



Title	斜面積雪の挙動の研究 XV : 積雪表面と地面とを結ぶ曲線CH
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科学. 物理篇, 43, 1-14
Issue Date	1985-03-18
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18496
Type	departmental bulletin paper
File Information	43_p1-14.pdf



斜面積雪の挙動の研究 XV*

——積雪表面と地面とを結ぶ曲線 C_H ——

吉田 順五

(北海道大学名誉教授)

(昭和59年9月受理)

I. ま え が き

この論文と同じ表題の論文 X²⁾, XII³⁾ および XIII³⁾ で、理論的に内部応力が決定できる仮定の斜面積雪を考え、その応力をもとにして、それぞれの仮想斜面積雪のなかの曲線群 C_H および曲線群 C_V を計算して図に表した。仮想積雪は、すべて、斜面の最大傾斜方向に立つ鉛直な流動面に平行に、2次元的に斜面を流下する。以下、紙面を流動面と考える。曲線群 C_H も曲線群 C_V も流動面内にある平面曲線群である。論文 X の斜面積雪は無限に長い平面状斜面に一樣な厚さでつもった「無限斜面積雪」、論文 XII の斜面積雪は無限に長い平面状斜面に流動面による断面が楔形になるようにつもった「楔形積雪」、論文 XIII の斜面積雪は流動面による断面が半円形をなす斜面に一樣な厚さでつもった「円形積雪」であった。

斜面積雪がこの順に形をかえるにつれ、積雪の内部応力は複雑になり、曲線群 C_V はその形態を複雑にした。ところが、曲線群 C_H の方は、第1の無限斜面積雪内で示した単純な形態をたもったまま変化しなかった。すなわち、上記の仮想斜面積雪のいずれにおいても、曲線群 C_H を構成するおのおのの要素曲線は、地面から出発したあと、たがいに交叉することなく、斜面の上手か下手かの一方だけにむかって弓なりに湾曲しつつ積雪表面に到達した。用語の便宜のため、地面から出発して積雪表面に達する流動面内の曲線を、すなわち、地面上の一点と積雪表面上の一点とをつなぐ流動面内の曲線を「H型曲線」とよぶことにする。

うえのことは、曲線 C_H が、上記3種の仮想斜面積雪のばあいだけに限らず、一般の斜面積雪のばあいにも、同じような単純な形態を示すのではないかと推測を生む。この論文 XV と次の論文 XVI とは、その推測の検討である。この論文 XV では、曲線 C_H の性質について、二つの仮定をおくと、曲線 C_H がH型になることを証明する。ただし、斜面の上手か下手かの一方だけに湾曲しつづける曲線になるか否かについては、いずれとも言わない。次の論文 XVI は、上のふたつの仮定が、斜面積雪内部の応力に極めて特殊な分布が生じない限り、成立することの証明である。

論文 XV, XVI の証明では、斜面積雪内の応力の成分が連続であることのみならず、応力成分の座標についての第1階偏微分係数もまた連続であることを、前提としておく。実際の積

* 北海道大学低温科学研究所業績 第2673号

雪は、多くの均質な雪層の重畳である。雪層と雪層との境界では応力の成分に不連続が生じうる。応力成分の不連続が、論文 XV および XVI の証明の結果におよぼす影響については、別の機会に考察する。

曲線 C_H および曲線 C_V は論文 IX¹⁾ で定義し、その定義の要点を論文 X²⁾ の「まえがき」に示した。流動面内に、座標 x を水平に座標 z を鉛直上方にとる。曲線 $C_H(C_V)$ 上の一点における曲線 $C_H(C_V)$ の切線の方向にむかって、 x の正の方向からはかった角を $\varphi(\psi)$ とすると

$$\tan \varphi = \sigma_z / \tau_{zx}, \quad \tan \psi = \tau_{zx} / \sigma_x \quad (1)$$

の関係がある。

流動面内にある任意の曲線 A を、流動面に直角に移動させて作った表面を曲面 A とよぶ。曲面 A は曲線 A をふくみ、曲面 A には応力成分がはたらく。その応力成分を、用語を簡単にするため、「曲線 A 」にはたらく応力成分とすることにする。この用語法にしたがえば、曲線 C_H にはたらく応力成分ベクトルは方向が常に水平であり、曲線 C_V にはたらく応力成分ベクトルは方向が常に鉛直である。(論文 XIII³⁾ の「まえがき」で、本文第11行目の両端に「塑性粘性係数」がふたつある。いずれも誤りで「塑性ポアソン比」が正しい。この場所をかりて訂正する)

II. ふたつの仮定と路線 C_H

曲線 C_H が H 型であることの証明は第 IV 章で完結する。それまでは、第 IV 章の証明の準備である。この第 II 章では、前章でのべたふたつの仮定を説明したあと、曲線 C_H の断片で構成された「路線 C_H 」なるものを導入する。

1. 第 1 仮定と第 2 仮定

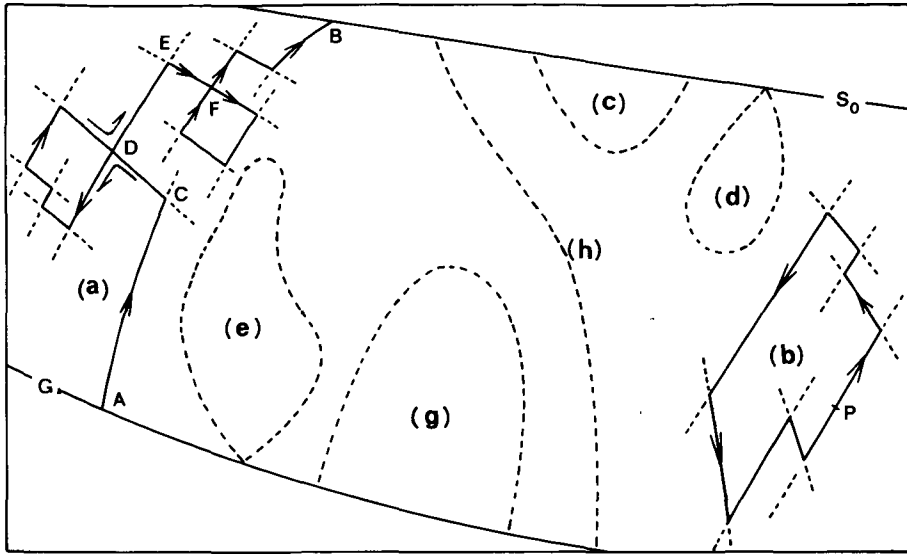
第 1 図は、流動面による斜面積雪の断面である。曲線 S_0 が積雪表面を、曲線 G が地面を表す。曲線 S_0 と曲線 G とにはさまれた領域が「積雪内部」である。「積雪内部」は曲線 S_0 および曲線 G を含まないとする。曲線 S_0 と曲線 G とをまとめて「積雪境界線」とよぶ。

前章でのべたふたつの仮定とは、次の第 1 仮定と第 2 仮定とである。

第 1 仮定。 曲線 C_H は積雪内部に端点をもちえない。つまり、曲線 C_H が積雪内部で途切れることはない。端点があるとすれば、積雪表面 S_0 上か地面 G 上かに限られる。曲線 C_H が積雪表面 S_0 あるいは地面 G に到達したとき、曲線 C_H はその到達点で終ると定義する。したがって、到達点は端点であり、逆に、端点は到達点である。

第 2 仮定。 曲線 C_H 同士が積雪内部で交叉するとしても、その交叉は 2 本の曲線 C_H の交叉にかぎられる。すなわち、交叉点は「2 重交叉点」に限られる。一点で 3 本以上の曲線 C_H が交叉する「多重交叉点」は存在しない。さらに、2 重交叉点と 2 重交叉点とが無限に近く存在することはなく、両者は必ず有限間隔をたもつ。

前章の「まえがき」にあげた 3 種の仮想斜面積雪で、曲線 C_H が、すなわち曲線群 C_H の要素曲線が、積雪内部で途切れることはなかった。それで、第 1 仮定をおいた。曲線 C_H は、また、交叉することもなかった。しかし、論文 XIII の凸形円形積雪の内部には、曲線 C_V の 2 重交叉点が 1 箇所あらわれた。これから考えて、第 2 仮定を設けたわけである。実際、次の論文 XVI で示すように、非常に特殊な応力が発生すれば、曲線 C_H も 2 重交叉点をもちうる。



第1図 斜面積雪の流動面内で路線 C_H がとりうる5箇の形態。図(a)と図(b)とで、実線分および点線分は曲線 C_H の断片である。路線 C_H は、このふたつの図の、屈曲した実線によって例示される。図(c)(d)(e)(g)(h)では、路線 C_H を、その実際の形を簡略して、平滑な破曲線で表してある。路線 C_H は、この5箇の形態をとりうる。曲線 S_0 が積雪表面を、曲線 G が地面を示す

2. 路線 C_H

積雪境界線の一方の上にある1点から出発して、たとえば、第1図(a)に示したように曲線 G 上の点 A から出発して、矢印の方向に曲線 C_H を辿ることになろう。この図(a)の実線分および点線分は、すべて曲線 C_H の断片である。曲線 C_H 同志の交叉点である点 C に達したとすると、第2仮定によりそれは2重交叉点だから、その先に辿りうる3本の曲線 C_H の断片がある。そのどれかひとつを選んで辿りをつづける。ただし、点 D および点 F でのように、同一の点なら再度通過してもよいが、有限な長さの同一線分を再度通過することは禁止する。積雪内部に曲線 C_H の端点がないことを仮定しているから、このようにして辿りうる限り辿りを進めると、ついに積雪境界線上の一点に到達する。すると、そこは曲線 C_H の端点だから、それより先へは進めない。つまり、辿りは完結する。第1図(a)では、辿りの完結点を曲線 S_0 上の点 B とした。このような、曲線 C_H の断片をつなぎ合せて作られた、辿りの完結した道筋全体を「路線 C_H 」と呼ぶことにする。路線 C_H は、その両端点と同じでも1本には限られない。多くの、両端点を同じくする路線 C_H がありうる。

力学的条件を考慮しなければ、積雪境界線上に端点をもたない路線 C_H も考える。それは第1図(b)のような閉じた閉路線 C_H である。これは、曲線 C_H の交叉点ではない積雪内部の点 P から出発して、矢印の方向に曲線 C_H の断片の連鎖を辿ったあげく、途中で積雪境界線に達することなく、点 P へ戻ることによって作られた閉曲線である。点 P へ戻ったら、もう先へは進めない。進めば、有限な長さの同一線分を再度たどることになるからである。かくして辿りが完結するから、この閉じた曲線も路線 C_H であるといえる。このような、積雪境界線に接触することなく、全体が積雪内部にある閉路線 C_H を「内部閉路線 C_H 」となづける。内部閉路線

C_H は第1仮定も第2仮定も満足する。しかし、次に示すように、内部閉路線 C_H は、力学的にその存在を否定される。

内部閉路線 C_H の内部にある雪を雪 J と名づけると、雪 J の重量を支える力としては、雪 J のまわりにある雪が雪 J の周辺である内部閉路線 C_H に加える応力成分の他にはない。ところが、この応力成分を表すベクトルは方向がすべて水平である。よって、この応力成分は雪 J を支えるべき鉛直上方にはたらく力を作りえない。かくして、雪 J の存在が否定され、それと共に内部閉路線 C_H の存在が否定される。第1図(a)の路線 C_H の点 D の左側にある部分と点 F の下側にある部分とは内部閉路線 C_H を形成する。よって、これらの部分は存在しえず、図(a)の路線 C_H は、点 D からは直接点 E にむかい、点 F からは直接点 B にむかう路線 C_H にならざるをえない。つまり、路線 C_H はループを作らない連続曲線、すなわち「単一曲線」であらねばならない。これが、すべての路線 C_H について言えることは明かである。

3. 路線 C_H に許される形態

実際の路線 C_H は、第1図(a), (b)に示したような屈曲線であるが、以後これを、これと相を同じくする平滑な破曲線で表すことにする。路線 C_H は、積雪内部では途切れないと仮定しているうえ、前節で知られたように、積雪境界線上に端点をもつ単一曲線でなければならない。よって、その形態は、第1図の破曲線(c)(d)(e)(g)(h)で示される5種類にかぎられる。しかし、このうちの初めの3種類は、次に述べるように、力学的に成立しえない。

曲線 S_0 上の一点から出発して曲線 S_0 上の異なる点にもどる形態(c)の路線 C_H と曲線 S_0 とに囲まれた雪の重量を支える力は存在しない。積雪表面である曲線 S_0 上の応力成分が常に0だからである。よって、形態(c)の路線 C_H はありえない。曲線 S_0 上の一点から出発して同一点にもどる形態(d)は、形態(c)の特別な場合にすぎない。よって、形態(d)の路線 C_H も否定される。形態(e)の路線 C_H は、曲線 G 上の点 Q から出て同一点 Q に戻る。よって、地面が、点 Q で、路線 C_H 内の雪 J の重量を支えることになる。ところが、雪 J と地面との接触面積は無限小である。したがって、曲線 G 上の応力成分は点 Q で無限大にならざるをえない。しかし、無限に大きい応力成分は発生しえない。発生したら地面は破壊する。よって形態(e)の路線 C_H も存在しえない。形態(d)および(e)の路線 C_H は、いずれも、積雪境界線に接触する閉路線 C_H である。かくして、積雪境界線に接触するしないに拘らず、閉路線 C_H は、力学的理由から、すべて存在しえないことが示された。

形態(g)と形態(h)との路線 C_H には、上のような力学的矛盾はない。よって、存在しうる路線 C_H の形態は、形態(g)と形態(h)とに限られることになった。曲線 S_0 上の一点と曲線 G 上の一点とをつなぐ形態(h)の路線 C_H は、H型とよぶことに「まえがき」で定めた。曲線 G 上の一点から出発して同曲線上の異なる点に戻る形態(g)の路線 C_H は「G型」とよぶことにする。ところで、このG型路線 C_H もまた存在しないことが、以下のようにして証明される。

Ⅲ. G型二重無枝曲線 C_H

第IV章での証明に使うため、この第III章では、微小距離をはさむ地面 G 上の点 A と点 B とを端点とする G 型無枝曲線 C_H は、存在しえないことを示す。「無枝曲線 C_H 」とは、交差点

のない曲線 C_H のことである。交叉点があれば、そこから曲線 C_H の枝がでるが、なければ枝がでないから、この名を用いる。以下、この章に限り、単に「 C_H 」と書いてあっても、それを、すべて「無枝曲線 C_H 」の意味で使う。

1. G型二重曲線 C_H の存在の否定

一本の曲線 C_H には、応力が連続であるため、それとほぼ平行に微小距離をおいて走る曲線 C_H が存在する。このような2本の曲線 C_H の組合せを「二重曲線 C_H 」となづける。この第1節は、二重曲線 C_H が、微小距離へだたった地面 G 上の2点 A, B から出発して、有限距離すすんだあと積雪内部で合体し、第2図(d)のようなG型二重曲線 C_H にはなりえないことの証明である。

このG型二重曲線が囲む面積は無限に小さい。点 A から出発して、有限な面積を囲んだあと点 B に戻る曲線 C_H は、応力の連続性からみてありえないが、仮にあったとしても、点 A と点 B との間で地面 G 上の応力が無限大になるという矛盾を生じてしまう。ところが、G型二重曲線 C_H のばあいには、この地面 G 上の応力が有限値に止まる。しかし、以下に示すように、別の理由が、G型二重曲線 C_H の存在を否定する。

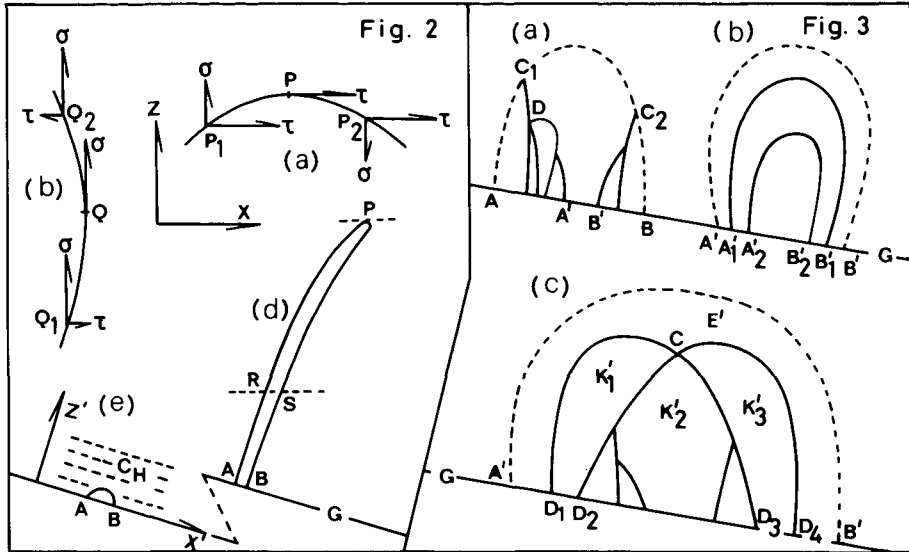
第2図も、流動面による斜面積雪の断面で、地面を表す曲線 G の上部が積雪内部である。積雪表面を示す曲線 S_0 は、必要がないため、書きいれてない。同図(a)の山形の曲線 $P_1 P P_2$ は、点 P を最高点、すなわち上向き頂点、とする曲線 C_H の微小断片である。点 P_1 と点 P_2 とは、共に点 P に極めてちかい。点 P では曲線 C_H の切線が水平であるから、座標 x の正の方向から切線にむかって測った角 φ は0である。よって、「まえがき」にある式(1)により、 σ_z は0にひとしく τ_{zx} は有限値をもつ。図(a)には、その τ_{zx} を正として、それを右むき水平矢印 τ で表した。

点 P_1 および点 P_2 における τ_{zx} は、これらの点が点 P に極めてちかいたため、点 P における τ_{zx} とほとんど変わらない。それで、その τ_{zx} を、点 P での矢印 τ とほとんど同じ長さの矢印 τ で表してある。点 P_1 では角 φ が正である。よって、点 P_1 での σ_z は正でなければならない。それを上向きの矢印 σ で示した。これに反し、点 P_2 では角 φ が負である。よって、点 P_2 での σ_z は負で下むきの矢印 σ で表される。以上のことから、曲線 C_H の断片 $P_1 P P_2$ を左から右にむかって辿ると、 σ_z の正の値が次第に減少して点 P で0になり、点 P をすぎると σ_z が負になってその絶対値が次第に増大することがわかる。点 P での τ_{zx} が負で左むきの水平矢印で表されるときは、点 P_1 での σ_z が負に、点 P_2 での σ_z が正になることが違うだけである。点 P で σ_z が符号転換することには変りがない。このようにして、曲線 C_H に上むき頂点があれば、その頂点を境にして曲線 C_H 上の σ_z に正負の符号転換のおこることが知られる。曲線 C_H に最低点、すなわち下むき頂点があるときにも、そこで曲線 C_H 上の σ_z に符号転換のおこることが、同じようにして、証明される。

第2図(b)の曲線 $Q_1 Q Q_2$ は、点 Q を右むき頂点とする曲線 C_H の断片である。点 Q での曲線 C_H の切線は鉛直だから角 φ は直角にひとしい。よって、式(1)により、点 Q では τ_{zx} が0で σ_z が有限である。このことから、右むき或は左むき頂点が曲線 C_H にあれば、そこを境にして曲線 C_H の τ_{zx} に符号転換のおこることが、上と同じ手法で証明される。なお、 σ_z の符号転換

にしても τ_{zx} の符号転換にしても、発生するとすれば、その場所は曲線 C_H の頂点である。頂点以外の点では発生しえない。

第2図(d)は有限な長さの G 型二重曲線 C_H である。その先端の合体点から有限距離へだた



第2図 図(d)は G 型二重曲線 C_H 、図(e)は G 型微小曲線 C_H である。両図において、点 A と点 B とは、地面を表す曲線 G 上の微小距離をへだてた 2 点である。図(a)の点 P は曲線 C_H の上むき頂点を、図(b)の点 Q は曲線 C_H の右向き頂点を示す。両図において、 σ は σ_z 、 τ は τ_{zx} の代用である。曲線 C_H 上の σ_z および τ_{zx} は、それぞれ、点 P および点 Q で正負の符号を転換する

第3図 図(a)の破曲線 $A C_1 C_2 B$ は G 型路線 C_H である。G 型路線 C_H と曲線 G とに囲まれた領域を領域 K とよぶ。G 型路線 $A' D C_1 C_2 B'$ には、これを点 A' から出発して点 B' にむかって辿るとき、右側にむかって出る枝曲線 C_H が全くみられないとする。この種の G 型路線 C_H を「G 型無枝周辺 C_H 」となづける。G 型無枝周辺 C_H と曲線 G とで囲まれた領域を領域 L とよぶ。領域 L は、一般に、領域 K の一部をなす。図(b)の点 A' から点 B' にいたる破曲線は G 型無枝路線 C_H である。よって、これと曲線 G とで囲まれた領域は領域 L ではあるが、この領域 L の内部には曲線 C_H の交叉点が存在しないとする。内部に曲線 C_H の交叉点の存在しない領域 L を領域 N とよぶ。図(c)の点 A' から発して点 B' に終る破曲線も G 型無枝周辺 C_H を表す。これと曲線 G とが囲む領域 L の内部には曲線 C_H の交叉点が存在するため、この領域 L を領域 M とよぶ。点 C は、領域 L 内にある曲線 C_H の交叉点のうちの 1 箇である。点 C で交る 2 本の曲線 C_H によって 3 箇の領域 K、すなわち領域 K_1, K_2, K_3 が作られる。各領域 K_i は、領域 K_2 について図示されているようにして、領域 M に変えられる

った所に水平線分をひく。それと二重曲線 C_H とのふたつの交点を点 R および点 S とし、両点をへだてる微小距離を d_x としよう。すると、この水平線から合体点に到るまでの二重曲線 C_H の間にはさまれた雪 J の重量を $W d_x$ と書くことができる。ここに、 W は有限な値の量である。水平微小線分 RS の下側にはたらく力 $-\sigma_z d_x$ が雪 J の重量を支える。よって、微小線分 RS 上の σ_z は有限な値 $-W$ をもたなければならない。ところが、第2図(d)に示したように、この G 型二重曲線 C_H には上むき頂点 P がある。したがって、点 P から左側にくる曲線 C_H 上の σ_z と右側にくる曲線 C_H 上の σ_z とは、符号が逆である。よって、点 R と点 S とでも σ_z は符号

を逆にしなければならない。これは、微小線分 RS 上の σ_z が有限であるという上に得た結果と矛盾して、その σ_z が 0 であることを意味する。なぜならば、 σ_z が微小線分 RS 上で連続的に符号を変えるには、点 R と点 S との間にある一点で σ_z が消滅しなければならないからである。かくして、有限な長さの G 型二重線の存在しえないことが証明された。

2. G 型微小曲線 C_H 存在の否定

G 型二重曲線 C_H には、前節でのべた長さが有限なものほかに、第 2 図(e)に示したような、微小長さのものもありうる。この種の G 型二重曲線 C_H を G 型微小曲線 C_H とよぶことにする。これもまた存在しえないことが、以下のように証明される。

第 2 図(e)の曲線 G 上の点 A と点 B とは、G 型微小曲線 C_H の端点だから、両点のあいだの距離は微小である。その微小距離を dx' としよう。すると、この G 型微小曲線 C_H と曲線 G とに囲まれた雪 J の面積が $(dx')^2$ の程度になるから、雪 J の重量は、 W を有限な量として、 $W(dx')^2$ の形に書くことができる。積雪が微小線分 AB に加える応力成分を表すベクトルを f とし、その鉛直成分を σ_v としよう。すると、雪 J の重量を支えるのは、地面が雪 J の底に加える力の、すなわち $-fdx'$ の、鉛直成分 $-\sigma_v dx'$ となる。よって、 σ_v は、 $-Wdx'$ として表される微小な応力成分でなければならず、点 A と点 B とが無限に近づけば消失する。つまり、 f は、鉛直成分がない、方向が水平なベクトルである。したがって、論文 IX¹⁾の第 II 章第 4 節により、ベクトル f をふくみ流動面に直角な平面は、すなわち、水平面は、地面 G と共軌であり、曲線 G は地面を表す曲線であると同時に曲線 C_H となる。

曲線 G が曲線 C_H ならば、応力の連続性により、曲線 G に接触する極めてうすい雪層 L 内の曲線 C_H は、すべて曲線 G に平行する。そして、G 型微小曲線 C_H は雪層 L 内にある。ところで、曲線 G に平行な曲線 C_H が、曲線 G 上の一点から出て曲線 G 上の他の一点に戻ることはないのは明かである。つまり、雪層 L のなかに G 型微小曲線 C_H はありえない。かくして、G 型微小曲線 C_H の存在を仮定すると、それが存在しないという矛盾におちいる。よって、G 型微小曲線 C_H は存在しない。

以上、第 1、第 2 の両節により、この章のはじめに述べたことが、すなわち、曲線 G 上微小間隔の 2 点を端点とする G 型無枝曲線の存在しえないことが、証明された。

IV. H 型正則曲線 C_H

この章では、まず、前章の結果を利用して、G 型路線 C_H の存在が否定される。したがって、第 II 章の結果により、路線 C_H は H 型でしかありえないことになる。それから、更に、H 型路線 C_H が交叉しえないことから、曲線 C_H が H 型の無枝曲線 C_H であることが結論される。

1. 領域 M と領域 N

G 型路線 C_H が存在したとして、それが第 3 図(a)の破曲線 AC_1C_2B であるとする。以後、曲線 G と、その上の異なる 2 点を端点とする G 型路線 C_H とに囲まれた領域を領域 K とよぶ。また、この G 型路線 C_H を、簡単のため、領域 K の「周辺」とよぶ。領域 K 内とその周辺上とは、一般に、曲線 C_H の二重交叉点が存在する。しかし、その個数は有限である。もし領域 K 内に無限に多くの交叉点があるとすれば、点集合論の定理により、領域 K 内に少なくとも 1 個の交

又点の集積点が存在し、集積点の近傍では交叉点同志が無限に接近する。これが、第2仮定に反するからである。領域Kの周辺上にも有限個の交叉点しかありえないことが、同様にして証明される。

第II章の第2節で、曲線 C_H の断片の完結した連鎖を路線 C_H と定義した。このあと、曲線 C_H の断片の完結しない連鎖が現れるが、それを「連鎖 C_H 」と呼ぶことにする。

曲線 C_H の交叉点は、すべて、二重交叉点であると仮定している。よって、領域Kの周辺上の交叉点には、領域K内に向う枝曲線 C_H のないものと、1本あるものと、2本あるものがある。第3図(a)の領域Kの周辺上に交叉点 C_1 があるとし、それから、領域K内にむかう枝にそって曲線 C_H を辿るとしよう。もし2本の枝があったら、辿る方向に対して左側にある枝をえらぶ。辿るうちに、領域K内の交叉点Dにであつたら、そこから出る3本の枝曲線 C_H のうちの左端の枝にそって進む。交叉点に出遭ごとに左端の枝を選んで辿ってゆくと、遂に曲線G上の一点 A' に達する。この、点 C_1 から辿りはじめて点 A' にいたる連鎖 C_H が、領域Kの周辺に達することはないからである。もし達したとすれば、力学的に禁止された閉路線 C_H が形成される。

第3図(a)の点 C_2 を、領域Kの周辺上、交叉点 C_1 にもっとも近い、領域K内にむかう枝のある交叉点とする。点 C_2 からも、点 C_1 からはじめたと同様にして、枝曲線 C_H を辿るとしよう。ただし、このたびは、交叉点にであつたら、3本の枝のうち、まえとは逆に、右端にある枝を選んで進む。第3図(a)の点 C_2 と点 B' とを結ぶ連鎖 C_H は、そのようにして出来たものである。この連鎖 C_H が、領域Kの周辺にも点 C_1 と点 A' とを結ぶ連鎖 C_H にも達しえないことは、閉路線 C_H の存在の許されないことから、明かである。

かくして、はじめの領域Kのなかに、領域内部にむかう枝曲線 C_H をもたない「無枝周辺 $A'DC_1C_2B'$ 」が作られた。このようなG型無枝周辺 C_H と曲線Gとに囲まれた領域を領域Lと名づけ、曲線 C_H の交叉点をその内部に含むときには、その領域Lを領域Mと呼ぶ。もし、その内部に曲線 C_H の交叉点が存在しなかったら、その領域Lを領域Nと呼ぶこととしよう。すると、領域Nは、前章でえた結果のために、次節で証明するように、その存在が許されないことになる。

2. 領域N存在の否定

第3図(b)で、曲線G上の点 A' と点 B' とを端点とするG型の破曲線 $A'B'$ がG型無枝周辺 C_H であるとし、それと曲線Gとに囲まれた領域Lが領域Nであるとする。点 A' の右、微小距離をへだてた曲線G上の点 A'_1 からでる曲線 C_H は、応力の連続性により、曲線 $A'B'$ と微小距離を保ちながら伸びるから、点 B' より微小距離左に位置する曲線G上の点 B'_1 におわるG型の曲線 $A'_1B'_1$ を描く。途中で曲線 $A'B'$ と交ることはない。曲線 $A'B'$ 上には、領域N内にむかって枝曲線 C_H をだす交叉点がないからである。領域N内には交叉点がないから、新たに描かれたG型の曲線 $A'_1B'_1$ 上にも交叉点がない。よって、点 A'_1 より微小距離右へよつた点 A'_2 から出る曲線 C_H は、曲線 $A'_1B'_1$ と交ることなく、それと微小距離を保ちつつ伸びて、点 B'_1 より曲線G上微小距離左に位置する点 B'_2 に終るG型の無枝曲線 $A'_2B'_2$ となる。かくして、曲線Gのうえで、曲線 C_H の出発点 A'_i を次第に右へ移してゆくと、曲線 C_H の終点 B'_i は次第に左

へむかって移動する。そして遂に、出発点 A'_i と終点 B'_i との間隔が微小距離の G 型の無枝曲線 C_H 、すなわち、両端点が無限に近い G 型無枝曲線 C_H が出現する。しかし、これは前節の終りで存在を否定された曲線 C_H である。よって、始めに存在を仮定した領域 N は存在しえない。

3. 領域 M 存在の否定, H 型曲線 C_H のみの存在

前節でえた領域 N 不存在の結果を利用すると、領域 M もまた存在しえないことが証明できる。第 3 図(c)で、G 型破曲線 $A'B'$ と曲線 G とで囲まれた領域が領域 M であると、点 C をその内部にある交叉点のうちの一つとする。点 C は、そこで 2 本の曲線 C_H が交叉するから、4 本の枝曲線 C_H の出発点である。これら 4 本の枝曲線 C_H は、閉路線 C_H を作らないために、相互に交らない。また、G 型破曲線 $A'B'$ は G 型無枝周辺 C_H だから、それとも交らない。よって、4 本の枝曲線 C_H はみな曲線 G 上の点 D_1, D_2, D_3, D_4 に達し、はじめの領域 M を、3 箇の領域 K、すなわち領域 K'_1, K'_2, K'_3 と、それらを上から覆う領域 E' とに分割する。領域 E' は考慮の外におく。すると、点 C は、持っていた 4 本の枝曲線 C_H を使いはたし、その代りに 3 箇の領域 K を産んだことになる。

新たに生れた 3 箇の領域 K、すなわち領域 K'_1, K'_2, K'_3 を、その周辺上の枝曲線 C_H を失わしめて、領域 L にかえると、領域 N は存在しえないから、3 箇の領域 M、すなわち領域 M'_1, M'_2, M'_3 が出現する。この新しい 3 箇の領域 M 内の交叉点の総数が、はじめの領域 M 内の交叉点の数より必ず少いことは明かである。ついで、この 3 箇の領域 M 内に、おなじ方法で、3 箇ずつの領域 M を出現させると、新しく出現した全部で 9 箇の領域 M 内の交叉点の総数は、まへの 3 箇の領域 M 内の交叉点の総数より必ず少い。ところで、最初の領域 M 内にあった交叉点の数は有限である。よって、上の方法を続けてゆくと、新しく出現する領域 M 内の交叉点の総数は減少をつづけ、遂には、交叉点を含まない領域 L、すなわち領域 N が出現せざるをえない。ところが領域 N は存在しえない。これは矛盾である。よって、はじめに存在を仮定した領域 M は、実は、存在しなかったことになる。

以上をまとめると、曲線 G 上の異なる 2 点を端点とする G 型路線 C_H があると、それと曲線 G とに囲まれた領域 K のなかに必ず領域 L を作ることが出来るが、その領域 L は、内部に曲線 C_H の交叉点があってもなくても、存在しえない、ということになる。よって、まず、領域 L の存在が否定され、その結果、領域 K の存在も否定され、それが G 型路線 C_H の存在の否定につながる。

かくして、第 II 章第 3 節の終りで述べたことにより、存在しうる路線 C_H としては、H 型路線 C_H 以外にはありえないことになる。ところで、H 型路線 C_H 同士は交叉することがない。交叉すると、交叉点から上にある路線部分と積雪表面を表す曲線 S_0 とで、力学的に存在しえない領域、すなわち、第 1 図(c)の形態の領域が出現するからである。それ故、H 型路線 C_H には交叉点がないことになるが、路線 C_H が折れ曲るのは交叉点においてのみである。よって、存在しうる唯一の H 型路線 C_H は、ループも折れ曲りも持たない連続曲線、すなわち、正則曲線でなければならない。これは、本来の曲線 C_H にはかならない。かくして、第 II 章第 1 節の第 1 仮定と第 2 仮定とがなりたてば、斜面積雪内の曲線群 C_H に属する要素曲線の一本一本は、互に交らない、曲線 S_0 上の一点と曲線 G 上の一点とを結ぶ H 型の正則曲線であることが証明

された。

V. あとがき

この論文でえられた結果は、すぐ前に、前章の最後の節の終りの文に、まとめられている。曲線群 C_H の各要素曲線が H 型の正則曲線であるとの智識は、論文 XIII³⁾ で述べた切線図から、曲線群 C_H を描くのを容易にするであろう。

しかし、次の論文 XVI で示されるように、第 1 第 2 の両仮定が成立しない場合もある。ただ、それは、斜面積雪内に非常に特殊な応力が発生したときに限られる。それ故、曲線群 C_H を描くにあたっては、まず、要素曲線 C_H が H 型正則曲線であると考えるのが得策であろう。そして、理解しにくい結果が現れたときに、初めて、両仮定の不成立を疑えばよい。

第 2 仮定では、曲線 C_H の交叉点を、2 本の曲線 C_H が交叉する二重交叉点に限った。しかし、この二重交叉点を有限箇の曲線 C_H が交叉する多重交叉点におきかえても、ほとんど同じ手順で、この論文とおなじ結果に到達することが出来る。ただ、次の論文 XVI で、曲線 C_H の交叉点には二重交叉点と無限に多くの曲線 C_H が交叉する無限多重交叉点との 2 種類しかないことが知られる。それで、理論を簡単にするため、二重交叉点に限った。交叉点が無限多重のばあいには、交叉点の近傍が、交叉する無限に多くの曲線 C_H で埋めつくされる。そのため、例えば、この論文の第三章第 1 節にある領域 K の領域 L への作り替えが不可能になり、この論文の議論は成り立たない。

「まえがき」で論文 XIII³⁾ にある誤記を訂正したが、同論文には、なお、書きあやまった数式が 4 箇ある。さらに、論文 XIII に先行する論文にも誤りが見つけれられた。以下に、それらの誤記を訂正する。

(1) 論文 VII. p.8 の下から 7 行目の「点 A のまわりのモーメントを 0 とおくと」を「x 方向の釣合から」に変更。(2) 論文 VII. p.13 のいちばん上の行の(25)を(15)になおす。(3) 論文 VII. p.33 の上から 12 行目の「主応力面に垂直な」を「zx 面に垂直な」に変更。(4) 論文 X. p.37 の上から 2 行目と 5 行目とにある(26)は、共に、(24)に訂正。(5) 次の論文番号、式番号の数式は、下記が正しい。

論文 X, 式(14)の右端の式の分母： $(1 - \tan \varphi \tan \theta)$

論文 XII, 式(4)の右端： $(3 \cos \theta - \cos \theta) \}$],

論文 XIII, 式(6)の右辺 k の係数： $(\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta)$

同, 式(18)の右辺第 2 項の分子： $\{1 - (\xi^2/2J) + \xi\}$

同, 式(21)の右辺： $J^2(\xi^{-2} - \xi^2) / \{J\xi^{-2} - 4J^2 - (1 - 3J)\xi^2 + (1 - 2J)^2\xi^4\}$

同, 式(22)の中央項の括弧内： $\{-\xi^{-1} + 2(1 - 2J)\xi\}$

この論文は低温科学研究所の藤岡敏夫教授と鈴木義男教授とに検討してもらい、両教授から有益な教示と助言とをうけた。ここに記して両教授に対する謝意を表す。

文 献

- 1) 吉田順五 1981 斜面積雪の挙動の研究 IX. 低温科学, 物理篇, 40, 37-49.
- 2) 吉田順五 1982 斜面積雪の挙動の研究 X. 低温科学, 物理篇, 41, 25-42.
- 3) 吉田順五 1983 斜面積雪の挙動の研究 XII, XIII. 低温科学, 物理篇, 42, 21-38, 39-56.

Summary

1. Preceding Papers X, XII and XIII had each figure of curves C_H and C_V in snow covers which were deposited in different manners on differently sloping grounds. It was noted, in the last article of the English summary of Paper XIII, that curves C_H kept simple and like forms in all the snow covers, whereas curves C_V changed forms greatly as the snow covers differed. The above simple and like form is a bow-like one joining a point on the ground and a point on the surface of the snow cover.

2. This Paper XV makes two assumptions, which will be described in Article 4 below, and proves on them that curves C_H always start from the ground and traverse the snow cover to reach surface S_0 of the snowcover, never returning to ground G and never intersecting one another on their ways. The two assumptions seldom fail. The next Paper XIV will determine the rare conditions under which the assumptions become untrue.

3. The name 'type H' is given to any curve which starts from ground G and traverses the snow cover to reach surface S_0 . The name 'type G' is given to any curve which starts from a point on ground G and returns to it at the other point on it. 'Interior' of the snow cover does not include either of surface S_0 and ground G.

4. The two assumptions are as follows:

The first assumption: Curve C_H does not terminate in the interior of the snow cover. It can have its end only either on surface S_0 or on ground G.

The second assumption: Two curves C_H may cross each other, making a point of intersection in the interior of the snow cover. The point of intersection is isolate; that is, if there are more than one point of intersection, any two of them are positioned apart with a finite length between. There is no point in the interior of the snow cover at which more than two curves C_H intersect.

5. Figure 1(a) of the text is composed of many segments, each of which is partly solid and partly dotted. They represent pieces of curve C_H intersecting one another. Stresses work on the zigzag line of type H joining point A and point B in the horizontal direction, because its whole length is composed of parts of curve C_H . Let such a zigzag line be called 'path C_H '.

6. Figure 1(b) gives a path C_H which makes a loop. But a mechanical reason prohibits the path C_H from making a loop, because stresses working on it cannot create a vertical force to support the weight of the snow surrounded by it. Therefore Fig. 1(b) must be rejected and the loops cornering at points D and F in Fig. 1(a) must be erased.

7. Broken curves (c), (d), (e), (g) and (h) in Fig. 1 represent five types of path C_H that fit the two assumptions. Types (c), (d) and (e) are mechanically impossi-

ble, because no stress works on surface S_0 in cases of types (c) and (d), while an infinitely great stress is produced at the foot of path C_H of type (e). Thus there is left a possibility of occurrence of paths C_H of type (g) and of type (h); they are respectively a path C_H of type G and a path C_H of type H. But the path C_H of type G will be deprived of the possibility due to the reasonings which will successively be raised in the following thirteen Articles.

8. Let broken curve AC_1C_2B of Fig. 3(a) be provisionally a path C_H of type G and let the domain bounded by this path and ground G be called 'domain K'. There will be points of intersection of curves C_H in domain K and on the path C_H of type G, but they must be finite in number, because they are isolate as hypothesized in the second assumption.

9. No branch or one branch or two branches of curve C_H can start inward into the above domain K from a point of intersection on its peripheral path C_H of type G. Points C_1 and C_2 of Fig. 3(a) are points of intersection located next to each other on the peripheral path, both having an inward branch or branches; there may be points of intersection with no inward branch between the two.

10. Curve C_1DA' of Fig. 3(a) is a path C_H which is so drawn that it starts from point C_1 to reach ground G at point A' with no curve C_H branching on its left-hand side. Curve C_2B' of the same figure is also a path C_H and it is so drawn that it starts from point C_2 to reach ground G at point B' with no curve C_H branching on its right-hand side. The two paths C_H do not meet before reaching ground G, because they will make a prohibited loop if they do.

11. Curve $A'DC_1C_2B'$ of Fig. 3(a) thus makes a path C_H of type G which has no inward branch of curve C_H , that is, from which no curve C_H starts inward. A domain shall be called 'domain L', if it is enclosed with ground G and a path C_H of type G from which no curve C_H starts inward.

12. Let domain L be named 'domain M' and 'domain N' respectively according as whether or not it has points of intersection of curves C_H inside. The following discussions will first deny the occurrence of domain N and then that of domain M too.

13. Cap-shaped broken curve $A'B'$ of Fig. 3(b), being a path C_H of type G with no curve branching inward, encloses a domain N together with ground G. In the same figure, point A'_1 is positioned on ground G by an infinitesimal distance to the right of point A' . As no curve C_H starts inward from curve $A'B'$ and there is no point of intersection of curves C_H in domain N, curve C_H starting from point A'_1 goes very close to curve $A'B'$ without branching, and returns to ground G at point B'_1 to form a curve C_H of type G, point B'_1 being positioned by an infinitesimal distance to the left of point B' . Point A'_2 is positioned by an infinitesimal distance to the right of point A'_1 . Curve C_H starting from point A'_2 makes, by the same reason as above, curve $A'_2B'_2$ of type G which goes very close to curve $A'_1B'_1$ to return to ground G at point B'_2 positioned by an infinitesimal distance to the left of point B'_1 .

14. As point A'_i moves to the right with increasing i , point B'_i moves to the left with the result that both the points come very close to each other and make

the feet of a very narrow curve C_H of type G as illustrated by curve APB of Fig. 2(d). It is finite in length, but infinitesimal in width. It will be shown below that such a shape of curve C_H keeps a contradiction in itself.

15 A horizontal straight line cuts curve APB at points R and S positioned at a finite length away from its top point P. If dx denotes the length of the infinitesimal segment RS and if W is a quantity finite in magnitude, then Wdx will give the weight of the snow enclosed by the portion of curve APB which lies above segment RS. It results from this that $-W$ is equal to vertical component σ_z of the stress working on segment RS.

16. Let point P of Fig. 2(a) be the highest point of a curve C_H of which a very small portion is illustrated as curve P_1PP_2 . The lines with arrow heads represent components σ_z and τ_{zx} of stress, σ_z and τ_{zx} being abbreviated to σ and τ respectively. It is seen from this figure that σ_z on curve C_H changes its sign at the highest or the lowest points of curve C_H , without doing so anywhere other than at these points.

17. Point P in Fig. 2(d) is the highest point of curve APB; so σ_z must be opposite in sign at points R and S. It follows from this that σ_z is equal to zero on segment RS in contradiction to the result of Article 15, because σ_z can change its sign continuously only when it vanishes at a point lying between point R and point S. The very narrow curve C_H of type G will sometimes be of an infinitesimal length of the shape as illustrated by semi-circle AB of Fig. 2(e). It is shown that curve C_H of type G cannot also have such a shape of infinitesimal size. Thus it has been proved that domain N cannot be realized.

18. Cap-shaped broken curve $A'B'$ of Fig. 3(c) has no inward branch and encloses together with ground G a domain L that has a finite number of points of intersection of curves C_H in its interior. So this domain L is domain M as defined in Article 11.

19. In Fig. 3(c), point C is one of the points of intersection of curves C_H . Two paths C_H of type G pass point C and divide the original domain M into four domains: domain E' and three domains K, marked K'_1 , K'_2 and K'_3 . When these domains K are transformed into domains L in the same way as done in the case of Fig. 3(a), any of the transformed domains L must not be domain N, because domain N is forbidden.

20. Now that the newly created domains L are domains M as shown above, in each of them can again be created three domains M, nine domains M in total. If such a procedure is repeated, it cannot be helped that forbidden domain N comes to be given rise to, because each of the procedures uses in creating new domains M the points of intersection of curves C_H present in the original domain M until they are exhausted at last. It follows from this that domain M is also a prohibited domain.

21. Absence of domain L follows from that of domains M and N, and absence of domain K follows from that of domain L, and absence of path C_H of type G follows from that of domain K. Therefore path C_H of type H becomes the only possible path C_H , because there can be no paths C_H other than those of types G and H

as shown in Article 7.

22. Two paths C_H of type H cannot intersect each other, because, if they do, they will make a path C_H of type (c) in Fig. 1 which is forbidden on the mechanical ground. A path C_H meeting no other curves C_H is a regular curve which is continuous and has no sharp bend. Thus what was stated in Article 2 has been proved to be true on the two assumptions described in Article 4. Although two curves C_H were permitted to intersect in the assumptions, they do not do so actually.