



Title	斜面積雪の挙動の研究 XVI : 水平完全単独主応力点の近傍における曲線CH
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo
Citation	低温科学. 物理篇, 43, 15-31
Issue Date	1985-03-18
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18497
Type	departmental bulletin paper
File Information	43_p15-31.pdf



斜面積雪の挙動の研究 XVI*

——水平完全単独主応力点の近傍における曲線 C_H ——

吉田 順五

(北海道大学名誉教授)

(昭和59年9月受理)

I. ま え が き

同名の前論文 XV⁵⁾ で、斜面積雪の流動面内にある曲線 C_H が、互に交叉しない H 型の正則曲線であることを証明した。H 型とは、地面上の一点と積雪表面上の一点とを結ぶ曲線形式にあてた名である。ただ、その証明には、第 1 仮定第 2 仮定となづける仮定を用いた。このふたつの仮定は、常に正しいとは限らない。曲線 C_H の方向を決定する積雪内応力が極めて特殊な分布を示す点では、成立しない。この論文 XVI は、その極めて特殊な応力分布の検索である。

前論文 XV でと同様、紙面を流動面と考え、紙面上に座標 x を水平右むきに、座標 z を鉛直上むきにおく。前論文の「まえがき」のおわりの部分に、曲線 C_H の性質を要約した。そこにあげた式(1)により、曲線 C_H をさだめる微分方程式は

$$dz/dx = \tan \varphi = \sigma_z / \tau_{zx} \quad (1)$$

で与えられる。積雪内部の一点 P を通る曲線 C_H の点 P における切線の方向まで、水平座標 x の正の方向から反時計まわりに測った角が φ である。角 φ の変域は $[\pi/2, -\pi/2]$ とする。流動面内で積雪表面および地面を表す曲線を、それぞれ、 S_0 および G となづける。積雪内部とは、曲線 S_0 と曲線 G とにはさまれた領域を指し、その境界である両曲線は含まないとする。応力成分およびその座標についての第一階微分係数は、積雪内部のいたる所で、連続であるとする。

II. 両仮定の成立を妨げ得る積雪内部の点

1. 両仮定の成立と水平完全主応力点(水平 PSP 点)

前論文 XV で用いたふたつの仮定の第一は、曲線 C_H が積雪内部で終らないこと、すなわち、曲線 C_H は積雪内部に端点をもたないことであった。第 1 仮定がなりたてば、積雪内部のすべての点を曲線 C_H が通過する。その通過に関する仮定が第 2 仮定であって、それは、積雪内部の各点を通過する曲線 C_H は 1 本あるいは 2 本に限られることであった。曲線 C_H が 2 本以上同一点を通過すれば、その点は曲線 C_H の交叉点である。曲線 C_H が 3 本以上通過する点を「多

* 北海道大学低温科学研究所業績 第2674号

重交叉点」となづければ、第2仮定は多重交叉点不在の仮定ともいえる。なお、第2仮定には、2本の曲線 C_H の交叉点同志が無限に接近しては存在しないことも含ませた。

積雪内部の或る点 P で、応力成分 σ_z と τ_{zx} とが両方ともに0でなければ、式(1)により、点 P での曲線 C_H の切線の方位角 φ が、したがって dz/dx が、唯ひとつの値に定められる。これは、点 P を通過して曲線 C_H が存在し、それが1本であることを意味する。よって、 σ_z と τ_{zx} とが共には0でない通常の点は、曲線 C_H の端点にもなりえないし、曲線 C_H の交叉点にもなりえない。それ故、第1仮定か第2仮定かのどちらかがでも成立しないためには、積雪内部に、 σ_z と τ_{zx} との両方が共に0にひとしい点の存在が必要である。

積雪内部の点 P で σ_z と τ_{zx} とが共に0ならば、点 P における2箇の流動面内主応力 σ_1 および σ_3 のうち、一方は0にひとしく他方はその方向が水平である。すなわち、点 P の応力は「水平完全単独主応力」である。「完全単独主応力」を英語にすればPerfectly single principal stressとなる。それで、簡便のため、完全単独主応力を「PSP」で表すことにしよう。すると、第1仮定または第2仮定が成立しないためには、積雪内部に「水平PSP」の点の存在が必要であると言える。方向が水平な主応力もまた消失する水平PSPの点では、応力が全く存在しない。このような、応力の全く存在しない点も、水平PSP点のなかにはいる。

斜面積雪でも、その表面が局部的に水平になることがある。水平な表面上の点の応力は、必ず水平PSPである。それ故、積雪表面 S_0 上にかざれば、水平PSPは、それほど特殊な応力ではない。しかし、積雪内部の点には、その点と表面との間にある雪の重量が作用するから、よほど特殊な応力分布によってその作用が打消されない限り、その点の σ_z が0になることはない。それ故、水平PSPが積雪内部に出現するためには、特殊な応力分布が必要である。しかも、あとで知られるように、積雪内部の水平PSP点には、曲線 C_H の端点でもなく曲線 C_H の多重交叉点でもないものがありうる。つまり、両仮定の成立を妨げない水平PSP点も存在しうる。それで「両仮定は極めて特殊な応力分布が生じない限り成立する」と前論文XVの「まえがき」に述べたわけである。

以上のように、両仮定を妨げる条件が発生するとすれば、その発生点は水平PSP点に限られる。それ故、その条件を知るには、水平PSP点の近傍における曲線群 C_H の様相をしらべれば足りる。それで、これからあと、積雪内部にある水平PSP点の近傍内の応力分布を用いて、その近傍内の曲線群 C_H の形を定める。これにより、或る水平PSP点が曲線 C_H の端点あるいは多重交叉点であるかないかの区別がつけられる。そして、両仮定成立のために除外すべき極めて特殊な応力分布が如何なるものであるかが知られる。

2. 水平PSP点近傍における応力成分

斜面積雪内部の点 P が水平PSPの点であるとして、点 P を水平鉛直座標 (x, z) の原点 O にとる。原点 O では応力成分 σ_x, τ_{zx} は共に0であるが、それぞれの x および z についての第1階偏微分係数は存在しうる。いま、添字 O をつけた括弧で原点 O における値を示すことにして、また、重力加速度を g で、原点 O における雪の密度を ρ で表して

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (\partial\sigma_z/\partial x)_0/\rho g, & a_2 &= (\partial\sigma_z/\partial z)_0/\rho g, \\ b_1 &= (\partial\tau_{zx}/\partial x)_0/\rho g, & b_2 &= (\partial\tau_{zx}/\partial z)_0/\rho g \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

とおく。応力の平衡方程式

$$\partial\sigma_z/\partial z + \partial\tau_{zx}/\partial x = \rho g$$

は原点 O でもなりたつから

$$a_2 + b_1 = 1 \tag{3}$$

の関係がある。よって、 a_2 と b_1 とは、同時には 0 になりえない。つまり、4 箇の係数 a_1, a_2, b_1, b_2 の全部が消滅するような応力分布は存在しない。

原点 O を中心として、微小な半径の円形近傍 N を考える。近傍 N 内の点は、すべて、原点 O に非常に近いから、近傍 N の内部の応力成分の第 1 近似式が

$$\sigma_z = \rho g (a_1 x + a_2 z), \quad \tau_{zx} = \rho g (b_1 x + b_2 z) \tag{4}$$

と書かれる。

応力成分 σ_z, τ_{zx} が共に 0 であることから同じ水平 PSP の名でよばれる点でも、そのまわりの応力分布はひと通りには定まらない。したがって、 σ_z や τ_{zx} の分布も多様である。式(4)は、その多様性が、近傍 N 内に限れば、第 1 近似として、4 箇の係数 a_1, a_2, b_1, b_2 の値の多様性によって定ることを示す式である。そして、ひとつの水平 PSP 点が曲線 C_H の端点あるいは多重交叉点であるかないかの判断ならば、式(4)をもとにして得られる第 1 近似の曲線群 C_H の様相からでも、くだせる。

3. 水平 PSP 点近傍における曲線 C_H の微分方程式

曲線群 C_H を表す式を

$$z = f_H(x, a_H) \tag{5}$$

とすると、式(4)を用いて作られる

$$\begin{aligned} dz/dx &= df_H/dx = \sigma_z/\tau_{zx} \\ &= (a_1 x + a_2 z)/(b_1 x + b_2 z) \end{aligned} \tag{6}$$

が、曲線群 C_H の第 1 近似微分方程式として、近傍 N の内部でなりたつ。式(6)は、右辺が x と z との 1 次の同次式だから

$$u = z/x \tag{7}$$

とおくと

$$dz/dx = (a_1 + a_2 u)/(b_1 + b_2 u) \tag{8}$$

に書きなおされる。第 1 近似微分方程式(6)あるいは(8)の積分が、曲線群 C_H の、近傍 N 内で通用する第 1 近似式をあたえる。

式(6)あるいは式(8)を x について微分すると

$$d[dz/dx]/dx = \{K_H \cdot Q(u)\}/\{x(b_1 + b_2 u)^3\} \tag{9}$$

$$K_H = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{10}$$

$$Q(u) = b_2 u^2 - (a_2 - b_1)u - a_1 \tag{11}$$

がえられる。式(9)は、曲線群 C_H の、近傍 N 内で通用する第 1 近似式の第 2 階導関数である。曲線群 C_H を正確に表す式(5)の第 2 階導関数 d^2z/dx^2 の第 1 近似式ではない。その第 1 近似式を求めるには、式(4)の応力成分を x^2, z^2, zx を含む第 2 近似式で表し、それを用いて作られる

第1階微分方程式を更に微分しなければならない。式(9)の左辺を d^2z/dx^2 と書かないのは、この理由による。

これからあと、微分方程式(6)あるいは(8)の解としてえられる「第1近似曲線群 C_H 」また、その構成要素である各曲線 C_H を、単に、「曲線群 C_H 」または「要素曲線 C_H 」或いは「曲線 C_H 」と略称する。誤解のおそれのある時にのみ「第1近似」の形容詞を用いる。

近傍 N 内の応力が式(10)の定数 K_H を0ならしめる場合には、近傍 N の全域にわたって、 $d[dz/dx]/dx$ が消失するため曲線 C_H の曲率が0となる。すなわち、近傍 N 内の曲線群 C_H は直線群に単純化される。直線群は曲線群 C_H の様相として特異である。このことから、定数 K_H の値が正であるか負であるかにより、曲線群 C_H の様相に差異が現れると予想される。曲線群 C_H の様相の分類にあたって、定数 K_H が、第III章以降でしばしば利用される。

微分方程式(6)あるいは(8)の解が係数 a_1, a_2, b_1, b_2 の変化につれどのように変わるかについて、文献4の第I章§3に；いくつかの例をあげた簡単な説明がある。しかし、その説明だけでは、この論文の問題の理解には不十分である。それで、以下、この論文の問題に即しつつ、解の考察をおこなう。

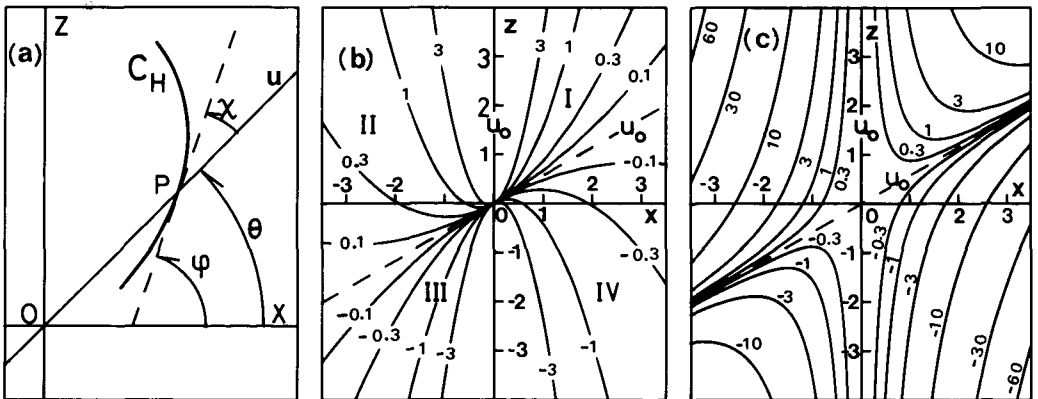
4. 水平PSP点を通過する直線状要素曲線 C_H

水平PSPの点である原点 O を通る直線を直線 u となづける。第1図(a)にあるように、座標 x の正の方向から直線 u にむかって反時計まわりに測った角を θ とし、 θ の変域を $[\pi/2, -\pi/2)$ にとる。直線 u 上の点の座標の比 z/x の値は一定であるが、それを u で表すと

$$z/x = u = \tan \theta \tag{12}$$

の関係がなりたつ。

前節の微分方程式(6)は x, z に関して同次形だから、よく知られているように、その解である曲線群 C_H の各要素曲線 C_H と直線 u との交角 χ は、同一の直線 u の上では変化しない。



第1図 (a) 角 θ, φ, χ を示す図。点 P は曲線 C_H と直線 u との交点。破線は、点 P における曲線 C_H の切線。
 (b) 式(22)で表される曲線群 C_H 。各要素曲線 C_H につけた数字は副変数 C の値である。式(21)の a_2/b_1 が正で1より大きい場合の例。水平PSP点である原点 O は曲線 C_H の無限多重交差点で、その存在は第2仮定を成立させない。 $K_H = -2/9$ 。(c) 比 a_2/b_1 が負のばあいの曲線群 C_H の例。第III章第4節の始めに示した値を4箇の係数とする微分方程式の解 $z = (x/\sqrt{3}) + (C/x^2)$ を描いた。水平PSP点である原点 O は曲線 C_H の二重交差点で、この種の水平PSP点ならば、存在しても、第1仮定第2仮定を共に成立させる。 $K_H = 2$

角 χ は、値のうえで、角 θ と式(1)にある角 φ との差にひとしい。それで、角 χ を第1図(a)に示したように $(\varphi - \theta)$ にとると、式(1), (8), (11), (12)を用いて

$$\left. \begin{aligned} \tan \chi &= \tan(\varphi - \theta) = -Q(u)/Q_1(u), \\ Q_1(u) &= a_2 u^2 + (a_1 + b_2)u + b_1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

の関係が導かれる。

角 χ が0にひとしい直線 u があったとすれば、その直線上の各点で φ と θ とが一致し、曲線 C_H の切線がその直線に重なる。よって、この直線 u は直線状の曲線 C_H にほかならない。この特別な直線 u を直線 u_0 と名づける。

直線 u_0 を出現させないような応力分布もあるであろう。しかし、いま、直線 u_0 が存在すると仮定して議論をすすめる。直線 u_0 上の点の座標の比 z/x を定数 u_0 とすると、式(13)から知られる通り、 u_0 は2次代数方程式

$$Q(u) = 0 \quad (14)$$

のふたつの根で与えられる。このふたつの根を α_1, α_2 で表せば

$$\alpha_1, \alpha_2 = \{(a_2 - b_1) \pm \sqrt{D_H}\} / 2b_2 \quad (15)$$

$$D_H = (a_2 - b_1)^2 + 4a_1b_2 \quad (16)$$

であることが知られる。式(15)の左辺の複号を正とした時の根を α_1 とし、負としたときの根を α_2 とする。

判別式 D_H が正ならば、 α_1 と α_2 とは実数で値を異にするから

$$z = \alpha_1 x, \quad z = \alpha_2 x \quad (17)$$

で表される2本の直線 u_0 が存在して、原点 O で交叉する。直線 u_0 は曲線 C_H でもあるから、式(17)は、当然、微分方程式(6)あるいは(8)を満足する。判別式 D_H が負ならば、方程式(14)に実根がなく、直線 u_0 は出現しない。また、 b_2 が0にひとしい時は式(15)右辺の分母が消失するから、別途の考察が必要である。なお、原点 O を通過する曲線 C_H が直線 u_0 に限られるわけではない。無限に多くの曲線 C_H が原点 O を通る例が、このあと、いくつも示される。

式(16)は

$$D_H = (a_2 + b_1)^2 + 4(a_1b_2 + a_2b_1) \quad (16')$$

と書きかえられる。よって、式(3)と式(10)とを使うと、判別式 D_H が

$$D_H = 1 + 4K_H \quad (18)$$

のような簡単な形に表される。

まえにも述べた通り、水平PSP点の近傍 N 内の曲線群 C_H の様相は同近傍内での応力成分 σ_z, τ_{zx} の分布で定り、その分布は4箇の係数 a_1, a_2, b_1, b_2 の値によって決定される。これからあとは、4箇の係数の値と曲線群 C_H の様相との関係の考察である。微分方程式(6)は、 x および z の同次方程式だから、 x および z の値を表すのに用いる共通単位をどのような大きさにとっても、その解は変わらない。したがって、その解を示す曲線群の形も、単位の選びかたによらず不変である。これからあと、微分方程式(6)の解を示す曲線群を、1を長さの単位とする x および z で表わした図をいくつか、かかげる。それらは、 x および z の値が極めて小さい近傍 N 内の曲線群の拡大図と考えればよい。

次の第Ⅲ章で b_2 が 0 にひとしい場合の曲線群 C_H を求める。係数 b_2 が 0 でない場合の考察は、その次の第Ⅳ章でまとめる。

Ⅲ. 水平 PSP 点近傍の曲線群 C_H (b_2 が 0 の場合)

1. 係数 b_2 が 0 にひとしい場合の曲線群 C_H

係数 b_2 が 0 であることから、座標軸 z が直線状の曲線 C_H であることが、すなわち直線 u_0 であることが直ちにわかる。係数 b_2 が 0 ならば、座標軸 z 上のすべての点で τ_{zx} が消失する。その結果、座標軸 z 上の任意の点で、それを中心とする水平微小面が応力の主面となり、その水平微小面上の応力成分ベクトルが座標 z と重なるからである。

係数 b_2 が 0 ならば、曲線 C_H の微分方程式(8)は

$$dz/dx = (a_1/b_1) + (a_2/b_1) x \quad (19)$$

の簡単な形になる。式(14)は 1 次代数方程式に墮して、その 1 箇の根で定められる直線

$$z = - \{ a_1 / (a_2 - b_1) \} x \quad (20)$$

が、座標軸 z 以外の直線 u_0 として存在する。これを第 2 直線 u_0 と名づけ、座標軸 z を第 1 直線 u_0 と呼ぶことにする。

微分方程式(19)の一般解は

$$z = - \{ a_1 / (a_2 - b_1) \} x + Cx^{a_2/b_1} \quad (21)$$

である。積分常数 C が式(5)の副変数 a_H にあたり、 C にいろいろな値を与えることにより、この場合の曲線群 C_H がえられる。式(21)の右辺第 1 項は式(20)の右辺にほかならない。或るひとつの C の値によって定まる要素曲線 C_H を、あとで考える「物理的要素曲線 C_H 」と区別する必要があるときは、特に「数学的要素曲線 C_H 」とよぶ。

式(21)の右辺第 2 項の冪指数 a_2/b_1 の正負によって、曲線群 C_H は様相を異にする。冪指数が正ならば、 $x=0$ のとき $z=0$ だから、曲線群 C_H の要素曲線は、全部、原点 O を通過する。冪指数が負ならば、 $x=0$ のとき $z=\infty$ である。よって要素曲線は原点 O を通過しない。

第 1 図(b)は、冪指数 a_2/b_1 が正のときの曲線群 C_H の例で、4 箇の係数の値を

$$a_1 = -1/(3\sqrt{3}), \quad a_2 = 2/3, \quad b_1 = 1/3, \quad b_2 = 0$$

として描いた。微分方程式の解は

$$z = (x/\sqrt{3}) + Cx^2 \quad (22)$$

である。曲線群 C_H の要素曲線は、どれも、原点 O で第 2 直線 u_0 に接し、拋物線状に、第 1 直線 u_0 である座標軸 z を軸として、上方および下方に開く。これは冪指数 a_2/b_1 の値が 2 で、1 より大きいからである。冪指数が 1 より小さければ、各要素曲線は原点 O で座標軸 z に接し、第 2 直線 u_0 を軸として左方および右方に開く。

このように、冪指数 a_2/b_1 が正のときは、それが 1 より大でも小でも、曲線群 C_H を構成する無限に多くの要素曲線が原点 O を通過し、そこで同一の切線を共有する。それで、このばあいの水平 PSP 点、すなわち原点 O は、無限に多くの曲線 C_H が相接触するという意味で、「無限多重接触点」と名づけてよいであろう。ところで、このような冪指数 a_2/b_1 が正の曲線群 C_H は、その要素曲線 C_H が原点 O で交叉する種類 E と交叉しない種類 F とに区別される。たとえ

ば、 a_2/b_1 が 2 に等しい第 1 図(b)のばあいのように、 a_2/b_1 が偶数の曲線群 C_H では、その要素曲線が原点 O で接触し合はするが互に交叉しない。つまり、曲線群 C_H は種類 F に属する。しかし、もし a_2/b_1 が 3 であったなら、すなわち冪指数 a_2/b_1 が奇数であったなら、曲線群 C_H の各要素曲線は、原点 O で相接触しながらも互に交叉し、曲線群 C_H は種類 E に属した筈である。この区別は、各要素曲線 C_H を副変数 C の値によって見わけける数学的立場から見るために生ずる。しかし、副変数 C には物理的意味がない。このことから、第 3 節で明かにするように、物理的には、種類 F の曲線群 C_H も、その無数にある要素曲線を原点 O で交叉させ、第 2 仮定の成立を阻害する、と言えることになる。

2. 冪指数 a_2/b_1 が 1 にひとしい場合の曲線群 C_H

前節 1 では、冪指数 a_2/b_1 が丁度 1 に等しい場合を考えなかった。冪指数が 1 で a_2 と b_1 とが相ひとしいと、式(21)は、その右辺第 1 項の分母が 0 になるために使えない。それで、微分方程式(19)で a_2/b_1 を 1 とおき、その解

$$z = (a_1/b_1)x \log_e x + Cx \tag{23}$$

を求めれば、これが冪指数 a_2/b_1 が 1 に等しい場合の曲線群 C_H の式となる。

この式の右辺第 1 項にある $x \log_e x$ は、原点 O で座標軸 z に切しながら、原点 O を下にむかつて出発し、 $x = 1/e$ (e は自然対数の底) で極小点に達したあと上昇に移り、 $x = 1$ で座標軸 x を下から上に横切ったあと上昇を続ける、 x が正の領域にある曲線を表す。一方、座標 (x, z) の代りに、符号を逆にした座標 ($x' = -x, z' = -z$) を用いても、微分方程式(6), (8) は形を変えない。よって、上にのべた形の曲線を、座標軸 x および座標軸 z を折り目として折り返した形の曲線が、 x の負の領域に存在する。これらふたつの曲線を原点 O でつないだ 1 本の曲線に a_1/b_1 を乗じた曲線を、曲線(a)とする。式(23)の右辺第 2 項は、角 θ の異なる無限に多くの直線 u からなる直線群を表す。これを直線群(b)となづける。原点 O は直線群(b)の無限多重交叉点である。

直線群(b)に曲線(a)を重ねると a_2/b_1 が 1 にひとしい場合の曲線群 C_H がえられる。よって、この曲線群 C_H の各要素曲線は、原点 O で、座標軸 z を共通切線として接しあい、かつ、交叉しあう。それ故、冪指数 a_2/b_1 が 1 に等しい曲線群 C_H は種類 E に属し、その中心をなす水平 PSP 点の存在は、第 2 仮定を成立させない。

3. 物理的無限多重交叉点

第 1 図(b)の要素曲線 C_H につけた数字は、式(22)にある副変数 C の値を示す。第 2 直線 u_0 より上の領域では C が正であり、下の領域では負である。このばあい、第 1 節で述べたように、 C の値が違う数学的要素曲線 C_H 同志が原点 O で交叉することはない。いま、第 1 直線 u_0 である座標軸 z と第 2 の直線 u_0 とで近傍 N を 4 箇の領域にわけ、右上と左上と右下と右下との領域に、その順に I, II, III, IV の番号をつける。そして、1 本の要素曲線 C_H の或る領域内にある部分を、その領域の番号 B とその曲線の C の値とを使って (B, C) で表す。たとえば、(II, 0.3) は、 C の値が 0.3 にひとしい要素曲線 C_H の第 II 領域にある部分である。

式(22)で与えられる数学的要素曲線 C_H は、 C の値が相等しい (I, C) と (II, C) とが、また、(III, C) と (IV, C) とが、原点 O で連続した曲線である。ところで、物理的に見れば、

要素曲線 C_H は、式(1)をみだし、その結果として、論文 XV の「まえがき」の終りで述べた用語法によれば、それに作用する応力成分ベクトルが水平であるような流動面内の曲線である、というだけのものである。式(2)の副変数 C には、なんらの物理的意味がない。それ故、(I, C) と、 C の値が異なる (II, C') とを結合しても、(III, C) と、 C の値が異なる (IV, C') とを結合しても、物理的には要素曲線 C_H となる。ただ、この場合、各物理的要素曲線 C_H を全長にわたって他と区別しうるために、また、取りこぼしの曲線部分 (B, C) を残さないために、 C と C' とには 1 対 1 の対応関係を持たせなければならない。それには、たとえば、 $C' = 1/C$ とすればよい。

これらの物理的要素曲線 C_H は無数に生じて近傍 N をおおう曲線群 C_H を形成するうえ、原点 O を無限多重接触点たらしめると同時に無限多重交叉点たらしめる。近傍 N をおおう物理的曲線群 C_H は、別途、(I, C) と (III, C') との結合および (II, C) と (IV, C') との結合によっても作られる。このばあいにも、たとえば $C' = -C$ とおいて、 C と C' とを 1 対 1 の対応関係におく必要がある。この曲線群 C_H もまた、原点 O を無限多重接触点にすると同時に無限多重交叉点にする。

これからあと、曲線群 C_H を構成する無限に多くの数学的要素曲線が原点 O で切線を共有し、原点 O が無限多重接触点となる場合が、しばしば現れる。曲線群 C_H が種類 E に属することもあるし、種類 F に属することもある。種類 E に属する曲線群 C_H のばあいの原点 O は、数学的にも物理的にも曲線 C_H の無限多重交叉点である。種類 F に属する曲線群 C_H のばあいの原点 O も、第 1 図(b)の曲線群を例にとりて説明した上記の方法を用いることにより、物理的無限多重交叉点に作りかえられる。物理的問題を扱うこの論文では、曲線 C_H を物理的立場で見る。よって、いずれの種類に属する曲線群 C_H のばあいの原点 O も、すなわち、曲線群 C_H の無限多重接触点となる水平 PSP 点のすべてが、曲線 C_H の無限多重交叉点であり、その存在は第 2 仮定の成立を妨げる、と言える。

第 1 節と第 2 節とでは、冪指数 a_2/b_1 が正のばあいの曲線群 C_H を考えた。そして、原点 O が曲線群 C_H の無限多重接触点であることを知った。それ故、すでに述べたことではあるが、 a_2/b_1 が正であるような水平 PSP 点の存在は第 2 仮定を成立させない。なお、 b_2 が 0 に等しいこの第 III 章のばあいの K_H は $-a_2b_1$ である。よって、 a_2b_1 が正ならば a_2/b_1 も正だから、 K_H の値が負であるような水平 PSP 点の存在は第 2 仮定の成立を妨げる、と言ってもよい。

4. 冪指数 a_2/b_1 が負のばあいの、また a_2 あるいは b_1 が 0 の場合の曲線群 C_H

第 1 図(c)は

$$a_1 = -\sqrt{3}, \quad a_2 = 2, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = 0$$

として描いた、近傍 N 内およびその周辺の曲線群 C_H の図である。冪指数 a_2/b_1 は -2 の負の値である。一般に、冪指数が負のときは、この図と同様に、曲線群 C_H を構成する各要素曲線は双曲線様の形をとり、第 1 直線 u_0 である座標軸 z と第 2 直線 u_0 とに漸近し、第 1 節でのべたように、原点 O を通らない。かくして、原点 O は、すなわちこの場合の水平 PSP 点は、第 1 および第 2 の直線 u_0 の交点、すなわち 2 本の直線状曲線 C_H の交点となり、その存在は第 2 仮定の成立を妨げない。冪指数 a_2/b_1 が負ならば a_2b_1 も負である。よって、 K_H の値が正であ

るような水平 PSP 点なら、存在しても、第 2 仮定の成立を損うことはないとも言える。

係数 b_2 と共に a_2 もまた 0 ならば、式(21)から判るように、曲線群 C_H は第 2 直線 u_0 に平行な平行直線群である。この平行直線群は、第 1 直線 u_0 である座標軸 z と交叉する。それ故、座標軸 z 上のすべての点が 2 本の曲線 C_H の交叉点、すなわち曲線 C_H の二重交叉点となる。これは、曲線 C_H の二重交叉点同志の間隔は有限距離であるとの第 2 仮定の後半とあわない。よって、 b_2 と a_2 とが共に 0 である水平 PSP 点の存在は、第 2 仮定を成立させない。

第 II 章第 3 節のおわりで述べたように、 K_H が 0 ならば、曲線 C_H は直線になる筈である。そして実際に、上の $a_2 = b_2 = 0$ のばあい、 K_H は 0 である。また、座標軸 z 上のすべての点が、曲線 C_H の二重交叉点であるためには、座標軸 z 上で σ_z と τ_{zx} とが共に消失し、同軸上のすべての点を水平 PSP 点たらしめなければならない。これもまた、式(4)が示すように事実である。

係数 b_2 と共に b_1 が 0 のばあいも K_H が 0 にひとしい。近傍 N 内全体にわたって τ_{zx} は 0 である。一方、 σ_z は、式(20)で表される第 2 直線 u_0 上では 0 で、この直線を外れたところでは 0 でない。よって、第 2 直線 u_0 上の点はすべて水平 PSP 点で、式(6)の dz/dx は第 2 直線 u_0 上の点では 0/0 であり、その他の点では無限大である。したがって、このばあいの曲線群 C_H は座標軸 z に平行な平行直線群となり、第 2 直線 u_0 上の点はすべて曲線 C_H の二重交叉点となる。それ故、 b_2 と b_1 とが共に 0 であるような水平 PSP 点の存在も、第 2 仮定の成立を許さない。

以上、この第 III 章で得た結果をまとめると次のようになる。係数 b_2 が 0 のばあい、水平 PSP 点が存在しても、その K_H の値が正ならば、第 1 仮定も第 2 仮定も共に成立する。しかし、 K_H が 0 か負の値の水平 PSP 点の存在は、第 1 仮定は成立させるが第 2 仮定の成立を妨げる。

IV. 水平 PSP 点近傍の曲線群 C_H (b_2 が 0 でない場合)

1. 判別式 D_H が正のばあいの曲線群 C_H

係数 b_2 が 0 でなく、第 II 章第 4 節の式(16)で与えられる判別式 D_H が正ならば、二次代数方程式(14)には、式(15)で示される、値の違うふたつの実根 α_1 と α_2 とがある。このときの微分方程式(6)あるいは(8)の一般解は、副変数 a_H の役をする積分常数 C を用いて

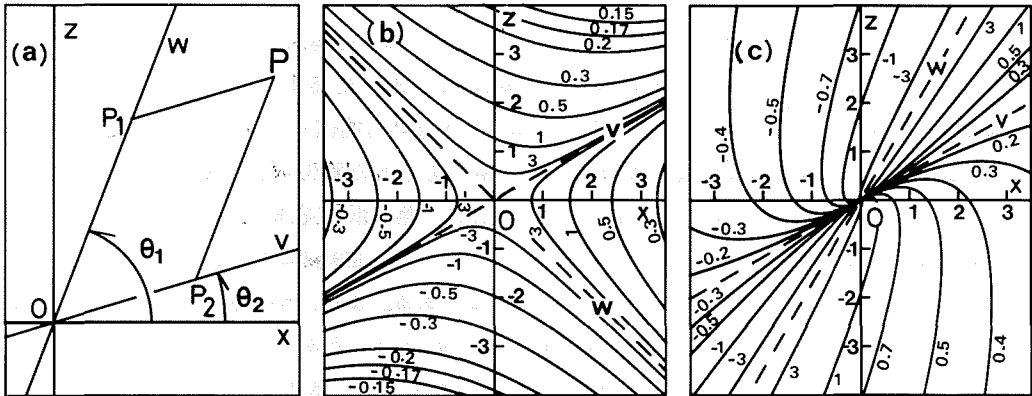
$$(z - \alpha_1 x)^A = C(z - \alpha_2 x)^B \tag{24}$$

で与えられ、これが、近傍 N のなかの曲線群 C_H を表す。冪指数 A と B との値は

$$\begin{aligned} A, B &= (b_1 + \alpha_1 b_2), (b_1 + \alpha_2 b_2) / (\alpha_1 - \alpha_2) \\ &= (b_2 / 2\sqrt{D_H}) \{ (\alpha_2 + b_1) \pm \sqrt{D_H} \} = b_2 (1 \pm \sqrt{D_H}) / 2\sqrt{D_H} \end{aligned} \tag{25}$$

により、 b_2 と D_H との値によって定められる。上式の複号は、その正号を A に、負号を B に用いる。右から 2 番目の項は、式(3)によって、右端の項に書きかえられる。

第 2 図は、第 1 図と同様、水平 PSP 点である座標原点 O の近傍の図である。第 2 図(a)の直線 Ow と直線 Ov とは、第 II 章第 4 節で定義した直線 u_0 で、それぞれ、式(17)の $z = \alpha_1 x$ と $z = \alpha_2 x$ とで表される直線に他ならない。同図の角 θ_1 および角 θ_2 の正切が、それぞれ、 α_1 および α_2 にひとしい。直線 Ov と直線 Ow とを斜交座標軸とし、任意の点 P の位置ベクトル OP の、直線 Ov および直線 Ow 上の反変成分 OP_2 および OP_1 を、斜交座標 (v, w) にとる。線分 PP_1



第2図 (a) 斜交座標 (v, w) 。座標軸 Ov は $z = \alpha_2 x$ で表される直線 u_0 であり、座標軸 Ow は $z = \alpha_1 x$ で表される直線 u_0 である。斜交座標 (v, w) は (OP_2, OP_1) で与えられる。(b) 式(24)(25)の冪指数 A, B が異符号のばあいの曲線群 C_H の例。水平PSP点である原点 O は曲線 C_H の二重交叉点で、この種の水平PSP点ならば、存在しても、第1仮定第2仮定を共に成立させる。 $K_H = 3.232$ (c) 冪指数 A, B が同符号のばあいの曲線群 C_H の例。水平PSP点である原点 O は曲線 C_H の無限多重交叉点で、この種の水平PSP点の存在は、第2仮定を成立させない。 $K_H = -0.2275$

は直線 Ov に、線分 PP_2 は直線 Ow に平行である。直線 Ov を座標軸 v とよび、直線 Ow を座標軸 w とよぶ。

点 P の斜交座標 (v, w) と直交座標 (x, z) との間には

$$v = k_1(z - \alpha_1 x), \quad -k_1 = 1/(\alpha_1 - \alpha_2) \cos \theta_2 = b_2/\sqrt{D_H} \cos \theta_2 \quad (26)$$

$$w = k_2(z - \alpha_2 x), \quad k_2 = 1/(\alpha_1 - \alpha_2) \cos \theta_1 = b_2/\sqrt{D_H} \cos \theta_1 \quad (27)$$

の関係がある。よって、式(24)は

$$v^A = Cw^B \quad (28)$$

と書ける。ただし、この式の C は、おなじく副変数ではあっても、式(24)の C と一致しない。

式(28)で冪指数 A と B とが互に異符号ならば、 v と w との一方が0に等しいとき、他方は有限値をとることなく、無限大となる。よって、曲線群 C_H の各要素曲線は、原点 O を通らず、座標軸 v および座標軸 w に漸近する。両座標軸は、直線 u_0 、すなわち、原点 O を通る直線状の曲線 C_H である。よって、原点 O は2本の曲線 C_H が交る二重交叉点であり、その存在は、すなわち、 A と B とが符号を異にする水平PSP点の存在は、第2仮定の成立を妨げない。このばあいの曲線群 C_H の例として

$$a_1 = -(1 + \sqrt{3})/2, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \sqrt{3} a_1, \\ A = -3/2, \quad B = \sqrt{3}/2$$

とおき、第2図(b)を描いた。座標軸 w, v の傾角 θ_1, θ_2 は、それぞれ、 -45° および 30° である。

式(28)で A と B とが同符号ならば、 v と w との一方が0ならば他方も0となり、一方が0でなければ他方も0でない。したがって、曲線群 C_H の各要素曲線は原点 O を通過し、原点 O 以外では両座標軸と交らない。原点 O は無限多重交叉点であり、 A と B とが同符号の水平PSP点の存在は第2仮定の成立を妨げる。第2図(c)に

$$a_1 = -0.3\sqrt{3}/2, \quad a_2 = 0.8, \quad b_1 = 0.2, \quad b_2 = -a_1,$$

$$A = 1.3\sqrt{3}/4, \quad B = 0.7\sqrt{3}/4$$

として、この種のばあいの曲線群 C_H の 1 例を示した。座標軸 w, v の方位角 θ_1, θ_2 は、それぞれ、 60° および 30° である。

式(25)の右端の項からわかるように、 D_H が 1 より大ならば A と B とは異符号であり、1 より小ならば同符号である。それ故、水平 PSP 点が存在しても、それが $D_H > 1$ であるようなものならば第 2 仮定は成立するが、 $0 < D_H < 1$ であるような水平 PSP 点の存在は第 2 仮定の成立を妨げる、と言える。判別式 D_H と定数 K_H との間には式(18)の関係がある、よって、 K_H が正ならば A と B とは異符号であり、負ならば同符号である。したがって、 $K_H > 0$ であるような水平 PSP 点の存在は第 2 仮定の成立を許すが、 $-1/4 < K_H < 0$ であるような水平 PSP 点の存在は第 2 仮定の成立を妨げる、と言ってもよい。

2. 判別式 D_H が 0 にひとしい場合の曲線群 C_H

判別式 D_H が 0 にひとしいと、式(15)の α_1 と α_2 が

$$(a_2 - b_1)/2b_2 = \tan \beta \tag{29}$$

の同じ値になる。その結果、 D_H が正のばあい存在した 2 本の直線 u_0 が、上式で与えられる方位角 β の 1 本の直線 u_0 に合体する。第 3 図(a)に示すように、この 1 本の直線 u_0 を座標 v の座標軸とし、それと直角に座標 w の軸を立てる。すると、曲線 C_H の微分方程式(6)は、式(29)の条件を利用することにより、簡単な形の微分方程式

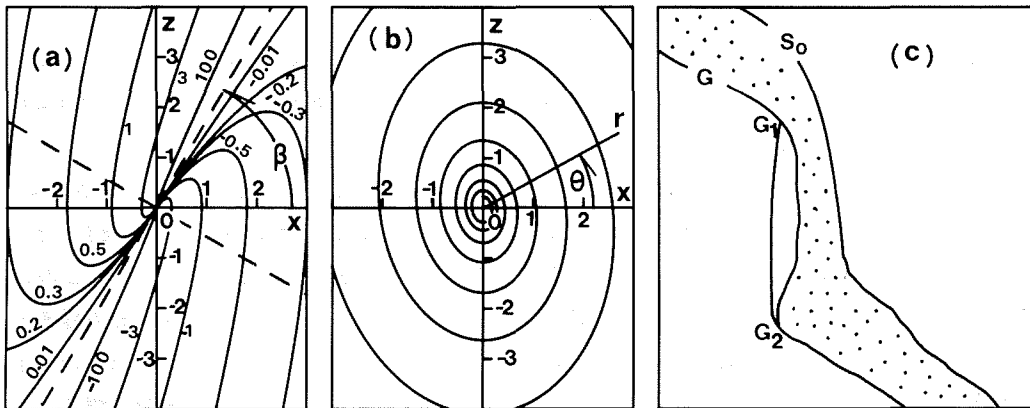
$$\left. \begin{aligned} dw/dv &= w/(v + Mw) \\ M &= 2(b_2 - a_1)/(a_2 + b_1) = 2(b_2 - a_1) \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

に変換される。この M の式の中央項と右端の項とが等しいのは、式(3)の関係による。

微分方程式(30)の解は

$$v = Mw \log_e(Cw) \tag{31}$$

である。第 III 章第 2 節で、式(23)の右辺第 1 項で表される曲線の形を説明した。その右辺第 1 項



第 3 図 (a) 判別式 D_H が 0 に等しい場合の曲線群 C_H の例。水平 PSP 点である原点 O は曲線 C_H の無限多重交差点で、この種の水平 PSP 点の存在は第 2 仮定を成立させない。 $K_H = -0.25$ 。(b) 判別式 D_H が負のばあいの曲線群 C_H を構成する要素曲線の例。水平 PSP 点である原点 O は螺旋状曲線 C_H の端点である。この種の水平 PSP 点の存在は第 1 仮定の成立を妨げる。 $K_H = -50$ 。(c) 斜面 G の点 G_1 と点 G_2 との間が崖になっている。そこに、点を散らして示した積雪が滝の形に懸っている。滝の中ほどの積雪内部に水平 PSP 点出現の可能性はある。

の x を Cw で置きかえた式と式(31)の右辺とは、形式が同じである。このことから、式(31)で表される曲線群 C_H の要素曲線が、原点 O を、座標軸 v に接しつつ、通過することが判る。よって原点 O は曲線 C_H の無限多重交叉点であり、 $D_H = 0$ であるような、すなわち $K_H = -1/4$ であるような水平 PSP 点の存在は、第2仮定の成立を阻害することになる。第3図(a)は

$$\begin{aligned} a_1 &= -\sqrt{3}/2, & a_2 &= 1, & b_1 &= 0, & b_2 &= 1/(2\sqrt{3}), \\ D_H &= 0, & M &= 4/\sqrt{3}, & \beta &= 60^\circ \end{aligned}$$

とした時の曲線群 C_H を示す。

3. 定数 K_H が 0 にひとしい場合の曲線群 C_H

式(10)で与えられる定数 K_H が 0 であっても、判別式 D_H は正である。よって、 $K_H = 0$ のばあいは、2本の直線 u_0 の存在する第1節のばあいに属する。ただ、 K_H が 0 にひとしいと、近傍 N 内の曲線 C_H が、すべて直線になるという特徴がある。そのため、以下で述べるように、前章第4節の後半で考えた場合と同じく、2本の直線 u_0 のうちの一方の上の点が、すべて、曲線 C_H の二重交叉点になる。よって、 b_2 が 0 でない今のばあいにも、 K_H が 0 にひとしい水平 PSP 点の存在は第2仮定を成立させない。

式(15), (16), (16')により、 K_H が 0 にひとしいければ

$$a_1 = a_2/b_2, \quad a_2 = -b_1/b_2 \quad (32)$$

となる。式 $z = a_1x$ および $z = a_2x$ で表される直線 u_0 を、それぞれ、第1直線 u_0 および第2直線 u_0 と名づける。定数 K_H が 0 であるから

$$a_1/a_2 = b_1/b_2 = -\alpha_2 \quad (33)$$

である。よって、曲線 C_H の微分方程式(8)は

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a_2(u - \alpha_2)}{b_2(u - \alpha_2)} = \frac{a_2}{b_2} = \alpha_1 \quad (34)$$

と書くことができる。かくして、近傍 N のなかの曲線群 C_H は

$$z = \alpha_1 x + C \quad (35)$$

で表される、第1直線 u_0 に平行な平行直線群となる。この平行直線群は第2直線 u_0 と交叉し、その上のすべての点を曲線 C_H の二重交叉点たらしめる。よって、 K_H が 0 にひとしい水平 PSP 点の存在は第2仮定を成立させない。

第2直線 u_0 上のすべての点が曲線 C_H の二重交叉点であれば、その上のすべての点で σ_z と τ_{zx} とが消失する筈である。式(34)の左から2番目の項の分子は σ_z を分母は τ_{zx} を表す。そして、この両応力成分は、 $u = \alpha_2$ で表される第2直線 u_0 上で、確かに 0 となる。ただ、このとき、 dz/dx の値が不定となり、微分方程式(34)は意味を失う。それ故、曲線 C_H を微分方程式(1)の解と定義する限りでは、第2直線 u_0 が曲線 C_H でないことになる。しかし、曲線 C_H の本来の物理的意味は、その上の応力成分ベクトルの方向が水平であることにある。微分方程式(1)は、曲線 C_H の形を定めるための手段として用いられるにすぎない。第2直線 u_0 上の各点は水平 PSP 点だから、その上の応力成分ベクトルは方向が水平である。よって、物理的立場に立つこの論文では、第2直線 u_0 を直線状の曲線 C_H と確認する。第III章第4節の後半にある、 b_2 が 0 にひとしいばあいの、曲線 C_H の二重交叉点からなるとした直線 u_0 も、同じ理由により曲線 C_H

である。

4. 判別式 D_H が負のばあいの曲線群 $C_H(1)$

今までに現れた原点 O は、すなわち水平 PSP 点は、どれも、曲線 C_H の端点ではなく、存在しても第 1 假定の成立を妨げなかった。しかし、この第 4 節で考える判別式 D_H が負であるような水平 PSP 点は、曲線 C_H の端点となり、その存在によって第 1 假定は成立しなくなる。判別式 D_H が負であるから 2 次代数方程式(14)の根 α_1, α_2 は虚で、直線 u_0 は存在しない。あとで判ることだが、曲線群 C_H の要素曲線は原点 O から出発する螺旋曲線である。それで、このばあいの曲線 C_H の考察には、原点 O を中心とする極座標を用いるのが得策である。

第 1 図(a)に示した角 θ を偏角とする極座標 (r, θ) を用いることにすると、それと座標 (x, z) とは

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta \tag{36}$$

の関係で結ばれる。第 2 図(a)に示した角 χ の余切 $\cot \chi$ は $dr/r d\theta$ に他ならない。また $u = z/x$ は $\tan \theta$ にひとしい。よって、式(13)は

$$dr/r d\theta = f(\theta), \quad f(\theta) = -Q_1(\tan \theta)/Q(\tan \theta) \tag{37}$$

と書きなおされ、これが極座標 (r, θ) で表した曲線 C_H の微分方程式となる。今のばあい用はないが、 D_H が正のときの微分方程式(37)の一般解は、 C を積分常数として

$$\left. \begin{aligned} r &= C(X_1/X_2)^A/\sqrt{X_1 X_2}, \quad X_i = \sin \theta - \alpha_i \cos \theta (i = 1, 2), \\ A &= (a_2 + b_1)/(2\sqrt{D_H}) = 1/(2\sqrt{D_H}) \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

で与えられる。

判別式 D_H が負である今のばあい、 $Q(\tan \theta)$ は 0 になることがない。よって、 $f(\theta)$ は θ の連続関数である。それで

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(\theta) d\theta \tag{39}$$

とおくと、 $\theta = 0$ で $r = r_0$ の初期条件のもとに、微分方程式(37)の解は

$$r = r_0 e^{F(\theta)} \tag{40}$$

で与えられる。曲線群 C_H は、 r_0 を副変数とする式(40)で表される。ところで、 $\tan \theta$ が π を周期とする θ の周期関数だから、 $f(\theta)$ も π を周期とする θ の周期関数である。よって、 $F(\theta)$ は、 θ が π だけ増すごとに、同じ値だけ増大または減少する。すなわち、 θ の値の如何にかかわらず

$$F(\theta + \pi) - F(\theta) = \int_0^{\theta+\pi} f(\theta) d\theta - \int_0^\theta f(\theta) d\theta = \int_0^\pi f(\theta) d\theta = F(\pi) \tag{41}$$

の関係がなりたつ。上に言った「同じ値」とは、この $F(\pi)$ のことである。

5. 判別式 D_H が負のばあいの曲線群 $C_H(2)$

式(40)と式(41)とから、

$$k = e^{F(\pi)} \tag{42}$$

とおくと、 θ が π だけ増すごとに r が k 倍になることが知られる。もし $F(\pi)$ が負ならば、 k が 1 より小さいから、 θ が増すにつれ r は短くなり、曲線 C_H は第 3 図(b)に示したような時計

まわりの螺旋状曲線となる。この曲線は、反時計まわりに辿ると r が次第に縮小し、限りなく原点 O に近づく。それ故、原点 O はこの曲線 C_H の端点となる。第3図(b)は

$$a_1 = -5, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 10, \\ D_H = -199, \quad F(\pi) = -0.2227, \quad k = 0.800$$

として描いた。もし $F(\pi)$ が正ならば、 k が1より大きいから、曲線 C_H は原点 O を端点とする反時計まわりの螺旋状曲線となる。

式(40)の副変数 r_0 を、 r の或る値 r_A と kr_A との間で連続的に変えると、 r_0 の各値によって定められる螺旋状の曲線 C_H が曲線群を構成し、近傍 N を埋めつくす。この曲線群が今のばあいの曲線群 C_H であって、原点 O を端点に持つ。よって、前節のはじめにのべたように、判別式 D_H が負であるような、すなわち定数 K_H が $-1/4$ より小さいような水平 PSP 点の存在は、第1仮定の成立を妨げる。

もし、 $F(\pi)$ が0ならば k が1にひとしいから、曲線 C_H は閉曲線となる。よって、 $F(\pi)$ を0ならしめるような係数 a_1, a_2, b_1, b_2 を持つ水平 PSP 点は存在しない。たとえば、 $a_2 = b_1 = 0, a_1 b_2 < 0$ ならば $D_H = 4a_1 b_2 < 0, F(\pi) = 0$ であって、微分方程式(6)の解は

$$a_1 x^2 - b_2 z^2 = C \quad (43)$$

である。これは、 a_1 と b_2 とが異符号だから、原点 O を中心とする長円を表し、曲線 C_H は閉曲線となる。しかし、第II章第2節でのべたように、 a_2 と b_1 とは同時に0になりえないから、このような場合は、もともと、出現しない。

V. まとめとあとがき

この論文 XVI でえた結果を次にまとめる。

(A) 曲線 C_H の交叉点および端点の存在場所は水平完全単独主応力点 (水平 PSP 点) に、すなわち、応力成分 σ_z と τ_{zx} とが共に消失する点に、限られる。よって、第1仮定または第2仮定が成立しえないのは、斜面積雪内部に水平 PSP 点が存在する場合だけである。

(B) 水平 PSP 点が存在しても、式(2)によって定義される4箇の係数 a_1, a_2, b_1, b_2 が

$$K_H = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0 \quad (44)$$

であるような水平 PSP 点ならば、第1仮定も第2仮定も成立する。このことは、 b_2 が0であっても0でなくても正しい。その他のばあい、すなわち、 K が0か負の場合には、第1仮定か第2仮定かのどちらかが成立しない。

(C) 曲線 C_H の交叉点は、2本の曲線 C_H が交叉する二重交叉点か無限に多くの曲線 C_H が交叉する無限多重交叉点かに限られる。三本以上の有限数の曲線 C_H が交叉する多重交叉点は存在しない。第2仮定では、曲線 C_H の多重交叉点の存在を否定したが、その否定した多重交叉点が、みな、無限多重交叉点であったわけである。

第II章第1節でのべたように、水平 PSP 点は、積雪内部には非常に出現しにくい。しかし、次のような例が考えられるから、出現しないとは言えない。第3図(c)の曲線 G は、点 G_1 と点 G_2 との間が崖になった斜面を表す。その崖に、曲線 S_0 を表面とする積雪が、滝の形をな

して懸っている。崖の上の斜面にある積雪が滝を吊しているから、滝の上半分の雪は上下方向に張力をうけて、そのなかの σ_z は正である。崖の下にある斜面上の積雪は滝を下から支えるから、滝の下半分は上下方向に圧力をうけて、そのなかの σ_z は負である。それ故、滝の中ほどには σ_z が0になる点が出現する。そして、滝のなかでは τ_{zx} が0になりやすい。したがって、滝のなかほどに水平PSP点の出現する可能性が高い。

この論文は低温科学研究所の藤岡敏夫教授と鈴木義男教授とに検討してもらい、両教授から有益な教示と助言とをうけた。藤岡教授には、さらに、電子計算機による計算、作図の労をとってもらった。ここに記して両教授に対する謝意を表す。

文 献

- 1) 吉田順五 1981 斜面積雪の挙動の研究 IX. 低温科学, 物理篇, 40, 37-49.
- 2) 吉田順五 1982 斜面積雪の挙動の研究 X. 低温科学, 物理篇, 41, 25-42.
- 3) 吉田順五 1983 斜面積雪の挙動の研究 XII, XIII. 低温科学, 物理篇, 42, 21-38, 39-56.
- 4) 山内恭彦 1963 物理数学 (岩波書店) pp. 248.
- 5) 吉田順五 1984 斜面積雪の挙動の研究 XV. 低温科学, 物理篇, 43, 1-14.

Summary

1. This Paper XVI examines the validity of the two assumptions upon which the form of curves C_H was discussed in the previous Paper XV⁵⁾. The first assumption was that a curve C_H does not terminate in the interior of the snow cover. The second assumption was that two curves C_H may meet at an isolate point of intersection, although more than two curves C_H are prohibited from intersecting at a point in the same interior.

2. Let x and z respectively be horizontal and upright coordinates, and let i and k respectively be unit vectors in the directions of increasing x and z . A curve C_H is so drawn that it has tangent coincided in direction with vector

$$f_H = \tau_{zx}i + \sigma_z k$$

at all the points on it. It follows from this that both the termination of a curve C_H and intersection of two curves C_H can occur only at a point where ratio σ_z/τ_{zx} is indeterminate, that is, where σ_z and τ_{zx} are both equal to 0, because otherwise the tangent to curve C_H is determinate in direction at the point and one and only one curve C_H certainly passes through it.

3. A point at which both σ_z and τ_{zx} vanish can be called 'point of horizontal PSP', if use is made of 'PSP' defined in Article 9 of the English summary of Paper XII³⁾. Thus the two assumptions may turn out to be false if there are points of horizontal PSP in the interior of the snow cover.

4. A point of horizontal PSP will not rarely come out on surface S_0 of the snow cover, because σ_z and τ_{zx} vanish anywhere the tangent to surface S_0 happens to be horizontal. But, in the interior of the snow cover, it is very rare for the two components of stress to vanish at a point simultaneously. In addition to that, as will be shown below, there are among the points of horizontal PSP those harmless to the two assumptions because of being points of intersection of two curves

C_H . Therefore the two assumptions become seldom untrue.

5. Let coordinates x and z be placed with a point of horizontal PSP as their origin O in the interior of the snow cover. On the right side of Eqs. (2) of the text, parenthesized partial derivatives give their values at origin O , while g and ρ are respectively the acceleration of gravity and the density of snow at origin O . Of the four constants on the left side of the same equations, a_2 and b_1 are subject to the relationship of Eq. (3) due to one of the differential equations of equilibrium of stresses.

6. Let a very small domain called 'neighbourhood N ' be bounded around origin O . If x and z are confined in infinitesimal intervals, Eqs. (4) of the text give the components of stress in neighbourhood N , and they yield

$$dz/dx = (a_1x + a_2z)/(b_1x + b_2z) \quad (A)$$

appearing as Eq. (6) in the text as the differential equation of curve C_H in the same neighbourhood. Solution of this differential equation will make it clear whether or not the intersection and the termination of curves C_H occur at a point of horizontal PSP.

7. Some of the solutions of Eq. (A) are shown by curves in Figs. 1, 2 and 3 of the text. As Eq. (A) is homogeneous in coordinates x and z , these curves do not change their shape whatever unit may be used for the coordinates.

8. If dz/dx is put equal to $u = z/x$ in differential equation (A), it turns to a quadratic equation given by Eqs. (11) and (14) of the text of which the roots α_1 and α_2 are given by Eqs. (15) and (16). Then straight lines

$$z = \alpha_1x \quad \text{and} \quad z = \alpha_2x \quad (B)$$

passing through origin O make particular solutions of differential equation (A). They are curves C_H in neighbourhood N . Let them be called 'straight lines, u_0 '.

9. Discriminant D_H of the above quadratic equation is given by

$$D_H = 1 + 4K_H \quad (C)$$

with

$$K_H = a_1b_2 - a_2b_1 \quad (D)$$

as will be learned from Eqs. (3), (16), (16') and (18) of the text. In the following Articles, curves C_H will conveniently be classified by use of the value of constant K_H .

10. Case of $K_H > 0$. In this case, all curves C_H , two straight lines u_0 excepted, do not pass origin O as shown by two examples of Fig. 1(c) and Fig. 2(b) of the text in which K_H is respectively equal to 2 and 3.232. Origin O becomes an isolate point of intersection of two curves C_H , because straight line u_0 is a curve C_H in nature although it is not curved. Therefore, points of horizontal PSP are harmless to the two assumptions if they are present with K_H greater than 0.

11. Case of $K_H = 0$. In this case, curves C_H are straight lines which lie parallel to one of the two straight lines u_0 to intersect the other. Every point on the latter straight line u_0 becomes a point of intersection of two curves C_H which is not isolate. Thus presence of points of horizontal PSP with $K_H = 0$ makes the second assumption invalid.

12. Case of $0 > K_H > -1/4$. In this case, curves C_H are tangent to one of the two straight lines u_0 at origin O as illustrated in Fig. 1(b) and Fig. 2(c) of the

text. In Fig. 2(c), the two straight lines u_0 are marked v and w . When origin O is in such a state as above, in other words, when infinitely numerous curves C_H have a common tangent at a point of horizontal PSP, let it be called 'point Z '.

13. Let adjective 'mathematical' be added to curve C_H which is a solution of Eq. (A) corresponding to a particular value of integration constant. In Fig. 1(b), mathematical curves C_H contact one another at origin O but do not intersect there as seen from the values of integration constant written upon the curves. However, as the integration constant has no physical meaning in this case, physically possible curves C_H can be built by a respective combination at origin O of the curves coming from the upper right and the upper left with those coming from the lower left and the lower right. In such a way every point Z can be regarded, from the physical point of view, as a point of intersection of infinitely numerous curves C_H . Therefore, presence of points Z makes the second assumption invalid.

14. Case of $K_H = -1/4$. In this case, as discriminant D_H expressed by Eq. (C) vanishes, the two straight lines u_0 unite themselves into one straight line, and curves C_H contact this line tangentially at origin O as shown in Fig. 3(a). Thus origin O is a point Z .

15. Case of $K_H < -1/4$. In this case, both the two straight lines u_0 do not exist, because discriminant D_H is negative. All of curves C_H are of the spiral form as shown in Fig. 3(b) with their end at origin O . Therefore it is necessary for the first assumption to hold that points of horizontal PSP of $K_H < -1/4$ are absent.

16. After all, either of the two assumptions fail when there appear in the interior of the snow cover points of horizontal PSP of which K_H is zero or negative. There are only two kinds of intersections of curves C_H : intersection of two curves C_H and intersection of infinitely numerous curves C_H . Occurrence of the latter kind will make impossible the transformation of domain K into domain L used as a process of proving in the previous Paper XV.