HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	斜面積雪の挙動の研究　XVII ： 斜面積雪内応力の局所性
Author(s)	吉田, 順五
Citation	低温科學. 物理篇, 43, 33-47
Issue Date	1985-03-18
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/18498
Type	departmental bulletin paper
File Information	43_p33-47.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Zyungo YOSIDA 1984 Studies of the Behavior of a Snow Cover on Mountain Slope. XVII. Localization of the Stresses in the Snow Cover. *Low Temperature Science, Ser. A, 43.* (With English Summary p. 45)

斜面積雪の挙動の研究 XVII*

——斜面積雪内応力の局所性——

吉田順五
(北海道大学名誉教授)

(昭和59年9月受理)

I. まえがき

筆者は，これまでに，この論文とおなじ表題の論文IXないしXVIで，斜面積雪の流動面内にある曲線C_Hおよび曲線C_Vの理論的考察を，ひきつづき行ってきた。両曲線の考察を一時とりやめ，この論文XVIIは，斜面積雪内応力の局所性の理論的考察にあてる。しかし，対象とする斜面積雪は，これまでと同様，等高線が長い水平直線で表される山の斜面につもった積雪である。積雪は，等高線に直角な鉛直面である流動面に平行に，平面歪の状態で，2次元流として斜面を流下する。ただし積雪は，流下はしてもその底面で，剛体である傾斜地の表面Gに固着しているとする。すなわち，積雪の流動速度が，積雪の底面では，0であるとする。

この積雪の地面への固着は多くのばあい事実である。そして，この固着のために、第II章以降で説明するように，斜面上のある地点Xの附近の積雪内応力は，地点Xから斜面上遠くはなれた地点における積雪内応力の影響をうけない。遠い地点の積雪内応力の影響が，途中で地面Gに吸収され，地点Xにまで届かないからである。したがって，地点X附近の積雪内応力は，地点Xの附近に存在する積雪の状態だけによって定まる。これが，この論文に副題としてつけた「斜面積雪内応力の局所性」である。

こんご，剛体とみなす傾斜地の表面Gを「斜面G」とか「地面G」とか呼ぶ。積雪の底面は地面Gと一致する。それで，積雪の底面を「底面G」と言うこともある。なお，前論文XVIで用いた記号$u(=z/x)$を，この論文では，積雪の流動速度のx成分として，全く別な意味に使う。

II. 自己応力と附加応力

1. 区画された斜面積雪内の応力

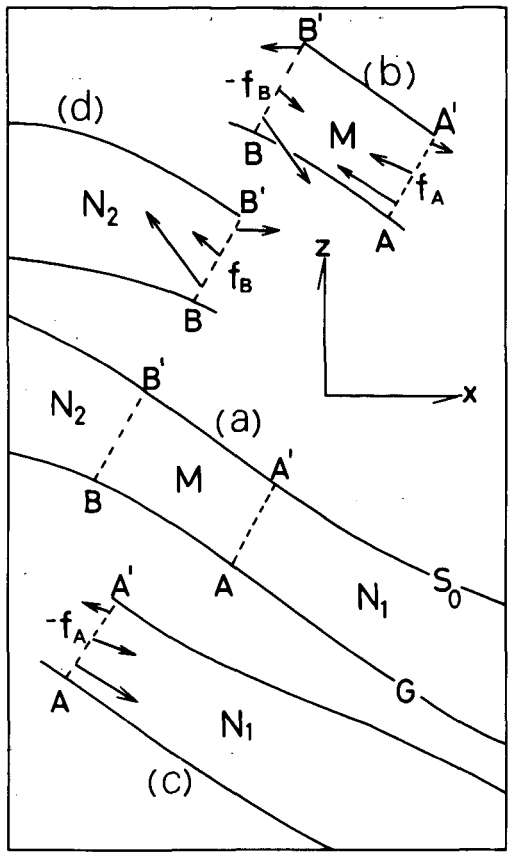
第1図(a)は斜面積雪の流動面による断面である。曲線S_0が積雪表面を，曲線Gが地面を示す。地面G上の2点A，Bで地面Gにほぼ垂直にたつ点直線AA′，BB′は，流動面に直角な，積雪の仮想断面を表す。両仮想断面は，区画面として，積雪全体を3箇の区域に区画する。両区画面にはさまれた区域を「区域M」とよび，区域M内の雪を「雪M」とする。区画面AA′

* 北海道大学低温科学研究所業績　第2675号

の右側の区域を N_1 と，区画面 BB′ の左側の区域を N_2 と名づける。区域 $N_1(N_2)$ のなかに続く雪を「雪 $N_1(N_2)$」とよぶ。

水平座標 x を右向きに，斜面のくだる方向にとる。座標 z を鉛直上むきに置く。区画面 AA′(BB′) 上に分布する同区画面上の応力成分をベクトル $f_A(f_B)$ で代表する。座標 x を右むきにとったことに合わせて，$f_A(f_B)$ は，区画面 AA′(BB′) の右側にある雪 $N_1(M)$ がその左側にある雪 $M(N_2)$ に加える応力の成分を表すものとする。

上記のように斜面積雪を区画すると，区画されたおのおの雪のなかの応力を2種類に分解することができる。区画面 AA′ および BB′ を両側面とする雪 M を例にとる。雪 M に加わる外力は(1)雪 M の各部分に作用する重力，(2)側面 AA′ に雪 N_1 が加える応力成分 f_A と側面 BB′ に雪 N_2 が加える応力成分 $-f_B$，(3)地面 G が雪 M の底面に加える力，の3種類である。このうち，雪 M 内応力の真の発生原因となるのは(1)と(2)との外力である。地面 G が加える(3)の外力は，雪 M の底面 G において雪の流動速度を消滅させるために，2次的に誘発される反抗力いわゆる束縛力，にすぎない。雪 $N_1(N_2)$ においても，同様に，そのなかの応力発生の真の原因となる外力は，重力と側面 AA′(BB′) に雪 M によって加えられる応力成分と，である。



第1図 (a)斜面積雪の流動面による断面。曲線 S_0 が積雪表面を，曲線 G が地面を示す。積雪表面および地面にほぼ直角に立つ区画面 AA′ および BB′ で，斜面積雪の断面を M，N_1 および N_2 の3区域に分割する。各区域内の雪を別べつに，図(b)，(c)，(d)として示した。各雪の側面に，となりの雪が加える応力の成分を，ベクトル f_A，$-f_B$ などで表してある

以上の事情により，区画された斜面積雪内の応力は，重力を真の原因とする応力と区画面上の応力成分を真の原因とする応力との2種類に，先に述べたように，分解される。まえの応力を「自己応力」，あとの応力を「附加応力」と名づけ，このあと，それについて考察をすすめる。記号 P_M を自己応力に，記号 Q_M を附加応力に用いる。

2. 自己応力 P_M

第1図(b)，(c)，(d)に雪 M，雪 N_1 および雪 N_2 を切り離して別々に描き，それぞれの側面 AA′ および側面 BB′ に外力として働く応力成分を f_A，$-f_B$ などのベクトルで示した。区画面 AA′ も区画面 BB′ も仮想の断面である。いまここで，両仮想断面にそって現実に切れ目を入れたと想像しよう。すると仮想断面 AA′ および BB′ は，それぞれの両側にある雪の現実の側面に

変り，それまで存在した仮想断面上の応力成分 f_A，f_B は消失する。現実の側面は自由表面だからである。かくして，前節であげた(2)の外力は0となる。このとき，区画された積雪のそれぞれのなかに，その各点に作用する重力によって生ずる応力が自己応力 P_M である。

「区画された積雪」を「区画積雪」と略称しよう。すると，上のことから次のように言える。自己応力は，ひとつの区画積雪に関する応力であって，その区画積雪が単独で斜面上に存在するとき，その内部に重力を原因として発生する応力である。

斜面積雪の表面 S_0 のうえの応力成分は常に0であり，その底面Gにおける雪の流動速度も常に0である。この事情を「自然境界条件」の名でよぶことにしよう。すると，自己応力の座標 (x, z) に関する成分 σ_x，σ_z および τ は，自然境界条件に加えて区画面上の応力成分も0であるとの境界条件をみたす

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau}{\partial x}=\rho g,\quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial z}=0 \tag{1}$$

の解で与えられる，と言える。この式(1)は重力が存在するばあいの応力の平衡方程式で，ρ は雪の密度を，g は重力加速度を表す。なお，剪断応力成分 τ_{zx} を簡略して τ と書いた。こんごも，この簡略記号 τ を用いる。

3. 附加応力 Q_M

附加応力も区画積雪に関する応力で，区画していない元の積雪については考えられない。第1図の f_A や f_B のような区画面上の応力成分を一般的に表す記号として，f_M を用いる。いま，区画面にそって現実の切れ目を入れたうえ，重力を消滅させたと想像する。そして，区画積雪の右の側面には応力成分 f_M を，左の側面には応力成分 $-f_M$ を作用させる。(応力成分記号 f_M は，区画面が，現実の切れ目によって，区画積雪の現実の側面に変るまえに，区画面上に存在した応力成分を示す一般的記号である。右の側面上の f_M と左の側面上の f_M とは，異る区画面上に存在した。よって，同じ記号で表されてはいるが，両者は互に等しいと限らない)。この想像の場合に，各区画積雪の内部に現れる応力が附加応力 Q_M である。これは，まさに，第1節にあげた(2)の外力だけを真の発生原因とする応力である。

附加応力の座標 (x, z) に関する成分 σ_x，σ_z，および τ は，自然境界条件とともに，区画面上の応力成分が f_M であるとの境界条件をみたす，重力が存在しないばあいの応力平衡方程式

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial z}=0 \tag{2}$$

の解である。この附加応力の (x, z) 成分と前節で得た自己応力の (x, z) 成分とを加えあわせた合成成分は，式(2)が式(1)の同次方程式だから，式(1)の解である。また，この合成成分は自然境界条件をみたす。さらに，区画積雪の両側面では f_M となる。斜面積雪全体のなかの応力を T で表すと，T の (x, z) 成分は，自然境界条件をみたす式(1)の解で与えられる。そして，この解として与えられる応力成分の区画面上の値を f_M で代表した。したがって，区画積雪のなかでの応力 T の (x, z) 成分と上記の合成成分とは，同一の境界条件を満足する式(1)の解である。つまり，両応力成分は全く相等しい。すなわち，区画積雪内の応力 T を T_M で表せば，T_M

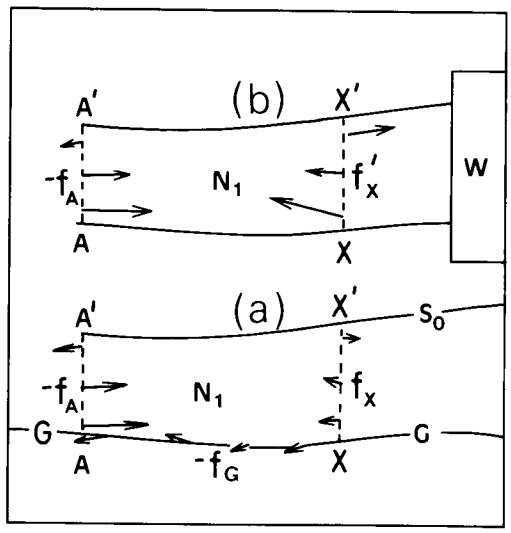
は，過不足なく，自己応力 P_M と附加応力 Q_M とに分解でき，$T_M = P_M + Q_M$ の関係がなりたつ。

4. 附加応力の減衰

ところで，附加応力は，区画積雪の側面から内部にむかって進むにつれ減衰する。この減衰を，充分に長く厚さの変化に乏しい第1図の雪 N_1 を使って考察しよう。第2図(a)は，重力が消失したと想像したばあいの雪 N_1 の図である。重力が作用しなければ，雪 N_1 の傾斜は問題にならない。それで，この図は水平に描いた。同図(b)は，重力が消失したばかりでなく，地面Gも消失したと想像したばあいの雪 N_1 を表す。ただし，このばあいの雪 N_1 は，側面 AA′の右方，遠く距ったところで不動の壁Wに固着する。

雪 N_1 のなか任意の場所に断面 XX′を区画面として仮想し，雪 N_1 の左の側面 AA′と区画面 XX′とのあいだに続く区画積雪 AX の力学的平衡を考える。区画面 XX′上に分布する附加応力の成分 f_x をすべて合成して得られる力を断面力とよび F_x で表すと，区画積雪 AX に，区画面 XX′の右側の雪が F_x を外力として加える。また，側面 AA′の左にある雪Mが区画積雪 AX に $-F_A$ を外力として加える。この F_A は側面 AA′のうえの断面力である。

地面Gが存在しない第2図(b)のばあい，区画積雪 AX に加わる外力は $-F_A$ と F_x とのふたつだけである。よって，区画積雪 AX の力学的平衡の結果として，$F_x = F_A$ となる。側面 AA′と区画面 XX′とはほぼ同じ面積で，それぞれの面積で F_A および F_x を割った商が f_A および f_x の平均値である。したがって，附加応力の成分 f_x の平均値は，その強さにおいて f_A の平均値にほぼ等しい。つまり，地面Gが存在しなければ附加応力 f_x は減衰せず，雪 N_1 の全長にわたってほぼ同じ強さを保つ。



第2図 附加応力減衰の説明に使われる，第1図にある雪 N_1 の図。重力が消失したとする仮想の場合である。雪 N_1 の側面 AA′には，左となりの雪Mから，外力として，応力成分 $-f_A$ が加えられる。(a)地面Gが存在するばあい。(b)地面Gが存在しないばあい。雪 N_1 は，(b)のばあい，壁Wに附着する

附加応力がほぼ一様であることに伴い，雪の歪速度が雪 N_1 の全長にわたってほぼ一様となる。歪速度は雪の流動速度の空間的変化率である。したがって，雪の流動速度そのものは，附加応力とは違って，側面 AA′から右へむかい雪 N_1 のなかを進むにつれ減衰する。雪 N_1 の底面Gにおける流動速度を v_G で表すと，v_G も右へむかって減衰する。

5. 附加応力の減衰（つづき）

地面Gが出現して第2図(a)の状態になると，上記の雪の流動速度 v_G は消滅しなければならない。この消滅は，地面が雪 N_1 の底面に加える力によるよりほかはない。その力の出現と

ともに，雪 N_1 の底面 G 上に応力成分 f_G が，雪 N_1 内部の応力成分として，発生する。第2図(b)のばあいには，雪 N_1 の底面 G が自由表面であったから，この f_G は 0 であった。地面 G が雪 N_1 に加える上述の力は $-f_G$ として地面 G の上に分布する。応力成分 f_G を上のようにとり，地面の力に負号をつけて $-f_G$ としたのは，座標 z を鉛直上向きに置いたことと合せるためである。

区画積雪 AX の底面に加えられる $-f_G$ をすべて合成して得られる力を $-F_G$ で表すと，区画積雪に作用する外力は，この $-F_G$ と前節にあげた $-F_A$ および F_X との三つである。これら3力が釣合うことから $F_X = F_A + F_G$ の関係が導かれる。まえに述べたように，$-F_G$ は反抗力である。雪 N_1 のなかに応力と流動速度とを発生させる真の原因である $-F_A$ の効果を，減殺するために誘発される，2次的な力である。実際，$-F_G$ は，$-F_A$ の効果としての流動速度 v_G を消滅させた。

それ故，$-F_G$ は $-F_A$ の強さを弱めるように働き，その結果として $F_A + F_G$ は F_A より絶対値において小さくなる。よって，F_X の絶対値は F_A の絶対値よりも小さく，f_X の平均値も f_A の平均値よりも絶対値のうえで小さい。

流動速度 v_G は，雪 N_1 の底面上，点 A に近いほど大きい。したがって，それを消滅させる $-f_G$ も，点 A に近いほど強い。その結果，$-F_G$ は，点 X が点 A から遠ざかるにつれ，はじめは急速に，のちには緩漫に，強くなる。それに応じて F_X が，したがって附加応力 f_X が，はじめは急速に，のちには緩漫に，弱化する。すなわち，附加応力は，雪 N_1 の内部にむかって進むにつれ，減少指数関数に似た形で，減衰する。

うえで，区画面 XX′ 上の応力成分 f_X の減衰から附加応力自体の減衰を結論した。それは，区画面 XX′ を表す線 XX′ を，方向についても形についても，或る程度任意に選びうることによる。

結局，附加応力減衰の原因は，地面が積雪の底面に加える反抗力である。地面は，ある地点の応力の影響を反抗力によって中和吸収し，それが遠方に達するのを妨げる。いままでの考察では，斜面積雪の厚さの変化が緩漫であるとした。したし，この応力の影響の地面による吸収は，厚さの変化が急激な斜面積雪のばあいでも起こる筈である。それ故，斜面上のある地点での積雪内応力の影響が，その地点から遠ざかるにつれ減衰するのは，一般的現象であると言える。

6. 斜面積雪内応力の局所性

厳密にいえば，附加応力は減衰しながらも，雪 N_1 が，一般には区画積雪が，続くかぎりの遠方にまで及ぶ。しかし，実用上問題にならない程度にまで減衰したら，消滅したと近似的に考えてよい。区画積雪の側面から，この附加応力近似消滅の地点までの距離を「消滅距離 l_M」と名づける。

第1図の雪 M の幅が，すなわち点 A と点 B との間隔が $2l_M$ より長いとする。雪 M の側面 AA′ および側面 BB′ から雪 M の内部にむかって距離が l_M までの範囲内にある雪を，それぞれ，雪 M_A および雪 M_B とよぶ。残った中央部の雪を雪 M_C と名づける。

雪 M のなかの実際の応力は自己応力 P_M と附加応力 Q_M との和で与えられる。雪 M_A と雪

M_B とのなかには両応力が存在するが，雪 M_C のなかでは附加応力が，すでに，近似的には消滅している。よって雪 M_C のなかでは自己応力が実察の応力とほぼ一致する。ところで，自己応力は，雪 M が単独で斜面上に存在するときに重力によって雪 M のなかに作りだされる応力である。雪 M 以外の積雪が斜面上に存在するか否かには関らない。つまり，自己応力は局所の雪の状態で定まる。それ故，雪 M_C のなかの応力は，些細な誤差を無視すれば自己応力の一部と同じであるという意味で，局所的であると言える。雪 M_C には，斜面積雪のどの部分をあててもよい。したがって，斜面積雪内のどこでも応力は局所的である。このことを表すために「斜面積雪内応力の局所性」を副題として本論文につけた。

以上のことにより，雪 M 内の自己応力を理論的に求めれば，雪 M_C 内の実際の応力が近似的に知られる。しかし，筆者の知る限り，均一な雪からなる長方形の最も簡単な雪 M についてさえ，自己応力を既知関数を用いて表しえた例はない。ところが，次の第Ⅲ章で述べるように，雪 M_A と雪 M_B とのなかの応力は別として，雪 M_C のなかの応力だけなら近似的に定めることのできる，比較的簡便な理論的方法がある。

Ⅲ. 応力の局所性に関連する事柄

1. 近似応力の定めかた

すぐまえ，前章のおわり第6節で，第1図にある雪 M の中央部をなす雪 M_C のなかでは，雪 M の自己応力が近似的に実際の応力を表すことを知った。それ故，雪 M_C のなかだけででも雪 M の自己応力に近い応力を求めることができれば，その応力は，雪 M_C のなかの実際の応力の近似応力となる。この第1節は，その近似応力の定めかたの考察である。前章の第6節におけると同様，雪 M は，その斜面ぞいの幅が，附加応力消滅距離 l_M の2倍以上であるとする。

雪 M の表面 S_0 上の応力成分が0であり，雪 M の底面 G では雪の流動速度が0であるとの自然境界条件はみたすが，雪 M の両側面 AA′，BB′のうえの境界条件には拘束されない，重力が存在するときの応力平衡偏微分方程式(1)の解 $(\sigma_x, \sigma_z, \tau)$ をまとめて T'_M で表す。雪 M の両側面に関する制約がないため，解 T'_M は，比較的簡単に求められる。しかし，ひと通りには定められない。いくつもの解 T'_M が存在しうる。そのおのおのが，雪 M のなかに可能な応力を与え，雪 M の両側面上に応力成分 f'_A，f'_B を作る。たまたま f'_A，f'_B が，雪 M の両側面上の実際の応力成分 f_A，f_B に一致すれば，応力 T'_M は雪 M のなかの実際の応力 T_M となる。しかし，そのような偶然は，事実上，おこらない。可能な応力 T'_M を凝似応力とよび，それが作りだす f'_A および f'_B を凝似応力成分とよぶことにする。

前章で，実際の応力 T_M を自己応力 P_M と附加応力 Q_M とに分解した。それと全く同じ方法で，凝似応力 T'_M も自己応力 P_M と凝似附加応力 Q'_M とに，過不足なく分解される。凝似附加応力 Q'_M は，凝似応力 T'_M が異れば異る。しかし自己応力 P_M は，同じ雪 M に関するものだから，実際の応力 T_M およびすべての凝似応力 T'_M を通じて同一である。

前章の第4節と第5節とで，附加応力の減衰を考察した。その考察は，それに利用した実際の応力成分 f_A を凝似応力成分 f'_A におきかえても，そのまま通用する。よって，凝似附加応力も減衰し，雪 N_1 の内部，側面 AA′ から消滅距離 l_M 以上距ったところでは，充分に衰弱している

に違いない。充分に衰弱したために消滅したと見做し，省略するかも知れない凝似附加応力のこの部分を「省略附加応力」と名づけよう。

以上のことから，前章第6節の考えかたにしたがって，雪 M_c のなかの凝似応力が自己応力と省略附加応力との和にひとしいことが知られる。省略附加応力は無視してもよいほど弱い。よって，雪 M_c のなかだけに限れば，凝似応力は自己応力に近く，この節のはじめに述べた意味で，実際の応力の近似応力となる。

結局，次のようにすれば，斜面積雪の或る区間 M_c 内の近似応力が理論的に求められる。まづ，区間 M_c を，両側に，附加応力消滅距離 l_M だけ拡大して区間 M とする。ついで，拡大区間 M で自然境界条件を満足する，重力が存在するばあいの応力平衡偏微分方程式(1)の解を求める。この解が拡大区間 M の外で，自然境界条件を満すか否かは，問わない。そして，この解の区間 M_c に属する部分を近似応力とする。ただ，この解は，ひと通りに限られない。解が違うと近似応力の近似度が変る。

この論文と同じ表題の論文XII[5] にある式(3)(4)(5)(6)の応力は，楔形積雪のなかの凝似応力であり，論文XIII[5] にある式(1)(2)(3)(4)の応力は円形積雪のなかの凝似応力である。前者は r の変域を区画区域とし，後者は θ の変域を区画区域とする。ただ，いづれも，積雪を塑性ポアソン比 ν が0.5にひとしい非圧縮性粘性流体として導いたものだから，上記の利用法に供するためには，ν の一般値を用いた式に改める必要がある。また，文献(8)の第IV章の第2種重畳応力場は，楔形積雪のなかに生じうる凝似附加応力である。この凝似附加応力から，一般に附加応力の減衰が充分に速かであるためには，楔形の頂角 β が10°前後より小さいことの必要性が知られる。

2. 附加応力の消滅距離 l_M

前章の第4節と第5節とで，第2図の雪 N_1 について，附加応力の減衰を論じた。この第2節と次の第3節とでは，雪 N_1 を厚さが一様で性質も均一な区画積雪であるとする。そのなかに，応力関数を利用して，数学的に簡単なひとつの凝似附加応力を作り，その減衰を数式で表す。そして，この数式にもとづいて，附加応力の消滅距離 l_M の長さを推定する。応力関数については，その簡単な説明を，この章の末尾に，「補遺」としてつけ加える。

第3図(a)が，ここで考える一様均一な雪 N_1 の流動面による断面である。その一様な厚さを h とする。また，この一様均一な雪 N_1 を構成する雪は，密度が ρ，粘性係数が η，塑性ポアソン比が ν の圧縮性粘性流体であるとする。雪 N_1 の側面 AA′ の下端である点 A を座標の原点 O とし，地面 G にそって座標 x' を，それに直角に座標 z' を上向きにおく。座標軸 x' は，第3図では水平だが，実際には右下の方向に傾いている。

正の未定定数 ω をふくむ4箇の重調和関数

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 = \exp(-\omega x') \cdot \Big[\sin(\omega z'), \cos(\omega z'), (\omega z')\sin(\omega z'), (\omega z')\cos(\omega z') \Big] \tag{3'}$$

のおのおのに未定係数を乗じ，加えあわせて応力関数 Φ を作る。所定の演算により Φ から応力成分 σ'_x, σ'_z および τ' を作り，それを用いて，雪の流動速度成分 u', w' を

$$\partial u'/\partial x' = \Big[(1-\nu)\,\sigma'_x - \nu\,\sigma'_z \Big]/2\eta, \quad \partial w'/\partial z' = \Big[(1-\nu)\,\sigma'_z - \nu\sigma'_x \Big]/2\eta,$$

$$\partial u'/\partial z' + \partial w'/\partial x' = \tau'/\eta \tag{4'}$$

によって定める。この式 (4′) は，論文Ⅶ[1] の p. 10にある式(15),(16)にほかならず，圧縮性粘性流体の応力と歪速度との関係を示す。

こうして得られる応力成分と流動速度成分とには，4箇の未定係数が含まれている。一様均一な雪 N_1 の底面 $z'=0$ では流動速度成分が0であり，その表面 $z'=h$ では応力成分のうちの σ'_z と τ' とが0であるとの自然境界条件を用いると，4箇の未定係数相互間の比の値が定まり，未定定数 ω の値を決定すべき関係式

$$(3-4\nu)\cos^2(\omega h) - (\omega h)^2 + (1-2\nu)^2 = 0 \tag{5}$$

と，応力成分および流動速度成分とを表す式

$$\sigma'_x, \sigma'_z, \tau', u', w' = C\exp(-\omega x')\cdot\Big[\mathrm{f}_1(\omega z'), \mathrm{f}_2(\omega z'), \mathrm{f}_3(\omega z'), \mathrm{f}_4(\omega z'), \mathrm{f}_5(\omega z') \Big] \tag{6'}$$

とが得られる。この式 (6′) で，C は任意の定数であり，$\mathrm{f}_i(\omega z')$ は $(\omega z')$ と $(\omega z')$ の三角関数とを組合せた既知関数を表す。

3. 附加応力の消滅距離 l_M (つづき)

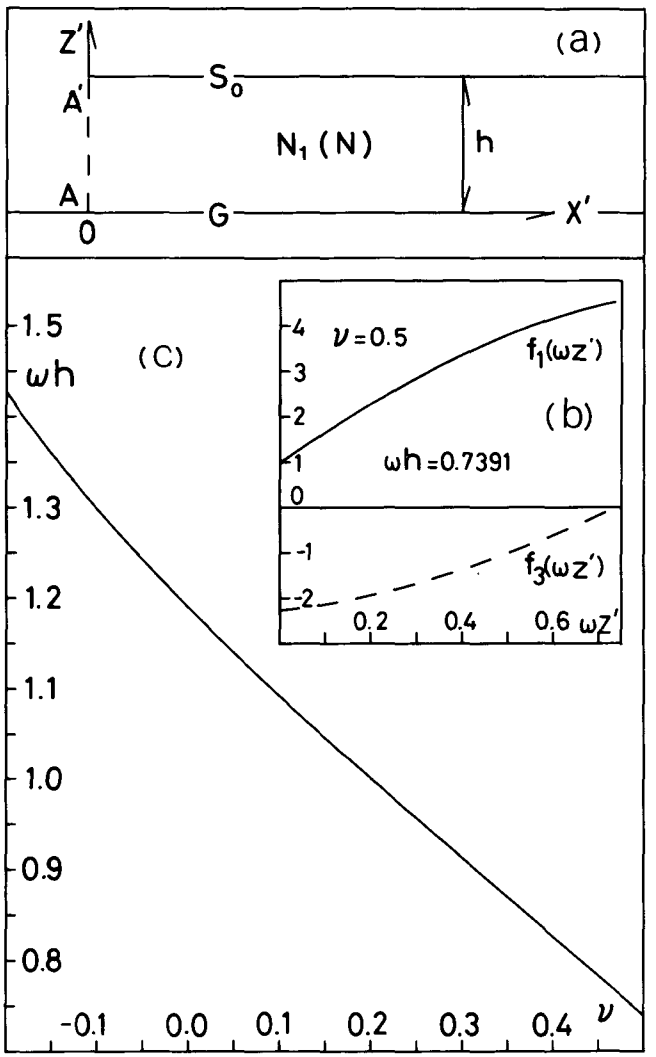
前節でえた式 (6′) の応力成分 σ'_x, σ'_z および τ' は，応力関数 Φ から導いたのだから，重力がないばあいの応力平衡方程式(2)を満足する。さらに，自然境界条件をみたす。また，一様均一な雪 N_1 の側面 AA′ のうえに，ベクトル成分

$$\boldsymbol{f}'_A = C\Big\{ \mathrm{f}_1(\omega z')\,\boldsymbol{i}' + \mathrm{f}_3(\omega z')\,\boldsymbol{k}' \Big\} \tag{7'}$$

を作る。ここに，$\boldsymbol{i}'$ および $\boldsymbol{k}'$ は，座標 x' および z' の方向の単位ベクトルである。したがって，式 (6′) の応力は，応力成分 (7′) だけを真の原因として，一様均一な雪 N_1 のなかに発生した凝似附加応力とみてよい。この凝似附加応力を，簡単のため，「応力 Q'_0」とよぶことにする。式 (6′) が示すように，応力 Q'_0 は，側面 AA′ から雪 N_1 のなかへ向って座標 x' が増大するにつれ，指数関数的に減衰する。

一様均一な雪 N_1 のなかでも，側面 AA′ 上の応力成分 $\boldsymbol{f}'_A$ が変れば，応力の減衰の様子が変る。また，$\boldsymbol{f}'_A$ が同一でも，雪 N_1 が一様均一でなければ，応力 Q'_0 の減衰とは異る減衰がおこる。しかし，実際の附加応力にせよ凝似附加応力にせよ，その消滅距離 l_M は，性質上，明確に決定しうるものではない。また，実際の附加応力の減衰も凝似附加応力の減衰も，同一の機構，すなわち応力の影響の地面による吸収によって生ずる。それ故，厚さがほぼ一様な積雪についてなら，応力 Q'_0 の消滅距離を共通に使っても，大きな誤りにならないであろう。

前章でも，また，この章の第1節でも述べたように，雪 M_C のなかの実際の応力は自己応力で近似できる。その近似度は，附加応力の消滅距離 l_M を長くとるほど，省略附加応力が小さくなるから，高い。第3図(b)は，一様均一な雪 N_1 の塑性ポアソン比 ν が0.5に等しいばあいの関数 $\mathrm{f}_1(\omega z')$ および $\mathrm{f}_3(\omega z')$ の図である。式 (6′) にあるこのふたつの関数は，それぞ



第3図　(a)第2図の雪 N_1 を一様均一であるとした場合の図。厚さを h とする。(b)塑性ポアソン比 ν が0.5に等しい場合の，式 (6′) にある関数 $f_1(\omega z')$, $f_3(\omega z')$ の図。応力成分 σ'_x, τ' は，それぞれ $f_1(\omega z')$, $f_3(\omega z')$ に比例する。雪 N_1 の表面では $\omega z' = \omega h = 0.7391$ である。(c)式(5)による ωh と ν との関係

れ，応力 Q'_0 の成分 σ'_x と τ' とに比例する。この図の $f_1(\omega z')$ から，地面 G から遠く積雪表面 S_0 に近いところでほど，σ'_x の絶対値の大きいことが判る。遠い所の応力の影響を地面は吸収しにくい。それで，ほかの附加応力の場合にくらべ，応力 Q'_0 の減衰は弱めで，それにつれ附加応力の消滅距離 l_M は長めであると考えられる。なお，式(5)で $\nu = 0.5$ とおくと，$\omega h = 0.7391$ となる。それ故，第3図(b)の横軸上では，$\omega z' = 0.7391$ の点が，$\nu = 0.5$ の雪からなる一様均一な雪 N_1 の表面にあたる。

応力 Q'_0 の減衰を表す式(6′)の指数関数は

$$\exp\left\{-(\omega h)(x'/h)\right\} \tag{8'}$$

と書けるから，減衰の速さは ωh の値によって定まる。式(5)が ωh と塑性ポアソン比 ν との関係をあたえ，第3図(c)がその関係のグラフを示す。大泉と藤岡とが，北海道の乾いたしまり雪の ν の値を測定によって定めた[4) 6)]。それによると，密度 ρ が0.21～0.28g/cm³ のしまり雪では ν が0.10であり，ρ が0.28～0.38g/cm³ のしまり雪では ν が0.15である。第3図(c)によれば，これらの ν の値に対応する ωh の値は，それぞれ，1.09および1.04で，いづれも1に近い。もともと，附加応力の消滅距離 l_M は明確に定義できるものでないから，それの決定に使う ωh の値も，それほど正確に定めるには当らない。それで，ωh の値として，便利な値1を用いることにする。本州の水を含むことの多い雪についての ν の測定例はない。しかし，第3図(c)の曲線から知られるように，ν の変化に伴う ωh の変化は余り著しくない。それ故，ωh を1にとることは，積雪一般に通用すると見てよいであろう。

上記の理由により ωh の値を1にとると，式(8')の値が $x'=h$ では $1/e=1/2.718$ となって1/3に近く，$x'=2.5h$ では1/12.2となって1/10より少し小さい。減衰して1/10以下になれば，実用上，附加応力は消滅したと考えてよいであろう。それで，附加応力の消滅距離 l_M は，積雪の平均の厚さ h の2倍半にとることとする。減衰が1/3に達しない範囲では，附加応力の作用が尚かなり強い。だいたい $0<x'<h$ で表されるこの範囲を考えることが，将来，役に立つ可能性が考えられる。それで h にひとしい x' の値を l'_M で示し，附加応力の「作用距離」とよぶことにする。

4. 応力関数（補遺）

応力と歪とのあいだ，または，応力と歪速度とのあいだにフックの法則がなりたつ均一な弾性体または圧縮性粘性流体が，2次元的に変形または流動するばあいの応力を定めるにあたって，しばしば，応力関数 Φ が利用される。ただし，この圧縮性粘性流体は，粘性係数 η が非常に大きいとする。そのため，その流動は極めて緩漫で，流動の加速度にもとづく慣性力は無視しうるほどに小さい。ポテンシャルをもつ力の成分は，ポテンシャル関数の座標に関する第1階偏微分係数で与えられる。それに似て，うえの場合の応力成分は，応力関数 Φ の座標に関する第2階偏微分係数で表される。

直角座標 (x, y, z) の面 (x, z) に平行に，フックの法則にしたがう圧縮性粘性流体が，y 方向には伸縮することなく，すなわち，平面歪をおこしつつ，流動しているとしよう。すると，座標 (x, z) に関する形に改めた前節の式(4')が，すなわち座標，流動速度成分および応力成分を示す記号につけてあるダッシュを取りのぞいた式(4')が，成立する。このように改めた式(4')を式(4)と名づける。式(4)には3個の方程式が属するが，その左辺のおのおのは歪速度の成分 $\dot{\varepsilon}_x$, $\dot{\varepsilon}_z$, $\dot{\gamma}_{zx}$ にほかならない。

重力のような，場所によって変化しない体積力の作用があっても，応力関数を作ることができる。しかし，簡単のため，ここでは体積力の作用のない場合を考える。すると，流体のなかの応力の平衡を表す式として，第Ⅱ章第3節の式(2)に属する2箇の方程式が成立することになる。式(2)と式(4)とに属する方程式の数は，あわせて5である。これは，定むべき未知量の数，

すなわち流動速度の成分 u, w と応力成分 σ_x, σ_z, τ との数にひとしい。

正常でさえあれば，Φ が (x, z) のどんな関数であっても

$$\sigma_x = \partial^2\Phi/\partial z^2,\quad \sigma_z = \partial^2\Phi/\partial x^2,\quad \tau = -\partial^2\Phi/\partial x\partial z \tag{9}$$

とおくと，式(2)が，ふたつの恒等式として，満足される。ところで，式(4)に属する3箇の方程式の左辺も，恒等式

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{10}$$

で結ぶことができる。この恒等式のなかにある式(4)の左辺をその右辺でおきかえて，流動速度成分 u, w は含まず，応力成分 σ_x, σ_z, τ だけを含む式に変える。そして，その応力成分を式(9)の右辺でおきかえると，関数 Φ だけを未知量として含む第4階の偏微分方程式

$$\partial^4\Phi/\partial x^4 + 2\,\partial^4\Phi/\partial x^2\partial z^2 + \partial^4\Phi/\partial z^4 = 0 \tag{11}$$

がえられる。

恒等式 (10) を用いて方程式(11)を導く過程で，流体の物質定数である η と ν とは脱落する。そのため，式(11)は η も ν も含まない。フックの方則が成立しないで，歪速度と応力との関係が式(4)と異る数式で表されたとすれば，導かれる Φ についての偏微分方程式のなかに，流体の物質定数が，一般には，現れたであろう。

数学では，式(11)を重調和方程式といい，その解 Φ を重調和関数 (biharmonic function) という。重調和関数は無数にある。そのひとつを選んで，式(9)によって応力成分 σ_x, σ_z, τ を作ったとする。第3の成分 τ は残して，初めのふたつの成分 σ_x と σ_z とを用いると，式(4)の第1式と第2式とによって，流動速度成分 u, w を定めることができる。この u と w とを使って式(4)の第3式の左辺を作る。すると，それが上で残した応力成分 τ と一致する。すなわち，式(4)の第3式が成立する。よって，上のようにして，重調和関数 Φ から作られる σ_x, σ_z, τ, u, w は，応力および流動の微視的分布状態を規定するのに必要で充分な，式(2)および式(4)に属する5箇の微分方程式を満足する。つまり，正しい応力成分と流動速度成分とを与える。このように，重調和関数が応力成分，流動速度成分を作るために使われるとき，それを応力関数 (stress function) と呼ぶ。

圧縮性粘性流体の個々の流動ごとに，それぞれ特有な境界条件が与えられる。すなわち，流体の境界上で，5箇の成分 σ_x, σ_z, τ, u, w のうちの単数あるいは複数のどれかについて値が指定され，残りの成分は任意の値をとるにまかされる。無数に存在する重調和関数のなかから，ある境界条件に適合するものが選ばれたとしよう。すると，その選ばれた重調和関数が，この境界条件の場合の応力関数となり，境界内部全体にわたって応力成分および流動速度成分を与える。

しかし，この選択は，実際には不可能であるといってよいほど，困難である。だいいち，重調和関数が無数に存在することは判っていても，それを表す具体的数式が知られているわけではない。ただ，簡単な形で与えられる重調和関数 $\Phi_i (i = 1, 2\cdots\cdots n)$ がいくつかある。それで，未定係数 a_i を用いて Φ_i の1次結合

$$\Phi = \sum a_i \Phi_i \tag{12}$$

を応力関数として用いる。重調和方程式(11)は同次式で，Φ_i はその解である。したがって，式(12)で与えられる Φ も式(11)の解で，1箇の重調和関数に他ならない。よって，応力関数として使える。

式(12)の Φ から5箇の成分 σ_x, σ_z, τ, u, w を作ると，それはいづれも未定係数 a_i を含む。この5箇の成分が，流体の境界上で境界条件として指定された値をとるように未定係数 a_i の値を定める。それが成功するとは限らないが，成功すれば，そのようにして定めた a_i を用いて構成した式(12)の Φ が応力関数となる。

第3図(a)に示した雪 N_1 のなかの応力および流動速度を求めるにあたって用いた，式(3′)の4箇の関数 Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 が，簡単な重調和関数 Φ_i の例である。座標 (x', z') について表してある。この雪 N_1 のばあいには，4箇の未定係数 a_i の決定に成功し，式(6′)に示した応力成分と流動速度成分とを求めることができた。しかし，これは，境界条件を自然境界条件だけに止め，雪 N_1 の境界の一部である側面 AA′ 上の応力成分および流動速度成分になんの制限も加えなかったことによる。つまり，境界条件が非常に緩やかだったからである。その結果として，側面 AA′ 上の応力成分が，式(7′)のベクトルに定まった。もし，あらかじめ，自然境界条件が課されるとともに，側面 AA′ 上の応力成分が式(7′)とは異るベクトルに指定されていたら，未定係数 a_i の決定は成功しなかったことになる。

Ⅳ. あ と が き

「まえがき」で述べた斜面積雪内の応力の局所性を，具体的に，次の形にまとめた。斜面上任意のところに斜面ぞいの長さが任意の値の雪 M_c を考える。雪 M_c の平均の厚さを h とする。雪 M_c の両どなりにある，それぞれ，斜面ぞい長さが $2.5h$ にひとしい雪を雪 M_c と合せて，雪 M とよぶ。雪 M が，斜面積雪の他の部分から切り離され，単独で斜面に存在するとき，重力によって雪 M のなかに発生する応力を自己応力 P_M となづける。すると，雪 M_c のなかの実際の応力は，近似的に，雪 M_c のなかの自己応力 P_M によって与えられる。

論文Ⅷ[2] で考えた「附加応力」と，本論文の附加応力とは全く別のものである。論文Ⅷの附加応力の例としては，温度変化によって斜面積雪のなかに現れる熱応力があげられる。

この論文は低温科学研究所の藤岡敏夫教授と鈴木義男教授とに検討してもらい，両教授から有益な教示と助言とをうけた。藤岡教授には，さらに，電子計算機による計算，作図の労をとってもらった。ここに記して両教授に対する謝意を表す。

文 献

1) 吉田順五 1980 斜面積雪の挙動の研究 VII. 低温科学, 物理編, **39**, 1-16.
2) 吉田順五 1981 斜面積雪の挙動の研究 VIII, IX. 低温科学, 物理編, **40**, 25-35, 37-49.
3) 吉田順五 1982 斜面積雪の挙動の研究 X. 低温科学, 物理篇, **41**, 25-42.
4) 大泉三津夫, 藤岡敏夫 1982 斜面積雪の挙動の研究 XI. 低温科学, 物理篇, **41**, 43-53.
5) 吉田順五 1983 斜面積雪の挙動の研究 XII, XIII. 低温科学, 物理篇, **42**, 21-38, 39-56.
6) 大泉三津雄, 藤岡敏夫 1983 斜面積雪の挙動の研究 XIV. 低温科学, 物理篇, **42**, 89-100.
7) 吉田順五 1984 斜面積雪の挙動の研究 XV, XVI. 低温科学, 物理篇, **43**, 1-14, 15-31.
8) 吉田順五 1964 斜面積雪の内部応力および粘性流動 II.低温科学, 物理篇, **22**, 101-117.

Summary

1. Figure 1(a) of the text shows the vertical section of a snow cover flowing two-dimensionally down a sloping ground G. The snow cover sticks to ground G so that its bottom surface does not move. Abbreviation 'condition B' will be used for the boundary conditions that components of stress vanish on top surface S_0 of the snow cover while the flowing velocity of snow becomes equal to zero at its bottom surface. Coordinates x and z are respectively placed in the horizontal and vertical directions as shown in the Figure.

2. In Fig. 1(a), planes AA′ and BB′ divide the snow cover into three parts M, N_1 and N_2. Let T_M represent the actual stress in snow M, and let P_M be imaginary stress that would be produced by gravity in snow M if it lay alone on ground G with snows N_1 and N_2 both disappearing. Stress P_M is local in the sense that it is solely determined by the state of the locally limited 'snow M'.

3, In case when snow M is longer along ground G than five times its mean thickness h, let it be divided into the central portion and the two side portions each $2.5h$ long. The central portion shall be colled 'snow M_C'. The present Paper shows that stress T_M can in snow M_C be approximated by stress P_M which is local as mentioned above.

4. Snow M is subject to three kinds of external force : (1)gravity ; (2)vector components f_A and $-f_B$ of stress which are respectively exertetd by snows N_1 and N_2 through planes AA′ and BB′ as shown in Fig. 1(b) ; (3) constraining force of ground G which prevents the bottom surface of snow M from moving. Let 'condition B_1' be abbreviation for the boundary conditions that components f_A and f_B act on planes AA′ and BB′ respectively, while abbreviation 'condition B_2' shall be used for the boundary conditions that no stress acts on these two planes.

5. Differential equations of equilibrium are written as Eqs. (1) of the text in which g and ρ *are acceleration of gravity and density of snow respectively.* Stress T_M *is given by* such a solution of Eqs. (1) that satisfies condition B and condition B_1, while stress P_M is given by a solution of the same differential equations that satisfies condition B and condition B_2.

6. Equations (2) of the text are differential equations of equilibrium good for an imaginary case in which the gravity is supposed to have disappeared. Let 'stress Q_M' be such an imaginary stress given by the solution of Eqs. (2) satisfying condition B and condition B_1. It can be seen that stress T_M equals the sum of stress P_M and stress Q_M, namely

$$\text{stress } T_M = \text{stress } P_M + \text{stress } Q_M. \qquad (A)$$

7. Stress Q_M decays inward from doth the sides of snow M toward its center. This decay will conveniently be studied by the use of snow N_1. Like stress T_M, the actual stress

in snow N_1 can be decomposed, that is , if symbol N_1 is simplified to N, the equation

$$\text{stress } T_N = \text{stress } P_N + \text{stress } Q_N \qquad (A')$$

holds valid for the case of snow N_1.

8. Figure 2(a) of the text shows snow N_1 in the imaginary case of no gravity. Force $-\boldsymbol{F}_A$, resultant of components $-\boldsymbol{f}_A$ of stress giving rise to stress Q_N in snow N_1, acts on its left side surface AA′. Plane XX′ stands an arbitrary distance away from plane AA′. Let the snow lying between planes AA′ and XX′ be called 'snow X'. Vector components $\boldsymbol{f}_X$ of stress on plane XX′ unite themselves into force $\boldsymbol{F}_X$ which acts on snow X as an external force.

9. Figure 2 (b) of the text shows snow N_1 in such an imaginary case in which ground G has disappeared together with the gravity. In this case, as $\boldsymbol{F}_X$ must keep balance with $-\boldsymbol{F}_A$, that is, $\boldsymbol{F}_X$ must equal $\boldsymbol{F}_A$, and as planes XX′ and AA′ are nearly of the same area, $\boldsymbol{f}_X$ does not differ very much from $\boldsymbol{f}_A$ in magnitude. This means that the influence of the stress on side plane AA′ is conveyed without decay inward into snow N_1 as far as it extends.

10. The bottom surface of snow N_1 is moving with velocities v_G in the case of Fig. 2(b). When ground G comes into presence as in the case of Fig. 2(a), the ground exerts forces $-\boldsymbol{f}_G$ to the bottom surface of snow N_1 to stop its motion, snow N_1 becoming stressed with components $\boldsymbol{f}_G$ of stress at its base. Then $\boldsymbol{F}_X$ becomes equal to $\boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_G$, if the resultant of components $-\boldsymbol{f}_G$ is denoted dy $-\boldsymbol{F}_G$. Force $-\boldsymbol{F}_G$ must work so as to weaken force $-\boldsymbol{F}_A$ by opposing, because components $-\boldsymbol{f}_G$ cancel velocities v_G, which components $-\boldsymbol{f}_A$ would have raised if not hindered by the ground.

11. In this way ground G absorbs the influence of components $-\boldsymbol{f}_A$, and this absorption makes $\boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_G$ less than $\boldsymbol{F}_A$ in magnitude. As $\boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_G$ is equal to $\boldsymbol{F}_X$, it follows that components $\boldsymbol{f}_X$ are smaller in magnitude than components $\boldsymbol{f}_A$, namely that stress Q_N decays inward in snow N_1,

12. For the above argument to be used, components of stress on plane AA′ need not be components $\boldsymbol{f}_A$ of the actual stress ; they can be arbitrary. Thus it can generally be said that stress of a snow cover is not conveyed far in it because of absorption of its influence by the ground.

13. The decay of stress will mathematically be considered in snow N_1 which is simplified in form and in nature. This snow N_1 is shown in Fig. 3(a) of the text ; it is a slab of unifrom thickness h composed of snow which is regarded as a viscous fluid of very high viscosity η, of density ρ and of plastic Poisson's ratio ν. Use will be made of coordinates x' and z' as shown in the same Figure.

14. If stress function Φ is formed by combining linearly four biharmonic functions (3′) of the text, and if the combination is so made that components of stress and flowing velocity of snow derived from Φ satisfy condition B fit for snow N_1 of Fig. 3(a), there result Eq. (5) and Eqs. (6′) of the text. Equations (6′) show that components of stress decay in proportion to

$$\exp\ (-\omega h \cdot x'/h) \qquad (B)$$

The greater ωh is in positive value, the faster the stress decays.

15. Value of ωh depends upon that of ν and the relationship between the two is given by Eq. (5) and Fig. 3(c) of the text. Oh'izumi and Huzioka [4, 6] found by measurements that ν of dry compact snow of densities 0.21～0.38g/cm³ lies within the range of 0.10～0.15. It can be seen from Fig. 3(c) that such values of ν give ωh values of 1.05～1.10. Disre-

garding small errors, let ωh be put equal to unity, a number convenient to use. Then Expression (B) has the value of 0.082 for x' equal to $2.5h$.

16. When the components of stress decay so much that their magnitude becomes smaller than one tenth of that which they had on plane AA′, they may practically be neglected. Thus stress is considered to be absent beyond the spot $2.5h$ away from plane AA′. Although this result is obtained for a special stress and for a special form of snow N_1, it is assumed to be applicable generally.

17. Returning to snow M of Article 3, stress Q_M originating from components f_A and $-f_B$ is almost vanishing in snow M_C, because it decays in the side portions of snow M, each of which is $2.5h$ in length. Thus, by Eq. (A), stress T_M turns out to be nearly equal to stress P_M in snow M_C as stated in the last sentence of the same Article.

18. Let T'_M represent an imaginary stress given by such a solution of Eqs. (1) of the text that satisfies condition B on the top and dottom surfaces of snow M, with no other boundary conditions imposed. Symbols f'_A and f'_B will be used for components of stress which stress T'_M produces respectively on side planes AA′ and BB′ of snow M. Then stress T'_M is, like stress T_M was in Article 6, divided into stress P_M and stress Q'_M, stress given by a solution of Eqs. (2) of the text satisfying condition B together with boundary conditions that components of stress are f'_A and f'_B on planes AA′ and BB′ respectively.

19. As stress Q'_M decays in the side portions of snow M, stress T'_M is close to stress P_M in snow M_C. Then stress T'_M approximates stress T_M in snow M_C, because stress T_M is also close to stress P_M in the same snow M_C. But stress T'_M is not uniquely determined because of its loose boundary conditions. There can be many of stress T'_M and the above approximation differs in degree from one stress T'_M to another.