



Title	斜面積雪の挙動の研究 X III : 円形積雪のなかの曲線CHと曲線CV
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科学. 物理篇, 42, 39-56
Issue Date	1984-03-05
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18481
Type	departmental bulletin paper
File Information	42_p39-56.pdf



斜面積雪の挙動の研究 XIII*

— 円形積雪のなかの曲線 C_H と曲線 C_V —

吉田 順五

(北海道大学名誉教授)

(昭和58年9月受理)

I. ま え が き

等高線が長い平行直線群の山につもった積雪は、等高線に直角な「流動面」内を、2次元流動として流下する。筆者は、今の論文に先だつ同名の5論文で、この種の積雪内に生ずる応力について理論的考察を進めてきた^{1)~4)}。第3番目にあたる論文 IX²⁾では、積雪内の応力分布が知られれば描くことのできる2種類の曲線を流動面内に考え、それぞれに曲線 C_H および曲線 C_V の名をあたえた。低温科学研究所の雪害科学部門が、実際の山につもった実際の斜面積雪について、その内部に生ずる流動歪速度を実測してきたし、また、実測しつづけている⁵⁾。上記の2種類の曲線を導入したのは、この実測歪速度から斜面積雪内の応力を算出するのに使うためであった。

うえに、曲線 C_H と曲線 C_V とは、流動面内の応力分布をもとにして描かれると述べた。しかし、それは、定義のうえでのことである。両曲線は、応力分布の代りに、歪速度の分布と塑性粘性係数の分布とが知られていれば描くことができる。ある点で、歪速度の値と雪の塑性粘性係数 ν の値とがわかれば、その点での両曲線の切線の方が定められるからである。実際、そうでなければ、実測されるのは歪速度であって応力自体ではないから、両曲線を歪速度の実測からの応力決定に用いる方法は意味を失う。ただ、歪速度は、流動面に粗く分散した点でしか実測されない。それゆえ、曲線 C_H にせよ曲線 C_V にせよ、それらの切線の方は、粗く分散した点でしか指定されないわけである。したがって、これだけをもとにして両曲線を正確に描くことは難しい。

この困難を緩和するためのひとつの方法として、両曲線の特徴を知っておくことが考えられる。それで、論文 X³⁾では、無限に長い平面状斜面に一樣につもった積雪のなかの両曲線を図示し、論文 XII⁴⁾では、同様な斜面に鉛直断面が楔形になるようにつもった積雪のなかの両曲線を図に描いた。いずれも、内部応力が理論的に計算できる仮想積雪である。描かれた両曲線の考察から、両曲線の特徴の一部を明かにすることができた。しかし、形が簡単な上のふたつの積雪では、内部応力も簡単で、両曲線の特徴のうち出現し損じたものが多いであろうと想像される。それで、この論文 XIII の第 II 章では、なお未知の特徴を少しでも多く探します

* 北海道大学低温科学研究所業績 第 2591 号

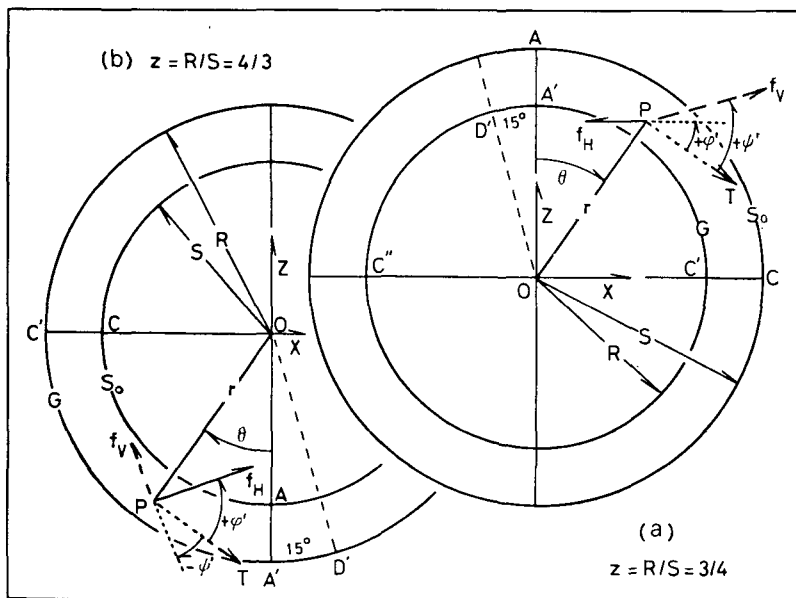
ために、上のばあい比べると応力がかなり複雑な円形積雪のなかの曲線 C_H と曲線 C_V とを考察する。そして、円形積雪の流動面内に、両曲線の切線方向が分散して指定された場合を想定し、それから、両曲線のすでに知られた特性を利用しつつ、両曲線を構成することを第 III 章で試みる。

円形積雪とは、鉛直断面が半円形の、直線状に長くのびた尾根または谷の斜面に、一様な厚さでもった仮想積雪である。積雪は密度が均一な非圧縮性粘性流体とする。円形積雪のなかの応力は、筆者がすでに理論的に定めてある⁶⁾。曲線 C_H および曲線 C_V の説明は、論文 X³⁾ および論文 XII⁴⁾ の「まえがき」に要約してあるから、ここでは省く。

II. 円形積雪内の曲線 C_H および曲線 C_V

1. 円形積雪およびそのなかの応力

第 1 図 (a) にある半径 R の円 G は、水平に横わる、土でできた円筒の鉛直断面である。円筒の表面には、一様な厚さの雪層が管の形ではりついている。半径 S の円 S_0 が、管状雪層の外面、すなわち、積雪表面の断面を表す。重力の作用で管状雪層内に応力が生ずる。管状雪層は、密度 ρ が一様な非圧縮性粘性流体であり、土の円筒の表面 G にはりついたまま、そこで滑らないとしよう。すると、管状雪層の境界面は、表面である円 S_0 と底面である円 G とのふたつだけだから、表面 S_0 のうへの応力成分は消失すると一般条件を加えると、境界条件が完全に与えられ、管状雪層のなかの応力は一義的に定まる。この応力を受けた管状雪層の上半分が「まえがき」で述べた尾根の上の円形積雪である。また、円 G の上半分が尾根の表面の断面である。半径 R も半径 S も、実際には非常に長い。この円形積雪は上にむかって凸だから、「凸円形積雪」とよぶ。



第 1 図 円形積雪の原形

第1図(b)の円Gは、土のなかに水平に掘られた長い円筒状のトンネルの断面である。トンネルの内壁に、一様な厚さで円管状の雪層がはりついている。管状雪層の性質は前のばあいと変わらないとし、その内(外)面の境界条件を前のばあいの外(内)面の境界条件とおなじにとると、管状雪層内の応力が定まる。この管状雪層の下半分が「凹円形積雪」で、「まえがき」でのべた谷の斜面につもった円形積雪である。円形積雪は、凸形であっても凹形であっても、徐々に円形斜面を流下して形を変えるから、定常状態にあるのではない。

第1図の面は流動面である。この図に示した極座標 (r, θ) を用い、

$$\zeta = r/S, \quad Z = R/S, \quad J = Z^2/2(1+Z^4) \quad (1)$$

とおくと、円形積雪内の応力成分 $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$ は、雪の密度を ρ とし重力加速度を g として

$$\sigma_r/\rho g R = \pm(\cos \theta/Z) \left\{ (\zeta - \zeta^{-1}) + J(\zeta^{-3} - \zeta) \right\}, \quad (2)$$

$$\sigma_\theta/\rho g R = \pm(\cos \theta/Z) \left\{ \zeta - J(\zeta^{-3} + 3\zeta) \right\}, \quad (3)$$

$$\tau_{r\theta}/\rho g R = \pm(\sin \theta/Z) J(\zeta^{-3} - \zeta) \quad (4)$$

で与えられる。これは文献(6)の式(5)にはかならない。複号の+は凸円形積雪に、-は凹円形積雪に用いる。変数 ζ の変域は Z と1との間だが、凸円形積雪のばあいは Z が1より小さく、凹円形積雪のばあいは Z が1より大きい。

2. 円形積雪のなかの曲線 C_H と曲線 C_V

円形積雪の流動面のなかに、任意に点Pを考える。点Pにおける、座標 r が増す方向の単位ベクトルを \mathbf{k} 、 r に垂直で座標 θ が増す方向の単位ベクトルを \mathbf{i} とする。点Pを中心とする水平微小面 dS_H の上側の面の上の応力成分ベクトルを \mathbf{f}_H で、点Pを中心とする流動面に直角な鉛直微小面 dS_V の θ が増大する側の面の上の応力成分ベクトルを \mathbf{f}_V で表す。すると、点Pでの座標 (r, θ) に関する応力成分 $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$ を用いて、 \mathbf{f}_H と \mathbf{f}_V とが

$$\pm \mathbf{f}_H = (-\sigma_\theta \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) \mathbf{i} + (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) \mathbf{k}, \quad (5)$$

$$\pm \mathbf{f}_V = (\sigma_\theta \cos \theta + \tau_{r\theta} \sin \theta) \mathbf{i} + (\sigma_r \sin \theta + \sigma_\theta \cos \theta) \mathbf{k} \quad (6)$$

と書かれる。複号のうち、+は凸円形積雪用、-は凹円形積雪用である。

ベクトル $\mathbf{f}_H(\mathbf{f}_V)$ とベクトル $-\mathbf{f}_H(-\mathbf{f}_V)$ とは、向きは逆だが方向は同じである。それで、曲線 $C_H(C_V)$ の点Pにおける切線は $\pm \mathbf{f}_H(\pm \mathbf{f}_V)$ と方向をとるといえる。かくして、凹凸両円形積雪に共通に、式(5)を用いて曲線 C_H の微分方程式が

$$\begin{aligned} dr/r d\theta &= d\zeta/\zeta d\theta = \tan \psi' \\ &= (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) / (-\sigma_\theta \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) \end{aligned} \quad (7)$$

と書かれ、式(6)を用いて曲線 C_V の微分方程式が

$$\begin{aligned} dr/r d\theta &= d\zeta/\zeta d\theta = \tan \psi' \\ &= (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) / (\sigma_\theta \cos \theta + \tau_{r\theta} \sin \theta) \end{aligned} \quad (8)$$

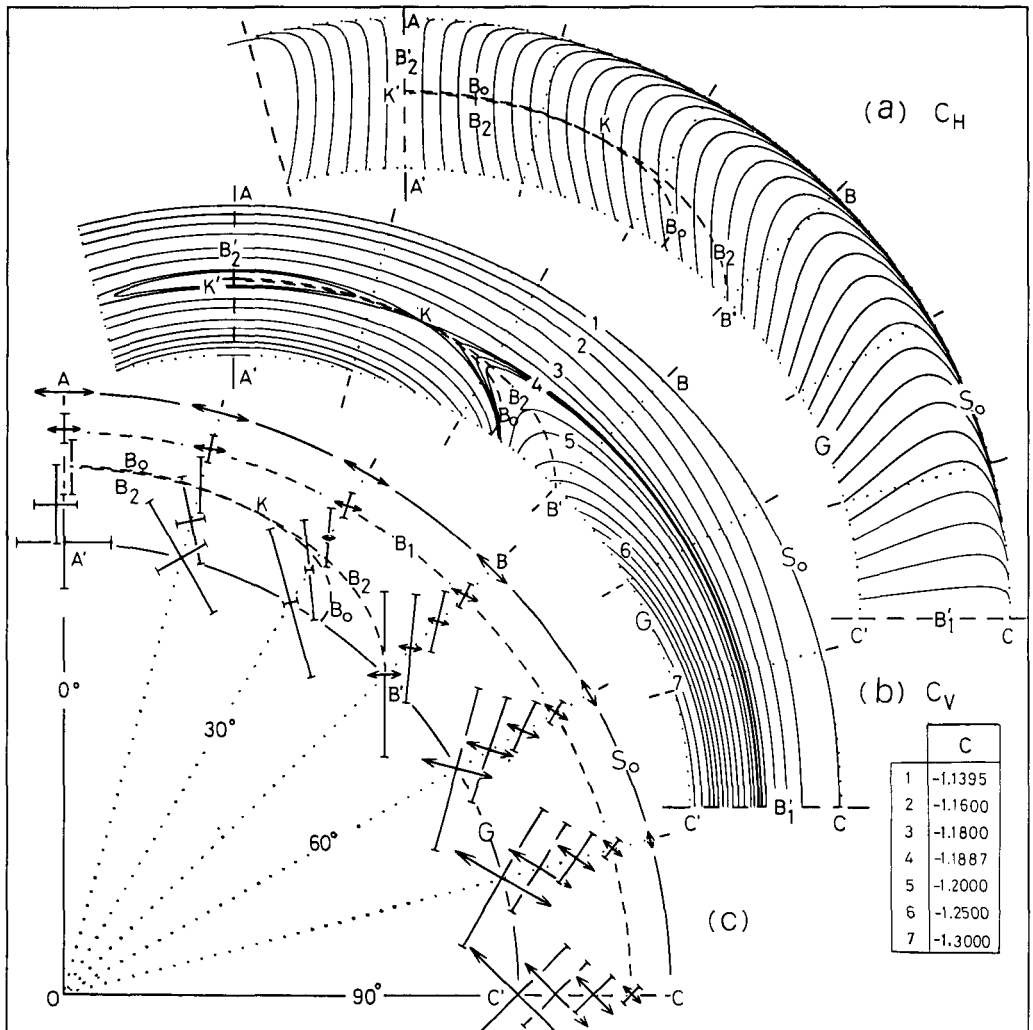
と書かれる。式(7)の ψ' と式(8)の ψ' とは、次のような角である。第1図(a), (b)に示したよう

に、点Pから、 r に直角に、凸(凹)円形積雪の θ が増大(減少)する方向に直線Tをひく。直線Tの方向から反時計まわりに、 $f_H(f_V)$ あるいは $-f_H(-f_V)$ の方向に、 $\pi/2$ と $-\pi/2$ の間にあるような角をはかる。その角が $\varphi'(\psi')$ で、第1図(a),(b)に例示してある。

微分方程式(7)および(8)の $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$ に式(2),(3),(4)を代入して積分すれば、曲線 C_H および曲線 C_V を表す式がえられる。しかし、曲線 C_H の微分方程式(7)の積分は困難である。それで電子計算機に、数値計算により、微分方程式から直接に曲線 C_H を描かせた。それが第2図(a)と第3図(a)との曲線である。

曲線 C_V の微分方程式(8)は積分できて、

$$A = Z/(1+Z^2), \quad B = (1-Z^2+Z^4)/Z(1+Z^2), \quad C = \text{積分常数}$$



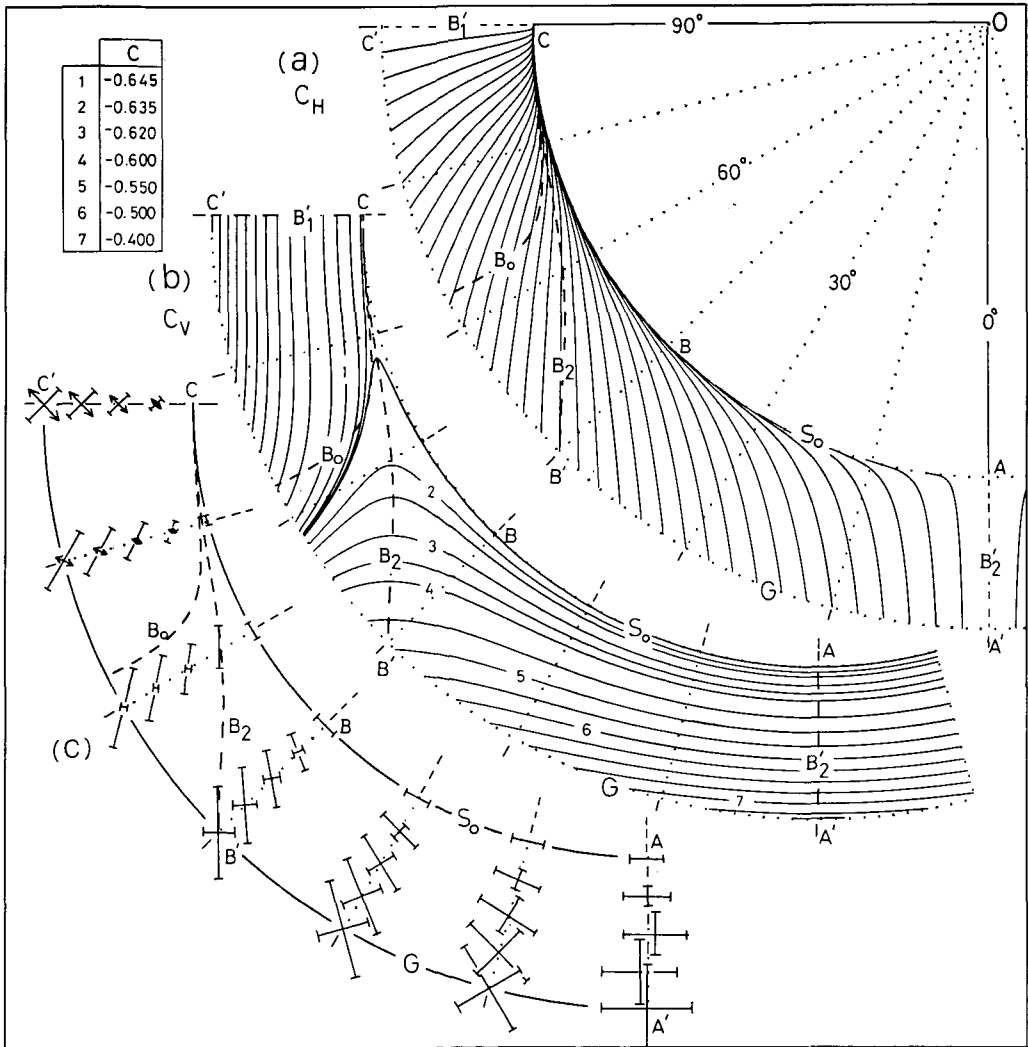
第2図 凸円形積雪内の(a)曲線群 C_H , (b)曲線群 C_V , (c)主応力。実線 S_0 または点線 S_0 は積雪表面, 実線 G または点線 G は地面, 破曲線 B_0 は完全単独主応力線, 破曲線 B_1, B'_1 は純粹剪断歪曲線, 破曲線 B_2, B'_2 は水平鉛直主応力線。 $Z=R/S=3/4$

とすれば

$$\cos^2 \theta = \left\{ A(1+\zeta^4) + C\zeta^2 \right\} / 2(\zeta^2 - 1)(B\zeta^2 - A) \quad (9)$$

の解がえられる。この解(9)は、凸凹両円形積雪に共通である。ただ、 ζ の変域に、前節の最後で述べた違いがある。第2図(b)と第3図(b)とが、積分常数 C の値をいろいろに変えて、式(9)にもとづいて電子計算機に描かせた曲線 C_V である。

曲線群 C_V は、凸凹両円形積雪の上部で複雑な様相を呈する。それで曲線群 C_V の上部を拡大して第4図に描いた。第2, 3, 4図に書きいれた数値表は、式(9)にある積分常数 C の値である。曲線群 C_V のうちに番号をつけた曲線がある。数値表は、その番号のついた曲線を描く



第3図 凹円形積雪内の(a)曲線群 C_H , (b)曲線群 C_V , (c)主応力。実線 S_0 または点線 S_0 は積雪表面, 実線 G または点線 G は地面, 破曲線 B_0 は完全単独主応力線, 破曲線 B_1, B_1' は純粋剪断歪曲線, 破曲線 B_2, B_2' は水平鉛直主応力線。 $Z=R/S=4/3$

のに用いた C の値を示す。この積分常数 C は、前論文 XII の式 (1) にある副変数 a_V にはかならない。

凸円形積雪は頂上を通る鉛直線について、凹円形積雪は谷底を通る鉛直線について、それぞれ、左右対称である。それで第 2 図には前者の右半分だけを、第 3 図には後者の左半分だけを示した。両図 (c) の主応力を表す十字線で、両端に矢尻の印をつけた直線は張力であり、釘の頭の印をつけた直線は圧力である。それぞれ、その長さで、張力あるいは圧力の強さを示す。なお、両図において、点線あるいは実線の四半円 S_0 は積雪表面を、四半円 G は地面を表す。

3. 積雪表面付近の曲線 C_H と曲線 C_V

前論文 XII⁴⁾ の第 III 章で、曲線 C_H および曲線 C_V の積雪表面ちかくでの方位を一般的に論じた。積雪表面を表す流動面内の曲線 S_0 を直線としての理論ではあったが、そこで注意したように、この理論の結果は、曲線 S_0 が円形積雪の表面曲線のように弯曲していても、用いることができる。円形積雪においては、前節で説明し第 1 図に示した直線 T を、論文 XII 第 3 図の破線 S_P と考えればよい。直線 T を破線 S_P におきかえれば、前節で定義した角 φ' 、 ψ' が前論文 XII の角 φ' 、 ψ' と全くおなじ意味をもつ。

前論文 XII で、積雪表面の完全単独主応力の強成分を I で表した。円形積雪の I は、第 2 図 (c) 第 3 図 (c) にみられるように、両図の点 C を除けば、積雪表面上すべての点で 0 でない。前論文 XII で、 I が 0 でなければ、積雪表面付近での曲線 C_H と曲線 C_V との方位と方位関係とが、 I と $\partial I/\partial x'$ と F_V との正負によって、10 箇の場合に区別しうることを述べた。そして、その 10 箇の場合を前論文 XII の第 1 表と第 3 図とに取りまとめた。

凸円形積雪の I は、第 2 図 (c) にみられるように、符号が正の張力で、斜面をくだるにつれ減少する。よって、前論文 XII の表現を用いれば、表面上すべての点で、 $\partial I/\partial x'$ が負である。凹円形積雪の第 3 図 (c) では、 I が圧力すなわち負で、絶対値は斜面をくだるにつれ増大する。よって、このばあいまた、 $\partial I/\partial x'$ が表面上すべての点で負となる。

前論文 XII の式 (18) により、 F_V は、雪の密度 ρ および重力加速度 g を用いて

$$F_V = \rho g + \sin \theta \cdot \partial I/\partial x' \quad (10)$$

と定義された。角 θ は、今のばあい、直線 T と水平方向との間の角である。これは、凸凹両円形積雪のばあいともに、極座標の片方として用いている角 θ にひとしい。次に示すとおり、第 2 図の凸円形積雪においても、第 3 図の凹円形積雪においても、 F_V の符号はともに正である。

円形積雪の I は、積雪表面 S_0 のうえの σ_θ にはかならない。よって、 I は、式 (3) で $\zeta = r/S = 1$ とおいてえられる σ_θ 、すなわち

$$I = \pm \rho g R (\cos \theta/Z) (1-4J) \quad (11)$$

で与えられる。凸円形積雪および凹円形積雪のそれぞれにおいて

$$\partial I/\partial x' = dI/Sd\theta \quad \text{および} \quad \partial I/\partial x' = -dI/Sd\theta$$

である。よって、 $Z=R/S$ を考慮すると、凸凹両円形積雪共通に

$$\partial I/\partial x' = -\rho g \sin \theta (1-4J) \quad (12)$$

の関係が成立することが判る。第2図のばあいには $Z=3/4$ で第3図のばあいには $Z=4/3$ であるが、どちらの Z の値をとっても、 $(1-4J)$ は 0.1454 にひとしい。それゆえ、式(10)は

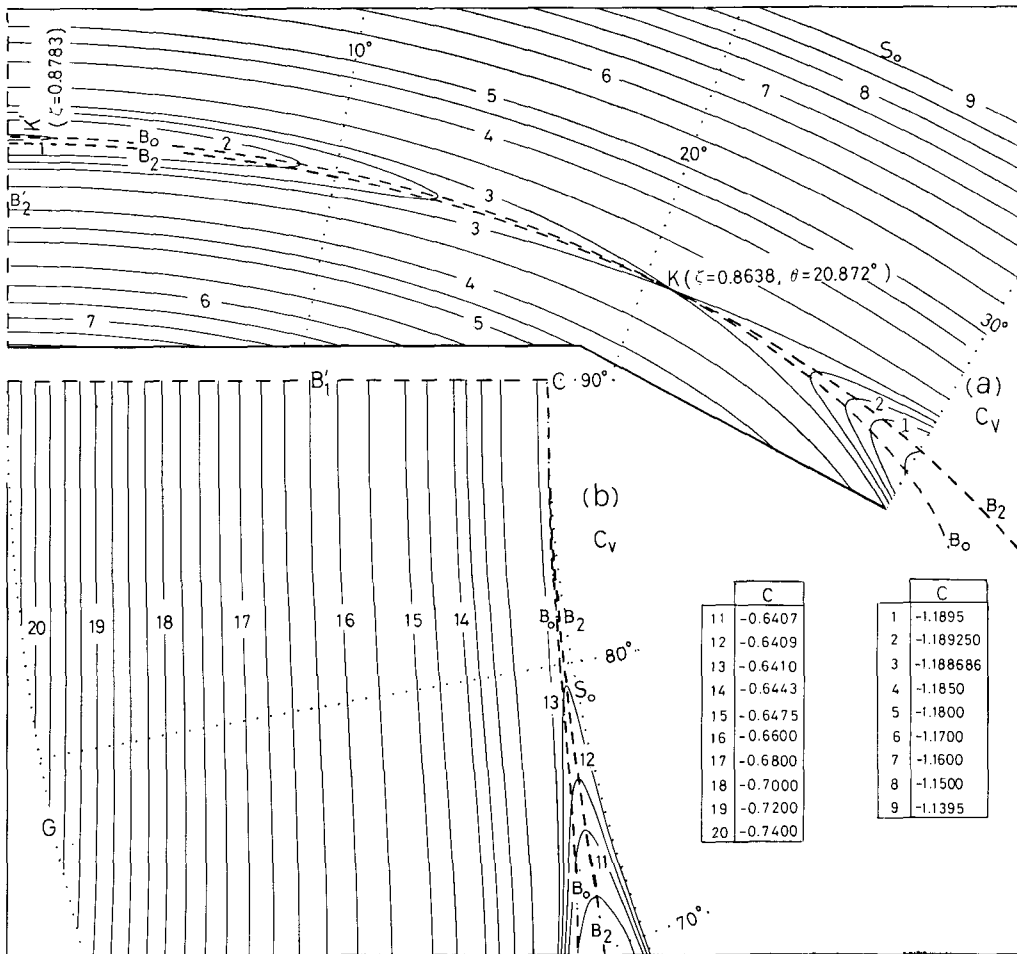
$$F_v = \rho g(1 - 0.1454 \cdot \sin^2 \theta) \tag{13}$$

と書かれる。すなわち、第2図の凸円形積雪においても第3図の凹円形積雪においても、 F_v の符号は正である。

4. 積雪表面付近の曲線 C_H と曲線 C_v (つづき)

結局、両円形積雪共通に、 $\partial I / \partial x'$ は負で F_v は正である。よって、前論文 XII 第1表の第5と第6とのばあいがそれにあたる。そして、第5が、 I が正である第2図の凸円形積雪のばあいを、第6が、 I が負である第3図の凹円形積雪のばあいを与える。以上は、 θ が 0° から 90° にいたる積雪表面全体にわたって真である。ただ、この θ の変域の一方の端の $\theta=90^\circ$ の点では、すなわち、第2図および第3図の点Cでは、 I が0であるため、うえのことが成り立たない。

論文 XII 第1表の第5のばあいには、 ϕ' が正で ψ' が負である。それゆえ、表面 S_0 の全体



第4図 (a) 第2図(b)の上部の拡大図, (b) 第3図(b)の上部の拡大図

にわたり、少くともそのすぐ内部で、曲線 C_H は下手指向であり、曲線 C_V は上手指向のはずである。上手指向や下手指向、また、すぐあとにでてくる上手漸近や下手漸近などの用語の説明は前論文の第 III 章第 2 節にある。第 2 図 (a), (b) をみると、両曲線が、表面 S_0 からかなりの距離内部にひろがる範囲内で、正にそのようになっている。曲線群 C_H は、そのおのおのの曲線が、この範囲内で下手指向をつづけるから、その全体が表面 S_0 に下手漸近して、点 C で表面 S_0 に到達する。曲線群 C_V の各曲線は、曲線 C_H のばあいよりさらに広い範囲内で上手指向をつづけ、表面 S_0 に上手漸近する。しかし、このばあいには、表面 S_0 に到達しない。

論文 XII 第 1 表の第 6 のばあいには、 ϕ' が負で ψ' が正である。それゆえ、曲線 C_H は上手指向、曲線 C_V は下手指向である。実際、第 3 図 (a) の曲線群 C_H は、表面 S_0 付近だけに止まらず、積雪層全体にわたって上手指向である。その全部の曲線が表面 S_0 に上手漸近し、点 C でそれに到達する。曲線 C_V の下手指向は、第 3 図 (b) の、 θ が 0° から 75° にいたる領域内にある表面 S_0 の近くで、明らかに認められる。第 4 図 (b) は、第 3 図 (b) の上部、 θ が 70° から 90° にいたる部分の拡大図である。この図から、 θ のこの範囲でも、表面 S_0 の極めて近くでは、曲線 C_V の下手指向であることが判る。つまり、第 3 図 (b) の積雪表面上部の近くでは、上手指向をしながら地面側から昇ってきた曲線 C_V が、表面 S_0 に接近すると折返し、指向を下手に転換して、表面 S_0 に沿って、それにすれすれに下降しはじめる。よって、第 3 図 (b) の曲線 C_V も、表面 S_0 の全体にわたって、その近くでは下手指向なのである。

III. 歪速度の実測値をもとに描かれる円形積雪内の 曲線 C_H および曲線 C_V

1. 曲線 C_H および曲線 C_V の切線図

この論文 XIII に先だつ 5 篇の論文¹⁾⁻⁴⁾で、筆者は、積雪を圧縮性粘性流体として、実際の斜面積雪内で測定される歪速度の値から応力を定めるための理論を進めてきた。曲線 C_H と曲線 C_V とを用いる理論である。圧縮性粘性流体の物理常数は密度 ρ と粘性係数 η と塑性ポアソン比 ν との 3 箇である。ところが、積雪の η は、論文 IX²⁾ の第 IV 章第 2 節で指摘したように、その値が不安定である。それで、筆者は、塑性ポアソン比 ν は用いるが粘性係数 η は使わない理論をたてたわけである。最近、大泉と藤岡⁷⁾とが、野外の積雪について η と ν とを測定した。その結果から見ても、 ν は安定であるが η は不安定である。もし、 η の値が使用に堪える程度に安定であったならば、歪速度の実測値から直ちに応力を算出できて、筆者の理論は不用となったであろう。ただ、あとで述べるように、曲線 C_H と曲線 C_V とには、歪速度から応力を決定すること以外にも、用途がある。

「まえがき」で述べたように、流動面内のある点で歪速度の主値 $\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}_3$ と塑性ポアソン比 ν の値とが知られると、その点での両曲線の切線方向が定められる。論文 IX²⁾ の第 IV 章第 3 節にあるように

$$\gamma = \dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_3, \quad \gamma' = \sigma_1/\sigma_3 \quad (14)$$

とおくと

$$\gamma' = \left\{ (1-\nu)\gamma + \nu \right\} / \left\{ (1-\nu) + \nu\gamma \right\} \quad (15)$$

によって γ から γ' が求められ、この γ' を用いて

$$\tan \varphi = (\gamma' \tan \alpha + \cot \alpha) / (\gamma' - 1), \quad \tan \psi = (\gamma' - 1) / (\gamma' \cot \alpha + \tan \alpha) \quad (16)$$

として、粘性係数 η を用いずに、角 φ と角 ψ とが定められる。上の式の σ_1, σ_3 は主応力で、 $\sigma_1 > \sigma_3$ の関係にある。歪速度についても $\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_3$ となるように両主値をえらぶ。角 α は、水平座標 x の正の方向と $\dot{\epsilon}_1$ の方向との間の角で、 $\dot{\epsilon}_1$ および $\dot{\epsilon}_3$ とともに実測によって求められる。角 φ と角 ψ とが、それぞれ、曲線 C_H と曲線 C_V との切線まで、水平座標 x の方向から測った角である。これらの角によって両曲線の切線の方向が定められることはいうまでもない。これから先、第1図に示した水平座標 x 、鉛直座標 z をしばしば用いる。角 φ, ψ に角 θ を加えれば、前章で用いた角 φ', ψ' となる。

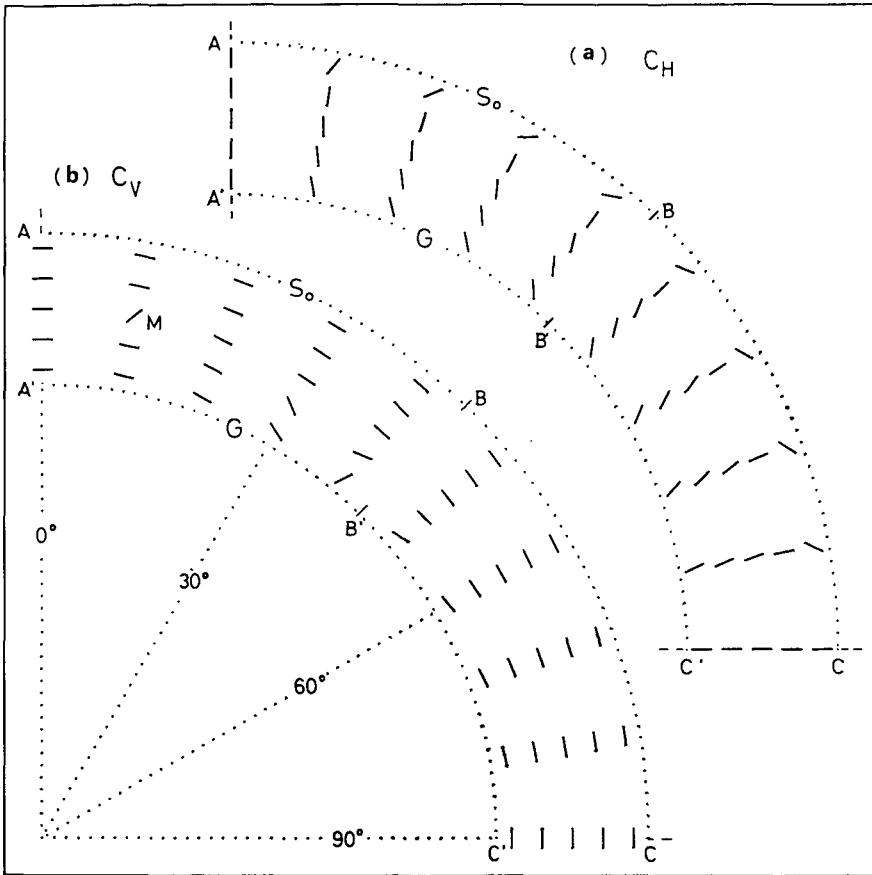
歪速度の実測は、すなわち $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_3, \alpha$ の決定は、實際上、流動面内にまばらに分散した点でしか行えない。また、積雪表面および地面での実測も不可能である。うえの方法による角 φ および角 ψ の決定は、これら分散した実測点でのみ行える。流動面内の各実測点で、両曲線の切線の方向を短い線分で表示した図を「切線図」と呼ぶことにする。

2. 凸円形積雪の C_H 切線図、水平鉛直主応力線

第5図は、第2図の凸円形積雪の切線図である。図(a)が曲線 C_H の切線図、図(b)が曲線 C_V の切線図である。線分を(5)式(6)式のベクトル f_H, f_V の方向と同じくした理論的切線図ではあるが、歪速度の実測値から前節の方法によって作った切線図と、これを想定する。歪速度の実測点は、角 θ が 10° おきの直線10本のうえに、それぞれ5箇所づつあったとした。

第5図(a)に分散分布した線分をたよりにしても、第2図(a)に示された正しい C_H 曲線群に近いものが描けるであろう。しかし「等傾斜角線」を利用した方が、正確度の高い曲線群がえられると思われる。各歪速度実測点に角 φ の数値を書きこみ、相となる2箇の実測点を結ぶ直線上に、たとえば φ が 30° に等しい点を内挿法で定める。この点を、仮に、 30° 点とよぶ。たくさんの 30° 点求められるから、それらを通る曲線をひく。この曲線が 30° の等傾斜角線である。いろいろな角度の等傾斜角線をひき、その角度でその等傾斜角線を通過するようにたどりつつ曲線を描いてゆけば、かなり正解な C_H 曲線となるであろう。

ある点で角 φ が 90° ならば、その点を中心とする水平微小面 dS_H 上の応力成分ベクトル f_H の方向は鉛直である。すなわち、この f_H は、ふたつある主応力の一方にほかならない。他方の主応力は水平な f_V で与えられ、角 ψ は 0° にひとしい。したがって、 90° の等傾斜角線上では、どこでも、一方の主応力は水平で他方の主応力は鉛直である。このことを表すため、 90° の等傾斜角線を「水平鉛直主応力線」と名づけよう。主応力と歪速度とは方向が同じだから、水平鉛直主応力線は「水平鉛直歪速度線」でもある。よって、水平鉛直主応力線上では、どの点でも、角 α が 0° か 90° である。それゆえ、歪速度実測点に α の数値を記入し、先にのべた内挿法で α が 0° か 90° の点を多く定め、それらを通る曲線を描けば水平鉛直主応力線がえられる。つまり、水平鉛直主応力線は、角 φ や角 ψ を計算によって求めなくても、実測される角 α から直接に作成できる。



第5図 凸円形積雪の(a)曲線 C_H の切線図, (b)曲線 C_V の切線図

第2図の破曲線 B₂ が凸円形積雪の流動面内にある水平鉛直主応力線である。角 φ が 90° だから曲線群 C_H は曲線 B₂ を鉛直方向に通過し、角 ψ が 0° だから曲線群 C_V は曲線 B₂ を水平方向に通過するはずである。第2図(a), (b)では、正にそのようになっている。また、同図の頂上にある、点 A と点 A' とをむすぶ鉛直破線 B₂ も水平鉛直主応力線である。これは、鉛直線 OA の左右にすべての事情が対称であることから判る。前論文 XII の下方増大楔形積雪にも水平鉛直主応力線があった。同論文の第2図に、おなじく破線 B₂ として示されている。

式(1)~(4)を用いると、水平鉛直主応力線が次のようにえられる。第1図(a)の破線 T の方向と、点 P における第1主応力 σ₁ との間の角を λ とすると、λ は α + θ にひとしい。そして

$$\tan 2\lambda = 2\tau_{\theta}/(\sigma_{\theta} - \sigma_r) \tag{17}$$

の式がなりたつ。それゆえ、この式で λ を θ に等しくおいてえられる

$$\tan^2 \theta = 1 + 2 \left[\frac{1 + (\zeta^2/2J) + \zeta^4}{(1 - \zeta^4)} \right] \tag{18}$$

が水平鉛直主応力線の方程式となる。第2図の破曲線 B₂ は、この式によって描いた。

3. 凸円形積雪の C_H 切線図, 水平切線点曲線

曲線 C_H の切線図である第 5 図 (a) で, θ が 50° から 80° にいたる範囲をみると, 積雪表面 S_0 のすぐ内側にある歪速度実測点の線分は右さがりで, 角 φ が負であることを示している。しかし, そのさらに内側の実測点では, 線分が右あがりであり φ は正に変わる。したがって, 表面 S_0 の内側, 第 1 番目の実測点と第 2 番目の実測点との間には, φ が 0 にひとしい 0° 点が存在する。この点に別名「水平切線点」を与えよう。角 θ が 10° から 40° までの範囲では, 表面 S_0 のすぐ内側の実測点の線分が, 角 φ が正の右あがりである。前論文 XII の第 II 章第 6 節で, 積雪表面 S_0 は, 特殊な条件がない限り, 一般に曲線 C_H でもあり曲線 C_V でもあることを証明した。今のばあい, 表面 S_0 を曲線 C_H とみると, その φ は $-\theta$ にひとしい。つまり, 表面 S_0 上の φ は負である。よって, 10° と 40° との間の θ の領域では, 表面 S_0 とそのすぐ内側の歪速度実測点との間に 0° 点, すなわち水平切線点がある。

内挿法により以上の水平切線点を定めると, それらを通る, 0° の等傾斜角線である「水平切線点曲線」を描くことができる。いろいろな角度の等傾斜角線をひくことにより, 第 2 図 (a) に極めて近い最高点のある曲線群 C_H が描けるはずである。その際, 水平切線点曲線は, その最高点の位置を与えるものとして殊に重要な役目を負う。

水平切線点を中心とする水平微小面 dS_H 上の応力の垂直成分 σ_z は 0 である。したがって, この dS_H 上の応力成分を表すモール応力図上の点は, 剪断応力 τ の座標軸上にある。応力円は, その点を通過しなければならない。よって, 応力円は垂直応力 σ が正の範囲と負の範囲とにまたがって存在し, 第 1 主応力 σ_1 は正, 第 3 主応力 σ_3 は負となる。すなわち, 主応力比 $\gamma' = \sigma_1/\sigma_3$ は負で, γ' は論文 X の第 III 章第 4 節で定義した領域 C か領域 D かに属する。このことは, 式 (16) で φ を 0 とおくと

$$\gamma' = -\cot^2 \alpha \tag{19}$$

になることから判る。曲線 C_H に水平切線点があったら, その点の σ_1 は張力であると判断してよいわけである。

積雪表面 S_0 とそのすぐ内側の歪速度実測点の間では, 曲線 C_H が, すべて表面 S_0 に下手漸近する。これは, 前論文 XII の第 III 章にある, 積雪表面付近の曲線 C_H に関する一般論からいえることである。さらに, 曲線 C_H がみな第 5 図の点 C に集ることもいえるが, その理由の説明はあとで書く論文にゆずる。

角 φ が 90° にひとしい鉛直切線点をつらねる「鉛直切線点曲線」は, 前節の水平鉛直主応力線にはかならない。

4. 凸円形積雪の C_V 切線図, 完全単独主応力線

第 5 図 (b) の C_V 切線図の上部, θ が $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ の直線のうえにある 15 箇の線分のうち, 中央の線分 M が異常な方向を指している。ほかの 14 箇の線分は, 積雪表面 S_0 および地面 G とほぼ同じ方向に揃っているのに対し, 線分 M だけは強い右あがりの方向である。このような線分群に方向があうような曲線群 C_V を描くことはむづかしい。

角 θ が 30° の直線上の, 地面 G に近い 2 箇の歪速度実測点を, 第 5 図の (a) 図と (b) 図とに

ついて比べると、線分 M の方向が、ふたつの実測点でそれぞれ、ほぼ一致している。これから、この 2 箇の歪速度実測点のちかくに、曲線 C_H と曲線 C_V とが方向をとにもする点があると、すなわち、主応力が完全単独な点があると推定される。ある曲線上のすべての点で主応力が完全単独であるとき、その曲線を「完全単独主応力線」と呼ぶことにしよう。すると、うへの推定は、地面 G のうえ θ が 30° に近いある点から、完全単独主応力線が発出しているのではないかとの想像を誘いだす。もし、この完全単独主応力線が線分 M の方向に伸びてゆくとしたら、線分 M の異常な方向に説明がつくかも知れない。

完全単独主応力の主応力比 γ' は 0 か正負の無限大かである。応力比が正負無限大の完全単独主応力は張力であって、発生が稀である。それに反し、 γ' が 0 の完全単独主応力は圧力で、発生が多い。それで、 γ' が 0 の完全単独主応力線を求めることにする。歪速度の実測によって知られる $\gamma = \dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_3$ と塑性ポアソン比 ν とを用いて、式 (15) により γ' の値を計算する。その γ' には、符号が正のものと負のものがあるであろう。符号が正の γ' の分布範囲と符号が負の γ' の分布範囲との境界線が γ' が 0 にひとしい線、すなわち、完全単独主応力線である。計算された γ' の値を歪速度実測点に書きこみ、内挿法で、 γ' が 0 にひとしい点を数多く定め、それらをつないで完全単独主応力線を描く。理論的に求めた完全単独主応力線が第 2 図の破曲線 B_0 である。これに近いものが描かれるであろう。破曲線 B_0 の方程式は、次の第 5 節で示す。

破曲線 B_0 上では、曲線 C_H と曲線 C_V とが共通切線をもつ。曲線群 C_H はすでに知られているから、破曲線 B_0 上に曲線 C_V の切線の方を示す線分を書きならべることができる。あとで書く論文で述べるように、完全単独主応力が鉛直な点では 2 本の曲線 C_V が交叉しうるし、また、曲線 C_V は閉曲線となることも可能である。これらの事情をもとにすれば、線分 M の異常な方向にも説明がつき、凸円形積雪上部の複雑な曲線群 C_V を、第 2 図 (b) ほどには正確でないにせよ、描きうるのではあるまいか。前論文 XII の上方増大楔形積雪にも、同論文の第 1 図に破直線 B_0 として示された完全単独主応力線があった。

5. 凸円形積雪の完全単独主応力線の方程式

完全単独主応力線である第 2 図の破曲線 B_0 を与える方程式は次のようにして求めた。主応力 σ は

$$\sigma^2 - A\sigma + B = 0, \quad A = \sigma_r + \sigma_\theta, \quad B = \sigma_r \sigma_\theta - \tau_{r\theta}^2 \quad (20)$$

のふたつの根 σ_1 および σ_3 である。主応力が完全単独であるためには、ふたつの根の一方が 0 でなければならない。上式の B が 0 ならば、この条件がみたされる。上式の B は、ふたつの根の積 $\sigma_1 \sigma_3$ にひとしいから、 $\gamma' = \sigma_1/\sigma_3$ と正負の符号が共通である。前節でのべた通り、破曲線 B_0 は γ' が 0 にひとしい曲線である。これからも、破曲線 B_0 は $B = 0$ ならしめる曲線であるといえる。式 (1)~(4) を用いると、 $B = 0$ の式は

$$\cos^2 \theta = J^2(\zeta^{-2} - \zeta^2) / \left\{ J\zeta^{-2} - 4J^2 + (1 - 3J)\zeta^2 + (1 - 2J)\zeta^4 \right\} \quad (21)$$

となる。この凸円形積雪の破曲線 B_0 を定める方程式は、おなじ形のままで、第 3 図の凹円形積雪の完全単独主応力線 B_0 の方程式として使える。

応力比 γ' も式 (20) の B も、流動面内で位置の連続関数として変化するから、完全単独主応

力線をまたぐとき以外は符号を変えない。それゆえ、完全単独主応力線は流動面を、 r' および B が正の領域 D_P と負の領域 D_N とに分かつ。前節で、曲線 C_H の水平切線点では、 r' が負であるとのべた。したがって、曲線 C_H に水平切線点が出現するのは領域 D_N 内に限られる。すなわち、曲線 C_H に、上昇したのち下降する凸部あるいはその逆の凹部がありうるのは、領域 D_N 内だけである。これは歪速度の実測から曲線 C_H を構成する際に役立つ知識となるであろう。第2図では、破曲線 B_0 の左下側に領域 D_P がひろがり、破曲線 B_0 の上から右下へむかって領域 D_N が伸びる。そして、曲線群 C_H には、凸部が領域 D_N 内にあり、領域 D_P 内では凸部も凹部もない。

曲線 C_V が横にふくれたした場合、その最も左よりあるいは右よりの点で切線が鉛直に立つ。すなわち、これらの点は「鉛直切線点」となる。曲線 C_H の水平切線点と同様に、曲線 C_V の鉛直切線点では r' が負である。よって、曲線 C_V の鉛直切線点は、出現するとすれば、領域 D_N 内に限られる。第4図(a)の曲線 C_V のうちに番号1, 2をつけたものが、左端ちかくと右端ちかくとにある。いずれも、右の方へ或は左の方へふくれたし、破曲線 B_0 と交るところに鉛直切線点を持つように見える。しかし、鉛直切線点は領域 D_N 内にしかありえないから、実際の鉛直切線点は、破曲線 B_0 よりわずかばかりでも上にそれた位置にあるに違いない。このことは、破曲線 B_0 上の完全単独主応力の方向がほとんど鉛直であることによる。点 K で、その方向が正確に鉛直となり、そこで2本の曲線 C_V が交叉する。論文 X の第 II 章第2節のおわりで、完全単独鉛直主応力の点では曲線 C_V の交叉がおこりうると述べた。この点 K での交叉がその例である。

曲線 C_H の鉛直切線点曲線が水平鉛直主応力曲線と一致したように、曲線 C_V の水平切線点曲線が水平鉛直主応力線と一致する。水平鉛直主応力線である第4図(a)の破曲線 B_2 を、曲線 C_V はみな水平に横切っている。

第5図の切線図を作る想定歪速度実測の結果をもとにして描かれる破曲線 B_0 と破曲線 B_2 とは、正確でありえない。しかし、 θ が 0° と 30° との間については、両曲線が、少くとも接近しては、引かれることになるであろう。また、実測される角 α から、破曲線 B_0 上の完全単独主応力の方向が鉛直に近いこともわかる。すると、曲線 C_V の切線が鉛直になる可能性と水平になる可能性とのある狭い帯状領域が、接近して引かれた両曲線にそって伸びることが知られる。曲線 C_V は連続的に方向をかえる。よって、この帯状領域内で、曲線 C_V の切線は、水平方向から鉛直方向にいたるいろいろな方向をとるに違いない。第5図(b)の線分 M の異常な方向は、そのいろいろな方向のうちの一つとして説明される。

第3図の凹円形積雪の流動面内にも、完全単独主応力線と水平鉛直主応力線とが、それぞれ、破曲線 B_0 と破曲線 B_2 として描かれている。破曲線 B_0 の左上側に領域 D_N が、右側下方にむかって領域 D_P がひろがる。領域 D_N 内で、曲線 C_V は右の方へ軽くふくれたし、鉛直切線点の存在を示している。しかし、どの曲線 C_H にも水平切線点はない。

6. 純粹剪断歪曲線

論文 X の第 III 章第3節で、 $r = \epsilon_1/\epsilon_3$ が -1 のときは、塑性ポアソン比 ν の値によらず、 $r' = \sigma_1/\sigma_3$ も -1 にひとしいことを、また、その逆も正しいことを述べた。主歪速度比 r が -1

にひとしい点では、雪が純粋剪断歪をおこしつづける。それで、 $\gamma = -1$ の条件をみたく流動面内の曲線を「純粋剪断歪曲線」とよぶことにする。各歪速度実測点に γ の値を記入し、内挿法で γ が -1 にひとしい点を数多く定め、それらを辿って純粋剪断歪曲線が描かれる。純粋剪断歪曲線は、あるとすれば、前節でのべた領域 D_N 内にある。

式(20)の A は $\sigma_r + \sigma_\theta$ にひとしく、 $\sigma_r + \sigma_\theta$ は $\sigma_1 + \sigma_3$ にひとしい。よって、式(1)~(4)の応力場における純粋剪断歪曲線の方程式は、 A を 0 とおくことによって得られる。すなわち

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \pm(\rho g R/Z) \cos \theta \left\{ \zeta^{-1} + 2(1-2J)\zeta \right\} = 0 \quad (22)$$

から定められる

$$\cos \theta = 0, \quad \zeta = \left\{ 2(1-2J) \right\}^{-1/2} \quad (23)$$

の直線および円を表すふたつの方程式が、凸凹両円形積雪の純粋剪断歪曲線をあたえる。第2図と第3図とのばあい、 Z の値はそれぞれ、 $3/4$ と $4/3$ とである。どちらの Z の値を使っても、式(23)の ζ の値は 0.9344 になる。この ζ の値は、凸円形積雪の ζ の変域内にはあるが、凹円形積雪の ζ の変域からは外れる。よって、円形の純粋剪断歪曲線は、第2図だけに、破線の円 B_1 として、同図の(c)に描かれている。直線状の純粋剪断歪曲線 $\theta = 90^\circ$ は、両方の図に、点 C と点 C' とを結ぶ直線 B_1' として示した。前論文 XII の下方増大楔形積雪にも、同論文第2図に破線 B_1 で表される純粋剪断歪曲線があった。

式(16)は、 γ が -1 にひとしいければ

$$\tan \varphi = -\cot 2\alpha, \quad \tan \psi = \tan 2\alpha \quad (24)$$

となる。よって、実測された α の値から純粋剪断歪曲線上の α を内挿法で求めれば、同線上の φ と ψ とが定められる。つまり、流動面内に分散した多くの点で歪速度を実測すれば、純粋剪断歪曲線自体と、それを通過するときの曲線 C_H および曲線 C_V の方向とを、塑性ポアソン比 ν の値を使わずに求めることができる。

うえの式(24)から $\tan(\varphi - \psi)$ が無限大であることが判る。すなわち、純粋剪断歪曲線上では、曲線 C_H と曲線 C_V とが直交する。これは、すでに前論文 XII の第 II 章第8節で述べたことである。

論文 X³⁾ の第 IV 章第6節で述べたように、実際の斜面積雪について行われた 361 回の歪速度実測で、7 箇の純粋剪断歪速度が得られた。実際の斜面積雪のなかにも、純粋剪断歪曲線が、極めて稀にはなく、出現しそうである。

IV. あとがき

1. ま と め

曲線群 C_H および曲線群 C_V の特性を知ろうとして、論文 X から論文 XII へ、さらにこの論文 XIII へと、流動面内応力が次第に複雑になる斜面積雪のなかの両曲線群を描いてきた。現論文 XIII に描いた円形積雪流動面内の両曲線群は、その一方の曲線群 C_V が、期待どおりに

単な例である。

第6図は凹円形積雪の下部の断面、すなわち、第3図の下部である。曲線群 C_H も曲線群 C_V もすでに描かれているとして、地面 G の一部、第6図の点 m と点 n との間 (m, n) に積雪が加える力 F を定めることを問題とする。凹円形積雪の最低点に立つ鉛直線 AA' のうへの点は、左右の対称性から、水平方向には動かない。よって、ここに、その左の面が鉛直線 AA' と一致するように障壁 W を立てても、積雪のなかの応力状態に変化はおこらない。障壁の左側の面に多くの圧力計をとりつけ、積雪がその面上の各点に加える圧力をはかる。

点 m および点 n から出発した2本の曲線 C_V が鉛直線 AA' と点 m' および点 n' で交るとし、両方の点の間 (m', n') で $-F_H$ の圧力が測定されたとする。両曲線 C_V の間にある雪の上下面に加えられる力は、方向がすべて鉛直である。よって、(m, n) に加えられる力 F の水平成分は F_H にひとしい。点 m および点 n から出発して上昇する曲線 C_H にはさまれた雪の両側面に加わる力は、すべて水平である。よって、この雪の重量 F_V が力 F の鉛直成分となる。かくして F が定められる。このように、曲線 C_H や曲線 C_V を利用すると、ある点で測定される応力から、遠い距離にある点の応力を知ることができる。もちろん、その距離には限度がある。上のばあい、この距離は、第3図(b)の θ が 60° より少し小さい所までである。

歪速度実測点で定められる角 φ と角 α とから、このばあいには外挿法で、それらの角の地面 G 上での値を求めれば、曲線 C_H を使うだけで力 F がきめられる。しかし、うへのように、斜面積雪内の特定な場所に限られるにせよ、そこで直接に応力を測定する方法をとりいれた方が、正確に近い結果がえられる。

電子計算機による計算や作図には、低温科学研究所雪害科学部門主任の藤岡敏夫教授を煩わせた。同教授からは、その他いろいろな教示と助言をうけた。ここに記して感謝の意を表す。

文 献

- 1) 吉田順五 1980 斜面積雪の挙動の研究 VII. 低温科学, 物理篇, **39**, 1-16.
- 2) 吉田順五 1981 斜面積雪の挙動の研究 VIII, IX. 低温科学, 物理篇, **40**, 25-35, 37-49.
- 3) 吉田順五 1982 斜面積雪の挙動の研究 X. 低温科学, 物理篇, **41**, 25-42.
- 4) 吉田順五 1983 斜面積雪の挙動の研究 XII. 低温科学, 物理篇, **42**, 21-38.
- 5) 藤岡敏夫・他 1978, 1979, 1980 斜面積雪の歪速度と応力 I, II, III. 低温科学, 物理篇, 資料集, **36-37**, 39-69; **38**, 33-37; **39**, 13-33.
- 6) 吉田順五 1964 斜面積雪の内部応力および粘性流動 III. 低温科学, 物理篇, **22**, 119-127.
- 7) 大泉三津夫, 藤岡敏夫 1982 斜面積雪の挙動の研究 XI. 低温科学, 物理篇, **41**, 43-53.

Summary

1. As mentioned in Article 4 of the English summary of the previous Paper XII⁶⁾, curves C_H and C_V in circular snow covers will be drawn and discussions will be made upon them in the present Paper XIII. Circle G of radius R in Fig. 1(a) of the text represents the surface of a long cylinder made of earth lying horizontally, and circle S_0 of radius S represents the surface of a tubular snow cover which surrounds the earth cylinder. Gravity produces stresses in the snow cover. The upper half of the snow cover thus stressed makes 'convex circular snow cover'⁷⁾ of which curves C_H and C_V should be discussed in this Paper.

2. In Fig. 1 (b) of the text, circle G of radius R represents the inner surface of a long tunnel of a circular section horizontally dug in the earth. A tubular snow cover is attached to surface G with circle S_0 of radius S as its surface. The lower half of this snow cover makes a 'concave circular snow cover'⁹⁾. Cartesian coordinates (x, z) and polar coordinates (r, θ) are placed as shown in both the figures of Fig. 1.

3. If snow is regarded as an incompressible viscous fluid, stresses in the circular snow covers are given by Eqs. (1), (2), (3) and (4) of the text. Double signs at the head of their right sides should be so used as $+$ for the convex snow cover and $-$ for the concave snow cover. Differential equations (7) and (8) are for curves C_H and curves C_V respectively. These differential equations can equally be applied to both convex and concave snow covers, but the interval of variable ζ in which they are available differs according as the snow cover is convex or concave.

4. It is difficult to integrate differential equation (7), whereas differential equation (8) gives Eq. (9) of the text as its solution in which C is the constant of integration. Curves C_H in Fig. 2 (a) and Fig. 3 (a) of the text were drawn directly from differential equation (7) by the use of the electronic computer, while curves C_V in Fig. 2 (b), Fig. 3 (b) and Fig. 4 were drawn from Eq. (9), using different values for C of which some extracts are listed in the Figures.

5. Discussions will be made in this and the next Articles on the directions of curves C_H and C_V in the neighbourhood of surface S_0 of the circular snow covers. As seen from Fig. 2 (c), I and $dI/dx' = dI/Sd\theta$ defined in Article 13 of the English summary of the previous Paper XII⁴⁾ are respectively positive and negative in case of the convex snow cover of $Z = R/S = 3/4$. Figure 3 (c) shows that I turns negative whereas $dI/dx' = -dI/Sd\theta$ keeps negative in case of the concave snow cover of $Z = R/S = 4/3$. In both cases of the above convex and concave snow covers, one and the same Eq. (13) of the text gives F_V which is positive throughout the whole range of θ .

6. If the above results are compared with Table 1 of the previous Paper XII⁴⁾, it is seen that the fifth and sixth relations of the Table should be true for the circular snow covers. In the neighbourhood of their surfaces S_0 , the tangents to curves C_H and C_V should be so directed as shown at points P_5 and P_6 of Fig. 3 of the previous Paper XII in respective cases of the convex and concave snow covers. Actually, in figures (a) and (b) of Figs. 2 and 3 of the present Paper, the curves have such tangents in the neighbourhood of surfaces S_0 . Angles φ' and ψ' in the circular snow covers are shown in Fig. 1 of the text, in which dotted lines T are perpendicular to lines OP, while vectors f_H and f_V may respectively be read as the tangents to curves C_H and C_V .

7. Broken curves B_0 , B_1 and B_2 in Figs. 2, 3 and 4 of the text are of the following natures.

Curve B_0 : Curve of PSP. Principal stresses are, at every point on this curve, PSP defined in Article 4 of the English summary of the previous Paper XII. Curve C_H and curve C_V contact with each other when they pass this curve, with their common tangent coinciding in direction with the strong component of the PSP.

Curve B_1 : Curve of pure shear. Ratio $\gamma' = \sigma_1/\sigma_3$ equals -1 with the result that snow is undergoing pure shear at every point on this curve. Curve C_H and curve C_V intersect each other at a right angle on this curve.

Curve B_2 : Curve of horizontal and vertical principal stresses. Of the two principal stresses

σ_1 and σ_3 , one stands upright while the other lies horizontally at every point on this curve, with the result that curve C_H and curve C_V pass this curve respectively in the vertical and horizontal directions. Angle α between the first principal stress σ_1 and the horizontal is equal either to 0 or to a right angle.

These three kinds of curves are seen in the form of straight lines also in the wedge-shaped snow covers of the previous Paper XII: curve B_0 in its Fig. 1 while curves B_1 and B_2 in its Fig. 2.

8. As stated in the English summary of Paper IX²⁾; curves C_H and C_V were introduced for the purpose of calculating internal stresses in a snow cover on the mountain slope from the strain rates³⁾ which are actually measured in its interior. The strain rates are measured at points sparsely scattered on a sectional plane of the snow cover standing in the steepest direction of the mountain slope. The measurements give principal strain rates $\dot{\epsilon}_1$ and $\dot{\epsilon}_3$ together with angle α at the points. If plastic Poisson's ratio ν of snow is known in addition, Eqs. (1), (2), (3) and (4) in the English summary of Paper IX²⁾ determine the directions of tangents to curves C_H and C_V at the points of measurements.

9. The measurements of strain rates thus yield a diagram in which tangents to curves C_H and C_V are shown by short segments at the points of measurements on the sectional plane of the snow cover. Let such a diagram be called 'diagram of tangents'. By use of the method of interpolation, curves C_H and C_V will be generated from the diagram the more exactly, the nearer the points of measurements are positioned one another.

10. Figures 5(a) and 5(b) of the text are respectively the diagrams of tangents to curves C_H and C_V in the convex snow cover of Fig. 2. Curves C_H can be expected to be reproduced from Fig. 5(a) in the shape fairly like those in Fig. 2(a), but it seems hopeless to reproduce from Fig. 5(b) the complicated aspects of curves C_V in the upper part of the snow cover. This suggests that more detailed studies should be made about the natures of curves C_H and C_V .

11. It is not easy to have the exact value of plastic Poisson's ratio ν of snow at the points of measurements of the strain rates. But ν is needless in drawing curves B_1 and B_2 , because angle α is directly determined by the measurements of strain rates while $\gamma' = \sigma_1/\sigma_3$ is equal to -1 when $\gamma = \dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_3$ equals -1 independently of ν as shown in Fig. 2 of Paper X³⁾. Thus curves B_1 and B_2 can exactly be drawn and the directions in which curves C_H and C_V pass them are also exactly determined. This will make a good support for generating curves C_H and C_V from the diagrams of tangents.

12. A curve C_H can intersect another curve C_H at a point of horizontal PSP, while a curve C_V can intersect another curve C_V at a point of vertical PSP, although the converse are not always true. In each of Figs. 2 and 3 of the text, point A is a point of horizontal PSP and vertical straight line AA' which is a curve C_H has its end on surface S_0 of the snow cover which is also a curve C_H . Point K and point K' in Fig. 2 are points of vertical PSP. A curve C_V intersects another at point K, while curve C_V reduces to a point at point K'.

13. It is contrastive that curves C_V grew complicated in shape as the snow covers changed from uniform ones in Paper X to wedge-shaped ones in Paper XII and then to circular ones in this Paper, whereas curves C_H kept simple and like forms in spite of such changes in the snow covers.