



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	斜面積雪の挙動の研 ⅩⅩⅡ : 曲線郡CHの実用的積雪表面到達点の遍在
Author(s)	吉田, 順五; YOSIDA, Zyungo; 藤岡, 敏夫 他
Citation	低温科学. 物理篇, 46, 37-52
Issue Date	1988-03-10
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/18546">https://hdl.handle.net/2115/18546</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	46_p37-52.pdf



## 斜面積雪の挙動の研究 XXII\*

—曲線群  $C_H$  の実用的積雪表面到達点の遍在—

吉田 順五・藤岡 敏夫

(北海道大学名誉教授)

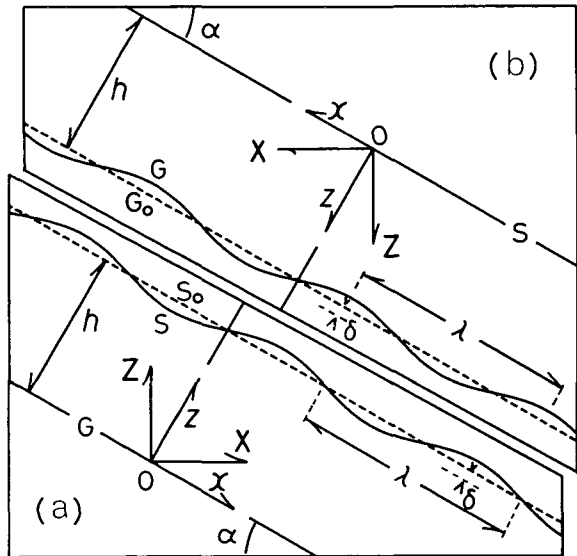
(昭和62年10月受理)

### I. ま え が き

第1図にある図(a)と図(b)とは、この論文で考える、無限に広い斜面につもった仮想積雪2種類の鉛直断面図である。紙面で表わされるこの鉛直断面は、斜面の最大傾斜方向に立ち、積雪はその性質も状態も紙面に直角な方向には変えないとする。したがって、積雪は紙面内を2次元的に流動する。それで紙面を「流動面」とよぶ。

積雪の表面および底面を、それぞれ、SおよびGの印をつけた直線あるいは正弦曲線で表わした。積雪底面は地面でもある。地面Gが平坦で表面Sが正弦波状にうねる第1図(a)の積雪を「平坦斜面上波状積雪」とよび、「積雪A」と略称する。地面Gが正弦波状で表面Sが平坦な第1図(b)の積雪を「波状斜面上平坦積雪」とよび、「積雪B」と略称する。破直線  $S_0$  と破直線  $G_0$  とは、それぞれ、正弦曲線Sと正弦曲線Gとの中心線である。

積雪を粘性係数  $\eta$  の非常に大きい均一な非圧縮性ニュートン粘性流体として、鈴木と筆者のひとりである吉田とは、前論文XXIで<sup>4)</sup>、近似計算によって、積雪A内の応力と流動速度との成分を理論的に求めた。応力平衡微分方程式および応力歪速度関係微分方程式の近似解として上記の成分を定め



第1図 この論文で考える波状斜面積雪の鉛直断面の一部。(a) 積雪A: 平坦斜面上波状積雪。(b) 積雪B: 波状斜面上平坦積雪。S: 積雪表面。G: 地面。波状の曲線は、破直線  $S_0$ ,  $G_0$  を中心線とする正弦曲線

\* 北海道大学低温科学研究所業績 第3093号

たわけである。おなじ手法で積雪 B 内の成分も計算できる。この論文の第 II 章でその計算結果を示す。

吉田は、論文 IX<sup>1)</sup> で、曲線群 C<sub>II</sub> および曲線群 C<sub>V</sub> と名づける 2 種類の曲線群を、積雪内応力を図を用いて研究する方法を案出する目的で導入した。いずれも、流動面内にある平面曲線群である。第 III 章で、前論文でえた積雪 A 内の応力成分および第 II 章に示す積雪 B 内の応力成分を用いて描かれる両曲線群を図示する。その図から、単独の曲線 C<sub>V</sub> および曲線群 C<sub>II</sub> が、波状表面あるいは波状地面の 1 波長  $\lambda$  内にある 2 点で、積雪表面 S に到達することが知られる。このことは、第 IV 章で説明するように、全部が積雪表面に到達しなければならない曲線群 C<sub>II</sub> を描きやすくする、都合のよい条件として使われる。

## II. 波状斜面上平坦積雪内の応力および流動速度の成分

### 1. 近似計算のために設けた条件ならびに境界条件

前章の「まえがき」でのべたように、積雪を均一な非圧縮性ニュートン粘性流体とみなして、積雪 B 内の応力成分および流動速度成分を表わす近似式を理論的に計算した。その近似式を第 4 節に示す。計算の手順は、積雪 A 内の成分を求めるために前論文 XXI で用いたのと同じだから、説明を省く。

以下第 3 節までに述べる事柄は、前論文で扱った積雪 A のばあいにもあてはまる。

近似計算のために設けた条件は

$$d_0 = \delta/h \ll 1 \quad (1)$$

$$J = \delta\omega = 2\pi\delta/\lambda \ll 1 \quad (2)$$

のふたつである。第 1 図に示したように、 $h$  は積雪の平均の厚さ、 $\delta$  と  $\lambda$  とは、それぞれ、正弦波状積雪表面あるいは正弦波状地面の振幅と波長とである。

座標  $(x, z)$  と座標  $(X, Z)$  とを第 1 図に示したようにとる。座標  $(X, Z)$  は水平鉛直座標で、次の第 III 章で用いる。

積雪は地面で滑らないとした。すなわち、流動速度の  $x, z$  成分を  $u, v$  とするとき、地面 G 上では

$$u = v = 0 \quad (\text{地面 G 上}) \quad (3)$$

であるとの条件をおいた。これを第 1 境界条件とよぶ。第 2 境界条件は、積雪表面 S 上での条件である。それは、強い風が吹いていないとして

$$\text{積雪表面 S 上の応力成分} = 0 \quad (4)$$

と定めた。

### 2. 略記号

応力成分および流動速度成分の表式を簡単にするため、次の略記号を使う。まず

$$\omega = 2\pi/\lambda \quad (5)$$

とにおいて

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \omega x, \zeta = \omega z, \sigma = \sin \xi, \gamma = \cos \xi, \\ \Sigma &= \sinh \zeta, \Gamma = \cosh \zeta, \kappa = 1/(2\omega\eta) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

とする。さらに

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= \omega h, S = \sinh \zeta_0, C = \cosh \zeta_0, \\ M &= \zeta_0^2 + C^2, J = 1 - \{4\zeta_0(\zeta_0 + CS)/M\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とおく。また

$$\omega' = 2\omega \quad (8)$$

として、式(6)および式(7)の $\omega$ を $\omega'$ におきかえた記号にはダッシュをつける。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \omega' x, \zeta' = \omega' z, \sigma' = \sin \xi', \gamma' = \cos \xi', \\ \Sigma' &= \sinh \zeta', \Gamma' = \cosh \zeta', \kappa' = 1/(2\omega'\eta) = \kappa/2, \\ \zeta'_0 &= \omega' h, S' = \sinh \zeta'_0, C' = \cosh \zeta'_0, M' = (\zeta'_0)^2 + (C')^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

である。

### 3. 各成分の表わしかた

応力成分 $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ および流動速度成分 $u, v$ のそれぞれを、第0近似項、第1近似項、第2近似項の和として表わす。成分記号に肩符0, 1, 2をつけて、各近似項を示す。

たとえば、 $\sigma_x$ と $u$ とは

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1 + \Delta \cdot \sigma_x^2, \quad u = u^0 + u^1 + \Delta \cdot u^2 \quad (10)$$

の形に書く。第2近似項だけは成分記号と $\Delta$ との積とする。

均一粘性流体とみなした積雪の密度を $\rho$ 、重力加速度を $g$ とする。次の第4節で示すように、各応力成分の第0近似項は

$$W = \rho gh \quad (11)$$

の程度の大きさであり、第1第2近似項の大きさの程度は、それぞれ

$$\Delta_0 \cdot W, \quad \Delta \cdot \Delta_0 \cdot W \quad (12)$$

である。すなわち、式(1)式(2)の条件によって、第1第2近似項は第0近似項に対して、それぞれ1次、2次の微小量である。そして式(10)の形に表わされる応力成分は3次微小量 $\Delta^2 \cdot \Delta_0 \cdot W$ を誤差として含む。流動速度成分についても同様なことがいえる。

なお、応力の垂直成分の記号 $\sigma_x$ と $\sigma_z$ とは、通常の用法にしたがって、張力のときは正として、圧力のときは負として使う。

### 4. 積雪B内の応力および流動速度の成分

積雪B内の、すなわち波状斜面上平坦積雪内の応力ならびに流動速度の成分を、各近似項にわけて、以下に示す。用いる座標は、第1図(b)の $(x, z)$ である。地面の平均傾斜角、すなわち同図の破直線 $G_0$ と水平方向との間の角を $\alpha$ とする。積雪表面Sおよび地面Gは、それ

それぞれ

$$z = 0, \quad z = h + \delta \cdot \sigma \quad (13)$$

によって表わされされる。

(i) **第0近似項**。地面が、波状でなく平坦で、第1図(b)の破直線  $G_0$  で与えられるとしたばあいの各成分が第0近似項で、次のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= \sigma_z^0 = -W(\zeta/\zeta_0) \cos \alpha, \quad \tau_{zx}^0 = W(\zeta/\zeta_0) \sin \alpha, \\ u^0 &= \kappa W \zeta_0 [(\zeta/\zeta_0)^2 - 1] \sin \alpha, \quad v^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(ii) **第1近似項**。肩符1をつけた記号で表わされる第1近似項は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^1 &= A_0 \cdot W [a_2(\Sigma + \zeta I) + a_4(2I + \zeta \Sigma)] \gamma, \\ \sigma_z^1 &= A_0 \cdot W [a_2(\Sigma - \zeta I) - a_4(\zeta \Sigma)] \gamma, \\ \tau_{zx}^1 &= A_0 \cdot W [a_2(\zeta \Sigma) + a_4(\Sigma + \zeta I)] \sigma, \\ u^1 &= \kappa A_0 \cdot W [a_2(\zeta I) + a_4(I + \zeta \Sigma)] \sigma, \\ v^1 &= \kappa A_0 \cdot W [a_2(I - \zeta \Sigma) - a_4(\zeta I)] \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= -2(\zeta_0^2 C/M) \sin \alpha, \\ a_4 &= -2[\zeta_0(C - \zeta_0 S)/M] \sin \alpha, \\ a_1 &= a_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

前論文 XXI でのべたように、第0近似項以外の近似項を求めるには、まず、適当な関数と未定係数との積を4箇加えあわせた線形結合式を作る。そして、境界条件を用いて未定係数の値を定める。今のばあい  $a_j (j=1, 2, 3, 4)$  がその未定係数で、値を定めたら、たまたま、 $a_1$  と  $a_3$  とが0になった。式(16)の最後の式はそのことの表示である。積雪 A のばあいには、前論文 XXI にみられるように、4箇の未定係数は、いずれも、0でない。

(iii) **第2近似項**。第2近似項は、次式(17)のそれぞれに  $A$  を乗じて得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 &= A_0 \cdot W [b_1(\Sigma' + \zeta' I') + b_3(2I' + \zeta' \Sigma')] \sigma', \\ \sigma_z^2 &= A_0 \cdot W [b_1(\Sigma' - \zeta' I') - b_3(\zeta' \Sigma')] \sigma', \\ \tau_{zx}^2 &= -A_0 \cdot W [b_1(\zeta' \Sigma') + b_3(\Sigma' + \zeta' I')] \gamma', \\ u^2 &= \kappa' \cdot A_0 \cdot W [b_0 - \{b_1(\zeta' I') + b_3(I' + \zeta' \Sigma')\} \gamma'], \\ v^2 &= \kappa' \cdot A_0 \cdot W [b_1(I' - \zeta' \Sigma') - b_3(\zeta' I')] \sigma' \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= -J \sin \alpha, \quad b_2 = b_4 = 0, \\ b_1 &= -\zeta'_0 [(1+J)C' + \zeta'_0 S'] \sin \alpha / M', \\ b_3 &= -[J(C' - \zeta'_0 S') - (\zeta'_0)^2 C'] \sin \alpha / M'. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

## 5. 積雪 A 内の応力および流動速度の成分

平坦斜面上波状積雪である積雪 A 内の応力成分と流動速度成分とは、第1図(a)に示した座標  $(x, z)$  を用いて、前論文 XXI で定めた。成分の表わしかたは、上の積雪 B のばあいと同じである。前論文にある式を、その番号を角括弧 [ ] で囲んで示すと、積雪 A の表面 S は式 [2] で、地面 G は  $z=0$  で表わされる。式 [11] が第0近似項である。第1近似項は式 [23] と式 [28]

とにより、第2近似項は式 [33] に  $d$  を乗じたものと式 [35] とによって与えられる。使われている略記号は、上の第2節に示したものと同じである。なお、本論文では、前論文で定義した第2近似項に  $d$  を乗じたものを、便宜上、第2近似項と呼んだ。(式 [33] にある  $u^2, v^2$  の式のなかの  $\kappa$  を  $\kappa'$  に訂正する。)

### III. 曲線群 $C_H$ および曲線群 $C_V$

#### 1. 曲線群 $C_H$ および曲線群 $C_V$ の定義の要点

この第1節と次の第2節とでのべることがらは、第1図 (a) および (b) に示した座標系のどちらを使っても通用する。

積雪内の任意の点  $P$  における微小水平面上の応力成分ベクトルを  $f_H$ 、流動面に直角な微小鉛直面上の応力成分ベクトルを  $f_V$  とする。曲線  $C_H$  および曲線  $C_V$  は、それらの上のすべての点で、切線が、それぞれ、 $f_H$  および  $f_V$  と方向を共にする曲線である。それで、数学的には、曲線  $C_H$  が、水平鉛直座標系  $(X, Z)$  における微分方程式

$$dZ/dX = \sigma_Z/\tau_{ZX} = \tan \varphi \tag{19}$$

の積分曲線として、また、曲線  $C_V$  が

$$dZ/dX = \tau_{ZX}/\sigma_X = \tan \psi \tag{20}$$

の積分曲線として与えられる。両微分方程式とも第1階だから、解は1箇の副変数をふくむ。副変数の値を変化することにより、両曲線の群が作られる。角  $\varphi$  および角  $\psi$  は、それぞれ、水平座標  $X$  の正の方向から  $f_H$  および  $f_V$  の方向まで反時計まわりに測った角である。

流動面内の或る曲線を含み流動面に直角に立つ筒面上の応力を、簡単に、その曲線上の応力と呼ぶことにしよう。すると、曲線  $C_H$  上の応力成分ベクトルは、すべての点で方向が水平であり、曲線  $C_V$  上の応力成分ベクトルは、すべての点で、方向が鉛直であると言える。この物理的性質のため、曲線  $C_H$  は閉曲線を作りえない。

逆に、その上の応力成分ベクトルが、全長にわたって、水平な曲線が曲線  $C_H$  であり、鉛直な曲線が曲線  $C_V$  であるともいえる。積雪表面上の応力成分ベクトルは大きさが0である。したがって、その方向を水平と見てもよいし、鉛直と見てもよい。かくして、積雪表面曲線  $S$  は、同時に、曲線  $C_H$  でもあり曲線  $C_V$  でもあることになる。

#### 2. 座標系 $(x, z)$ における曲線群 $C_H$ および曲線群 $C_V$ の微分方程式

積雪  $A, B$  内の応力の考察には、座標系  $(X, Z)$  より座標系  $(x, z)$  を使う方が都合がよい。それで、次のようにして、式 (19) と式 (20) とを、座標系  $(x, z)$  での微分方程式に変更する。

座標  $x$  の正の方向から  $f_H$  および  $f_V$  の方向までの角は、第1図から知られるように、それぞれ、 $\varphi + \alpha$  および  $\psi + \alpha$  にひとしい。角  $\alpha$  は斜面の平均傾斜角である。よって、曲線  $C_H$  と曲線  $C_V$  との座標系  $(x, z)$  における微分方程式は、それぞれ

$$dz/dx = \tan(\varphi + \alpha) = (\tan \varphi + \tan \alpha)/(1 - \tan \alpha \tan \varphi) \tag{21}$$

$$dz/dx = \tan(\psi + \alpha) = (\tan \psi + \tan \alpha)/(1 - \tan \alpha \tan \psi) \tag{22}$$

と書かれる。一方、よく知られた変換式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_X &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau_{zx} \sin 2\alpha \\ \sigma_Z &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_z \cos^2 \alpha - \tau_{zx} \sin 2\alpha \\ \tau_{ZX} &= (\sigma_z - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{zx} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

によって、 $\tan \varphi = \sigma_z / \tau_{zx}$  および  $\tan \psi = \tau_{zx} / \sigma_x$  が、座標系  $(x, z)$  での応力成分によって表わされる。それを式(21)の  $\tan \varphi$  および式(22)の  $\tan \psi$  に使えば所期の微分方程式となる。

前論文 XXI とこの論文の第 II 章とでえた応力成分を式(23)に用いれば、積雪 A および積雪 B 内の  $C_H$ ,  $C_V$  兩曲線群の微分方程式がえられる。しかし、それを、解析的に積分することは非常にむづかしい。それで、電子計算器を使って、微分方程式から直接に兩曲線群を作図した。

### 3. 積雪 B 内の曲線群 $C_H$ と曲線群 $C_V$

第 2 図の図 (a) と図 (b) とに、それぞれ、積雪 B 内の曲線群  $C_H$  と曲線群  $C_V$  とを示す。地面 G の平均傾斜角  $\alpha$  を  $30^\circ$  とし、 $d_0 = \delta/h$  と  $d = \omega\delta$  とを図の右上隅に示した値にとったばあいの図である。櫛の形の図 (c) は、水平鉛直座標系  $(X, Z)$  での剪断応力成分  $\tau_{zx}$  の図で、櫛の歯にあたる水平線分の長さがその大きさを表わす。線分が  $z$  方向に立つ直線の右側にあるときは  $\tau_{zx}$  が正、左側にあるときは負とする。

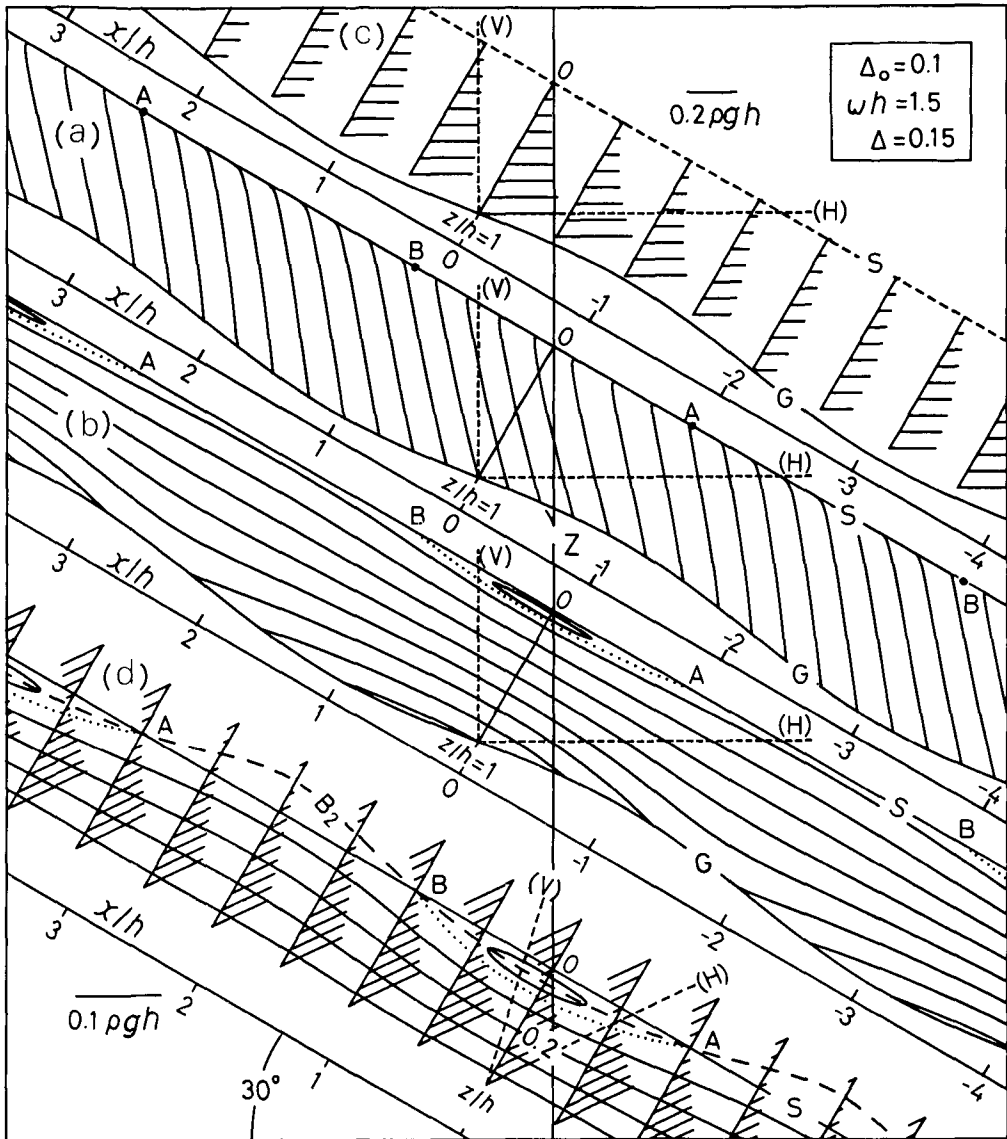
図 (d) は、図 (b) の雪面近くの一部を  $z$  軸方向に 2.5 倍に拡大し、さらに、 $\tau_{zx}$  の図と、 $\tau_{zx} = 0$  の点をつらねる破線  $B_2$  を書き加えたものである。図 (d) については、次の第 4 節でのべる。

任意の点 P で図 (a) と図 (b) との曲線に切線を引けば、切線と水平方向との間の角  $\varphi$  と角  $\psi$  とが知られる。図 (c) からは点 P での  $\tau_{zx}$  の値が定められる。すると、式(19)と式(20)とを使って  $\sigma_x$  と  $\sigma_z$  とがきめられる。かくして (a), (b), (c) の 3 図は、積雪 B 内のすべての点での応力を与えることになる。

積雪表面 S 上波長  $\lambda$  ごとにある 2 点 A, B は、曲線  $C_H$  と曲線  $C_V$  とが表面 S に到達する点である。ただ、曲線  $C_H$  については、そのことが第 2 図 (a) によく現われていない。それで、第 3 図を作った。

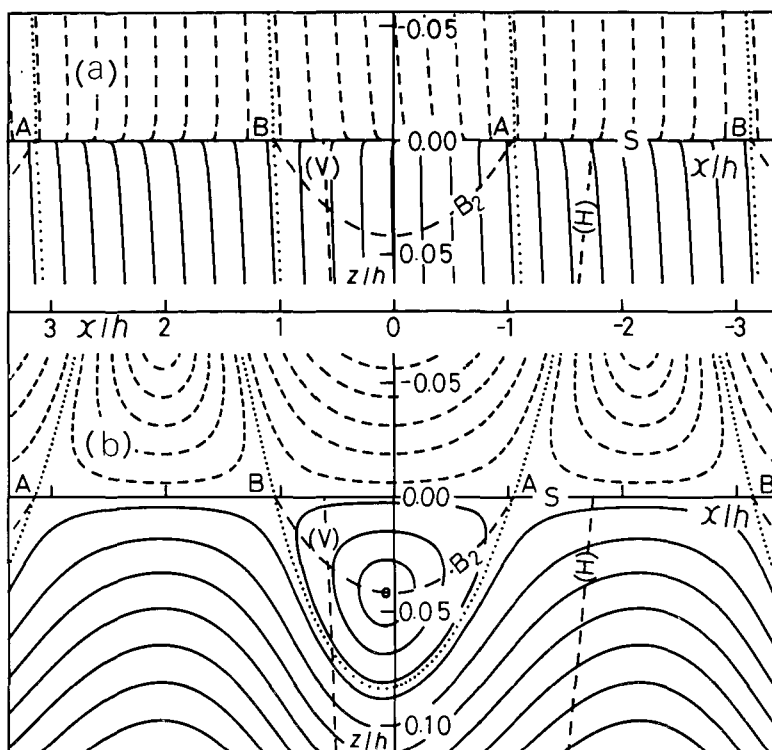
第 3 図 (a), (b) は第 2 図 (a), (b) それぞれの表面 S 附近を、座標  $z$  の方向に 20 倍伸長した図である。この伸張のため、水平方向と鉛直方向とが破直線 (H) と (V) との方向になる。便宜のため、表面 S より上の領域を「埒外」、下の領域を「埒内」とよぶ。前章でえた応力成分を表わす数式は、埒外でも応力成分を定める。それによって描いた曲線群  $C_H$ ,  $C_V$  が、第 3 図 (a), (b) にある破線の曲線群である。

第 3 図 (a) で、積雪表面 S 上にある点 A および点 B を通る点直線も曲線  $C_H$  である。点 B を通る点直線の右側にある曲線群  $C_H$  は、埒外のものも埒内のものも、表面 S に近づくと右方へ弯曲して、そのあと直ぐに表面 S に到達するように、図の上では見える。しかし、実際は、弯曲したあとと表面 S とすれすれに伸びて、右隣の点 A に至って、やっと表面 S に到達する。点 B を通る点直線の左側にある曲線群  $C_H$  も、同じようにして、左隣の点 A に到達する。かくして、埒内の曲線群  $C_H$  は、点 A で埒外の曲線群  $C_H$  につながる。点 A に右あるいは左から



第2図 積雪B内の(a)曲線群 $C_{II}$ , (b)曲線群 $C_V$ , (c)水平鉛直座標系 $(X, Z)$ における剪断応力成分 $\tau_{zx}$ 。図(a)図(b)にある点A点Bは、応力が消滅し曲線 $C_{II}$ および曲線 $C_V$ が表面Sに到達する点。図(c)の右向きに出る水平線分は正の $\tau_{zx}$ を、左向きに出る水平線分は負の $\tau_{zx}$ を表わす。図(d)は図(b)の部分拡大。曲線 $B_2$ は $\tau_{zx}=0$ の点をつらねる水平鉛直主応力線。破直線(H)破直線(V)は、それぞれ、水平方向鉛直方向を示す

到達する埒内の各曲線 $C_H$ に対して、左あるいは右から到達して、それと平滑につながる埒外の曲線 $C_H$ が存在するからである。一方、表面Sも曲線 $C_H$ である。それ故、埒内埒外を合せ考えると、点Aは、表面Sである1本の曲線 $C_H$ と無数の曲線 $C_H$ との交叉点となる。点Bもまた、曲線 $C_H$ の交叉点である。ただ、この場合に交叉するのは、点直線で表わした曲線 $C_H$ と表面Sとの2本にとどまる。



第3図 第2図の一部を $x$ 方向に引伸ばした図。破線の曲線群は埒外の曲線群 $C_H$ および曲線群 $C_V$ 。応力が消滅する点A点Bを通る点線も、埒内埒外にわたる平滑な曲線 $C_H$ あるいは曲線 $C_V$ である

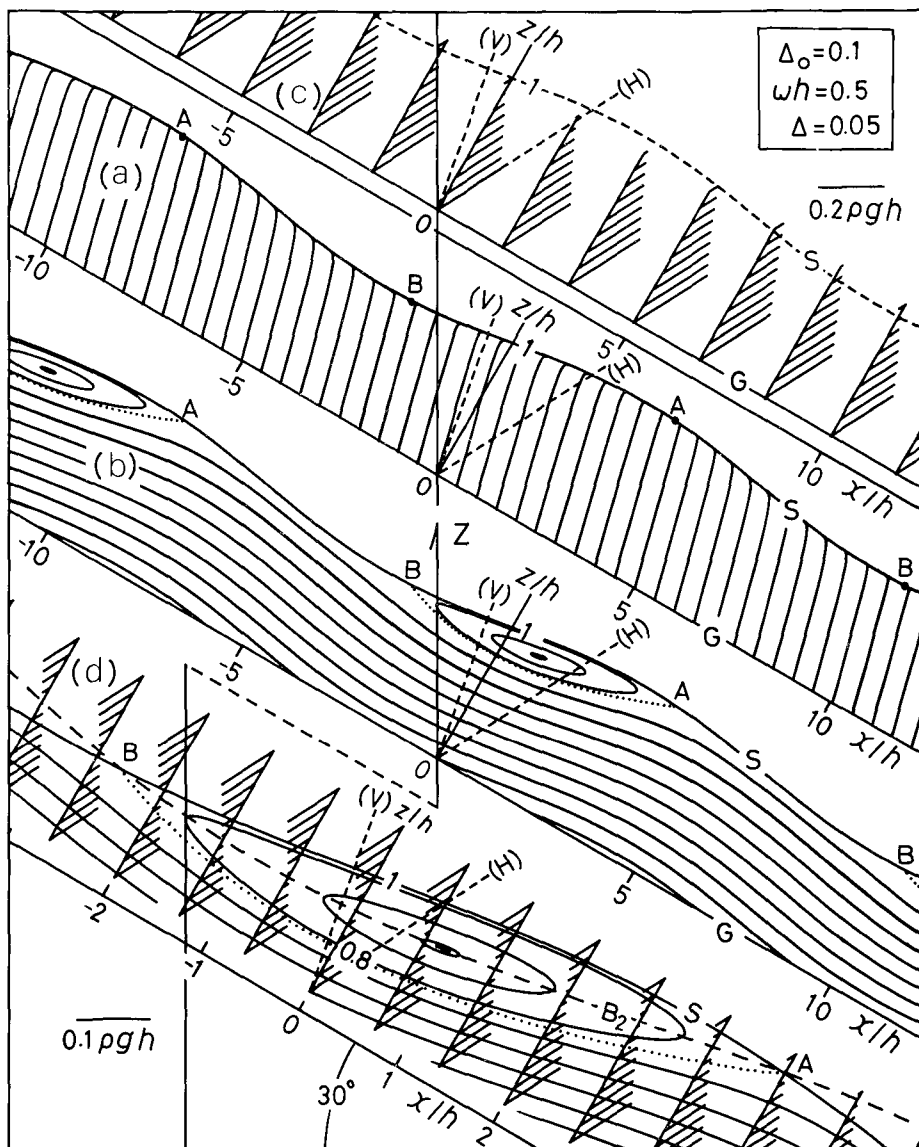
第3図(b)の点A, Bを通る点曲線も曲線 $C_V$ であって、曲線 $C_V$ が閉曲線群をつくる領域を囲んでいる。かくして、点Aおよび点Bは、曲線 $C_H$ の交叉点であると同時に曲線 $C_V$ の交叉点でもあることになる。

実在しない埒外の曲線を消し去れば、上記の交叉点AおよびBは、さきに述べたように、曲線 $C_H$ および曲線 $C_V$ の積雪表面到達点となる。到達点はこのように、本来、交叉点なのであって、理論的には、交叉点と見る方が考察に便利である。

#### 4. 積雪A内の曲線群 $C_H$ および曲線群 $C_V$

第4図(a), (b), (c)が、前論文XXIでえた応力成分を用いて描いた、積雪A内の曲線群 $C_H$ 、曲線群 $C_V$ 、剪断応力 $\tau_{zx}$ の図である。いずれも、座標 $x$ の方向に $3/10$ だけ縮少してある。第2図のばあいと同様、破直線(H), (V)が水平、鉛直方向を示す。波状積雪表面S上の点Aおよび点Bが曲線 $C_H$ および曲線 $C_V$ の交叉点であることも、第2図の積雪Bのばあいと同じである。

図(d)に、図(b)で曲線 $C_V$ が閉曲線群を形成する領域の附近を拡大した。破曲線 $B_2$ は、 $\tau_{zx}$ が0にひとしい点を連ねた曲線である。したがって、曲線 $B_2$ のうえでは、主応力の方向が水平および鉛直である。それ故、応力成分ベクトル $f_H$ および $f_V$ も、それぞれ、方向が鉛直および水平で、曲線 $C_H$ 、 $C_V$ の切線は、それぞれ破直線(V), (H)に平行する。この種の曲線を、



第4図 座標  $x$  の方向に縮めて示した積雪 A 内の (a) 曲線群  $C_H$ , (b) 曲線群  $C_V$ , (c)  $\tau_{zx}$  の分布, (d) 図は (b) の部分拡大。第2図でと同様に、点 A 点 B は応力が消滅し曲線  $C_H$  および曲線  $C_V$  が表面 S に到達する点

論文 XIII<sup>2)</sup> の第 III 章第 2 節で、水平鉛直主応力線  $B_2$  と名づけた。第 2 図、第 3 図にある曲線  $B_2$  も水平鉛直主応力線である。

#### IV. 曲線 $C_H$ の積雪表面到達点

##### 1. 合併応力場内の積雪表面 S

しばらく、積雪 A および積雪 B から離れて、流動面内を流動する一般の積雪を考える。

論文 XV<sup>3)</sup> で示したように、曲線  $C_H$  は地面  $G$  上の 1 点と積雪表面  $S$  上の 1 点とを結ぶ曲線である。それで、地面  $G$  から出発するとみなせば、曲線  $C_H$  は表面  $S$  に到達しなければならない。この第 IV 章は、その到達点の考察である。曲線  $C_V$  には表面  $S$  に到達しなければならないとの制約はない。それ故、曲線  $C_V$  にとって、到達点が曲線  $C_H$  にとってのほどには重要でなくなる。

一般の積雪についても、積雪  $A$  および積雪  $B$  のばあいと同様に、表面  $S$  をこえた埒外に、埒内の応力場と連続する応力場を、原理的に考えることができる。埒外埒内の応力場を合せて「合併応力場」と名づける。論文 XVI<sup>3)</sup> の第 II 章第 1 節で、流動面内にあるふたつの主応力のうちの一方が完全に消滅した応力を完全単独主応力と名づけ、略称 PSP を用いることにした。合併応力場内の或る点  $P$  の応力が PSP であるとしよう。すると、点  $P$  を中心とする流動面に直角な微小面上の応力成分ベクトルは、微小面の方向の如何にかかわらず、PSP と方向を同じくすることが容易に証明される。

積雪表面  $S$  上には応力成分が存在しない。よって、表面  $S$  上の応力は表面  $S$  の切線と方向を共にする PSP である。したがって、表面  $S$  上では、 $f_H$  も  $f_V$  も方向が表面  $S$  の切線と一致する。これも、表面  $S$  が曲線  $C_H$  であると同時に曲線  $C_V$  でもあることを示す事柄である。かくして、表面  $S$  は、その全長にわたって、応力が切線と方向を同じくする PSP であることを特異性とする、合併応力場内の曲線  $C_H$  あるいは曲線  $C_V$  であると言ってよいことになる。

## 2. 積雪表面 $S$ と曲線 $C_H$ , $C_V$ との交叉条件

前の章の第 3 節でのべたように、それ自身が曲線  $C_H$  である表面  $S$  と他の曲線  $C_H$  との合併応力場内での交叉点が、曲線  $C_H$  の表面到達点となる。表面  $S$  上の PSP の値を  $I$  で表わそう。この  $I$  が 0 に等しい表面  $S$  上の点には応力が全く存在しない。それ故  $f_H$  も大きさが消滅する。大きさが無いベクトルには任意の方向を付与できる。それ故、 $I=0$  の点では  $f_H$  がふたつ以上の異なる方向を持つことができ、表面  $S$  のほかに、その点を通過する曲線  $C_H$  が存在しうる。すなわち、 $I=0$  の点は、表面  $S$  と他の曲線  $C_H$  との交叉点になりうる。

他方、 $I$  が 0 でない表面  $S$  上の点では、 $f_H$  の方向が PSP の方向ひとつに限られるから、交叉は起りえない。ただし、表面  $S$  の切線が水平な点は例外である。このような点では  $f_H$  が大きさを失い、 $I$  が 0 でなくても、 $I=0$  の点でと同様、 $f_H$  が任意の方向を持ちうるからである。

なおじ考えかたにより、表面  $S$  と曲線  $C_V$  との交叉点となりうるのは、 $I=0$  の点と表面  $S$  の切線が鉛直な点とであることがわかる。つまり、 $I=0$  の点は表面  $S$  と曲線  $C_H$  および曲線  $C_V$  との共通交叉点となりうる。これに対し、切線が水平な点は曲線  $C_V$  との交叉点になりえず、鉛直な点は曲線  $C_H$  との交叉点にはなりえない。

## 3. 積雪 $A$ に施す連続変化 $K$

表面  $S$  上の点が決る他の曲線  $C_H$  との交叉点となりうるための条件は、前節に示したように厳しい。したがって、交叉点は稀にしか現われ得ないであろう。このように表面到達点が乏しいことは、その全部が表面に到達しなければならない曲線群  $C_H$  を描くにあたっての障害となる。しかし、この障害は以下のようにして避けられる。

現実には、積雪表面も地面も不規則に細かく波打っている。この論文のものも含めて、積

雪表面 S あるいは地面 G と一般にいうとき、それは、細かい現実の波を平均して作られる平滑な実用曲線を指す。それで、実用曲線を積雪の境界とみて定められる積雪内応力は、特に境界附近において、誤差を含まざるをえない。

細かく波うつ現実の積雪表面および地面を、それぞれ、表面 S' および地面 G' と略称し、表面 S' 上の PSP の値を  $I$  で表わす。ひとつの例として、第 4 図および第 1 図 (a) にある積雪 A の表面 S を、波形が規則的ではあるが、表面 S' とみなし、第 1 図 (a) の直線  $S_0$  を実用表面 S と考える。表面 S (第 1 図 (a) の  $S_0$ ) 上の  $I$  は 0 だから、その上のすべての点が到達点でありうる。しかし、表面 S 自体が架空のものだから、この到達点は現実のものではない。これに反し、表面 S' (第 4 図では S) 上には、波長  $\lambda$  ごとに、曲線  $C_H$  との交叉点である現実の到達点が、2 箇所ずつ、点 A および点 B として存在する。

いま、第 4 図に示された積雪 A の状態を出発点として表面 S' の形、積雪の性質、および地面の形とそこでの境界条件とを連続的に変えたとしよう。ただし、表面 S' は、波形を乱しつつも、主要波長は  $\lambda$  にひとしく保ったまま形を変えたとする。この連続変化を「変化 K」とよぶ。

変化 K は連続だから、それに伴って合併応力場が連続的に変化し、曲線群  $C_H$  は連続的変形をうける。実用表面 S も変形し、そのうえの  $I$  の値は 0 から外れる。しかし、表面 S' と曲線群  $C_H$  との交叉現象は消滅しない。前章第 3 節でのべたように、埒内の曲線  $C_H$  と埒外の曲線  $C_H$  とは 1 本の曲線につながっているからである。かくして、交叉点 A と B とは、変化 K が施されても、位置はずれるであろうが、存続する。

第 4 図 (b) にある点 A と点 B とを両端とする点線は曲線  $C_V$  で、第 3 図 (b) の同種類の点線と同様に、埒外に伸びている。したがって、点 A および点 B は、表面 S' と埒内埒外にわたる曲線  $C_V$  との交叉点でもある。このことによっても、点 A および点 B の、変化 K に伴う存続が示される。

#### 4. 変化 K が作る曲線 $C_H$ の実用表面到達点

変化 K の出発点として用いた積雪 A の状態は、 $d_0$  および  $d$  の値が変われば、点 A および点 B を存在させたまま、いろいろに変わる。また、変化 K も、さまざまな道を辿りうる。したがって、変化 K の結果として生ずる状態は多様で、積雪が実際にありうる状態を広く覆うであろう。

細かく不規則に波うつ現実表面 S' の平均振幅を  $d'$ 、主要波長を  $\lambda'$  としよう。すると上のべたことにより、表面 S' の長さ  $\lambda'$  ごとに 2 箇所ずつの曲線群  $C_H$  との交叉点、すなわち曲線  $C_H$  の現実表面到達点があることになる。表面 S' と表面 S との距離は短い。それで、表面 S' 上の現実到達点に近い表面 S 上の点を、曲線群  $C_H$  を描くときの到達点とする。このように定められた表面 S 上の点を「実用到達点」と名づける。

表面 S は表面 S' の細かい波だけを平均した中心曲線だから、 $\lambda'$  は積雪の厚さ  $h$  にくらべれば非常に短い。それ故、表面 S 上長さ  $\lambda'$  ごとに 2 箇所ずつある実用到達点は、存在が頻繁であると言わなければならない。

第 2 図の積雪 B のばあいにも、積雪表面に点在して、曲線  $C_H$  の到達点が現われた。それ

故、現実地面  $G'$  の不規則波形も、到達点の数を増加させることはあっても減少させることはない。

上に定めた実用到達点は、表面  $S'$  上の現実到達点に裏づけられている。つまり、現実性の高い到達点である。

### 5. 変化 $K$ の打切り

状態を規定する条件が連続的に変われば、それにつれて状態も連続的に変わるのが普通である。しかし、条件の連続的変化が或る大きさに達すると、状態に不連続変化のおこる例が、カストロフィー現象とよばれて、数多く知られている。(例えば文献 5, 6 参照) それで、安全のため、変化  $K$  は、実用表面  $S$  上の  $I$  の絶対値が大きくなならないうちに、打切ることとする。すなわち、前項で定めた実用到達点は、実用表面  $S$  のうち  $I$  の絶対値が小さい部分にだけ用いる。そして、 $I$  の絶対値が大きい部分の実用到達点は、次にのべる別の考えかたによって定める。

実用表面  $S$  上の  $I$  と現実表面  $S'$  上の  $I'$  とは値が近い。したがって、 $I$  の絶対値が大きいばあいには、表面  $S'$  が他の曲線  $C_H$  と交叉する  $I'=0$  の点が現われる可能性は殆どない。変化  $K$  を押し進めると、点  $A$  と点  $B$  とが突然消失するという類のカストロフィーが起るのであろう。それで、 $I'=0$  の点の存在による裏づけを期待せずに、積雪境界を表面  $S$  としたばあいの実用応力を用いて実用到達点を定めることとする。

### 6. 実用到達点の遍圧

流動面内のふたつの主応力のうち、絶対値において一方が他方にくらべて著しく小さいばあい、それを単独主応力とよび記号  $SP$  で表わす。また、絶対値が大きい方の主応力の方向をもって、 $SP$  の方向とする。完全単独主応力  $PSP$  は単独主応力  $SP$  の完全形である。

表面  $S$  上の  $PSP$  の値  $I$  が絶対値において大きいと、表面  $S$  を上面とする薄い表面層内の応力は  $SP$  で、その方向は表面  $S$  上の  $PSP$  の方向とほぼ一致する。このため、地面から発した曲線  $C_H$  が表面層にはいると、僅かづつ表面  $S$  に近づきながらも表面  $S$  にそって伸び、 $I=0$  の点か表面  $S$  の切線が水平な点かに出会うまでは、表面  $S$  に到達しない。一方、この表面層は極めてうすく、その厚さは積雪の厚さにくらべれば無にひとしい。それで、曲線  $C_H$  が表面層に達する点を、曲線群  $C_H$  を描くときの実用表面到達点とする。曲線  $C_H$  が表面に近づいたら、その平滑な延長が表面  $S$  と交叉する点を実用到達点とするわけである。

以上は、表面  $S$  のうち  $I$  の絶対値の大きい部分では、すべての点の実用到達点であり得ると考えるのに等しい。また、 $I$  の絶対値の小さい部分では、先に知ったように、実用到達点が稠密に存在する。したがって、曲線  $C_H$  は表面  $S$  上の如何なる点に到達させてもよく、到達点は表面  $S$  上に遍圧することになる。かくして、第 3 項の始めにのべた障害は除去された。

論文 XII<sup>2)</sup> にある楔形積雪の第 1 第 2 図では、また論文 XIII<sup>2)</sup> にある円形積雪の第 2 第 3 図では、曲線群  $C_H$  を上記の仕方で表面  $S$  (論文 XII, XIII の図では  $S_0$ ) に到達させている。

## V. あとがき

積雪  $A$  の表面  $S$  上の  $I$  は絶対値が小さい。それにも拘らず、第 4 図 (a) で見ると、曲

線  $C_H$  は、 $I$  の絶対値が大きい場合と同じく、先ず表面  $S$  に近づく。そのあと、それに沿って伸び、 $I=0$  の点  $A$  で表面  $S$  に到達する。積雪  $B$  のばあいも、 $I$  の絶対値は小さいが、第 III 章第 4 節で説明したように、曲線  $C_H$  の表面到達様式は、上の積雪  $A$  のばあいと変わらない。このふたつの例をもとにして、 $I$  の絶対値が小さい一般の場合にも、到達様式が同じであることを示せるかも知れない。もし示せば、極めて僅かの例外はあるとしても、実用到達点のすべてが、 $I=0$  の点の裏づけなしに定められることになる。曲線  $C_H$  は積雪表面に到達するように描かなければならないのだから、そうなるもおかしうはない。他方、必ずしも積雪表面に到達しなくてもよい曲線  $C_V$  にとっては、第 2~4 図に見られるように、 $I=0$  の点の存在が表面到達のために不可欠である。

第 II 章に示した積雪  $B$  内の応力成分、流動速度成分の第 1, 第 2 近似項を求めるには、次の表の重畳要素成分を使った。各重畳要素成分は、最上段にある応力関数  $\phi_j (j=1, 2, 3, 4)$  から導かれる。この表が、前論文 XXI の第 1 表にあたる。

第 1 表

	$\Phi_1=(\zeta\Gamma-\Sigma)\sigma/\omega^2$	$\Phi_2=(\zeta\Gamma-\Sigma)\dot{\gamma}/\omega^2$	$\Phi_3=\zeta\Sigma\sigma/\omega^2$	$\Phi_4=\zeta\Sigma\dot{\gamma}/\omega^2$
$\sigma_x$	$(\Sigma+\zeta\Gamma)\sigma$	$(\Sigma+\zeta\Gamma)\dot{\gamma}$	$(2\Gamma+\zeta\Sigma)\sigma$	$(2\Gamma+\zeta\Sigma)\dot{\gamma}$
$\sigma_z$	$(\Sigma-\zeta\Gamma)\sigma$	$(\Sigma-\zeta\Gamma)\dot{\gamma}$	$-\zeta\Sigma\sigma$	$-\zeta\Sigma\dot{\gamma}$
$\tau_{zx}$	$-\zeta\Sigma\dot{\gamma}$	$\zeta\Sigma\sigma$	$-(\Sigma+\zeta\Gamma)\dot{\gamma}$	$(\Sigma+\zeta\Gamma)\sigma$
$u$	$-\kappa\zeta\Gamma\dot{\gamma}$	$\kappa\zeta\Gamma\sigma$	$-\kappa(\Gamma+\zeta\Sigma)\dot{\gamma}$	$\kappa(\Gamma+\zeta\Sigma)\sigma$
$v$	$\kappa(\Gamma-\zeta\Sigma)\sigma$	$\kappa(\Gamma-\zeta\Sigma)\dot{\gamma}$	$-\kappa\zeta\Gamma\sigma$	$-\kappa\zeta\Gamma\dot{\gamma}$

文 献

- 1) 吉田順五 1981 斜面積雪の挙動の研究 IX. 低温科学, 物理篇, **40**, 37-49.
- 2) 吉田順五 1983 斜面積雪の挙動の研究 XII, XIII. 低温科学, 物理篇, **42**, 21-38, 39-56.
- 3) 吉田順五 1984 斜面積雪の挙動の研究 XV, XVI. 低温科学, 物理篇, **43**, 1-14, 15-31.
- 4) 吉田順五, 鈴木義男 1986 斜面積雪の挙動の研究 XXI. 低温科学, 物理篇, **45**, 27-36.
- 5) 野口 広 1977 カタストロフィー (サイエンスライブラリー, 理工学の数学=13) pp. 139, サイエンス社.
- 6) 本間竜雄 1973 新しいトポロジー (ブルーバックス B-214) pp. 446, 講談社.

Summary

1. Figures (a) and (b) in Fig. 1 of the text show vertical sections of the snow covers which are both infinitely wide and infinitely long. Lines marked S and G are respectively the surfaces of the snow covers and those of the sloping grounds upon which the snow covers lie. The snow covers flow very slowly down the sloping grounds two-dimensionally in the planes of the vertical sections. Let the snow cover of Fig. 1(a) be called 'snow cover A', whereas that of Fig. 1(b) be called 'snow cover B'. Each of the two snow covers is described by the use of its own set of coordinate systems  $(x, z)$  and  $(X, Z)$  as seen in Fig. 1. Axes of  $X$  and  $Z$  are respectively horizontal and vertical.

2. The snow covers are assumed to be homogeneous incompressible Newtonian viscous fluid

which sticks to grounds G without gliding upon them. In the previous Paper XXI<sup>9</sup>, Yosida and Suzuki determined the components of stress and flow velocity in snow cover A by solving approximately differential equations [4] and [5] shown in the English summary of the same Paper. For that approximation, it was assumed that

$$\Delta_0 = \delta/h \ll 1 \quad \text{and} \quad \Delta = 2\pi\delta/\lambda = \omega\delta \ll 1. \quad [1]$$

3. The similar approximate calculations were made for the components in snow cover B and the results are shown in chapter II of the present Paper XXII. The components are expressed in the form of

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 + \sigma_x^1 + \Delta \cdot \sigma_x^2, \quad \sigma_z = \sigma_z^0 + \sigma_z^1 + \Delta \cdot \sigma_z^2, \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}^0 + \tau_{zx}^1 + \Delta \cdot \tau_{zx}^2, \\ u &= u^0 + u^1 + \Delta \cdot u^2, \quad v = v^0 + v^1 + \Delta \cdot v^2, \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

where  $u$  and  $v$  are respectively  $x$ - and  $z$ -components of flow velocity. Letters  $g$ ,  $\rho$  and  $\eta$  denote respectively acceleration of gravity, density and viscosity of the snow.

4. Abbreviations are used for constants, variables and functions as shown by Eqs. (5~9) and Eq. (11) of the text. Equations for surface S of snow cover B and for ground G are respectively given by

$$\zeta = 0 \quad \text{and} \quad \zeta = \zeta_0 + \Delta \cdot \sigma. \quad [3]$$

Equations (14) of the text give the first terms shouldering index 0 in the right sides of the above equations [2], while Eqs. (15) and (16) give the second terms indexed with 1. The third terms are obtained from Eqs. (17) multiplied by  $\Delta$  and Eqs. (18). The components of stress are thus determined with errors that are  $\Delta^2 \cdot \Delta_0 \cdot W$  in order of magnitude.

5. Yosida introduced in Paper IX<sup>10</sup> two sets of curves named  $C_H$  and  $C_V$ , with the intention of finding a method to study stresses in snow covers by means of something like illustration. Curves  $C_H$  and  $C_V$  in snow covers A and B are drawn in chapter III of the text by use of the stresses obtained in the previous paper and above in this Paper.

6. Curves  $C_H$  and  $C_V$  are respectively given by solutions of

$$dZ/dX = \sigma_z/\tau_{zx} = \tan \varphi \quad \text{and} \quad dZ/dX = \tau_{zx}/\sigma_x = \tan \psi, \quad [4]$$

differential equations valid both in the two coordinate systems  $(X, Z)$  shown in Fig. 1. These differential equations are conveniently solved when transformed into those expressed in the coordinate systems  $(x, z)$ . Differential coefficients for the curves can in these systems be written as follows:

$$\left. \begin{aligned} dz/dx &= \tan(\varphi + \alpha) = [(\sigma_z/\tau_{zx}) + \tan \alpha] / [1 - (\sigma_z/\tau_{zx}) \tan \alpha], \\ dz/dx &= \tan(\psi + \alpha) = [(\tau_{zx}/\sigma_x) + \tan \alpha] / [1 - (\tau_{zx}/\sigma_x) \tan \alpha]. \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

The differential equations in  $(x, z)$  are thus obtained by transforming  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$  in the above equations [5] into  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$  through the well-known formulae shown in the text as Eqs. (23).

7. Curves  $C_H$  and  $C_V$  were drawn for snow covers A and B directly from the differential equations by the use of an electronic computer. Figure 2 of the text gives the curves in snow cover B, while Fig. 4 gives those in snow cover A. In both Figs, curves  $C_H$  and curves  $C_V$  are respectively shown in figures (a) and figures (b). Tree-like figures (c) represent the magnitude of  $\tau_{zx}$  by the length of their horizontal branches. As tangents to curves  $C_H$  and  $C_V$  yield the values of  $\sigma_z/\tau_{zx}$  and  $\tau_{zx}/\sigma_x$  respectively, stresses can be known at any point in snow covers A and B from the three figures (a), (b) and (c). There are two points marked A and

B on each wavelength  $\lambda$  of surfaces S in both cases of snow covers A and B. These points are peculiar in that curves  $C_H$  and  $C_V$  reach surfaces S at them. Figures (a), (b), (c), (d) are in Fig. 4 contracted in the direction of  $x$ , with straight lines (H) and (V) indicating the horizontal and vertical directions respectively.

8. The subject is here turned to any snow cover C that flows two-dimensionally down a sloping ground; surface S and ground G may be of any shape and the snow need not be Newtonian viscous fluid. A pair of principal stresses shall be called SP (single principal stress) if one of them is very small in magnitude in comparison with the other, while the pair shall be called PSP (perfectly single principal stress) when one of its components utterly vanishes. On surface S stresses are PSP which coincides in direction with the tangent to the surface. This makes surface S a curve  $C_H$  and a curve  $C_V$  simultaneously. Let  $I$  denote the value of PSP on surface S.

9. It was shown in Paper XV<sup>9)</sup> that each of curves  $C_H$  starts from a point on ground G to terminate at a point on surface S of snow cover C, without intersecting others on its way. But the points of termination are restricted on surface S either to singular points at which  $I$  vanishes or to ordinary points at which the tangent to surface S happens to lie horizontally. These restrictions make surface S short of points of termination, which brings an embarrassment in drawing curves  $C_H$ . But, from the practical point of view, every point on surface S can be regarded as a point of apparent termination as will be explained below.

10. Real surface  $S'$  of snow cover C is undulating finely and irregularly; its commonly used surface S is nothing else the mean curve of surface  $S'$ . Letters  $I'$  and  $\lambda'$  shall respectively be used for the value of PSP on surface  $S'$  and for its main wavelength which is much smaller than thickness  $h$  of the snow cover C.

11. Suppose snow cover A of Fig. 1 (a) to wave its surface with wavelength  $\lambda'$ , and call snow cover A supposed as such by the name of snow cover  $A'$ . If snow cover  $A'$  is thought of as a special case of snow cover C, its  $I$  is equal to 0 everywhere on surface S (straight line  $S_0$  in Fig. 1 (a)), while its  $I'$  vanishes twice at singular points A and B in every wavelength  $\lambda'$  of surface  $S'$  (curve S in Fig. 4).

12. Let snow cover  $A'$  be transformed continuously to snow cover C through continuous changes in surface  $S'$ , ground G and nature of the snow. During this transformation curves  $C_H$  also change without stopping to reach surface  $S'$  at singular points A and B which stay in the same wavelength  $\lambda'$  of surface  $S'$ . At the same time  $I$  deviates from zero that was its initial value to become finite in magnitude.

13. As there are many examples of continuous transformation that is broken due to the occurrence of a catastrophic phenomenon when pushed on too much, the transformation of snow cover  $A'$  mentioned above is safely limited in application to the cases in which  $I$  of snow cover C is small in magnitude. But, at any rate, it is seen that curves  $C_H$  are not hindered in finding points of termination on those parts of surface S where magnitude of  $I$  is not great.

14. As a difference between  $I$  and  $I'$  is small in value, surface  $S'$  of snow cover C will have no singular point in those parts of its surface S where  $I$  is great in magnitude. The great magnitude of  $I$  causes stresses to be SP almost parallel to surface S in thin surface layer  $L_S$  of snow just below it, and this results in extending of curves  $C_H$  in layer  $L_S$  approaching surface S little by little until they find points of termination upon it. Figures in Papers XII<sup>2)</sup>

and XIII<sup>9)</sup> show examples of such behavior of curves  $C_H$  in the neighbourhood of surface  $S$ .

**15.** Points of termination will be found where  $I$  reduces in magnitude or where the tangent to surface  $S$  becomes horizontal. Curves  $C_H$  can thus terminate on surface  $S$  if they only reach layer  $L_S$  and no restriction is placed on their reaching it. This means that curves  $C_H$  can practically terminate on surface  $S$  at any point upon it, because layer  $L_S$  is so thin that it can be regarded as surface  $S$  itself.

**16.** It is seen from what was stated in Articles 10~15 that curve  $C_H$  can practically reach surface  $S$  of snow cover  $C$  at any point upon it whether that point is qualified for real termination or not.