



# HOKKAIDO UNIVERSITY

|                  |   |
|------------------|---|
| Title            | 斜面積雪の挙動の研究 XX I : 平面状斜面につもった波状積雪内の応力  |
| Author(s)        | 吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo; 鈴木, 義男 他  |
| Citation         | 低温科学. 物理篇, 45, 27-36  |
| Issue Date       | 1987-03-10  |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/18534">https://hdl.handle.net/2115/18534</a> |
| Type             | departmental bulletin paper   |
| File Information | 45_p27-36.pdf   |



## 斜面積雪の挙動の研究 XXI\*

—平面状斜面につもった波状積雪内の応力—

吉田 順五

(北海道大学名誉教授)

鈴木 義男

(応用物理学部門)

(昭和61年11月受理)

### I. ま え が き

無限に広い平面状斜面の上の積雪を考える。水平方向には雪質、積雪深とも一様とすると、積雪は斜面の最大傾斜角に沿う鉛直断面（流動面とよぶ）内で流動する。積雪を一様な密度の非圧縮性ニュートン粘性流体と仮定し、その表面は斜面に平行に波うつ正弦波であるとする。この波状積雪内の応力と流動速度との分布を近似的に求めることがこの論文の目的である。

### II. 基礎方程式

#### 1. 流動面での断面

流動面による断面を第1図に示す。図で直線Gは傾斜角 $\alpha$ の斜面、正弦曲線Sは表面を、また破直線 $S_0$ は平均積雪面を表す。

地面G上図示の所に原点O、斜面に平行に $x$ 軸、垂直に $z$ 軸をとる。平均積雪深を $h$ とすると、 $S_0$ 、Sはそれぞれ

$$z = h \quad (1)$$

$$z = h + \delta \sin(\omega x); \quad \omega = 2\pi/\lambda \quad (2)$$

となる。ここで、 $\delta$ は波の振幅、 $\lambda$ は波長である。更に問題を簡単にし、逐次近似法が使えるよう、次の条件をおく：

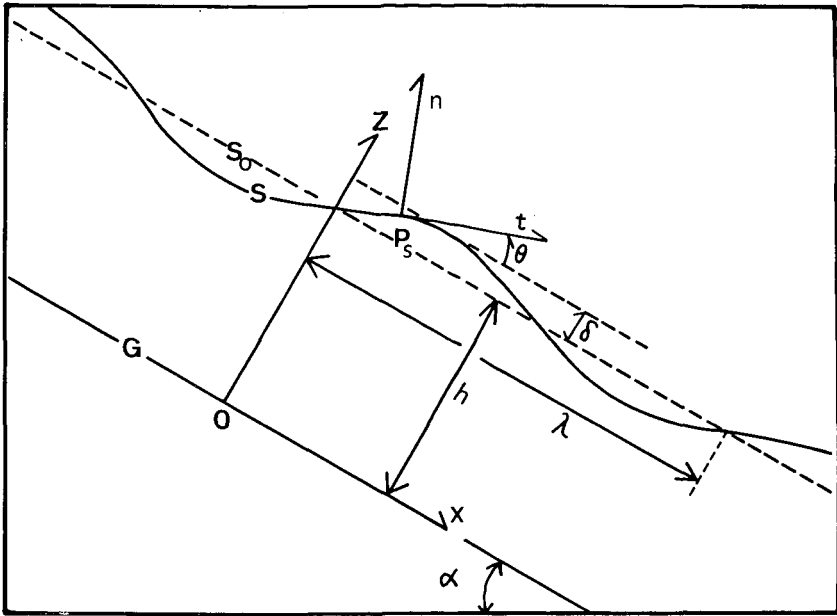
$$\Delta = \omega \cdot \delta \ll 1; \quad \delta/h \ll 1. \quad (3)$$

#### 2. 基礎方程式

積雪の粘性係数が非常に大きいと、流動速度はおそいので慣性力は無視でき、運動方程式は応力の釣合をあたえる微分方程式

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\rho \cdot g \sin \alpha, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \rho \cdot g \cos \alpha \quad (4)$$

\* 北海道大学低温科学研究所業績 第2909号



第1図 波状積雪の最大傾斜角方向の断面

となる。ここで、 $\rho$ は積雪の密度、 $g$ は重力加速度である。

積雪を非圧縮性としたので、ポアソン比は1/2となり、応力と歪速度の関係から、

$$\frac{1}{2} \frac{(\sigma_x - \sigma_z)}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{1}{2} \frac{(\sigma_z - \sigma_x)}{\frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\tau_{zx}}{\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}} \right) = 2\eta \quad (5)$$

を得る。ここで、 $u, v$ は積雪の流動速度の $x$ -成分、 $y$ -成分、 $\eta$ は粘性係数である。

### 3. 境界条件

地面上では積雪は滑らないとすると、流速に対して

$$u = v = 0 \quad (\text{地面}) \quad (6)$$

の境界条件がつく。(積雪が滑る時は、地面で応力にも条件がつくが、その条件は現在まだ定量的に論じうるほど明らかでない。)

積雪表面上の任意の点 $P_s$ を原点とし、法線方向に座標軸 $n$ 、切線方向に座標軸 $t$ を第1図の様にとる。表面は空気に接しているので、

$$\sigma_n = \tau_{tn} = 0 \quad (\text{表面}) \quad (7)$$

表面の各点は勿論流動するが、その流速は、(4), (5), (6), (7)式からきまるのであって、表面での流速に対する境界条件は今の場合にはない。

### 4. 応力成分変換式

座標系 $tn$ の応力成分は、座標系 $xz$ の成分から、次式で求められる：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)_S + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)_S \cos 2\theta + (\tau_{zx})_S \sin 2\theta \\ \sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)_S - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)_S \cos 2\theta - (\tau_{zx})_S \sin 2\theta \\ \tau_{tn} &= \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x)_S \sin 2\theta + (\tau_{zx})_S \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $\theta$  は  $x$ -軸から反時計まわりに測った  $t$ -軸の角度である。便宜上、通常  $\theta$  の三角関数による表示を  $2\theta$  の関数による表示に変えた。記号  $( )_S$  は  $S$  上の点  $P_S$  での値を意味する。同様に以下  $S_0$  上の値は  $( )_h$  でしめす。

表面  $S$  上の点  $(x, h + \delta \sin(\omega x))$  における  $\theta$  は (2) 式を  $x$  で微分した式

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta &= dz/dx = \delta \omega \cos(\omega x) = \mathcal{A} \cdot \gamma \\ (\gamma &= \cos(\omega x); \mathcal{A} = \delta \cdot \omega) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

から  $x$  の関数として求められる。式 (9) から

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\theta &= 2(\mathcal{A} \cdot \gamma) / (1 + (\mathcal{A} \cdot \gamma)^2) = 2(\mathcal{A} \cdot \gamma - (\mathcal{A} \cdot \gamma)^3 + (\mathcal{A} \cdot \gamma)^5 - \dots) \\ \cos 2\theta &= 2(1 - (\mathcal{A} \cdot \gamma)^2) / (1 + (\mathcal{A} \cdot \gamma)^2) = 1 - 2(\mathcal{A} \cdot \gamma)^2 - (\mathcal{A} \cdot \gamma)^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

がえられる。

### III. 単純解 (第 0 近似解) と重畳解

#### 1. 単純解

表面が平らで地面に平行であれば、応力および速度の成分は  $x$  に無関係であるので、(4), (5), (6), (7) は簡単に解ける。表面が  $S_0$  の時の解は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= \sigma_z^0 = -\rho g(h-z) \cos \alpha; \quad \tau_{zx}^0 = \rho g(h-z) \sin \alpha \\ u^0 &= (\rho g \cdot \sin \alpha / \eta) z(h-z/2); \quad v^0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。この場合は  $\theta=0$  だから、 $\sigma_t = (\sigma_x)_S = 0$ ,  $\tau_{tn} = (\tau_{zx})_S = 0$  となり、 $S_0$  上で確かに (7) をみたしている。

この解は、 $0 \leq z \leq h$  で定義されたのだが、 $z > h$  でも、式 (4), (5) を満足することは容易にわかる。 $S$  と  $G$  とに囲まれた閉領域内での (11) で定義された関数を表面が  $S$  の時の単純解とよび、これを、第 0 近似解とする (それで肩符 0 をつけた)。この  $S$  上での応力成分は、 $z$  に  $h + \delta \cdot \sin(\omega x)$  を代入し、

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x^0)_S &= (\sigma_z^0)_S = \rho g \delta \cdot \cos \alpha \cdot \sin(\omega x) \\ (\tau_{zx}^0)_S &= -\rho g \delta \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\omega x) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。(8) により  $tn$  座標系に変換すれば、単純解は  $S$  上で (7) をみたさない事がわかる。

#### 2. 重畳解

真の解と単純解との差を重畳解とよぶ。重畳解は、(4) の同次型の微分方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

と、式(5)および、地面の境界条件(6)をみたさなければならないことは、容易にわかる。

表面 S での境界条件(7)は、

$$\sigma_n^0 + \sigma_n = 0; \quad \tau_{tn}^0 + \tau_{tn} = 0 \quad (14)$$

となる。

### 3. 重畳解の逐次近似

式(13), (5), (6)はすべて1次同次式であるから、そのいくつかの解の線形結合もまた解となる。

いま、 $\sigma_x^i, \sigma_z^i, \tau_{zx}^i, u^i, v^i (i=1, 2, 3, \dots)$  を(13), (5), (6)の解とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(n)} &= \sum_{i=1}^n (D)^{i-1} \sigma_x^i; & \sigma_z^{(n)} &= \sum_{i=1}^n (D)^{i-1} \sigma_z^i; \\ \tau_{zx}^{(n)} &= \sum_{i=1}^n (D)^{i-1} \tau_{zx}^i; \\ u^{(n)} &= \sum_{i=1}^n (D)^{i-1} u^i; & v^{(n)} &= \sum_{i=1}^n (D)^{i-1} v^i. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

もまた(13), (5), (6)の解である。

もし、

$$\lim_{(n) \rightarrow \infty} (\sigma_n^0 + \sigma_n^{(n)}) = 0; \quad \lim_{(n) \rightarrow \infty} (\tau_{tn}^0 + \tau_{tn}^{(n)}) = 0 \quad (16)$$

であり、また  $\sigma^{(n)}$  等がすべて  $n \rightarrow \infty$  で収斂するならば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^S &= \sum_{i=1}^{\infty} (D)^{i-1} \sigma_x^i; & \sigma_z^S &= \sum_{i=1}^{\infty} (D)^{i-1} \sigma_z^i \\ \tau_{zx}^S &= \sum_{i=1}^{\infty} (D)^{i-1} \tau_{zx}^i; & u^S &= \sum_{i=1}^{\infty} (D)^{i-1} u^i; & v^S &= \sum_{i=1}^{\infty} (D)^{i-1} v^i \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

は(13), (5), (6), (14)の解、つまり重畳解となる(それで肩符 S をつけた)。この時、 $\sigma_x^i$  等を第  $i$  近似項、 $\sigma_x^{(n)}$  等を重畳解の第  $n$  近似解と呼ぶことにしよう。後者に単純解を加えたものが、(4), (5), (6), (7)の第  $n$  近似解である。

式(3)により  $D \ll 1$  であるから、 $\sigma_x^i$  等が  $i$  によらずすべて同じ程度の量ならば、 $\sigma_x^S$  等は収斂する。次章では、(17)の右辺の収斂を仮定して、第1、および第2近似項を求める。

### 4. 波長 $\lambda/n$ の周期解

いま考えている波状積雪では、すべての事情は  $x$  については、波長  $\lambda$  で変化する。したがって、重畳解も各近似項も  $x$  については波長  $\lambda/n$  の三角関数の和で与えられよう。

方程式(13), (5)の解の応力成分は弾性論で良く知られているように、弾性関数とよばれる重調和関数  $\Phi$  から、

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}; \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{zx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \quad (18)$$

で得られる。速度成分を求めるには、この応力成分を用い(5)式から  $u, v$  の偏微分方程式を作

りこれを積分すればよい。波長  $\lambda/n$  の三角関数を因子とする  $\Phi$  には 4 個の独立なものがある。波長  $\lambda$  で、速度成分が境界条件 (6) をみたす様に選んだ 4 個の  $\Phi$  とそれによる応力成分と速度成分を第 1 表にしめた。(波長  $\lambda/n$  の解は  $\omega$  を  $n \cdot \omega$  にすればよい。)

第 1 表 (13), (5), (6) の波長  $\lambda$  の周期解 (応力について無次元化してある)。

$$\xi = \omega x, \quad \zeta = \omega z, \quad \sigma = \sin \xi, \quad \gamma = \cos \xi, \quad \Sigma = \sinh \zeta, \quad \Gamma = \cosh \zeta, \quad \kappa = 1/(2\omega\gamma)$$

|             | $\Phi_1 = (\zeta\Sigma - \Gamma)\sigma/\omega^2$ | $\Phi_2 = (\zeta\Sigma - \Gamma)\gamma/\omega^2$ | $\Phi_3 = \zeta\Gamma\sigma/\omega^2$ | $\Phi_4 = \zeta\Gamma\gamma/\omega^2$ |
|-------------|--|--|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $\sigma_x$  | $(\zeta\Sigma + \Gamma)\sigma$                   | $(\zeta\Sigma + \Gamma)\gamma$                   | $(2\Sigma + \zeta\Gamma)\sigma$       | $(2\Sigma + \zeta\Gamma)\gamma$       |
| $\sigma_z$  | $-(\zeta\Sigma - \Gamma)\sigma$                  | $-(\zeta\Sigma - \Gamma)\gamma$                  | $-\zeta\Gamma\sigma$                  | $-\zeta\Gamma\gamma$                  |
| $\tau_{zx}$ | $-\zeta\Gamma\gamma$                             | $\zeta\Gamma\sigma$                              | $-(\zeta\Sigma + \Gamma)\gamma$       | $(\zeta\Sigma + \Gamma)\sigma$        |
| $v$         | $-\kappa\zeta\Sigma\gamma$                       | $\kappa\zeta\Sigma\sigma$                        | $-\kappa(\Sigma + \zeta\Gamma)\gamma$ | $\kappa(\Sigma + \zeta\Gamma)\sigma$  |
| $v$         | $\kappa(\Sigma - \zeta\Gamma)\sigma$             | $\kappa(\Sigma - \zeta\Gamma)\gamma$             | $-\kappa\zeta\Sigma\sigma$            | $-\kappa\zeta\Sigma\gamma$            |

#### IV. 近似項の導出

##### 1. 第 1 近似項

式 (8) を, (10) を使って書き直すと

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= (\sigma_z)_S - 2(\tau_{zx})_S \Delta \cdot \gamma + O(\Delta^2) \\ \tau_{tn} &= (\tau_{zx})_S + (\sigma_z - \sigma_x) \Delta \cdot \gamma + O(\Delta^2). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

応力成分  $\sigma_t$  は不用なので省略する。この論文では  $\Delta$  について 1 次までの近似しか考えないから,  $\Delta$  の 2 次以上の項は一括して  $O(\Delta^2)$  と記した。これは  $\Delta^2$  程度以下の量をしめす記号である。

いま,

$$R_\sigma^{(n)} = \sigma_n^0 + \sigma_n^{(n)}; \quad R_\tau^{(n)} = \tau_{tn}^0 + \tau_{tn}^{(n)} \quad (20)$$

とおく。

変換式 (19) により,

$$\left. \begin{aligned} R_\sigma^{(1)} &= (\sigma_z^0 + \sigma_z^1)_S - 2(\tau_{zx}^0 + \tau_{zx}^1)_S \Delta \cdot \gamma + O(\Delta^2) \\ R_\tau^{(1)} &= (\tau_{zx}^0 + \tau_{zx}^1)_S + (\sigma_z^1 - \sigma_x^1)_S \Delta \cdot \gamma + O(\Delta^2). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここで,  $(\sigma_z^0)_S = (\sigma_x^0)_S$  を使った。

第 1 近似解が境界条件 (14) を  $\Delta$  程度の誤差で満たすには, (21) の右辺第 1 項が  $\Delta$  程度以下であればよい。すなわち,

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_z^0)_S + (\sigma_z^1)_S &= A \cdot \Delta + O(\Delta^2) \\ (\tau_{zx}^0)_S + (\tau_{zx}^1)_S &= B \cdot \Delta + O(\Delta^2). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式 (12) より, 左辺第 1 項は,  $\sin(\omega x)$  の常数倍である。そこで, 第 1 近似項は, 第 1 表の 4 組の解の 1 次結合で作れるであろう:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x^1 &= \rho g \delta [(\zeta \Sigma + \Gamma)(a_1 \sigma + a_2 \gamma) + (2\Sigma + \zeta \Gamma)(a_3 \sigma + a_4 \gamma)] \\
 \sigma_z^1 &= \rho g \delta [-(\zeta \Sigma - \Gamma)(a_1 \sigma + a_2 \gamma) - \zeta \Gamma(a_3 \sigma + a_4 \gamma)] \\
 \tau_{zx}^1 &= \rho g \delta [-\zeta \Gamma(a_1 \gamma - a_2 \sigma) - (\zeta \Sigma + \Gamma)(a_3 \gamma - a_4 \sigma)] \\
 u^1 &= \rho g \delta \kappa [-\zeta \Sigma(a_1 \gamma - a_2 \sigma) - (\Sigma + \zeta \Gamma)(a_3 \gamma - a_4 \sigma)] \\
 v^1 &= \rho g \delta \kappa [(\Sigma - \zeta \Gamma)(a_1 \sigma + a_2 \gamma) - \zeta \Sigma(a_3 \sigma + a_4 \gamma)].
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここで,  $a_j$  は未定常数である.

さてテーラー展開により,

$$\left. \begin{aligned}
 (\sigma_z^1)_S &= (\sigma_z^1)_h + \left( \frac{\partial \sigma_z^1}{\partial z} \right)_h \delta \cdot \sin(\omega x) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \sigma_z^1}{\partial z^2} \right) \delta^2 \sin^2 \omega x + \dots \\
 &= (\sigma_z^1)_h + \left( \frac{\partial \sigma_z^1}{\partial \zeta} \right)_h D \cdot \sigma + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \sigma_z^1}{\partial \zeta^2} \right) \cdot D^2 \cdot \sigma^2 + \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

等とかける. 関数  $\sinh \zeta$ ,  $\cosh \zeta$  の  $\zeta$  による微分係数はそれぞれ,  $\cosh \zeta$ ,  $\sinh \zeta$  となるので, 展開の係数はすべて同じ程度の量となる. それで, 右辺第3項以下は  $D^2$  程度の量であろう.

従って, (22) をみたくには,

$$(\sigma_z^0)_S + (\sigma_z^1)_h = 0; \quad (\tau_{zx}^0)_S + (\tau_{zx}^1)_h = 0 \quad (25)$$

であれば良い. 式(22)の  $A$ ,  $B$  は

$$A \equiv \left( \frac{\partial \sigma_z^1}{\partial \zeta} \right)_h \sigma; \quad B \equiv \left( \frac{\partial \tau_{zx}^1}{\partial \zeta} \right)_h \sigma \quad (26)$$

となる. 式(12), (23) を使い, (25) を具体的に書き, 整理すると,

$$\left. \begin{aligned}
 [\cos \alpha - a_1(\zeta_0 S - C) - a_3 \zeta_0 C] \sigma &= [a_2(\zeta_0 S - C) + a_4 \zeta_0 C] \gamma; \\
 [-\sin \alpha + a_2 \zeta_0 C + a_4(\zeta_0 S + C)] \sigma &= [a_1 \zeta_0 C + a_3(\zeta_0 S + C)] \gamma.
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

記号  $\zeta_0$ ,  $S$ ,  $C$  は  $\omega h$ ,  $\sinh(\omega h)$ ,  $\cosh(\omega h)$  である.

式(27)は, すべての  $x$  についてなりたたねばならないから, 4個の大括弧内の式はそれぞれ零である. かくして, 4個の未知数  $a_j$  に対し4個の式がえられ, これをといて,

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= -\cos \alpha \cdot (\zeta_0 S + C) / M, & a_2 &= \sin \alpha \cdot \zeta_0 C / M \\
 a_3 &= \cos \alpha \cdot \zeta_0 C / M, & a_4 &= -\sin \alpha \cdot (\zeta_0 S - C) / M \\
 (M &\equiv \zeta_0^2 + C^2)
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

と  $a_j$  がきまり, 第1近似項(23)が確定する.

## 2. 第2近似項

式(20), (21), (22) から,

$$\left. \begin{aligned}
 R_\sigma^{(2)} &= [(\sigma_z^2)_S + A] D + O(D^2) \\
 R_\tau^{(2)} &= [(\tau_{zx}^2)_S + B + \{(\sigma_z^1)_h - (\sigma_x^1)_h\} \gamma] D + O(D^2).
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここで,

$$(\sigma_x^1)_S = (\sigma_x^1)_h + O(D) \quad (30)$$

を用いた。

第2近似解が境界条件(14)を、 $\mathcal{A}^2$ 程度の誤差でみたすためには、(29)の $\mathcal{A}$ の1次項の係数が、 $\mathcal{A}$ 程度の誤差で零となればよい：

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_z^2)_S + A &= O(\mathcal{A}) \\ (\tau_{zx}^2)_S + B + \{(\sigma_z^1)_h - (\sigma_x^1)_h\} \dot{\gamma} &= O(\mathcal{A}) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式(23), (26)により、

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \rho g \delta \cdot \sin \alpha \cdot \sin (\omega x) \\ B + \left\{ (\sigma_z^1)_h - (\sigma_x^1)_h \right\} \dot{\gamma} &= \\ &= \frac{\rho g \delta}{M} \left[ 2(\zeta_0 + CS) \sin \alpha \cdot \cos (2\omega x) - \frac{(C^2 - 3\zeta_0^2)}{2} (\cos \alpha \cdot \sin (2\omega x)) \right] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となり、いずれも  $\sin (2\omega x)$ ,  $\cos (2\omega x)$  の線形結合であるから、(31)をみたす第2近似項は、第1表で  $\omega$  を  $2\omega$  に置き換えた解の線形結合であろう。そこで、未定常数  $b_j$  を用い、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 &= \rho \cdot g \cdot \delta [(\zeta' \Sigma' + \Gamma') (b_1 \sigma' + b_2 \dot{\gamma}') + (2\Sigma' + \zeta' \Gamma') (b_3 \sigma' + b_4 \dot{\gamma}')] \\ \sigma_z^2 &= -\rho \cdot g \cdot \delta [(\zeta' \Sigma' - \Gamma') (b_1 \sigma' + b_2 \dot{\gamma}') + \zeta' \Gamma' (b_3 \sigma' + b_4 \dot{\gamma}')] \\ \tau_{zx}^2 &= -\rho \cdot g \cdot \delta [\zeta' \Gamma' (b_1 \dot{\gamma}' - b_2 \sigma') + (\zeta' \Sigma' + \Gamma') (b_3 \dot{\gamma}' - b_4 \sigma')] \\ u^2 &= -\rho \cdot g \cdot \delta \cdot \kappa [\zeta' \Sigma' (b_1 \dot{\gamma}' - b_2 \sigma') + (\Sigma' + \zeta' \Gamma') (b_3 \dot{\gamma}' - b_4 \sigma')] \\ v^2 &= \rho \cdot g \cdot \delta \cdot \kappa [(\Sigma' - \zeta' \Gamma') (b_1 \sigma' + b_2 \dot{\gamma}') - \kappa \zeta' \Sigma' (b_3 \sigma' + b_4 \dot{\gamma}')] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

と置く、ここで、 $\omega$  を  $2\omega$  に置き換えたことを示すため、関数に肩符 ['] をつけた。

第1近似項を求めた時と同様に、第2近似項のSでの値を  $S_0$  の値でおきかえた(31)の左辺を零とおき、(32), (33)を用い整理して、

$$\left. \begin{aligned} \left[ b_1 (\zeta_0' S' - C') + b_3 \zeta_0' C' + \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot \delta \sin \alpha \right] \sigma' &= - \left[ b_2 (\zeta_0' S' - C') + b_4 \zeta_0' C' \right] \dot{\gamma}' \\ \left[ b_2 \zeta_0' C' + b_4 (\zeta_0' S' + C') + \frac{1}{2M} (C^2 - 3\zeta_0^2) \cdot \cos \alpha \right] \sigma' \\ &= \left[ b_1 \zeta_0' C' + b_3 (\zeta_0' S' + C') + \frac{2}{M} (\zeta_0 + CS) \cdot \sin \alpha \right] \dot{\gamma}' \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ここで、 $\zeta_0'$ ,  $S'$ ,  $C'$  は  $2\omega h$ ,  $\sinh (2\omega h)$ ,  $\cosh (2\omega h)$  である。式(34)から、 $b^j$  についての4個の方程式が得られ、これを解いて、

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \sin \alpha \cdot [M(\zeta_0' S' + C') - 4(\zeta_0 + CS) (\zeta_0' C')]/(2MM') \\ b_2 &= -\cos \alpha \cdot (C^2 - 3\zeta_0^2) (\zeta_0' C')/(2MM') \\ b_3 &= -\sin \alpha \cdot [M(\zeta_0' C') - 4(\zeta_0 + CS) (\zeta_0' S' - C')]/(2MM') \\ b_4 &= -\cos \alpha \cdot (C^2 - 3\zeta_0^2) \cdot (\zeta_0' S' - C')/(2MM') \\ M &\equiv \zeta_0^2 + C^2, \quad M' \equiv (\zeta_0')^2 + (C')^2 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

と常数  $b_j$  がきまる。

## V. ま と め

平らな斜面に積った、表面が正弦波状に起伏する様な非圧縮性ニュートン粘性流体（表題に積雪という言葉を用いたが、非圧縮性だから、むしろ、氷河と考えるべきか）内の応力と流速の分布を、波の振幅  $\delta$  が波長  $\lambda$  に比べ極めて小さい場合について、逐次近似的に求めることを試みた。

第  $n$  近似解は、方程式 (4), (5) と境界条件 (6) は満足する。しかし、境界条件 (7) は、 $d(=2\pi\delta/\lambda)$  の  $n$  乗程度の誤差でしか満たさない。

近似を進めることに原理的な困難は無いが、第  $n$  近似項には第  $(n-1)$  近似解が複雑に関係するので、本論文では、 $n$  についての一般的表式を得ることは出来ず、第 2 近似解までを求めるに留まった。

筆者の一人は、文献 1) で、正弦波状に起伏する斜面上で、積雪表面も正弦波状で、流動状態が定常の場合、および、表面が平らで、流動状態が経過の場合について、この論文と同じく、積雪を非圧縮性ニュートン粘性流体として、近似解を求めたが、これらは、第 1 近似解であった。

第 IV 章第 1 節から判る様に、第 1 近似解を求める時は、変換式 (19) の右辺第 2 項以下を省略したが、これは、 $\theta$  を零とみなすことに相当する。さらに、 $S$  での値を  $S_0$  での値に置きかえた。ここで、波の振幅が平均積雪深に比べ小さいという、(3) の第 2 条件の他、式 (24) の後に述べた事情もつかっている。後者は、近似項が、方程式 (4) でなく、同次方程式 (13) を満たすことに関連している。実際、単純解では  $S$  での値と  $S_0$  での値の差は  $\delta$  の程度で、 $d$  の程度ではない。表面  $S$  での値を平均表面  $S_0$  での値に置き換えることは、どの近似項を求める時にも使う。それ故、これらが同次方程式 (13) を満たすことは、この近似法で本質的なことである。

第 0 近似の  $\sigma_x^0$  が、第 1 近似項を求めるのに不用なのは、変換式 (19) からの帰結であるが、第 2 近似項をもとめるにも不用なのは、 $\sigma_x^0 = \sigma_x^0$  のためこれは非圧縮性に起因する。

有限要素法による数値解と、本論文で得た解による数値解の比較は興味ある問題であるが、将来にゆずる。

## 文 献

- 1) 吉田順五 1964 斜面積雪の内部応力および粘性流動 I. 低温科学, 物理篇, **22**, 83-100.

## Summary

Approximate expressions of the components of stress and flow velocity were obtained of a snow cover lying on a plane slope and having a wavy surface undulating parallel to the slope. The snow is assumed to be uniform horizontally both in nature and in shape. Then, it will flow two-dimensionally in a vertical section parallel to the line of maximal inclination. Figure 1 of the text shows the section where the straight line G represents the slope and the curve S the snow surface.

In the  $x-z$  coordinate system shown in Fig. 1, the curve S is expressed by

$$z = h + \delta \sin(\omega x) = h + \delta \sin(2\pi x/\lambda) \quad [2]$$

where  $h$  is the mean thickness of the snow cover,  $\delta$  the amplitude and  $\lambda$  the wavelength. The undulation is assumed so weak that

$$\Delta = \omega \cdot \delta \ll 1, \quad \delta/h \ll 1. \quad [3]$$

The snow is assumed to be a homogeneous incompressible Newtonian viscous fluid of density  $\rho$  and of viscous coefficient  $\eta$ . The inertia force being neglected, three components of stress  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  and  $\tau_{zx}$ , and two components of flow velocity  $u$  and  $v$  will satisfy the simultaneous equations

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{zx}/\partial x = -\rho g \sin \alpha, \quad \partial\sigma_z/\partial z + \partial\tau_{zx}/\partial x = \rho g \cos \alpha \quad [4]$$

and

$$\frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)}{\partial u/\partial x} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x)}{\partial v/\partial z} = \frac{\tau_{zx}}{\frac{1}{2}(\partial u/\partial z - \partial v/\partial x)} = 2\eta. \quad [5]$$

The snow cover is assumed not to glide on the ground, imposing the boundary conditions

$$u = v = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad [6]$$

while the boundary conditions on the snow surface are

$$\sigma_t = \tau_{tn} = 0 \quad [7]$$

where  $\sigma_t$  and  $\tau_{tn}$  are the components of stress in the  $t-n$  coordinate system. They are related to the components in the  $x-z$  system by [8] or [19]:

$$\sigma_n = (\sigma_z)_S - 2(\tau_{zx})_S \Delta \cdot \cos(\omega x) + O(\Delta^2), \quad \tau_{tn} = (\tau_{zx})_S + (\sigma_z - \sigma_x) \cdot \Delta \cdot \cos(\omega x) + O(\Delta^2). \quad [19]$$

Let

$$\sigma_x^0 = \sigma_z^0 = -\rho g(h-z) \cdot \cos \alpha, \quad \tau_{zx}^0 = \rho g(h-z) \sin \alpha, \quad u = (\rho g \cdot \sin \alpha / \eta) \cdot z(h - (z/2)), \quad v^0 = 0. \quad [11]$$

They satisfy the equations [4], [5] and [6] but not [7]. Let the difference of the solution of the equations [4], [5], [6] and [7] and the functions defined by [11] be called the superimposed solution. They must satisfy [5], [6] and

$$\partial\sigma_z/\partial x + \partial\tau_{zx}/\partial z = 0, \quad \partial\sigma_z/\partial z + \partial\tau_{zx}/\partial x = 0 \quad [13]$$

and

$$\sigma_n^0 + \sigma_n = 0, \quad \tau_{tn}^0 + \tau_{tn} = 0 \quad [14]$$

instead of [4] and [7].

Let  $\sigma_x^i$ , etc. satisfy the equations [13], [5] and [6]. Then, the functions defined by

$$\sigma_x^{(n)} = \sum_{i=1}^n (\Delta)^{i-1} \sigma_x^i, \quad \text{etc.} \quad [15]$$

also satisfy the equations [13], [5] and [6]. They will approximate the superimposed solution, if

$$\lim_{(n) \rightarrow \infty} R_\sigma^{(n)} = \lim_{(n) \rightarrow \infty} (\sigma_n^0 + \sigma_n^{(n)}) = 0, \quad \lim_{(n) \rightarrow \infty} R_\tau^{(n)} = \lim_{(n) \rightarrow \infty} (\tau_{tn}^0 + \tau_{tn}^{(n)}) = 0. \quad [16]$$

The approximate solution of the original equations [4], [5], [6] and [7] will be then obtained as the sum of [15] and [11].

Now, there are four linearly independent solutions of the equations [13], [5] and [6] having a factor  $\sin(\omega x)$  or  $\cos(\omega x)$  as shown in Table 1, where  $\zeta$ ,  $\Sigma$ ,  $\Gamma$ ,  $\sigma$  and  $\gamma$  mean respectively  $\omega z$ ,  $\sinh(\omega z)$ ,  $\cosh(\omega z)$ ,  $\sin(\omega x)$  and  $\cos(\omega x)$ .

The first approximation terms  $\sigma_x^1$ , etc. are now expressed by their linear combination as

$$\sigma_x^1 = a_1(\zeta\Sigma + \Gamma)\sigma + a_2(\zeta\Sigma + \Gamma)\gamma + a_3(2\Sigma + \zeta\Gamma)\sigma + a_4(2\Sigma + \zeta\Sigma)\gamma, \quad \text{etc.} \quad [23]$$

From the conditions that both  $R_\sigma^{(1)}$  and  $R_\gamma^{(1)}$  become of the order of  $A$ , the coefficients are determined as

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\cos\alpha(\zeta_0 S + C)/M, & a_2 &= \sin\alpha \cdot \zeta_0 C/M \\ a_3 &= \cos\alpha \cdot \zeta_0 C/M, & a_4 &= -\sin\alpha(\zeta_0 S - C)/M; \end{aligned} \right\} \quad M \equiv \zeta_0^2 + C^2 \quad [28]$$

where  $\zeta_0$ ,  $S$  and  $C$  mean respectively  $\omega h$ ,  $\sinh(\omega h)$  and  $\cosh(\omega h)$ .

The second approximation terms  $\sigma_x^{(2)}$ , etc. are then found to be expressed by the linear combination of the functions in Table 1 with  $\omega$  replaced by  $2\omega$  as

$$\sigma_x^2 = b_1(\zeta'\Sigma' + \Gamma')\sigma' + b_2(\zeta'\Sigma' + \Gamma')\gamma' + b_3(2\Sigma' + \zeta'\Gamma')\sigma' + b_4(2\Sigma' + \zeta'\Gamma')\gamma', \quad \text{etc.} \quad [33]$$

where [ $'$ ] means the replacement of  $\omega$  by  $2\omega$ . The conditions that both  $R_\sigma^{(2)}$  and  $R_\gamma^{(2)}$  become of the order of  $A^2$  determine the coefficients as

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \sin\alpha [M(\zeta'_0 S' + C') - 4(\zeta_0 + CS)(\zeta'_0 C')]/(2MM'), \\ b_2 &= -\cos\alpha(C^2 - 3\zeta_0^2)(\zeta'_0 C')/(2MM'), \\ b_3 &= -\sin\alpha [M(\zeta'_0 C') - 4(\zeta_0 + CS)(\zeta'_0 S' - C')]/(2MM'), \\ b_4 &= \cos\alpha(C^2 - 3\zeta_0^2)(\zeta'_0 S' - C')/(2MM'); \\ M' &\equiv (\zeta'_0)^2 + (C')^2. \end{aligned} \right\} \quad [35]$$

Further approximations will be obtained similarly. However, as the coefficients in the  $n$ -th approximation depend on all the previous approximations, it is too complicate to obtain the explicit expressions of the coefficients even in the third approximation.