛直面を「流動面」となづけると、斜面上の積雪は、流動面に平行に、2 次元的に斜面を流下する。曲線 C_H および曲線 C_V の定義は、その要点が論文 X の「まえがき」に見られる。それをさらに要約すると次のようになる。両曲線とも、流動面内にある平面曲線である。流動面内に、座標 x を水平に、座標 z を鉛直上方にとる。曲線 C_H および曲線 C_V が、それぞれ、次の式

$$z = f_H(x, a_H), \quad z = f_V(x, a_V) \quad (1)$$

で表されるとすれば、応力成分 σ_x , σ_z , τ_{zx} を用いて微分方程式

$$df_H/dx = \sigma_z/\tau_{zx}, \quad df_V/dx = \tau_{zx}/\sigma_x \quad (2)$$

が立てられる。つまり、曲線 C_H (C_V) の或る点での切線は、その点での水平(鉛直)面上の応力成分ベクトルと方向が同一である。両曲線は、それぞれ、別箇の曲線群をつくる。各曲線群内での個々の曲線を区別するため、式(1)には副変数 a_H , a_V を含ませた。曲線 C_H (C_V) を含み、流動面に直角な y 方向にひろがる面を曲面 C_H (C_V) となづけると、曲面 C_H (C_V) 上の応力成分を表すベクトルの方向は、曲面 C_H (C_V) 上のすべての点で、流動面に平行かつ水平(鉛直)である。

* 北海道大学低温科学研究所業績 第 2590 号

II. 楔形積雪内の曲線 C_H および曲線 C_V

1. 曲線 C_H および曲線 C_V を考察する斜面積雪

筆者は、20年まえに、無限に長い平面状斜面のうえに、流動面による断面が楔形になるように積った雪のなかの応力を、また、流動面による断面が半円形の斜面に一樣な厚さでつもった雪のなかの応力を、理論的に計算した⁴⁾。この2種類の雪が、「まえがき」でのべた「多少複雑な仮想の斜面積雪」にはかならない。計算された応力の成分 $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{zx}$ を微分方程式 (2) に用いれば、曲線群 C_H および曲線群 C_V が求められる。こうして求めた両曲線群の図に、応力を主応力で表した図をそえる。流動面内にあるふたつの主応力 σ_1 と σ_3 との図である。張力を正の応力、圧力を負の応力として、代数的に大きい方の主応力を σ_1 で、小さい方の主応力を σ_3 で表す。

第一の斜面積雪を楔形(くさびがた)積雪と呼び、第二の斜面積雪を円形積雪と呼ぶことにする。応力を計算するにあたっては、積雪を、一定の値の密度 ρ 、粘性係数 η をもち、かつ塑性ポアソン比 ν が 0.5 に等しい粘性流体であると仮定した。論文 VII ないし X の一連の考察では、斜面積雪を圧縮性粘性流体とみなしている。ところが、 ν が 0.5 であることは非圧縮性を意味する。しかし、非圧縮性は圧縮性のひとつの特別なばあいと考えられるから、 $\nu=0.5$ としても、この一連の考察と不整合にはならない。積雪は、流動面に垂直な y 方向には伸縮することなく、すなわち、平面歪の条件をみたしつつ、流動すると仮定した。よって、 y 方向の主応力 σ_2 は $\nu(\sigma_1 + \sigma_3)$ で与えられる。したがって、 $\nu=1/2$ だから、 σ_2 は σ_1 と σ_3 との平均値にひとしい。

応力を定めるために必要な地面における境界条件には、積雪が地面ですべらないという条件を用いた。積雪の流動速度が地面では消失するとしたわけである。しかし、地面から離れたところでは、すなわち、積雪の内部や表面では、流動速度が 0 でない。したがって、楔形積雪も円形積雪も、その形は一時的のものにすぎない。時がたてば変る。つまり、両積雪とも定常状態にあるのではない。この論文 XII を楔形積雪の考察に、次の論文 XIII を円形積雪の考察にあてる。

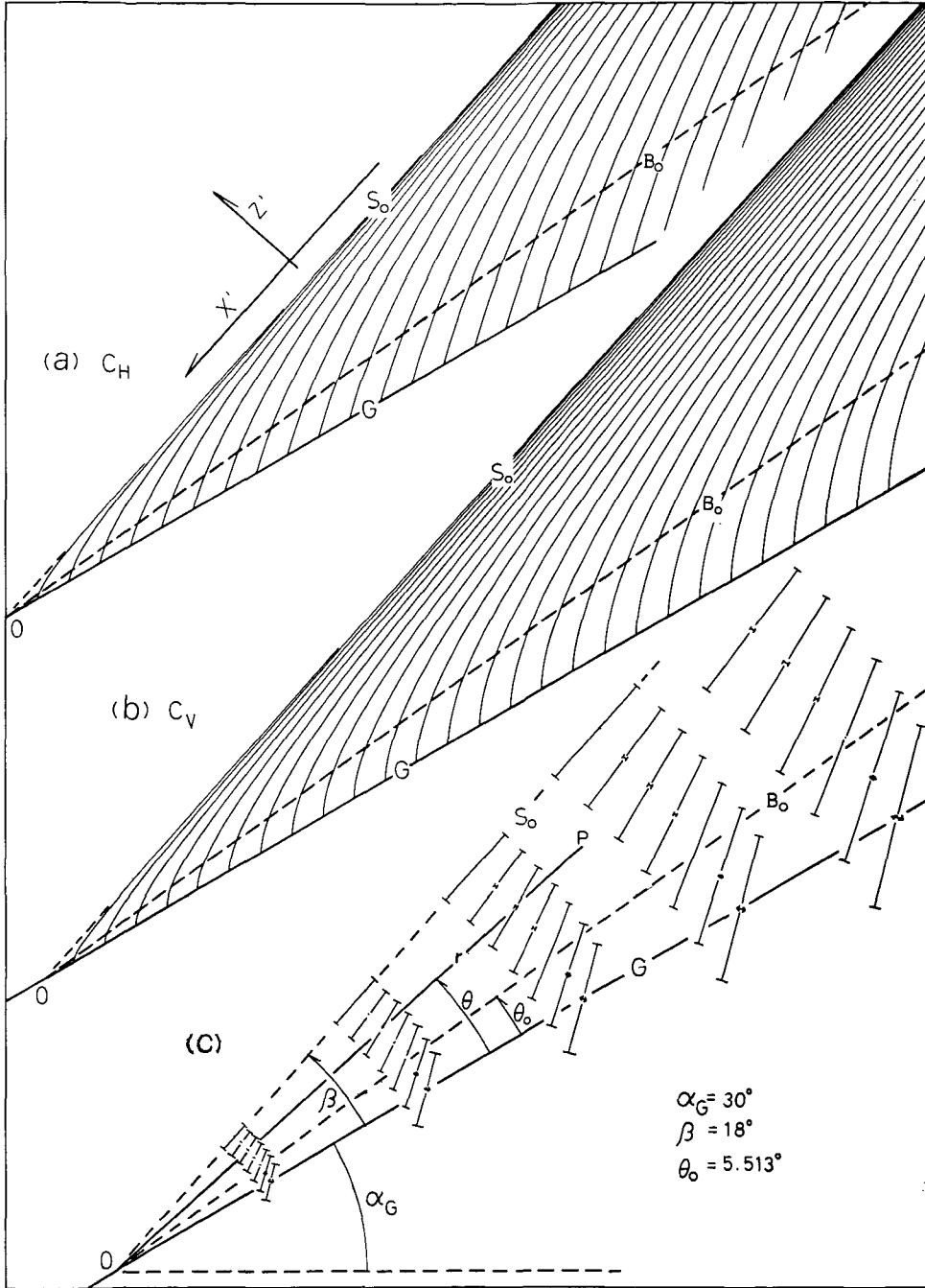
2. 2種類の楔形積雪

第1図と第2図とが、楔形積雪の流動面による断面図である。直線 G が無限に長い平面状斜面を表す。地面上の点 O から発する直線 S_0 が積雪表面で、これもまた無限に長い。楔形積雪は2種類に区別される。ひとつは第1図の楔形積雪である。これでは、斜面を上方にむかうにつれ雪の厚さが増大する。それで、これを「上方増大楔形積雪」と名づける。もうひとつの第2図の楔形積雪は、下方にむかって厚さが増大する。よって、これは「下方増大楔形積雪」と呼ぶことにしよう。

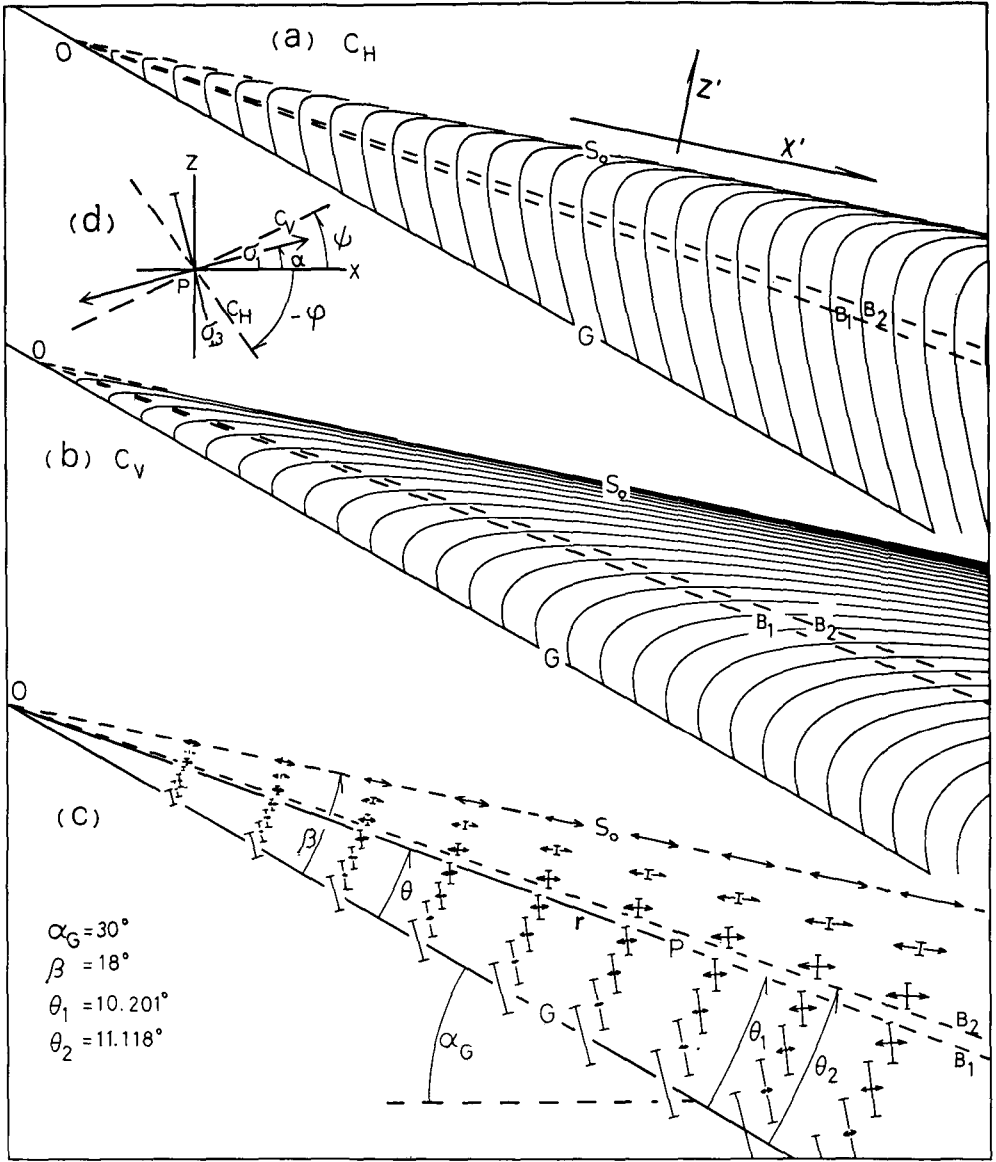
楔形積雪内の任意の点 P の座標には、「まえがき」で述べた直角座標 (x, z) のほかに、第1図および第2図の(c)図に示したような極座標 (r, θ) を用いる。地面 G の水平面に対する傾斜角を α_0 とし、楔形の頂角を、つまり、地面 G の方向から積雪表面 S_0 の方向までの角を β とする。

楔形積雪内の応力を理論的に定めるには、3箇の境界条件が必要である。第1は地面 G で

積雪が滑らないという条件，第2は積雪表面 S_0 上の応力成分が消失するという条件である。
 第3は，地面 G 上の一点と表面 S_0 上の一点とを結ぶなんらかの線のうえで，応力成分が流動



第1図 上方増大楔形積雪内の (a) 曲線 C_H , (b) 曲線 C_V , (c) 主応力。破線 B_0 は「完全単独主応力線」で，その上のすべての点で主応力が完全単独である



第2図 下方増大楔形積雪内の(a)曲線 C_H , (b)曲線 C_V , (c)主応力。破線 B_1 は「純粹剪断歪曲線」で、その上のすべての点で雪は純粹剪断歪をおこしつつある。曲線 B_2 は「水平鉛直主応力線」で、曲線 C_H と曲線 C_V とは、この線上で直角に交りながら、それぞれ、鉛直方向と水平方向とにこの線を通過する

速度成分かが、あらかじめ、与えられているという条件である。しかし、第3の条件を定めるべき適当な根拠が見出しがたい。それで、いわば、第3の条件の代りに理論的に定めやすいという条件をおいて応力を定めた。筆者が20年まえに求めた楔形積雪内の応力はこのようなものであって、文献4-IIの(8)~(14)式、すなわち、次の式で表される。

$$\sigma_r/\rho g R = (r/R) \left[\pm \sin(\alpha_G \pm \theta) \mp (1/2) \sin(\alpha_G \pm \beta) \left\{ p(\beta) \right. \right. \\ \left. \left. (\sin \theta + 3 \sin 3\theta) + q(\beta) (\cos \theta + \cos 3\theta) \right\} \right], \quad (3)$$

$$\sigma_\theta/\rho g R = (r/R) \left[\pm \sin(\alpha_G \pm \theta) \mp (1/2) \sin(\alpha_G \pm \beta) \left\{ 3p(\beta) \right. \right. \\ \left. \left. (\sin \theta - \sin 3\theta) + q(\beta) (3 \cos \theta - \cos 3\theta) \right\} \right], \quad (4)$$

$$\tau_{r\theta}/\rho g R = \pm (r/R) (1/2) \sin(\alpha_G \pm \beta) \left\{ p(\beta) \right. \\ \left. (\cos \theta - 3 \cos 3\theta) - q(\beta) (\sin \theta - \sin 3\theta) \right\}, \quad (5)$$

$$p(\beta) = (\sin 3\beta - \sin \beta)/D, \quad q(\beta) = (3 \cos 3\beta - \cos \beta)/D, \\ D = \cos 4\beta + 4 \cos 2\beta - 3. \quad (6)$$

上式にある正負の複号のうち、上の記号が上方増大楔形積雪用で、下の記号が下方増大楔形積雪用である。無次元量の間の関係として表すため、上式には或る長さ R が使われている。この R は、計算に便利な長さを選べばよい。応力成分 σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ は、みな、 r に比例して増大する。よって、曲線群 C_H (C_V) に属する個々の曲線 C_H (C_V) の形は、座標原点 O を中心として、相互に相似である。

3. 曲線 C_H 曲線 C_V の微分方程式

極座標を用いると、楔形積雪内の曲線 C_H の微分方程式は

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{\pm \sigma_r \sin(\alpha_G \pm \theta) + \tau_{r\theta} \cos(\alpha_G \pm \theta)}{\sigma_\theta \cos(\alpha_G \pm \theta) \pm \tau_{r\theta} \sin(\alpha_G \pm \theta)} \quad (7)$$

で、曲線 C_V の微分方程式は

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{\mp \sigma_r \cos(\alpha_G \pm \theta) + \tau_{r\theta} \sin(\alpha_G \pm \theta)}{\sigma_\theta \sin(\alpha_G \pm \theta) \mp \tau_{r\theta} \cos(\alpha_G \pm \theta)} \quad (8)$$

で与えられる。これら微分方程式にある複号のうち、上(下)の記号が上(下)方増大楔形積雪のばあいに使われる。また、上(下)方増大楔形積雪用の微分方程式内の応力成分には、前節で定めた上(下)方増大楔形積雪用の応力成分を用いる。微分方程式(7)および(8)は、座標 (x, z) による微分方程式(2)を、第1図(c)と第2図(c)とに示した極座標 (r, θ) を用いて表したものに他ならない。

微分方程式(7), (8)を積分すれば曲線 C_H , 曲線 C_V を表す数式がえられる。しかし、その積分は困難である。それで、電子計算機に、微分方程式(7), (8)から直接に、数値計算によって両曲線を描かせた。それが第1図、第2図の(a)図と(b)図とにある曲線群である。第1図、第2図の(c)図にある十字線は、流動面内の主応力 σ_1 , σ_3 を表す。十字に交る直線のうち、矢尻の印を両端につけたものは張力、釘の頭の印を両端につけたものは圧力である。おのおの、その長さによって、張力あるいは圧力の強さを示す。

4. 上方増大楔形積雪内の両種曲線

第1図の(a)図と(b)図とが、それぞれ、 $\alpha_G = 30^\circ$, $\beta = 18^\circ$ の上方増大楔形積雪内の曲線群 C_H

と曲線群 C_V とである。いずれの曲線群も、地面 G から出発して上昇し、わずかつつ右へ弯曲しながら積雪表面 S_0 に漸近する。前にのべたように、同一曲線群に属する各曲線は互に相似形をなしている。ところが、そのうえ、異種曲線群に属する曲線の形の間にも、つまり、曲線 C_H と曲線 C_V との形の間にも、不完全ながら相似性が認められる。この異種曲線間の準相似性は、第1図(c)に示された主応力に特異性があることによる。

流動面内の直角に交るふたつの主応力 (σ_1, σ_3) のうち、一方が他方にくらべ、絶対値において非常に大きいとき、この主応力の組 (σ_1, σ_3) を「単独主応力」と呼ぶことにしよう。そして、絶対値の大きい方の主応力を「単独主応力の強成分」と名づけ、絶対値の小さい方の主応力を「単独主応力の弱成分」と名づける。また、弱成分が0の単独主応力を「完全単独主応力」と称えることにする。第1図(c)に見られるように、上方増大楔形積雪では、主応力の組が、みな、単独主応力である。うえに述べた主応力の特異性とは、このことである。

これら単独主応力の強成分は、すべて、圧力である。しかし、弱成分は、地面ちかくでは張力であるのに、積雪表面に近いところでは圧力に変っている。この弱成分の変換は、第1図(c)の破線 B_0 上でおこる。破線 B_0 上で、弱成分は0にひとしく、単独主応力は完全単独主応力になる。

5. 異種曲線の準相似性

流動面内の一点 P を中心とする、流動面に直角な微小面 dS を考える。微小面 dS の法線ベクトル \mathbf{n} は流動面内にある。点 P における2枚の応力の主面を dS_P, dS'_P とし、それぞれの法線ベクトルを $\mathbf{n}_P, \mathbf{n}'_P$ とする ($dS_P, dS'_P, \mathbf{n}_P, \mathbf{n}'_P$ の添字 P は点 P の P ではない。主応力 Principal stress の P である)。ふたつの主応力の値を σ_0, σ'_0 とすれば、 dS_P および dS'_P 上の応力成分ベクトルは、それぞれ、 $\sigma_0 \mathbf{n}_P$ および $\sigma'_0 \mathbf{n}'_P$ で表される。微小面 dS の法線ベクトル \mathbf{n} が流動面内で或る方向をとったとし、その時の dS 上の応力成分ベクトルを \mathbf{f} とする。また、 \mathbf{n} と \mathbf{n}_P との間の角を χ で表す。すると

$$\mathbf{f} = \sigma_0 \mathbf{n}_P \cos \chi + \sigma'_0 \mathbf{n}'_P \sin \chi \quad (9)$$

の関係がなりたつ。

いま、点 P での主応力が、強成分 σ_0 の単独主応力であるとしよう。すると、 $|\sigma_0| \gg |\sigma'_0|$ だから、 χ が直角に近いばあいを除けば、式(9)右辺の第2項は第1項にくらべ非常に小さい。それで、 \mathbf{f} は $\sigma_0 \mathbf{n}_P \cos \chi$ に、近似的には、等しくなる。したがって、 dS の方向とともに χ の値がかわっても、 \mathbf{f} は方向をほとんどかえない。その値 $|\mathbf{f}|$ はかえても、 \mathbf{n}_P とほとんど同じ方向を指しつづける。角 χ が直角に近いばあいを除いたのは、 χ が直角に近いと $\cos \chi \ll \sin \chi$ となって $|\sigma_0| \gg |\sigma'_0|$ の効果が打消され、式(9)右辺のふたつの項が同じ程度の値になるからである。このばあいには、上のことがなりたたない。

点 P を中心とする水平な微小面を dS_H 、その法線ベクトルを \mathbf{n}_H としよう。また、点 P を中心とし流動面に垂直な鉛直微小面を dS_V 、その法線を \mathbf{n}_V とする。式(2)からわかるように、曲線 $C_H (C_V)$ の点 P における切線は、 $dS_H (dS_V)$ 上の応力ベクトル $\mathbf{f}_H (\mathbf{f}_V)$ と方向がおなじである。ところで、点 P での単独主応力の強成分の方向 \mathbf{n}_P が、水平方向からも鉛直方向からも遠

ければ、 n_H または n_V と n_P との間の角 λ が直角に近くなることはない。すると、うえに述べたことにより、 f_H も f_V も n_P とほとんど同じ方向を指し、 f_H と f_V とが、互にほぼ平行する。これは C_H 、 C_V 両曲線の切線同志の準平行性を意味する。

第1図(c)の主応力は、どこでも単独主応力で、その強成分の方向 n_P が、水平方向に対しても鉛直方向に対しても、かなり傾いている。それで、上方増大楔形積雪内では、どこでも、曲線 C_H の切線と曲線 C_V の切線とがほぼ平行して、両曲線に似た形を与える。前項でのべた異種曲線間の準相似性は、このようにして説明される。

論文 VII¹⁾ および VIII²⁾ でのべたように、実際の斜面積雪内の多くの場所で歪速度を測定し、それから主応力を算出すると、その半数以上が単独鉛直主応力、すなわち、 n_P が鉛直に近い単独主応力である。単独鉛直主応力は、うえの議論から除外された場合に当たる。単独鉛直主応力の点 P では、 n_P と水平微小面 dS_H の法線 n_H との間の角 λ が 0 に近い。よって、 f_H はほぼ鉛直で、曲線 C_H は点 P をほぼ鉛直方向に通過する。しかし、鉛直微小面 dS_V の法線 n_V と n_P との間の角は直角にちかい。すなわち、この場合の λ はほぼ 90° である。よって、 $\cos \lambda \ll \sin \lambda$ であり、 f_V は必ずしも鉛直に近くはない。したがって、曲線 C_V は、点 P を曲線 C_H に対して大きく傾きながら通過しうる。

6. 水平でも鉛直でもない完全単独主応力

完全単独主応力の強成分の方向の単位ベクトル n_P を特に N_P と書くことにする。点 P での主応力が完全単独ならば、 α'_0 が 0 だから、式(9)左辺の f と N_P とは点 P で、方向が完全に一致する。よって、 N_P が水平あるいは鉛直でない限り、曲線 C_H と曲線 C_V とは、点 P で、 N_P とおなじ方向の共通切線をもつ。第1図(c)の破線 B_0 上では、どこでも、主応力が完全単独である。しかも、 N_P は水平でもなく鉛直でもない。破線 B_0 と地面 G との間の角 θ_0 は 5.513° であり、 N_P と水平方向との間の角度は 68.553° にひとしい。それで、地面 G から発した曲線 C_H と曲線 C_V とは、おのおのその傾きを破線 B_0 上の N_P の傾きに近づけつつ破線 B_0 に接近し、破線 B_0 上で接しあって合体し、破線 B_0 を通過しおわると再び離れる。破線 B_0 通過のとき、両曲線は交叉しない。

積雪表面がどんな形の曲面であっても、切平面上の応力成分は、表面上のすべての点で消失する。そのため、表面上のどこでも、3本の応力主軸のうちの1本は表面の法線と一致し、他の2本は切平面的な横たわり、法線方向の応力の主値は 0 になる。二次元的に流動する斜面積雪のばあいには、流動面と積雪表面との交線 S_0 上のすべての点で、主応力は完全単独であり、 N_P と表面曲線 S_0 の切線とが方向を共にすることになる。よって、曲線 S_0 は表面をあらわすと同時に、その切線が水平または鉛直になる部分を除いて常に、曲線 C_H でもあり、また、曲線 C_V でもある。このことのため、第III章で示すように、曲線 C_H と曲線 C_V との積雪表面付近での一般的性質が、比較的簡単に、理論的に定められる。ただし、積雪表面に応力が全く存在せず、表面の完全単独主応力が消滅するばあいは除く。

第1図第2図の積雪表面をあらわす直線 S_0 が、同時に、曲線 C_H と曲線 C_V とであることはいうまでもない。第1図の破線 B_0 の方向がその上の完全単独主応力の方向 N_P と一致しないのは、破線 B_0 が積雪の表面ではなく内部にあるためである。

7. 下方増大楔形積雪

第2図に、下方増大楔形積雪のなかの曲線 C_H 、曲線 C_V および主応力を示した。第1図の上方増大楔形積雪とおなじく、地面の傾斜角 α_G は 30° 、楔形の頂角 β は 18° である。曲線 C_H も曲線 C_V も、地面 G から出発すると考えると、第1図のばあいと同様、積雪の厚さが増大する方へ弯曲しながら積雪表面 S_0 へ漸近する。

第2図(c)では、地面を表す直線 G のうえで、主応力が完全単独のように見えるが、厳密にはそうでない。正の弱成分の値が負の強成分の絶対値の 0.14% にすぎない、完全単独主応力に非常に近い単独主応力である。強成分の方向 n_P の鉛直方向からの偏りも小さくはない。このため、地面付近では、図(a)図(b)にみられるように、曲線 C_H と曲線 C_V とはほとんど平行である。地面 G から離れると、第1図のばあいと違い、応力が単独主応力ではなくなる。それで、異種曲線間の準平行性はみられない。

第1図の破線 B_0 のような、その上の主応力が完全単独で、曲線 C_H と曲線 C_V とが合体して切線を共有しながらそれを通過する完全単独主応力線は、第2図に存在しない。その代り、次の第8節でのべるように、その上のすべての点で曲線 C_H と曲線 C_V とが直角に交叉する直線が2本存在する。

8. 曲線 C_H と曲線 C_V との交叉角

第2図(d)に示したように、流動面内の点 P における、曲線 C_H および曲線 C_V と水平座標軸 x との間の角を、それぞれ、 φ および ψ とする。ただし、 φ も ψ も x の正の方向から反時計まわりに測ることとし、その変域を $-\pi/2$ と $+\pi/2$ との間に限る。それゆえ、式(2)にあるふたつの式は、それぞれ、 $\tan \varphi$ および $\tan \psi$ にひとしい。また、点 P における第1主応力と水平座標軸との間の角を α とし、 α の測りかたと変域とは φ 、 ψ のばあいと同じとする。まえに述べたとおり、第3主応力 σ_3 は第1主応力 σ_1 より代数的に小さいように選んで、 $\gamma' = \sigma_1/\sigma_3$ とおく。すると、論文 IX の式(14)式(15)で表される関係

$$\tan \varphi = (\gamma' \tan \alpha + \cot \alpha) / (\gamma' - 1), \quad \tan \psi = (\gamma' - 1) / (\gamma' \cot \alpha + \tan \alpha) \quad (10)$$

が導かれる。

点 P での曲線 C_H と曲線 C_V との交叉角は $\varphi - \psi$ か $\psi - \varphi$ かで表される。どちらを用いてもよい。式(10)を使うと

$$\tan(\varphi - \psi) = \left\{ \gamma' / (\gamma'^2 - 1) \right\} (1/\sin \alpha \cos \alpha) \quad (11)$$

の関係がえられる。それゆえ、 α が 0 でも直角でもない場合に、 γ' が 0 か無限大ならば、つまり主応力が完全単独ならば、 φ と ψ とは相ひとしくなる。すなわち、曲線 C_H と曲線 C_V とは、点 P を通過するとき合体する。第1図の破線 B_0 のうえでは、 α が 0 でも直角でもなく、 γ' が 0 であった。

曲線 C_H と曲線 C_V との交叉角 $(\varphi - \psi)$ が直角になるのは、式(11)の右辺が無限大になるときである。主応力比 γ' が ± 1 にひとしいか、 α が 0 あるいは直角であるか、両方が同時になりたつたかの場合に、式(11)の右辺は無限に大きい。第2図では(1) $\gamma' = -1$ で α が 0 でも直角でも

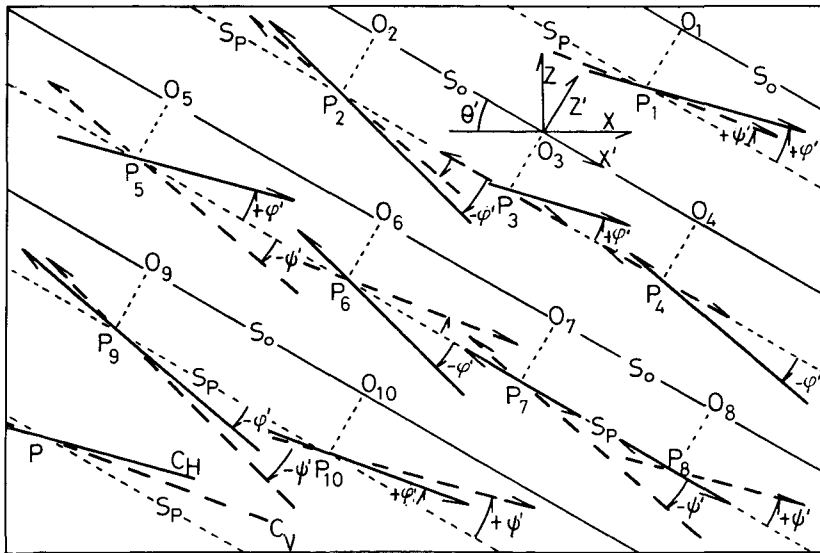
ない場合と(2) $r' \neq \pm 1$ で $\alpha = 0$ である場合とがおりうる。第2図の破線 B_1 のうえのすべての点で(1)の条件がみたされる。両主応力が $\sigma_1 = -\sigma_3 > 0$ の関係にあるから、破線 B_1 上では純粋剪断歪が生じつつある。このばあい $\theta = \theta_1 = 10.201^\circ$, $\alpha = 1.521^\circ$, $\varphi = -86.958^\circ$, $\psi = 3.042^\circ$ である。第2図の破線 B_2 のうえでは(2)の条件がみたされる。このばあい $\theta = \theta_2 = 11.118^\circ$, $\varphi = 90^\circ$, $\psi = 0^\circ$ であり、 r' は負でその絶対値が1より少し大きい。破線 B_2 を、曲線 C_H は鉛直方向に、曲線 C_V は水平方向に通過する。また、破線 B_2 上の主応力の強成分は張力として水平方向に、弱成分は圧力として鉛直方向にはたらく。この第2図の破線 B_1 と破線 B_2 とが前節のおわりでのべた2本の直線である。

III. 積雪表面付近の曲線 C_H と曲線 C_V

前章の第6節で、曲線 C_H と曲線 C_V との積雪表面ちかくでの性質は、簡単な理論で取扱えると述べた。この第III章がその理論である。積雪表面は傾斜した平面とする。理論が対象とするのは、積雪表面上の一点に極めて近い微小範囲内の応力である。積雪表面が曲面であっても、微小範囲内にあるその面分は平面とみなしてよい。それゆえ、この章の理論の結果は、弯曲した2次元積雪表面のばあいにも、そのまま使える。

1. 曲線 C_H および曲線 C_V の積雪表面付近における方位角 φ' および ψ'

積雪表面は傾斜平面で、水平面とのあいだに角 θ' をはさむとする。第3図にある4本の直線 S_0 は、みな、流動面と積雪表面との交線を表す。直線 S_0 のうえ任意の位置に座標原点 O_i ($i=1, 2, \dots, 10$) をえらぶ。第3図の上から2番目の直線 S_0 のうえに示したように、各原点 O_i から、直線 S_0 にそい下方に座標 x' を、直線 S_0 と直角上方に座標 z' をとる。また、点 O_i を原点として水平座標 x と鉛直座標 z とをおく。点 P_i は、座標軸 z' のうえ、原点 O_i から微小距



第3図 応力が存在する積雪表面 S_0 付近の曲線 C_H と曲線 C_V との断片。
第1表の右半分の図示

離 $-dz'$ ($dz' < 0$) だけ積雪内部に進んだ位置にある。以下、曲線 C_H および曲線 C_V が点 P_i を通過するときの方向を論ずる。

第3図の10個の点 P_i のそれぞれを通過して、実線および破線の線分がひいてある。実線分が曲線 C_H の一部、破線分が曲線 C_V の一部である。各曲線を積雪表面 S_0 にむかって辿ることにして、その向きを矢印で示した。この向きは、前章第5節で定義した応力成分ベクトル \mathbf{f}_H あるいは \mathbf{f}_V の向きと同じとは限らない。曲線 C_H にも曲線 C_V にも元来向きはなく、ただ、その切線方向が \mathbf{f}_H あるいは \mathbf{f}_V の方向と一致するだけだからである。点 P_i を通過するときの両曲線の方位に、積雪表面の応力状態によって、この図に示したような10個の種類の生ずることが、これから先の理論で明らかにされる。

積雪表面 S_0 のうえでは、すなわち座標軸 x' のうえでは、応力が完全単独主応力で、その強成分の方向 \mathbf{N}_P は座標軸 x' の方向と一致する。よって、座標 (x', z') に関する応力成分 σ'_x , σ'_z , τ'_{zx} のうち、 σ'_z と τ'_{zx} とは、座標軸 x' の上のすべての点で0である。それで、座標原点 O_i における値を括弧 () に包んで表すことにすると

$$(\sigma'_z) = (\tau'_{zx}) = (\partial\sigma'_z/\partial x') = (\partial\tau'_{zx}/\partial x') = 0 \quad (12)$$

と書くことができる。応力成分 σ'_x だけは、座標軸 x' のうえで0でない値をとりうる。ただし、0にもなりうる。座標軸 x' のうえの σ'_x を特に I で表すことにしよう。すると、点 P_i における応力成分 σ'_x , σ'_z , τ'_{zx} は

$$\sigma'_x = (I) + (\partial\sigma'_x/\partial z') dz', \quad \sigma'_z = (\partial\sigma'_z/\partial z') dz', \quad \tau'_{zx} = (\partial\tau'_{zx}/\partial z') dz' \quad (13)$$

として表される。

積雪の密度 ρ , 重力加速度 g を用いて、応力の平衡方程式が

$$\left. \begin{aligned} \partial\sigma'_x/\partial x' + \partial\tau'_{zx}/\partial z' + \rho g \sin \theta' &= 0 \\ \partial\sigma'_z/\partial z' + \partial\tau'_{zx}/\partial x' - \rho g \cos \theta' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

と書かれる。この方程式は座標原点 O_i でもなりたつから、その各項は括弧 () に包んでもよい。すると、式(12)により

$$\left. \begin{aligned} (\partial\tau'_{zx}/\partial z') &= -\left\{ (\partial I/\partial x') + \rho g \sin \theta' \right\} \\ (\partial\sigma'_z/\partial z') &= \rho g \cos \theta' \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

の関係が導かれる。

曲線 C_H (C_V) の点 P_i での切線は、点 P_i を中心とする水平(鉛直)微小面 dS_H (dS_V) のうえの応力成分ベクトル \mathbf{f}_H (\mathbf{f}_V) と方向がおなじである。つまり、曲線 C_H (C_V) は、点 P_i を \mathbf{f}_H (\mathbf{f}_V) の方向に通過する。ところで、 \mathbf{f}_H および \mathbf{f}_V は、点 P_i における応力成分 σ'_x , σ'_z , τ'_{zx} を用いて

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_H &= (-\sigma'_x \sin \theta' + \tau'_{zx} \cos \theta') \mathbf{i}' + (\sigma'_z \cos \theta' - \tau'_{zx} \sin \theta') \mathbf{k}' \\ \mathbf{f}_V &= (\sigma'_x \cos \theta' + \tau'_{zx} \sin \theta') \mathbf{i}' + (\sigma'_z \sin \theta' + \tau'_{zx} \cos \theta') \mathbf{k}' \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

と書き表される。ここに \mathbf{i}' および \mathbf{k}' は、それぞれ、 x' の正の方向および z' の正の方向の単位ベクトルである。座標 x' の正の方向から \mathbf{f}_H および \mathbf{f}_V の方向へ、すなわち曲線 C_H の切線およ

び曲線 C_V の切線の方向へ、反時計まわりにはかった角を、それぞれ φ' および ψ' としよう。すると、 φ' および ψ' の正切は、式 (16) の k' の係数を l' の係数で割ったものに等しいから

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi' &= (\sigma'_z \cos \theta' - \tau'_{zx} \sin \theta') / (-\sigma'_x \sin \theta' + \tau'_{zx} \cos \theta') \\ \tan \psi' &= (\sigma'_z \sin \theta' + \tau'_{zx} \cos \theta') / (\sigma'_x \cos \theta' + \tau'_{zx} \sin \theta') \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

の関係がえられる。前章の第 8 節では、水平座標 x の正の方向から、曲線 C_H (C_V) の切線の方向まで反時計まわりにはかった角を φ (ψ) とした。よって φ' (ψ') は $\theta' + \varphi$ ($\theta' + \psi$) に等しい。

2. 曲線 C_H 曲線 C_V の積雪表面への接近形態

式 (13) の σ'_x , σ'_z , τ'_{zx} を式 (17) の σ'_x , σ'_z , τ'_{zx} として用い、さらに式 (15) を使うと、曲線 C_H および曲線 C_V が点 P_i を通過する時の方位角 φ' , ψ' を与える数式がえられる。ただ、この数式は、座標原点 O_i における σ'_x の値 (I) が 0 であるか否かで形を異にする。

(i) ($I \neq 0$) のばあい。点 P_i での φ' , ψ' は次式で与えられる。

$$F_V = \rho g + \sin \theta' \cdot \partial I / \partial x', \quad (18)$$

$$\tan \varphi' = -dz'(F_V) / (I) \sin \theta' = \tan \psi' - \left\{ dz' \rho g / (I) \sin \theta' \right\}, \quad (19)$$

$$\tan \psi' = -dz'(\partial I / \partial x') / (I). \quad (20)$$

(ii) ($I = 0$) のばあい。点 P_i での φ' , ψ' は次式で与えられる。

$$\tan \varphi' = -(F_V) / \left\{ \rho g \sin \theta' \cos \theta' + (\partial I / \partial x') \cos \theta' + (\partial \sigma'_x / \partial z') \sin \theta' \right\}, \quad (21)$$

$$\tan \psi' = (\partial I / \partial x') \cos \theta' / \left\{ \rho g \sin^2 \theta' + (\partial I / \partial x') \sin \theta' - (\partial \sigma'_x / \partial z') \cos \theta' \right\}. \quad (22)$$

はじめの ($I \neq 0$) のばあいには、 $\tan \varphi'$ も $\tan \psi'$ も $dz' \rho g / (I)$ あるいは $dz'(\partial I / \partial x') / (I)$ の程度の微小値である。よって、 φ' も ψ' も絶対値が非常に小さく、曲線 C_H と曲線 C_V とは、表面 S_0 とほとんど平行な方向に点 P_i を通過する。しかも、点 P_i が座標原点 O_i に近ければ近いほど φ' , ψ' の絶対値は小さく、点 P_i における両曲線と表面 S_0 との平行性が強くなる。このことは、表面 S_0 のうえ、(I) が 0 にならない範囲全体にわたっていえる。それで、両曲線は表面 S_0 を漸近線として、それに向って近づく。これに反し、あとの ($I = 0$) の場合には、 $\tan \varphi'$ も $\tan \psi'$ も有限な値をもち、その値は点 P_i と原点 O_i との間の距離によって変らない。したがって、曲線 C_H も曲線 C_V も、表面 S_0 に、有限な角かたむいて、到達する。ただ、両方のばあいとも、 $(\partial I / \partial x') = 0$ ならば ψ' が 0 で曲線 C_V が表面 S_0 に平行し、 $(F_V) = 0$ ならば φ' が 0 で曲線 C_H が表面 S_0 に平行する。よって、曲線 C_H あるいは曲線 C_V が、表面 S_0 に漸近しないことも、あるいは到達しないことも、例外としてありうる。

うえに述べた曲線 C_H や曲線 C_V の表面 S_0 への漸近には、ふたつの場合がある。ひとつは表面 S_0 の上手にむかって昇りつつ漸近する場合であり、他は、表面 S_0 の下手にむかって降りつつ漸近する場合である。前のばあいを「上手漸近」、あとの場合を「下手漸近」と呼ぶことにする。

第 3 図からわかるように、点 P_i を通り表面 S_0 に平行な直線を S_P とすると、 φ' (ψ') が正の

ばあいには、曲線 $C_H(C_V)$ が、表面 S_0 の下手を指向しながら、直線 S_P を下から上へ抜ける。このことを、曲線 $C_H(C_V)$ は点 P_i で「下手指向」であるということにする。逆に、 $\varphi'(\psi')$ が負ならば、これも第3図を見ればわかるように、曲線 $C_H(C_V)$ は直線 S_P を、表面 S_0 の上手を指向しつつ、下から上へ越し、点 P_i で「上手指向」となる。座標 x' のある範囲にわたって $\varphi'(\psi')$ が正で下手指向がつづけば、その範囲で下手漸近がおこり、 $\varphi'(\psi')$ が負で上手指向がつづけば、その範囲で上手漸近がおこる。

積雪表面に応力が存在し、 (I) が0でない場合に考察をかぎる。すると (I) 、 $(\partial I/\partial x')$ 、 (F_V) の正負から、式(19)、(20)によって φ' 、 ψ' の正負が定められる。すなわち、点 P_i での曲線 C_H 、曲線 C_V の指向が上手であるか下手であるかが決まる。第1表と第3図とに、その結果が示されている。第3図の点 O_i 、点 P_i の添字 i と第1表の番号 i とは相対応する。

第1表 応力が存在する積雪表面付近の曲線 C_H 、 C_V の方位角 φ' 、 ψ' 。式(18)、(19)、(20)による

番号 i	$(\partial I/\partial x')$	(I)	(F_V)	φ'	ψ'	$\varphi' \geq \psi'$	交 叉
1	+	+	(+)	+	+	>	通 常
2	+	-	(+)	-	-	<	"
3	0	+	(+)	+	0	>	"
4	0	-	(+)	-	0	<	"
5	-	+	+	+	-	>	"
6	-	-	+	-	+	<	"
7	-	+	0	0	-	>	無 記
8	-	-	0	0	+	<	"
9	-	+	-	-	-	>	異 常
10	-	-	-	+	+	<	"

3. 積雪表面付近における両曲線の方位関係

第1表にみられるように (I) 、 $(\partial I/\partial x')$ 、 (F_V) の正負は φ' 、 ψ' の正負のみならず、 φ' と ψ' との大小関係をも決定する。第3図は、第1表に示した φ' 、 ψ' の正負大小関係にもとづいて描いた、曲線 C_H と曲線 C_V との、点 P_i を通過するときの断片である。第1節のはじめで述べたとおり、実線分が曲線 C_H の断片を、破線分が曲線 C_V の断片を示す。第1第2第9第10のばあいには、 φ' と ψ' とが同符号で、両曲線はともに上手指向か下手指向かである。これに反し、第5第6のばあいには、 φ' と ψ' とが異符号で、一方の曲線は上手指向、他方の曲線は下手指向となる。残りの四つの場合には、一方の曲線の断片が積雪表面 S_0 に平行である。この平行断片は上手指向とも下手指向ともいえない。

第1から第4まで四つのばあいには、 $(\partial I/\partial x') \geq 0$ であるため (F_V) の符号は正に定まってしまう。つまり、 (F_V) に正負の両符号を勝手に与えることができない。それを示すため、第1表では、この四つばのあいの (F_V) の符号を括弧でかこんだ。

論文 X の第 II 章第 5 節と第 IV 章第 3 節とで「通常型」の曲線 C_H なるものを考えた。曲線 C_H を積雪表面 S_0 へむかう向きに辿るとき、流動面のなかの任意の点 P で、曲線 C_V を、その下から上へ抜けるとしよう。そのあと、表面 S_0 に到達するとする。このばあいの曲線 C_H の、点 P から表面 S_0 にいたる部分を通常型曲線 C_H と名づけた。点 P から発して表面 S_0 にむかう曲線 C_H が通常型なら、曲面 C_V 上の点 P での垂直応力成分は圧力であることが、論文 X で示された。もし、曲線 C_H が点 P で曲線 C_V を、その上から下へむかって越えたあと表面 S_0 に達するなら、この垂直成分は張力となる。このあとの場合の発生は稀であろうと予想される。それで、このあとの場合の、曲線 C_H の点 P から表面 S_0 までの部分を「異常型曲線 C_H 」とする。

積雪表面 S_0 付近にある点 P_i で、曲線 C_H が表面 S_0 にむかいながら曲線 C_V と、それを下から上へ抜けるようにして交叉するとき、その交叉を「通常交叉」と呼ぶことにしよう。それを上から下へ抜けながらの交叉は「異常交叉」と名づける。点 P_i を発したあと、多くのばあい、曲線 C_H は表面 S_0 に達するであろう。それゆえ、交叉の通常か異常かは、常にとはいえないが、曲面 C_V 上の点 P_i における垂直応力成分が、それぞれ、圧力であるか張力であるかを意味することになる。第 1 表の右端の列に交叉の通常、異常を示した。第 9 第 10 のばあいが異常である。積雪表面 S_0 をくだるにつれ I が代数的に減少し、しかも減少の度合が激しくて F_V が負になるとき、異常交叉がおこる。第 7 と第 8 との場合は φ' が 0 で、点 P_i で曲線 C_H は表面 S_0 に平行する。曲線 C_H の断片は上手指向とも下手指向ともいえず、交叉の通常異常がきめられない。それで第 1 表では、この場合の交叉を「無記」とした。

4. 曲線 C_H 曲線 C_V の実例と理論結果との比較

上方増大楔形積雪の第 1 図では、積雪表面 S_0 に沿い右上から左下への方向が座標 x' の正の方向である。同図 (c) に見られる通り、表面 S_0 の全長にわたり I が圧力である。すなわち I の符号は負であり、その絶対値は x' の増大につれ減少する。よって $\partial I / \partial x'$ は正である。第 1 表の第 2 の場合にあたるわけで、表面 S_0 ちかくでは、 φ' も φ'' も負で曲線 C_H 、曲線 C_V とともに表面 S_0 に上手漸近するはずである。そして、第 1 図 (a)(b) に描いた両曲線は、正にその通りになっている。両曲線の交叉も、第 1 表が示すように通常である。

第 1 図 (a) にある多数の曲線 C_H のうちの 1 本を任意にえらび、それを、同図の (a) 図と (b) 図とを見くらべながら、地面 G から表面 S_0 にむかって辿ってみよう。すると、破線 B_0 に達するまでは、曲線 C_V をその上側から下側にむかって横切り、破線 B_0 を過ぎると、曲線 C_V を下側から上側にむかって横切ることがわかる。つまり、破線 B_0 より下では曲線 C_H と曲線 C_V との交叉は異常であり、破線 B_0 より上では通常である。曲線 C_H は表面 S_0 に漸近してそれに到達する。したがって、1 本の曲線 C_H の上に点 P をとり、点 P から表面 S_0 までの部分を考えると、この部分は、前節でのべたことにより、点 P が破線 B_0 の下にあれば異常曲線 C_H と呼ばれ、点 P が破線 B_0 より上にあれば通常型曲線 C_H と呼ばれる。

以上のことは、曲線 C_H のすべてについていえる。それで、これも前節でのべたことにより、曲面 C_V のうえの垂直応力成分は、破線 B_0 と地面 G との間全領域で張力となり、破線 B_0 と表面 S_0 との間全領域にわたって圧力となる。ところで、主応力は、積雪内のすべての

点で単独主応力である。よって、第II章第5節により、曲面 C_V の法線と単独主応力の弱成分とが方向をほとんど同じくすることがわかる。すると、曲面 C_V 上の垂直応力成分と単独主応力の弱成分とはあい似た値を持たなければならない。実際、第1図(c)では、単独主応力の弱成分が、破線 B_0 を境にして、それより上の領域では圧力、下の領域では張力になっている。

下方増大楔形積雪の第2図では I も $\partial I/\partial x'$ も正であるから、第1表の第1の場合にあたる。積雪表面 S_0 付近では φ' , ψ' が正で曲線 C_H 曲線 C_V がともに表面 S_0 に下手漸近することも、両曲線の交叉が通常であることも、第1表が示すとおり、第2図(a), (b)に現われている。両曲線の交叉の通常性は、地面に到るまで、積雪全体におよぶ。

論文 X^3 の第1図(a)は、無限に長い平面状斜面に一樣につもった積雪の鉛直断面である。この無限斜面積雪では、応力状態が座標 x' によって変化しない。それゆえ、 $\partial I/\partial x'$ が0で、第1表の第3と第4との場合が、曲線 C_H および曲線 C_V の積雪表面 S_0 付近での方位を与える。角 ψ' が0だから、曲線 C_V は表面 S_0 に平行な直線である。この図のばあい、 σ'_x は z' によって変らないとした。よって I は σ'_x にひとしく、同図にある $q=\sigma'_x/w_0$ の正負が、そのまま I の正負となる。第1表第3(第4)の q が正(負)のばあいには、 φ' が正(負)で、曲線 C_H は表面 S_0 に下手漸近(上手漸近)すべきである。図に描かれた曲線 C_H は、正にそのように表面 S_0 に漸近している。図のうえの曲線 C_H と曲線 C_V との交叉は、第1表にある通り通常である。

論文 X^3 の第1図(a)には、また、第1表には除外された $q=0$ の場合の曲線 C_H も描かれている。この曲線 C_H は直線で、表面 S_0 に達するとき、それと有限な角 φ' をはさむ。この図のばあい、 σ'_x が z' に無関係だから、 $\partial\sigma'_x/\partial z'$ は0にひとしい。それで、式(21)にある $(\partial I/\partial x')$ と $(\partial\sigma'_x/\partial z')$ とを0とおくと、 φ' を決定すべき式 $\tan \varphi' = -1/\sin \theta' \cos \theta'$ がえられる。角 θ' を 30° とすると φ' の値は -66.6° となる。積雪表面の傾斜角 θ' を 30° として描いたこの図の上で、 $q=0.0$ の曲線 C_H は、正にこの角度で、表面 S_0 につきあっている。

IV. あとがき

「まえがき」に述べた趣旨にそって、楔形積雪のなかの曲線 C_H と曲線 C_V と主応力とを図に示し、両曲線の特性を探した。楔形積雪は、無限に長い平面状斜面に、流動面による鉛直断面が楔形をなして積った雪である。この積雪には上方増大型と下方増大型との2種類がある。両方のばあいとも、斜面の傾斜角 α_0 を 30° 、楔形の頂角 β を 18° とした。もちろん、 α_0 や β を別の角度にすれば、この論文の図には見られなかった特性の現われる可能性が、充分に残される。

前の論文 X^3 であげた斜面積雪の例では、積雪表面および地面と流動面との交線は、互に平行な直線 S_0 と直線 G とで、曲線 C_V は直線 S_0 と直線 G とに平行な直線群であった。その結果、表面の直線 S_0 も地面の直線 G も、曲線 C_V に属することになった。しかし、その際にもべたように、地面を表す流動面内の曲線 G は必ずしも、というよりは、普通には、曲線 C_V とならない。実際、この論文の第1図第2図の(b)図では、曲線 C_V と地面 G とは有限な角をはさんで交り、互に平行でない。これに反し、表面 S_0 は、この論文の両種の楔形積雪においても、曲線 C_H であり、かつ曲線 C_V である。一般に、積雪表面を表す曲線 S_0 は、それが直線で

なくても、積雪表面に応力が存在する限りは、必ず曲線 C_H でもあり曲線 C_V でもあることが、この論文 XII で証明された。積雪表面に応力が存在しないときの曲線 S_0 は、曲線 C_H あるいは曲線 C_V であることも、ないこともある。曲線 C_H でない例が、前論文 X の曲線 C_H の図のなかにあることを指摘した。

第 1 図の上方増大楔形積雪のなかには、傾斜完全単独主応力の点が、すなわち、方向が鉛直でも水平でもない完全単独主応力の点が、直線 B_0 の上にならんでいる。傾斜完全単独主応力の点では、曲線 C_H と曲線 C_V とは切線を共有して合体することが、一般的に証明された。傾斜単独主応力の点では、主応力が完全単独ではないために、曲線 C_H と曲線 C_V との切線は一致はしない。しかし、平行にちかひ準平行の状態にある。この準平行性が積雪内の広い範囲にわたって成立すれば、第 1 図の (a) 図と (b) 図とに示されているように、その範囲内で、両曲線は互に相似に近い形をとる。以上のことは、単独主応力あるいは完全単独主応力の方向が鉛直あるいは水平であるばあい、または、それに非常に近いばあいには、必ずしも真実でない。この種の単独主応力と完全単独主応力とは、この論文の楔形積雪には出現しなかった。

曲線 C_H と曲線 C_V とは、積雪内の到るところで交叉する。その交叉角を式 (11) によって示した。しかし、曲線 C_H 同志または曲線 C_V 同志の交叉、つまり同種曲線の交叉は、前論文 X にあげた例でも、今回の楔形積雪でも、おこっていない。同種曲線が交叉するのは、主応力が完全単独で、しかも、その方向が水平か鉛直である箇所に限られる。次の論文 XIII の円形積雪のなかの 1 箇所で、曲線 C_V 同志の交叉をみるができる。

積雪表面に応力が存在するばあいには、表面に近い領域内に限ってのことだが、曲線 C_H および曲線 C_V との方向を、表面応力 I の性質から、第 III 章の理論によって定めることができる。その結果を第 1 表と第 3 図とに示した。両曲線のそれぞれの方向、また、両者の間の関係には、10 種類のばあいが理論的に区別される。しかし、そのうちの 4 種類のばあいしか、前論文 X にあげた例と今回の楔形積雪とは見られない。曲線 C_H と曲線 C_V との特性を知るには、なお多くの例を考察しなければならない。

この論文の図は、低温科学研究所雪害科学部門主任の藤岡敏夫教授に依頼して、電子計算機によって計算作図してもらった。そのほか多くの教示と助言とを同教授からうけた。ここに記して感謝の意を表す。

文 献

- 1) 吉田順五 1980 斜面積雪の挙動の研究 VII. 低温科学, 物理篇, **39**, 1-16.
- 2) 吉田順五 1981 斜面積雪の挙動の研究 VIII, IX. 低温科学, 物理篇, **40**, 25-35, 37-49.
- 3) 吉田順五 1982 斜面積雪の挙動の研究 X. 低温科学, 物理篇, **41**, 25-42.
- 4) 吉田順五 1964 斜面積雪の内部応力および粘性流動 II, III. 低温科学, 物理篇, **22**, 101-117, 119-127.

Summary

1. The author defined, in Article 4 of the English Summary of Paper IX⁹⁾, 'curved surface C_H ' and 'curved surface C_V ' within a snow cover which flows two-dimensionally down a sloping ground. Stresses work on a curved surface C_H always horizontally, while they work

on a curved surface C_V always vertically.

2. Let horizontal coordinate x and vertical coordinate z be placed in the vertical plane parallel to which the snow cover flows. 'Curve C_H ' and 'curve C_V ' are respective intersections of this vertical plane with a curved surface C_H and a curved surface C_V . Figure 1(a) of Paper X³⁾ shows curves C_H in an imaginary snow cover uniformly deposited on an infinitely long plane ground inclined against the horizontal; curves C_V are not shown in the Figure, because they are simply straight lines parallel to the surface of the snow cover.

3. Twenty years ago, the author obtained theoretically, by regarding snow as an incompressible viscous fluid, possible distributions of stresses in wedge-shaped snow covers and circular snow covers⁴⁾. In the present theory of curves C_H and C_V , snow is treated as a compressible viscous fluid with plastic Poisson's ratio ν of various values of which the greatest is 0.5, and an incompressible viscous fluid is nothing but a compressible viscous fluid which happens to have ν equal to 0.5. Therefore the above distributions of stresses can well be used as examples in the present theory.

4. The wedge-shaped snow cover is a snow cover so deposited on a plane sloping ground in such a manner that its thickness increases linearly upward or downward along the ground. The circular snow cover is a snow cover deposited with a uniform thickness on a horizontally long mountain ridge or valley of which the vertical section is semicircular. Curves C_H and C_V can be drawn if the distribution of stresses is given. The curves in the wedge-shaped snow covers are shown in the present Paper XII, while those in the circular snow covers will be shown in the next Paper XIII.

5. There are two kinds of wedge-shaped snow covers: 'upward increasing' and 'downward increasing'. The former increases in thickness upward along sloping ground G as shown in Fig. 1 of the text, while the latter increases in thickness downward along the sloping ground as shown in Fig. 2 of the text. In both Figures straight lines S_0 give the surface of the snow covers.

6. If polar coordinates (r, θ) shown in Fig. 1(c) and Fig. 2(c) are used instead of Cartesian coordinates (x, z) , then Eqs. (3), (4), (5) and (6) in the text give the above mentioned possible distributions of stresses in the wedge-shaped snow covers. Of the double signs \pm or \mp in the Equations, the upper ones are for the upward increasing snow cover while the lower ones are for the downward increasing snow cover. Angles α_0 and β can be read in meaning from the Figures. In order to make the Equations dimensionless, a length R is introduced into them; any value may be given to R conveniently.

7. Equations (3), (4), (5) and (6) yield differential equations (7) and (8) respectively for curve C_H and curve C_V . As it is difficult to integrate these differential equations, curves C_H and C_V were drawn, in four figures (a) and (b) of Fig. 1 and Fig. 2 of the text, directly from them by the use of the electronic computer. In each of the four figures, the curves are similar to one another with respect to origin 0 of the polar coordinates. This is because the differential equations have their right sides independent of radial coordinate r .

8. Principal stresses are represented in Fig. 1(c) and Fig. 2(c) by two straight segments crossing each other. The segment with arrowheads at its ends represents a principal stress that is tension and positive in sign, while the segment with nailheads at its ends represents a principal stress that is compression and negative in sign. Of the two principal stresses crossing each other, the algebraically greater (or smaller) one is designated the first (or third)

principal stress σ_1 (or σ_3), and the absolutely greater (or smaller) one is designated the strong (or weak) component.

9. Let the principal stresses crossing each other be called 'single principal stress' abbreviated to SP if their weak component is very small in absolute value as compared to their strong component, and let them be called 'perfectly single principal stress' abbreviated to PSP if their weak component completely vanishes. It is shown that curve C_H and curve C_V pass a point of SP in almost the same directions and they pass a point of PSP in quite the same direction, provided that the strong component of the SP and of the PSP is directed apart from both the horizontal and the vertical.

10. The principal stresses crossing each other are SP with their strong component obliquely directed everywhere in Fig. 1(c), except on broken straight line B_0 where they are PSP. In this case of an upward increasing snow cover, curve C_H and curve C_V should pass every point in it in almost the same directions, with the result that curves C_H in Fig. 1(a) are nearly similar in shape to curves C_V in Fig. 1(b).

11. If the tangent to curve C_H makes angle $(\varphi - \psi)$ at a point with that to curve C_V , then $(\varphi - \psi)$ satisfies Eq. (11) of the text, where $\gamma' = \sigma_1/\sigma_3$ and α is the angle between first principal stress σ_1 and the horizontal. Angle $(\varphi - \psi)$ is a right angle, if $\gamma' = \pm 1$ or if α equals 0 or a right angle. In case of the downward increasing snow cover of Fig. 2, $\gamma' = -1$ on broken straight line B_1 and $\alpha = 0$ on broken straight line B_2 .

12. As stress components always vanish on the tangential plane to the surface of a snow cover, principal stresses must be PSP on surface S_0 and their strong component coincides in direction with the tangent to it. This is true as long as the surface is stressed. Curve C_H and curve C_V both pass a point of PSP in the same direction as that of the strong component of the PSP. Therefore curve S_0 representing the surface of a snow cover becomes, if it is stressed, a curve C_H and a curve C_V simultaneously.

13. Let I denote the value of the strong component of PSP on surface S_0 and let dI/dx' denote the rate of change in I downward along it. Curves C_H and C_V can be determined in directions in the neighbourhood of surface S_0 from I , dI/dx' and θ' , if I does not vanish, that is, if surface S_0 is stressed.

14. In Fig. 3 of the text, four lines S_0 represent the surface of a snow cover inclined by angle θ' against the horizontal. Though not shown in the Figure, each of points O_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) on lines S_0 has its own coordinates (x, z) and (x', z') originating from itself, just in the same manner as point O_3 does as illustrated in the Figure. Points P_i are each positioned very near points O_i : their coordinates are (O, dz') , dz' being negative in sign and very small in absolute value. Curves C_H and C_V passing points P_i are shown respectively by full and broken lines with arrowheads at their ends. Angles φ' and ψ' give their directions at points P_i .

15. In case $I \neq 0$, angles φ' and ψ' are given by Eqs. (18), (19) and (20) of the text, in the right sides of which parentheses are used to show the value at points O_i of the parenthesized quantity. For instance, (I) is the value of I at points O_i . Letters ρ and g are respectively for density of snow and acceleration of gravity. As φ' and ψ' are proportional to dz' , they are both very small and decrease in absolute value as points P_i approach points O_i . Therefore curves C_H and C_V lie nearly parallel to surface S_0 in its neighbourhood, and, if I does not vanish in some extent of surface S_0 , they continue nearing it in that extent.

16. Signs (+ or -) of φ' and ψ' are related in ten different ways to those of (I) , (F_V) and (dI/dx') . These ten different relations are listed and illustrated respectively in Table 1 and Fig. 3 of the text. The second relation is realized in the upward increasing snow cover of Fig. 1, while the first relation is realized in the downward increasing snow cover of Fig. 2. It is noted that the curves in these Figures may change substantially in shape and the above relations may shift to those of other numbers when α_0 and β are changed to angles other than 30° and 18° respectively.

17. When $I=0$, angles φ' and ψ' are respectively given by Eqs. (21) and (22) of the text. As the angles are independent of dz' , curves C_H and C_V reach surface S_0 in making with it an angle of finite magnitude including zero. In case of Fig. 1(a) of Paper X³⁾ referred to in Article 2, q can be written I/ω_0 , because σ'_x can be replaced with I in Eq. (17) of that Paper. In the same Figure, curve C_H of $q=0.0$ makes an angle of $\varphi' = -66.6^\circ$ with surface S_0 on reaching it, while curve C_V of $q=0.0$ never reaches the surface, because angle ψ' equals 0 everywhere in the snow cover of whatever value q may be.

18. As I does not change along surface S_0 in Fig. 1(a) of Paper X, dI/dx' turns out to be zero. Therefore, the third and fourth relations of Table 1 are true for the curves in that Figure when q differs from 0. The third relation holds for q greater than 0: φ' is positive and curve C_H approaches surface S_0 downward. The fourth relation holds for q smaller than 0: φ' is negative and curve C_H approaches surface S_0 upward. Curve C_V lies parallel with surface S_0 , because ψ' vanishes always as noted at the end of the previous Article.