



Title	最大エントロピー法による雪密度のスペクトル解析
Author(s)	石田, 完; ISHIDA, Tamotsu; 前野, 紀一 他
Citation	低温科学. 物理篇, 42, 57-64
Issue Date	1984-03-05
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/18482">https://hdl.handle.net/2115/18482</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	42_p57-64.pdf



## 最大エントロピー法による雪密度のスペクトル解析\*

石田 完・前野紀一

(低温科学研究所)

(昭和58年10月受理)

### I. ま え が き

最大エントロピー法 (Maximum Entropy Method: MEM) は, J. P. Burg が考案したランダム・データのスペクトルを計算する方法である<sup>1)</sup>。MEM は, 短い時系列データに対しても効率よく適用でき, かつ非常に分解能のよいスペクトルを与えるため, 種々の分野で利用されている。

著者達は, 南極大陸氷床で掘削回収された連続コア試料の密度データに MEM を適用し, 結果を別に報告した<sup>2)</sup>。この時, 現在南極氷床に堆積している雪氷の密度は, 堆積時から現在までの気候環境を反映しており, したがって, 深部から表面までの密度分布は過去から現在までの気候変化の時系列データを形成していると仮定された。みずほ基地の雪氷試料のスペクトル解析からは, 周期が1.6年から389.4年に及ぶ27個の雪の堆積および気候環境の周期的変化の存在が示された。

本論文では, 上記の論文<sup>2)</sup>で詳しく触れることのできなかったMEMの計算方法およびMEMを適用するためのデータの前処理について述べる。ここでは雪の密度データの解析を例にとって述べるが, 方法は一般的なもので他のデータの解析にも適用できるはずである。

### II. データの前処理

第1表

解析に用いたデータはJARE-12, 13により行なわれたみずほ基地のボーリング・コア密度であって, 文献<sup>3)</sup>の表である。この表には表面から深さ123.98 mまでの2~3 cm毎のコア密度が載っている。この表の一部を第1表に示したが, 試料の深さは範囲で示されている。そこで, その中間値をもって深さとし, 密度とともに, DEP, DENなる変数名を与え, 第2表の如く対にしてフロッピーディスクにファイルした。全データ数は2002対ある。インプットミスは十分にチェックしたが, 原表にも深さに関して数箇所あきらかな誤植があった。深さは単調増加をせずなので, 深さが逆転する箇所を簡単なプログラムによ

Depth of core samples (m)	Density (kg·m <sup>-3</sup> )
69.71~69.74	873
69.74~69.77	878
69.77~69.80	871
69.80~69.83	868
69.83~69.86	870
69.86~69.89	874
69.96~69.99	877
70.01~70.03	873
70.17~70.20	854

\* 北海道大学低温科学研究所業績 第2594号

第2表 第1表の部分から作成した深さ 10 cm 毎の密度データ

DEP	DEN	ID	ID	X (ID)
69.725	873	697	697	873.0
69.755	878	698	}	874.8
69.785	871	698		
69.815	868	698		
69.845	870	698		
69.875	874	699	699	874.0
69.975	877	700	}	875.0
70.02	873	700		701
70.185	854	702	702	854.0

ID=CINT (DEP \* 10)

て拾いだし訂正した。

コア密度は前述のように、深さ 2~3 cm 毎に得られているが、深さによっては 10~20 cm とぶ箇所もある。そこで後の解析の便宜のためにも、深さ 10 cm 毎の密度データに作りなおした。第2表の ID は DEP を 10 倍し、小数点以下を 4 捨 5 入した整数である。これは深さを dm (デシメートル) で表わしたものであり、またデータ番号そのものでもある。第2表に示した箇所では、698 番が 4 データあり、700 番は 2 データ、次は 702 番にとんでいる。複数個あるデータは算術平均値をとり、とんでいるデータは直線補間して中間データを作りだした。この作業はプログラム 1 で行なった。このプログラムでは DEP (深さ)、DEN (密度) を 1 対宛よみこんで作業を進めている (文 40)。データファイルの最後には、あらかじめ、密度 0 のデータを書きこんでるので、文 50 により DEN=0 となった時点で作業を終了し、文 200 以下で、作ら

### プログラム 1

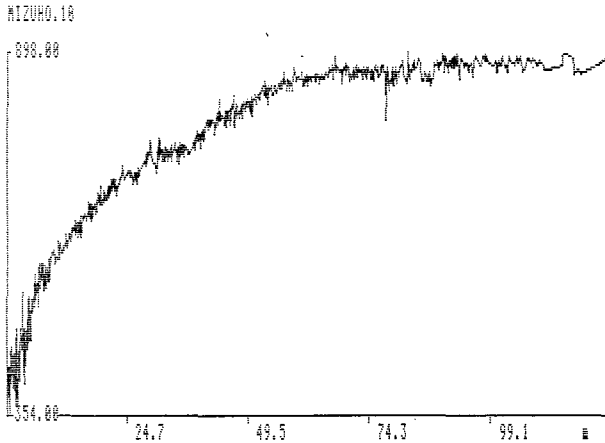
```

10 DEFINT I-N : DIM X (1240)
20 I=1 : J=0 : SUM=0
30 OPEN "2:MIZUHO.DAT" FOR INPUT AS #1
40 INPUT #1, DEP, DEN
50 IF DEN=0 THEN X(I)=SUM/J:CLOSE #1:GOTO 200
60 ID=CINT(DEP*10)
70 IF ID<=I THEN SUM=SUM+DEN:DENF=DEN:J=J+1:GOTO 40
80 X(I)=SUM/J : I=I+1 : J=1
90 IF ID=I THEN SUM=DEN:DENF=DEN:GOTO 40 ELSE K=1
100 I=I+1:IF ID< > I THEN K=K+1:GOTO 100
110 Z=(DEN-DENF)/(K+1) : JJ=1
120 FOR II=I-K TO I-1:X(II)=DENF+Z*JJ:JJ=JJ+1:NEXT
130 SUM=DEN : DENF=DEN : J=1 : GOTO 40
200 OPEN "2:MIZUHO.10" FOR OUTPUT AS #1
210 FOR KK=1 TO I:PRINT #1,USING " ###.#";X(KK);:NEXT
220 CLOSE #1 : END

```

れた 10 cm 毎の密度データがファイルされる。文 60 で ID を作り、同じ ID があった場合は、その個数を J として文 80 で平均値を求めている。ID がとんだ場合は文 100 で作りだすべきデータ数を K に求め文 110 で補間増減値を Z に求め、文 120 で K 個の補間データを作りだしている。第 2 表の最右欄はこのようにして作整された密度データである。

この密度データに誤りがないかを検査するには、データ値の頻度分布を求めるプログラム<sup>4)</sup>、あるいはディスプレイ装置にグラフ表示をさせるプログラム<sup>4)</sup>を用いる。第 1 図は DATA・GRA プログラムを用いて全データをグラフ表示させたもののハードコピーである。異常にとび離れた値を示した箇所は検査する必要がある。第 1 図では深さ 78 m 付近で特に小さな値があるが、これは原データの深さ 77.80~77.83 m における  $797 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  によるもので、原密度データの数値は直しようがない。このグラフ表示プログラムは、任意の範囲のデータを横軸いっばいに拡大して表示できるので、データチェックに便利である。



第 1 図 みずは基地の雪密度データから深さ 0.1 m 間隔で作られた密度データの深さに対する表示、計算機ディスクに格納されたデータを CTR に表示させたもののハードコピー

### III. 深さに対する密度曲線の 4 次式へのあてはめ

コア密度は第 1 図の如く、変動しながら深さとともに漸増する。そこで変動分だけを取りだすために、全体をなめらかな曲線で近似する。ここでは原データを 0.5 m 毎に平均したデータに対し、最小二乗法により 4 次式にあてはめた。用いたプログラム<sup>5)</sup>は正規方程式行列の対称性を利用して、これを単位左下三角行列と右上三角行列に分解して高次代数式の係数を求めるので、データ数、次数が多い場合にも高速に求められる。

深さ  $z$  m における平均密度を  $\bar{\rho}_z \text{ kg/m}^3$  とすると

$$\bar{\rho}_z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \quad (1)$$

$$A = 431.618$$

$$B = 16.5838$$

$$C = -0.258661$$

$$D = 1.97273 \times 10^{-3}$$

$$E = -5.94032 \times 10^{-6}$$

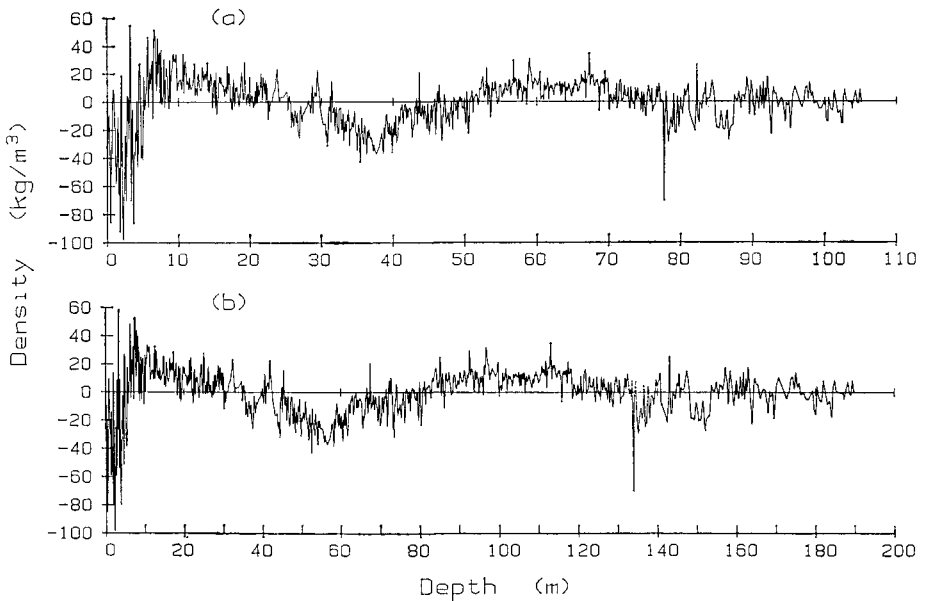
となった。

#### IV. 深さに対する密度の変動分

0.1 m 間隔の密度データから (1) 式を差引くと平均値 0 の密度変動データが得られる。これを第 2 図 (a) に示す。ところで表面で厚さ  $h_0$  のコアの密度を  $\rho_0$  とし、この層が深さ  $z$  まで沈んだとすると、厚さは  $h_z$  に縮まり、密度は (1) 式の  $\bar{\rho}_z$  となると考える。

$$h_0 \cdot \rho_0 = h_z \cdot \bar{\rho}_z \quad (2)$$

の関係から  $h_z$  を  $\bar{\rho}_z / \rho_0 (= \bar{\rho}_z / A)$  倍すれば表面にあった時の層の厚さとなる。今、密度変動の周期を問題にするとすれば、第 2 図 (a) の横軸、すなわち深さは (1) 式で補正しなければならない。その結果が第 2 図 (b) である。実際に深さ 105 m にあった密度データは約 190 m の密度データとなる。0.1 m 間隔の実際の密度データは不等間隔のデータとなり、後の周期解析の便宜のために、再び 0.1 m 等間隔データに作りかえた。それには Spline 函数補間<sup>5)</sup>を用いた。密度変動の振幅も深さによる補正をすべきであるが、今は密度変動の周期のみを問題としたので、この補正は行なわなかった。



第 2 図 (a) 4 次の回帰曲線からの偏差として求めた深さに対する密度変動  
(b) 圧密過程を受けなかったとした場合の補正した深さに対する密度変動

#### V. MEM によるスペクトル解析

MEM の原理と特徴は文献<sup>1), 6), 7)</sup> に詳しく述べられている。ここでは計算を進める上で理解しておくべき筋道を記す。

i) 観測値列  $x_i$  が白色雑音  $n_i$  をフィルタした結果であると考ええる。すなわち、

$$x_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} b_{\tau} n_{t-\tau} \quad (3)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} E[x_t] = 0, \quad E[n_t] = 0, \quad E[n_{t+\tau} \cdot n_t] = \delta_{\tau} \\ E = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N, \quad \delta_{\tau} = \begin{cases} 1, & \tau=0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$b_{\tau}$  はフィルタのインパルス応答であって、観測結果  $x_t$  をもたらした物理系の特性を表わすものと考えられる。

ii)  $x_t$  のパワースペクトルは  $x_t$  の自己相関関数のフーリエ変換、すなわち

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} E[x_{t+\tau} \cdot x_t] \exp(-2\pi i f \tau) d\tau \quad (5)$$

であるから、(3) を (5) に代入すると

$$P(f) = |B(f)|^2 \cdot P_n(f) = |B(f)|^2 \quad (6)$$

となる。ここで  $B(f)$  は  $b_{\tau}$  のフーリエ変換、 $P_n(f)$  は白色雑音  $n_t$  のパワースペクトルで恒等的に 1 である。すなわちフィルタ  $b_{\tau}$  の周波数特性を求めれば、 $x_t$  のパワースペクトルが求まる。

iii) 実際の計算では、次の関係にある  $b_{\tau}$  の逆フィルタ  $a_t$  を求め、

$$\sum_{\tau=0}^t a_{t-\tau} \cdot b_{\tau} = \delta_t, \quad t \geq 0 \quad (7)$$

そのフーリエ変換  $A(f)$  により

$$P(f) = 1/|A(f)|^2 \quad (8)$$

として、パワースペクトルが求められる。

iv) ここで逆フィルタ  $a_t$  は無限項あるが実際には有限項しか得られないから、項数を  $M$  個と制限した上で最もよい  $a_t$  の近似値  $\hat{a}_t$  を求める。観測値  $x_t$  をこのフィルタに通した時の出力  $\hat{n}_t$  は

$$\hat{n}_t = \sum_{\tau=0}^{M-1} \hat{a}_{\tau} \cdot x_{t-\tau} \quad (9)$$

で、この  $\hat{n}_t$  とその真の値  $n_t$  との差の 2 乗平均を最小にするような  $\hat{a}_{\tau}$  が最適であると考える。 $\varepsilon^2 = E[(n_t - \hat{n}_t)^2]$  において  $\partial \varepsilon^2 / \partial \hat{a}_t = 0$  なる条件から、

$$\sum_{\tau=0}^{M-1} \hat{a}_{\tau} \cdot C_{t-\tau} = b_0 \cdot \delta_t, \quad t=0, 1, \dots, M-1 \quad (10)$$

なる正規方程式を得る。ここで  $C_{t-\tau}$  は観測値  $x_t$  の自己相関関数 ( $C_{-\tau} = C_{\tau}$ ) で  $x_t$  から計算できるが、 $b_0$  は不明である。しかし、 $\hat{a}_0 = 1$  と定めれば

$$b_0^2 = P_M = \sum_{\tau=0}^{M-1} \hat{a}_{\tau} \cdot C_{\tau} \quad (11)$$

とした時、最適な  $\hat{a}_{\tau}$  が求められる。

v)  $\hat{a}_\tau (\tau=0, 1, \dots, M-1)$  のフーリエ変換を  $\hat{A}(f)$  とすれば、パワースペクトルは

$$P(f) = P_M / |\hat{A}(f)|^2 \quad (12)$$

となる。

vi) (10)式を解く場合、我々は Burg の方法にしたがい、 $M=1$  からはじめて、 $\hat{a}_M, P_M$  および  $C_M$  も順次 Levinson の漸化式により計算した<sup>2)</sup>。 $M=1$  の場合は (11) 式から

$$\hat{a}_0 = 1, \quad P_1 = C_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i^2 \quad (13)$$

となるので (観測値は  $N$  個とする)、順次  $M=2, 3, \dots$  の場合が求められる。

ここでフィルタの項数  $M$  を如何にして定めるかが問題となる。目安としては  $M \approx (2 \sim 3)\sqrt{N}$  とされているが、観測値  $x_i$  とこれを白色雑音にするためのフィルタ係数  $\hat{a}_\tau$  による予測値  $\hat{x}_i$  との差の 2 乗平均誤差 FPE (final prediction error)

$$\text{FPE} = E \left[ (x_i - \hat{x}_i)^2 \right] \quad (14)$$

は、フィルタ係数の打ち切り項数を  $M$  とすれば、日野の算法<sup>1)</sup>によると

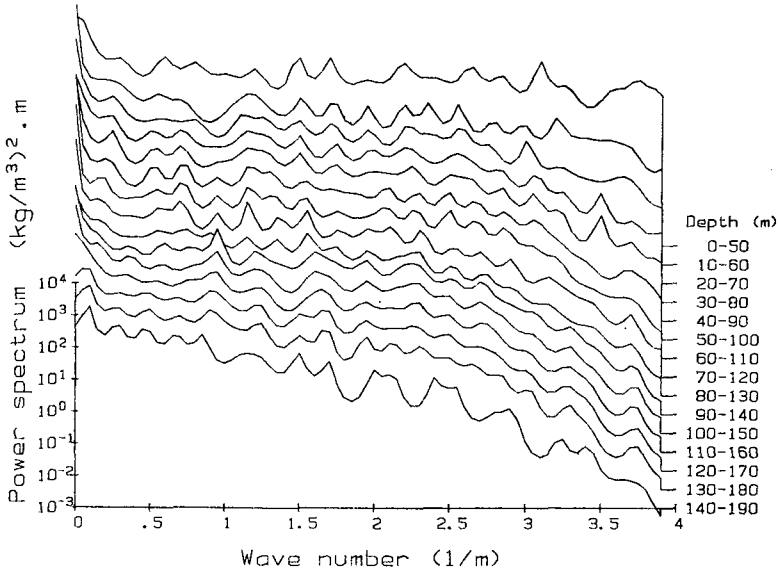
$$(\text{FPE})_M = \frac{N+M}{N-M} P_M, \quad P_M = C_0 \prod_{\tau=1}^M (1 - \hat{a}_\tau^2), \quad M \geq 2 \quad (15)$$

であり、 $P_M$  に掛ける係数は  $M$  が増すほど大となるが、 $P_M$  は  $\hat{a}_\tau$  が 1 より小さいので  $M$  が増すほど小さくなる。したがって FPE はある  $M$  で最小値となる。その  $M$  を打ち切り項数とすべきであるとされている。

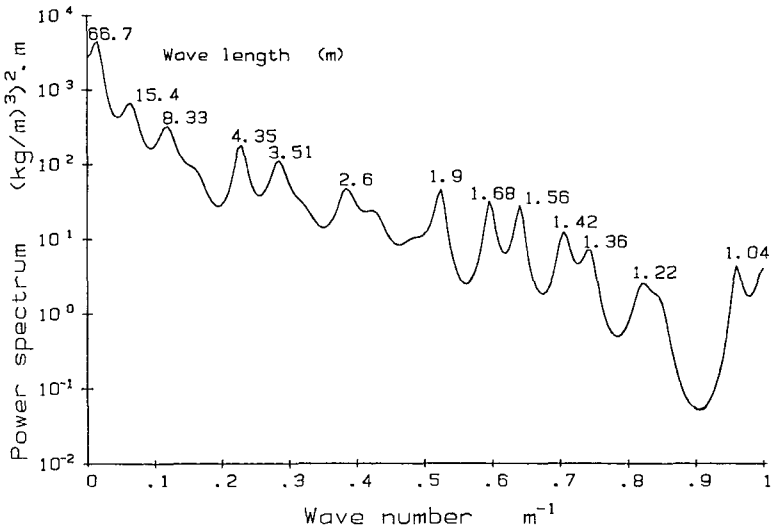
## VI. 密度変動のパワースペクトル

用いた密度変動は 0.1 m 毎の深さ 190 m までのデータ (第 2 図 (b)) である。まずパワースペクトル密度が深さとともに、どのように変化するかを見るために、深さ 50 m の区間をとり、表面から 50 m まで、10~60 m, 20~70 m の如く、区間を 10 m 宛ずらし、深さ 190 m まで 15 区間に分けて計算した。使用したプログラムは文献 3) の Program 3 である。1 区間のデータ数は 500 で、フィルタ項数の見積りは  $(2 \sim 3)\sqrt{500} = 45 \sim 67$  なので、初めフィルタ係数は 60 項まで求めたが、40 項をすぎると FPE は漸増する傾向があったので、フィルタ係数は 40 項までとした。これを無次元周波数 0~0.5 (ナイキスト周波数) まで 101 項にフーリエ変換して求めたパワースペクトル密度を第 3 図に示す。データ間隔は 0.1 m なので、波数にすると  $0 \sim 5 \text{ m}^{-1}$  の範囲であるが図では約  $4 \text{ m}^{-1}$  までの範囲を、また見やすくするために各区間のスペクトルは縦軸をそれぞれずらして示してある。各スペクトルのピークは連続した 4~7 区間でその位置がそろっている。したがって、その区間でアンサンブル平均をとれば、そのピークの波数はかなりの信頼性がある。それらは、波数 0.27, 0.29, ..., 1.82,  $4.00 \text{ m}^{-1}$  の 14 個であり、周期に直すと 23.4, 10.6, ..., 1.7, 1.6 年に相当する<sup>3)</sup>。

次に波長の長い所を見るために、深さ 190 m までの密度変動データを 0.5 m 間隔で平均した 380 個のデータについて計算した。この場合も FPE は 40 項で最小となったので、フィルタ



第3図 補正した深さ50m区間のパワースペクトル密度, スペクトルは各区間毎にずらして表示



第4図 補正した深さ190mまで, 0.5m間隔に平均した密度変動のパワースペクトル密度

項数は40とし、無次元周波数0~0.5の範囲につき201項のスペクトルを求めた。この場合、データ間隔は0.5mなので波数0~1 m<sup>-1</sup>の範囲となる。その結果が第4図であり、図中の数字は各ピークに相当する波長である。アンサンブル平均値でないので、信頼性は低いだが、これら13個のピークは周期6.1, 7.1, ..., 89.9, 389.4年に相当する<sup>2)</sup>。その結果、初めに述べたように、みずは基地の雪密度の変動には27個の周期的な変化が含まれていると結論される。

本研究に要した費用の一部は、国立極地研究所の特別および一般共同研究費から支弁された。

#### 文 献

- 1) 日野幹雄 1977 スペクトル解析. 朝倉書店, 東京, pp. 300.
- 2) Ishida, T. and Maeno, N. 1983 Power spectrum analysis of snow densities at Mizuho Station, Antarctica. Mem. Natl. Inst. Polar Res., **29**, 159-165.
- 3) Narita, H. and Maeno, N. 1978 Compiled Density Data from Cores Drilled at Mizuho Station (Table 3). Mem. Natl. Inst. Polar Res., Spec. Issue, **10**, 140-158.
- 4) 石田 完 1981 時系列データ解析のための BASIC プログラム. 低温科学, 物理篇, 資料集, **40**, 87-113.
- 5) 石田 完 1982 マイクロ・コンピュータ用 BASIC プログラム I. 低温科学, 物理篇, 資料集, **41**, 83-90.
- 6) 斉藤正徳 1972 パワースペクトルを計算する新しい方法 (1), (2), bit, **4**, No. 12, 16-21, No. 13, 35-39.
- 7) 宮田元靖 1983 データとパワースペクトル I, II. 日本物理学会誌, **38**, No. 3, 195-202, No. 4, 267-272.

#### Summary

The maximum entropy method, abbreviated as MEM, can be applied to analyses of various time-series data, giving very accurate power spectra from short data. This paper gives a short explanation of MEM and procedure of its calculation. The method of processing data in suitable forms to MEM analyses is also introduced with special reference to data of snow densities of Antarctic core samples.