高等学校における微積分の指導について

―― 連続関数の概念を中心に ――

馬　　　　達

（北海道大学大学院教育学研究科博士課程）

目　　次

はじめに
1　関数の極限と連続の順序
　1．1　連続関数の重要性
　1．2　極限と連続の順序
2　連続関数の指導の目的
　2．1　概念の発見
　2．2　極限の考えの把握
　2．3　極限の重要性の認識
　2．4　微積分の魅力の展示
3　連続関数の指導の内容
　3．1　基礎概念
　3．2　連続関数の定義
　3．3　連続関数の性質
　3．4　関数の極限の概念
　3．5　不連続関数
おわりに
参考文献

は　じ　め　に

本論文は，連続関数の指導内容を再構成することを目指し，教育内容として取り込みたい諸事項の関連を明確にすることを目的とする。現行教科書の中では，連続関数の取り扱いがきわめて不十分であり，連続関数の概念は，微積分の定理に用いるためだけに位置づけられている。これに対して，微分可能な関数を包括するクラスとしての連続関数を独自の教育内容とした構成を試みる。

数学における「連続」とは，むしろ生活世界の知識から抽象された概念である。一般的に抽象概念の取り扱いが学習者に理解されにくいと指摘されている中[1]，筆者は，「連続」という

1　例えば，イギリスのＪ．ペリーは以下のように述べている。「アカデミックな数学教授法は，僅か５％ほどの抽象的推理を好む学生には成功しているが，そのほかの普通の学生には，全く失敗している。」ペリー「『初等実用数学』序説」（丸山哲郎訳『数学教育改革論』明治図書，1972 年，所収）49 頁。

抽象概念を学習者に分かりやすく教えることができるか否かを考えてみたい。

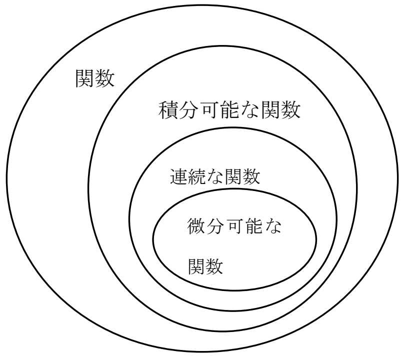
連続関数の教育に関する研究であるとはいえ，まず数学教育とは何か，すなわち数学の教育観という大きな問題にぶつかる。学校教育の一環としての数学教育を限定して，数学教育のための数学論[2]については，以下の観点に基づいて，議論を進めるとする。数学教育の目的は「数学教育は数学を教える教科である」[3]。数学についての定義は「数学は量と空間形式についての科学である」[4]。

このような立場から本論文は，連続関数の指導に関して，順序，目的，内容，という三方面から展開して議論する。

1　関数の極限と連続の順序

1．1　連続関数の重要性

従来の高校数学の微積分では，与えられた関数を微分したり，原始関数を求めたりすることが求められている。しかし，連続関数と微分可能な関数，積分可能な関数，および関数との関係は右の図で示す関係にある。



図からでも分かるように微分可能な関数は連続な関数に含まれている。だから，学習者に与えられた関数が微分可能な関数に限られるならば学習者の視野を狭くしていると考えられる。

筆者は学習者に高校の微積分に魅力を感じさせ，視野を広くするために，微分可能な関数を包括する連続関数の概念を十分に扱うべきだと考える。

1．2　極限と連続の順序

連続関数の概念は，微積分の教育内容において必要・不可欠な内容である。連続関数の内容を構成する順序は，関数の極限から連続関数という順序ではなく，連続関数から関数の極限という順序で，連続関数の内容を構成すべきだと考える。

高校教科書[5]「数学Ⅱ」には例えば，「$\lim_{x \to 3} 5x^2$ を求める」[6]という問題がある。この「問い」の狙いは関数の極限値を求める際に，学習者に $x \to a$ の時に関数値は限りなくある確定した数に近づくという考え方に基づいて極限値を求めさせることである。

2　数学論について，須田勝彦「量概念をめぐって」教授学の探究，第 11 号（1993 年）論文には，詳しく議論を行っている。

3　遠山啓「数学教育の基礎」『岩波講座・現代教育学〔9〕』岩波書店，1960 年，7 頁。

4　同注２。

5　検討に使われた教科書は，東京書籍の「数学Ⅰ」「数学Ⅱ」「数学Ⅲ」である。東京書籍の教科書は最も検討されている教科書であるので，筆者は，東京書籍の教科書について検討を行った。

6　『数学Ⅱ』東京書籍 1999 年，127 頁。

しかし，上の狙いは，現行教科書で実現されにくい。実際では，ほとんど学習者は上の「ある確定した数に近づく」という考え方を持たずに，直接 $x = a$ を関数 $f(x) = 5x^2$ に代入して結果を出していると思われる。つまり，上の「近づく」ということを考える過程がなく，直接代入して関数の極限値を得ようとしている。

結果は同じであるとはいえ，極限の考えを用いて関数の極限を求めることと，$x = a$ を関数 $f(x)$ に代入して結果を出すことは異なることであるのはいうまでもない。「答えさえ正しければ」という教育をすればするほど学習者は誤解を生じる危険が高くなり，結果として極限という考え方を把握できないことになる。つまり，学習者は「近づく」という方法を知っていたかのように感じているが，実際に理解していないため，それを直接代入と混同してしまうのである。

このようなことが生ずる原因は，扱っている関数 $f(x) = 5x^2$ が連続関数だからである。連続関数ならば，$x \to a$ の関数極限値は $x = a$ で関数値 $f(a)$ と同じになる。

しかし，「数学Ⅱ」の教科書では連続関数の概念に言及していないので，学習者は「問い」を解く場合，連続関数を意識していないと考えられる。一方「数学Ⅲ」には，連続関数の概念があり，関数の極限から連続関数へという順序で内容を構成している。しかし，連続関数の内容の前に学習者に関数の極限値を求めさせるのは「数学Ⅱ」と同じように，連続関数の概念を意識せず，「近づく」と「直接代入」と混同することが生じるのではないか。

「$\lim_{x \to 3} 5x^2$ を求める」を分析したことを通して，関数の極限や連続関数に関して，教科書の教育内容・順序には問題点があるがゆえに修正を要する。

学習者が根本的に連続関数の概念，及び関数極限の概念を把握し，「近づく」と「直接代入」との混同を避けるために，筆者は，まず連続関数の内容を先に設置して，次に関数の極限の内容という順序とすべきことを提案したい。具体的には，以下の順序で連続関数の内容を構成する。

①，連続関数と不連続関数を比較する。②，増分[7]の概念を用いて関数に対して一点で連続であるという概念を定義する。増分の概念によって一点で連続であることを定義し，それに基づいて距離によって，一点で連続であることを再定義する。③，この二つの定義に基づいて連続関数に関する内容を構成する。④，一点で連続である，あるいは不連続であることについて，原因を探すことを通じて，関数の極限の概念を導入する。⑤，関数の極限の概念を用いて，一点で連続であることを再定義する。即ち，一点で連続であることから，関数の極限という順序で内容を構成する。$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ という定義に到達する。⑥，極限値の１つの利用として，不連続点の種類について分析する。

$$
\text{不連続点}\begin{cases} \text{第１類不連続点} \begin{cases} \text{取り除きうる不連続点} \\ \text{跳躍する不連続点} \end{cases} \\ \text{第２類不連続点} \end{cases}
$$

についての内容を紹介する。

7　増分の概念　「I を関数 $f(x)$ の定義域とすると，$U(x_0, \delta) \subset I$ における関数 $f(x)$ に対し，任意の $x \in U(x_0, \delta)$，$x - x_0$ を，独立変数の点 x_0 での増分といい，Δx で表す。すなわち $\Delta x = x - x_0$。点 x_0 での増分に対応し，$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ は Δx に対する従属変数の増分といい，Δy で表す。すなわち，$\Delta y = f(x_0) - f(x_0) = f(x + \Delta x) - f(x_0)$」。

高校数学の微積分には，連続関数および関数の極限に関する教育内容が不十分であり，連続関数の教育内容構成の順序は問題点があると考えられる。これらの問題点を解決し，また連続関数概念の微積分学における意義を新たに引き出すために，連続関数の指導の目的に関する議論に進めたい。

2　連続関数の指導の目的

以下，具体的に①概念の発見，②極限の考えの把握，③極限の重要性の認識，④微積分の魅力の展示，という四つの側面から，連続関数の指導の目的を議論する。

2．1　概念の発見

微積分の教科書には連続関数に関する定義[8]は，基本的に関数の極限を前提として，一点で連続であることを定義する。このような定義の仕方は数学の観点からみると，正しいであろう。しかし，筆者は以下の問題が存在していると考える。始めから関数の極限を用いて，一点で連続である概念という導入してしまえば，学習者は自ら，関数の極限と関数の連続との関係を発見できない。教科書では式 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ を出して，初めから学習者に関数の極限と関数の連続と関係があることを認識させている。したがって，学習者が連続の概念を自ら発見することはできない。

これに対して以下の順序で一点で連続の定義を導入するならば，学習者は自らの観察によって一点で連続であることの概念を獲得することできると考えられる。①増分の概念を導入する。②連続関数と不連続関数を比較する。③増分の概念を用いて一点で連続を定義する。

2．2　極限の考えの把握

教科書『数学Ⅲ』にある，次のような「問い」を見てみよう。

「$\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$」[9]という「問い」である。この「問い」の狙いは分子と分母は約分することを通じて，$x\to a$ の時に $\dfrac{0}{0}$ の形の極限値を求めることである。

「$\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$」を解く流れ[10]をみると，関数 $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ と関数 $f(x)=x-2$ が出てくる。関数 $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ と関数 $f(x)=x-2$ とは異なる関数[11]である。関数 $f(x)=$

8　A を定義域とする実数関数を $f(x)$ とする。定義域 A に属する x 値 a において，$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ がなりたつとき，関数 $f(x)$ は点 a で連続であるという。$f(x)$ が連続でない点を不連続点という。A のすべての点で連続であるとき，A で連続な関数という。

9　『数学Ⅲ』東京書籍 2001 年，47 頁。

10　$\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-2)=-3$

11　$f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ は点 $x=-1$ で定義されておらず，関数 $f(x)=x-2$ は点 $x=-1$ で意味が持っている。よって，この 2 つの関数の定義域が違っている。したがって，この 2 つの関数は違う関数である。

$\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ は点 $x=-1$ では定義されていない一方，関数 $f(x)=x-2$ は点 $x=-1$ で意味を持っている。だから $x\to-1$ のときに，関数 $f(x)=x-2$ の極限値を求めることと同様に，$x\to-1$ の時に関数 $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ の極限値が得られる。

一般的に言うと，$\dfrac{0}{0}$ の形について関数の極限値を求めるために，無意味にさせる項を約分することができるならば，関数の極限値を求めることができる。しかしなぜ約分することを許すのか。学習者は正しい結果を得るが，しかし正しい結果を得る原因を理解していないと思われる。

「問い」の分析によって学習者は極限の考え方を把握できないと考えられる。しかし，増分で連続関数を定義することから増分で関数の極限を定義するならば，関数の極限を学習者が把握することができると考えられる。「$\lim_{x\to3}5x^2$」のような「問い」における「極限の考え方」と「直接代入」との混同を避けることもできる。「$f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$」のような「問い」における，なぜ無意味にさせる項を約分することができるか，という疑問を学習者に納得させることができる。

2．3　極限の重要性の認識

J. ペリーは数学教育改革論で，数学教育の有用性として「手足のように自由に使える知的道具を人々に与える。人々がその生涯を通じて，自分自身を教育し続け，精神と知力を発達させることができるようにする」[12] ということをあげている。しかし，教科書の分析からこの目的はこれまでの数学教育において実現されていないと思われる。

関数の極限を例として上の目的を実現されていないことを考察したい。「$\lim_{x\to3}5x^2$ を求める」という「問い」を分析したように，極限の内容は学習者が十分に把握していないと考えられる。極限の内容を理解しないならば，微分，積分の内容を完全に把握することは考えにくい。一歩進むと，テーラー級数についての内容も，学習者がうまく理解できないと考えられる。テーラー級数を考えることは，いかにして易しいべき級数を用いて，複雑な関数について性質面および数値面を解析するか，という研究である。

したがって，学習者は微積分の内容を学んだにもかかわらず，微積分の内容を用いて，関数を解析する能力を学習者が獲得できないと考えられる。そして，自然現象を解析する能力を獲得していないと言えるだろう。微積分の内容を勉強し終わっても，「手足のように自由に使える知的道具」としての微積分の内容は学習者が獲得できないと考えられる。

微分，積分の定義を見ると，関数の極限は微積分学における一つの鍵である。関数の極限を用いて与えられた関数に対して，連続性，微分可能，積分可能および，テーラー級数の展開という各々側面から関数を認識する。すなわち，関数の極限を用いて関数の性質面，数量面を解析する。そして，関数について新しい性質を引き出す。しかし現在，関数の極限の教育は関数の極限を勉強して終わっても，関数の極限の重要性を学習者が理解していないと考えられる。

12　ペリー・クライン著・丸山哲郎訳「数学の教育」『数学教育改革論』明治図書　1972 年

しかし，関数の極限を用いて不連続点を分析することは関数の極限の重要性を学習者に理解させる一つの方法だと考えられる。増分によって連続関数を定義する。連続関数から関数の極限という順序で進むと，学習者が連続と極限の関係を独自に発見することできる。さらに，関数の極限を用いて簡単な不連続点について分析を行う。関数の極限を用いると，関数の不連続点についての分析を簡潔に説明できる。このことによって学習者は極限の概念の重要性を自ら理解する効果が期待される。

2．4　微積分の魅力の展示

世界的に見て大学教育の普及は著しくなっている。この背景では大学教育における微積分の教育は一部のエリートや高度の技術者にだけ必要なものとしてではなく，多くの人に共有される共通教養として位置づけられるべきだと考えられる。高等学校においても，多くの学習者の共通教養としての微積分の入り口となるような微積分の魅力を展望できるような教育内容の構成が課題だろう。受験競争に追従するような数学教育を行うのではなく，数学という学問の楽しさを学習者に伝える微積分の教育をつくり出すべきだと考えられる。

微積分の教育内容における連続な関数概念について高校の微積分教育は，微積分の魅力を展示しているかどうかを考察していこう。

「数学Ⅱ」は扱っている関数が基本的に連続関数であるのに連続関数の概念がない。このことによって，もし「数学Ⅲ」を履修しない学習者ならば，「関数＝連続関数」という誤解に陥る恐れがあると思われる。さらに，「数学Ⅱ」は連続関数の概念がないのに微分，積分の内容がある。「関数＝微分係数が存在する」あるいは「曲線＝傾きが存在する」という誤解を学習者に与える恐れもあると思われる。「数学Ⅲ」では不連続関数についての説明，例題，問い，及び練習は主にガウス関数が用いられている。このことによって，「不連続関数＝ガウス関数[13]」という誤解を学習者に与える恐れもあるだろう。

誤解させやすい連続関数の内容では，微積分の魅力を学習者に展示できるとは考えがたい。これに対して，連続関数の概念の教育内容を構成する際に不連続関数についても扱うことによって関数の中身の豊かさを学習者に提示することができ，不連続関数に関する視野を広くさせるだろう。

不連続関数については確かに，不連続関数を解析することは難しい。だから連続関数を中心とするこれまでの内容構成においては不連続関数までに深入りをしなかった。しかし不連続に関して関数の極限によって不連続の原因を分析でき，図によって学習者に豊かなイメージを形成させることができるのではないか。その上，様々な種類の不連続関数が存在していることも，学習者に認識させることが必要であることを指摘しておきたい。なお，様々な種類の不連続関数が存在していることを学習者に認識させる理由とは，①現実には「不連続な」ことがある。たとえば，電車やバスの切符は距離によって値段が違うが，連続変化とはいえない。同じ映画の入場券は年齢によって値段が違う場合がある。最も分かりやすい「不連続な」例として郵便料金の例がある。②数学上で不連続なものを用いて連続なものを認識することがある。例えば，曲線の面積を求める時には階段関数による近似から無限移行によって曲線の面積が求められる

13　ガウス関数とは，実数 x に対して x をこえない最大の整数という関数である。$y=[x]$ で表す。たとえば $y=[2.9]=2$，$y=[3.1]=3$，$y=[-2.9]=-3$，$y=[-3.1]=-4$。

のはその一例である。③不連続関数の研究を通して「関数とは何か」を改めて学習者に考えさせることが可能である。すなわち，関数の一般概念，写像の概念に到達させる動機となる。

したがって，共通教養として微積分の内容を構成する際に微積分の魅力を学習者に展示するために，高校の時点では不連続関数の基礎知識を学習者に与えるべきである。

連続関数の概念の指導の目的を明らかにした上で，次は連続関数の概念の指導の内容の検討に入りたい。

3　連続関数の指導の内容

連続関数の指導について，順序及び目的を論じてきた。順序および目的に基づいて，連続関数の概念に関する教育内容を簡単に提示する。

関数は微積分学における主要な研究対象である。本論文の最終の目的は連続関数の指導内容の再構成である。それゆえ，連続関数の性質を十分に表わせる実数から実数への1変数関数を中心として取り扱いたい。「距離」「近傍」「増分」という基礎概念，および実数から実数への1変数連続関数の性質に基づいて，多変数関数へ拡張できると考えられる。

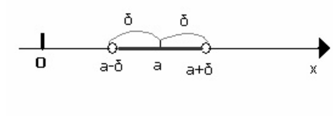
3．1　基礎概念

距離の概念：実数 R における距離の概念を考える。$a,\ b \in R$ に対し，a と b の距離を $d(a,\ b) = |b-a|$ と定義する。

関数の極限の定義について「$\varepsilon-\delta$ の定義」[14] はよく使われている。しかし，本論文で教育内容構成する際には「$\varepsilon-\delta$ の定義」をそのままでは，使わないこと [15] にする。本論文では増分と距離空間に基づいて，関数の連続および関数の極限を定義する。「近づく」ということは距離空間によって自然に表わせる。よって距離空間を用いて関数の連続および関数の極限を定義するのは自然な定義方法だと考えられる。

近傍の概念： a と δ が二つの実数，かつ $\delta > 0$ とすると，集合 $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$ を点 a の δ －近傍と言い，点 a をこの**近傍の中心**と言い，δ をこの近傍の**半径**とよぶ。
近傍の表わし方：① $U(a,\ \delta)$ で表す。② $U_\delta(a)$ で表す。③ a の δ －近傍の中の任意の一点 x に対して x と a の距離は δ より小さいので，a の δ －近傍は $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ で表せる。

$x \to a$ のときの関数の極限や $x = a$ で連続などの概念は，点 a の近くの範囲で関数値の変化を考察しているのである。よって近傍の概念は関数の局所的な性質を観察する際に有効な概念である。



14　A を関数 $f(x)$ の定義域とすると，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$ $0 < |x-x_0| < \delta$ がなるすべて $x \in A$ に対して，$|f(x)-\alpha| < \varepsilon$ が成り立つ時に，関数 $f(x)$ の極限は α である。

15　「$\varepsilon-\delta$ 式定義が，理解しにくい理論構造を内包していることも事実である。だから，不用意に，高校数学へ持ち込むことができない。」遠山啓編『〔現代数学教育講座2〕関数』明治図書 1970 年 51，56 頁，参照。

近傍の概念は一変数関数に限られる概念ではなくて，多変数関数に対していっそう有効な概念である。

増分の概念： I を関数 $f(x)$ の定義域とすると，$U(x_0, \delta) \subset I$ における関数 $f(x)$ に対し，任意の $x \in U(x_0, \delta)$，$x - x_0$ を**変数 x の点 x_0 での増分**といい，Δx で表す。すなわち $\Delta x = x - x_0$。点 x_0 での増分に対応し，$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ は Δx に対する**関数の増分**といい，Δy で表す。すなわち，$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$。

増分の概念を導入する理由は以下2点がある。

① 増分の概念は，関数を研究する際に有効な概念である。関数について x が微量に変わるならば，対応する関数値 y はどのように変化するか，これを観察することによっていろいろな関数を引き出す可能性があると思われる。実際に増分の概念を用いて関数に関する教育内容を構成する授業プランもある[16]。

② 連続と不連続の関数が確かに存在していることを認識した上で，増分の概念を用いてグラフを観察する。ある点で関数が連続であるとは，その点の近くでの x の微小な変化に対応して y すなわち，関数値も微小に変化するということである。不連続点であるのはその点の近くでの x の微小な変化に対応して y すなわち，関数値は微小とはいえない変化をしていることである。したがってグラフを観察してから増分の概念を用いて一点で連続の定義に容易に到達できる。

3．2　連続関数の定義

増分による一点で連続の定義

I を関数 $f(x)$ の定義域とする。$U(x_0, \delta) \subset I$ における関数 $f(x)$ に対し，x_0 での増分 Δx が限りなく 0 に近づく時に，対応する関数の増分 Δy が限りなく 0 に近づくならば関数 $f(x)$ は点 x_0 **で連続**であるといい，点 x_0 は関数 $f(x)$ の**連続点**をいう。

Δx が限りなく 0 に近づくということを $\Delta x \to 0$ で表す。同じように Δy が限りなく 0 に近づくということを $\Delta y \to 0$ で表す。

距離による一点で連続の定義

I を関数 $f(x)$ の定義域とする。$U(x_0, \delta) \subset I$ における関数 $f(x)$ に対し，$|x - x_0| \to 0$ の時に，$|f(x) - f(x_0)| \to 0$ であるならば関数 x_0 で連続である。

扱う関数：

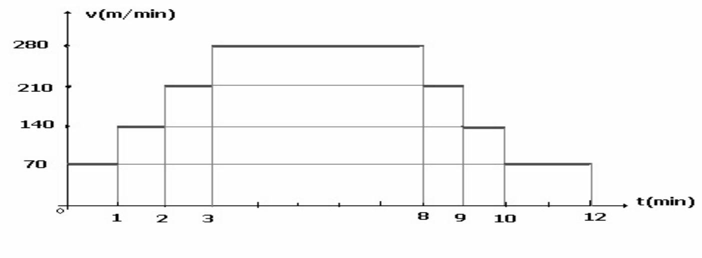
① **郵便物の問題：**北海道・青森について　市内（同一市町村内・同一配達区内）

重　量	値段（普通）	重　量	値段（普通）	重　量	値段（普通）
2 kgまで	510 円	11 kgまで	870 円	18 kgまで	1,110 円
4 kgまで	630 円	12 kgまで	930 円	21 kgまで	1,170 円
6 kgまで	750 円	14 kgまで	990 円	25 kgまで	1,320 円
8 kgまで	810 円	16 kgまで	1,050 円	30 kgまで	1,470 円

16　土井捷三・三上勝夫・須田勝彦「運動の解析を基礎とした正比例関数の指導」，『北海道大学教育学部紀要』第 18 号 北海道大学教育学部，108 頁。

② **自由落下運動：**質量は m の物体が，初速度 0 で，地面から h のところから，重力の作用を受けて鉛直方向に落下する。時間 T を経て，地面に落ちた。速度と時間との関係，および距離と時間との関係を分析する。

③ **遊園地の電車：**「遊園地のお猿の電車に乗りました。ガッタンと動き出し，次々と速度を上げるのですが，速度が上げる度に，ガックンと後ろにひっぱられ，速度を落とすときは，まガクッと落ちます。どうやら速度は 4 速あって，滑らかに変化しないようです。速度と時間の関係をグラフにすると，下図のようになっています。



」[17]

①「郵便物の問題」は最も身近な不連続関数である。②「自由落下運動」については時間［0，T］において速度と時間の関係および距離と時間との関係は連続な関数である。③「遊園地の電車」の運動について，速度と時間の関係および距離と時間の関係は不連続な関数である。

ねらい：

ｉ）①，②，③の関数のグラフの繋がる点と繋がっていない点に対する近くの関数値の変化を比較することを通じて，「増分による一点で連続」の定義及び不連続の定義を学習者に発見させる。

ⅱ）「増分による一点で連続」の定義に基づいて，「距離による一点で連続」の定義を学習者に発見させる。

左側連続　I を関数 $f(x)$ の定義域とする。$(x_0-\delta,\ x_0] \subset I$ における関数 $f(x)$ に対し，x_0 の増分 $\Delta x \leq 0$，$\Delta x \to 0$ 時に，Δx に応じる $\Delta y \to 0$ ならば関数 $f(x)$ は x_0 で**左側連続**である。

右側連続　I を $f(x)$ の定義域とする。$[x_0,\ x_0+\delta) \subset I$ における関数 $f(x)$ に対し，x_0 の増分 $\Delta x \geq 0$，$\Delta x \to 0$ 時に，Δx に応じる $\Delta y \to 0$ ならば関数 $f(x)$ は x_0 で**右側連続**である。

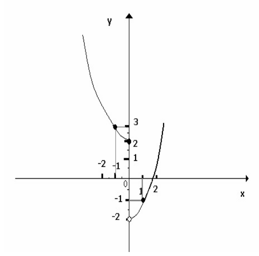
連続と片側連続　関数 $f(x)$ は点 x_0 で連続である $\Leftrightarrow$ 関数 $f(x)$ は点 x_0 で右側連続でありかつ左側連続である。

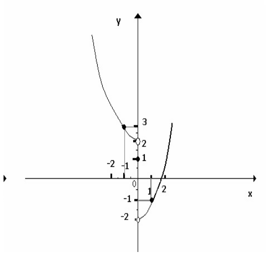
17　渡邊勝著『運動と微分積分』北海道地区数学教育協議会･高校サークル 1999 年，19 頁。

扱う関数：

① $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x<0 \\ x^2-2, & x \geq 0 \end{cases}$

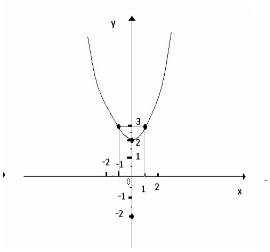
② $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x^2-2, & x>0 \end{cases}$

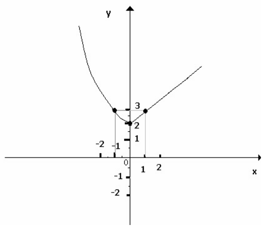




③ $f(x)=x^2+2$

④ $f(x)=\begin{cases} x+2 & x>0 \\ x^2+2 & x \leq 0 \end{cases}$





①の関数は点 $x=0$ で不連続である。点 $x=0$ の片側連続を考察すると右側が連続であるが，しかし左側が不連続である。②の関数も点 $x=0$ で不連続である。点 $x=0$ の片側連続を考察すると右側と左側ともに不連続である。③の関数は点 $x=0$ で連続である。④の関数も点 $x=0$ で連続である。

ねらい：

i）①，②，④の関数は点 $x=0$ で右側と左側の式が違う。片側の連続性を考察しなければならない。片側連続の概念の必要性を学習者に発見させる。

ii）①，②，③の点 $x=0$ の連続性を比較することを通して「連続と片側連続」の関係を学習者に発見させる。

iii）④の関数は「連続と片側連続」の関係によって点 $x=0$ の右側と左側の式が違うにもかかわらず点 $x=0$ で連続である。一点で連続であるかどうかを判断する際に，この点の右側と左側が違う式で表すことによって判断できないことを学習者に発見させる。

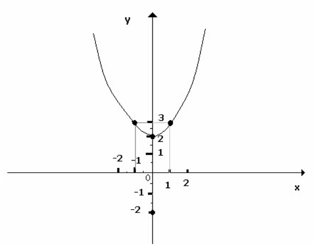
3．3　連続関数の性質

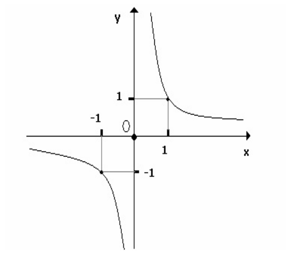
3．3．1　一点における連続関数の性質

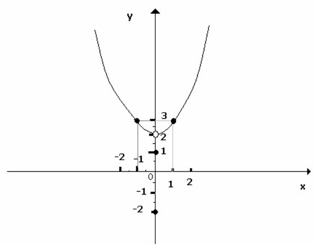
局所有界性： I を $f(x)$ の定義域とする。関数 $f(x)$ は x_0 で連続であるならば関数 $f(x)$ は点 x_0 のある近傍 $U(x_0, \delta) \subset I$ で有界である。

扱う関数：

① $f(x) = x^2+2$　　② $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$　　③ $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$







①の関数は点 $x = 0$ が連続点である。点 $x = 0$ の近くは有界である。②の関数について点点 $x = 0$ は不連続点である。$x = 0$ の近くには有界ではない。③の関数について点 $x = 0$ は不連続点であるが，しかし，点 $x = 0$ の近くは有界である。

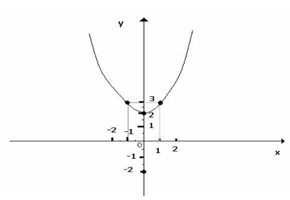
ねらい：

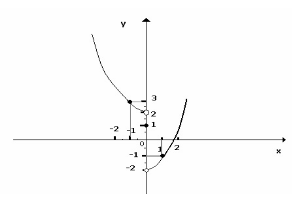
①，②，③の $x = 0$ の近くの関数値の有界性を比較することを通じて「局所有界性」という性質を学習者に発見させる。

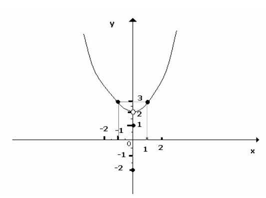
局所保号性[18]**：** I を $f(x)$ の定義域とする。関数 $f(x)$ は x_0 で連続である。$f(x_0) \neq 0$ であるならば，関数 $f(x)$ に対して点 x_0 のある近傍 $U(x_0, \delta) \subset I$ での関数値の符号と $f(x_0)$ の符号が同じである。

扱う関数：

① $f(x) = x^2+2$　　② $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2-2, & x > 0 \end{cases}$　　③ $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$







①の関数は点 $x = 0$ が連続点である。$f(0) = 2$ の符号が分かるならば，点 $x = 0$ の近くの関数値の符号が分かる。②の関数は点 $x = 0$ が不連続点である。$f(0) = 1$ の符号が分かるにもかかわらず，点 $x = 0$ の近くの関数値の符号が把握できない。③の関数は点 $x = 0$ が不連続であるが，しかし $x = 0$ の近くの関数値の符号と $f(0)$ の符号と同じである。

18　局所保号性について，保号とは関数値の符号（＋，－）を保つ意味である。

ねらい：

①，②，③の点 $x=0$ に対する近くの関数値の符号と $f(0)$ の符号の関係を比較することを通して学習者に「局所保号性」という性質を発見させる。

関数 $f(x)$ に関する一点 a で連続であるならば，その時に関数 $f(x)$ は点 a の近い所でその性質を保つ。すなわち，a の近い所で関数 $f(x)$ が有界であり，関数値 $f(a)$ の正負が分かるならば a の近い所で，すべての関数値の正負がわかることになる。点 a で不連続ならば，上の二つの性質は必ずしも成り立たないのである。だから，「局所有界性」と「局所保号性」は連続点に関する特性といえる。

関数 $f(x)$ は一点で連続であるならばこの点の近くの関数値の性質を把握できる。しかし，不連続ならば一点の関数値が分かるにもかかわらず，この点の近くの関数値の性質ははっきりいえないのである。よって「局所有界性」と「局所保号性」という2つの性質を学ぶことを通じて連続な関数についてより一層，学習者に理解させることが可能であろう。

四則　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ ともに点 x_0 で連続であるとすると

$f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$(g(x_0) \neq 0)$ は点 x_0 で連続である。

合成関数の連続　関数 $u=g(x)$ は点 x_0 で連続であり，かつ $u_0=g(x_0)$ になる。関数 $f(u)$ は点 u_0 で連続であるならば，合成関数 $f(g(x))$ は点 x_0 で連続である。

3．3．2　閉区間における連続関数の性質

最大値・最小値の定理　関数が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば，値域に最大値と最小値がある。

すなわち，$\exists c_1 \in [a, b]$，$f(c_1) \leq f(x)$，　$\exists c_2 \in [a, b]$，$f(c_2) \geq f(x)$

中間値定理　関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続とする。$f(a) < f(b)$ のとき，$f(a) < y < f(b)$ なる任意の y に対し，$f(c) = y$，$c \in \big(a, b\big)$ $(a < c < b)$ となる c が少なくとも一つが存在する。$f(a) > f(b)$ でも同様。

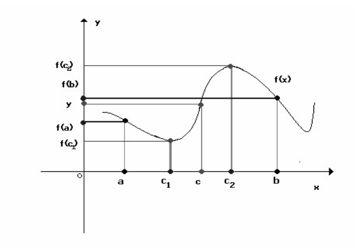
系：閉区間で連続な関数は最大値と最小値の間におけるすべての関数値を取る。

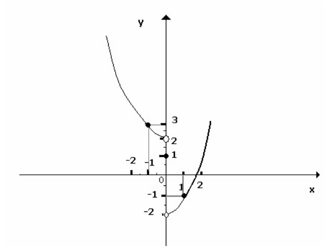
逆関数の連続　閉区間 $[a, b]$ で定義された関数 f は連続かつ狭義増加（減少）とする。関数 f の値域は閉区間である。逆関数 f^{-1} が存在し，逆関数 f^{-1} の定義域で連続かつ狭義増加（減少）である。

扱う関数

①

② $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2-2, & x > 0 \end{cases}$





②の関数は閉区間 $[-1,\ 1]$ において，「最大値・最小値定理」，「中間値定理」を満たさないのである。

ねらい：

学習者がグラフを観察しながら，「閉区間における連続関数の性質」を発見させる。

閉区間における連続関数の特性については，学習者がグラフを観察しながら，結論に到達できる。学習者の観察に基づいて，得られる結論は確かに正しい結論である。しかし，この正しい観察を支える理論は高等学校の段階で，予想上では教える困難がある。閉区間における連続関数の特性，最大値・最小値定義，及び中間値定理はいずれも実数の連続性を利用しなければならない。しかし，学習者にとって実数の連続性，および実数の連続性を用いて問題を証明することは理解しにくい内容である。だから，実数の連続性の内容は不用意に高校学校に持ち込むことができないと考えられる。

閉区間の定理によって，学習者に数学の一つの展望を与えることができると考えられる。

3．4　関数の極限の概念

増分による極限値の定義

I を関数 $f(x)$ の定義域とする。$U_0(x_0,\ \delta) \subset I$ における関数 $f(x)$ に対し（x_0 で定義されても，されなくても），x_0 の増分 $\Delta x \neq 0$，$\Delta x \to 0$ の時に，関数 $y = f(x)$ はある確定した数 A に対して，$|f(x) - A| \to 0$ であるならば，数 A を関数 $y = f(x)$ の $\Delta x \neq 0$，$\Delta x \to 0$ 時の**極限値**といい，$\displaystyle\lim_{\Delta x \neq 0,\ \Delta x \to 0} f(x) = A$ で表す。

距離による極限値の定義

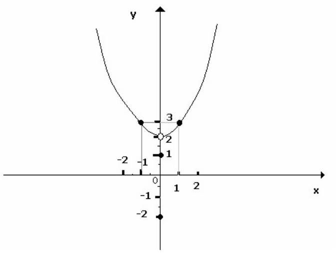
I を関数の定義域とする。$U_0(x_0,\ \delta) \subset I$ における関数 $f(x)$ に対し（x_0 で定義されても，されなくても）$0 < |x - x_0| \to 0$ の時に，関数 $y = f(x)$ はある確定した数 A に対して，$|f(x) - A| \to 0$ であるならば，数 A を関数 $y = f(x)$ の $x \neq x_0$，$x \to x_0$ 時の**極限値**といい，$\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ で表す。

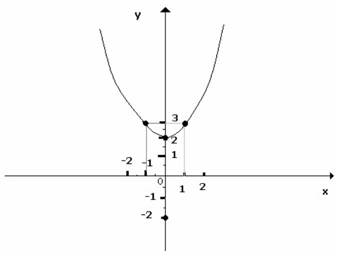
極限の概念による一点で連続の定義

関数 $y = f(x)$ は点 x_0 で連続であるのは $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ である。

扱う関数

① $f(x)\begin{cases} x^2+2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$　　　② $f(x) = x^2+2$





①の関数に対して，点 $x = 0$ の増分 $\Delta x \neq 0$，$\Delta x \to 0$ の時に，関数 $f(x)$ は数 2 に限りなく近づく。すなわち，$|f(x)-2| \to 0$ である。しかし，数 2 と $x = 0$ での関数値 $f(0)$ が違う。②の関数に対して，点 $x = 0$ の増分 $\Delta x \neq 0$，$\Delta x \to 0$ の時に，関数 $f(x)$ は数 2 に限りなく近づく。さらに，数 2 と $x = 0$ での関数値 $f(0)$ が同じである。

ねらい：

i ）①と②は $x \to 0$ の時に，関数 $f(x)$ は限りなく確定した数に近づく。「増分による極限値の定義」を学習者に発見させる。

ii）「増分による極限値」の定義を基づいて，「距離による極限値」の定義を学習者に発見させる。

iii）①と②に対して $x \to 0$ の時に関数の極限値，と $x = 0$ で関数の連続性を比較することを通じて関数の連続と関数の極限値の関係を学習者に発見させる。

iv）関数の極限による一点で関数の連続の定義を学習者に発見させる。

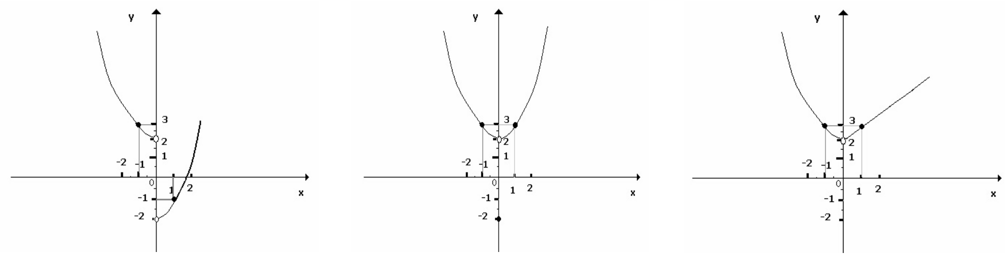
左側極限　I を関数 $f(x)$ の定義域とする。$(x_0-\delta,\ x_0) \subset I$ における関数 $f(x)$ に対し，x_0 の増分 $\Delta x < 0$，$\Delta x \to 0$ 時に，関数 $y = f(x)$ はある確定した数 A に対して，$|f(x)-A| \to 0$ であるならば，数 A を点 x_0 での**左側極限値**といい，$\lim\limits_{\Delta x < 0,\ \Delta x \to 0} f(x) = A$ で表す。

右側極限　I を関数 $f(x)$ の定義域とする。$(x_0,\ x_0+\delta) \subset I$ における関数 $f(x)$ に対し，x_0 の増分 $\Delta x > 0$，$\Delta x \to 0$ 時に，関数 $y = f(x)$ はある確定した数 A に対して，$|f(x)-A| \to 0$ であるならば，数 A を点 x_0 での**右側極限値**といい，$\lim\limits_{\Delta x > 0,\ \Delta x \to 0} f(x) = A$ で表す。

極限と片側極限　関数 $f(x)$ は点 x_0 の増分 $\Delta x \neq 0$，$\Delta x \to 0$ の時に $\lim\limits_{\Delta x \neq 0,\ \Delta x \to 0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x > 0,\ \Delta x \to 0} f(x) = \lim\limits_{\Delta x < 0,\ \Delta x \to 0} f(x) = A$ である。

扱う関数：

① $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x < 0 \\ x^2-2, & x > 0 \end{cases}$　② $f(x) = x^2+2$　$(x \neq 0)$　③ $f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 0 \\ x^2+2 & x < 0 \end{cases}$



①の関数に対して，点 $x = 0$ の右側の極限値と左側の極限値ともに存在するが，しかし，等しくないのである。②の関数は $x \to 0$ 時の関数の極限値が存在する。③の関数は点 $x = 0$ の右側と左側の式が違うにもかかわらず $\lim_{\Delta x \neq 0,\ \Delta x \to 0} f(x) = 2$ である。

ねらい：

ⅰ）①と③の関数は点 $x = 0$ の時に，右側と左側の式が違う。片側の極限値を考察しなければならない。片側極限値の概念の必要性を学習者に発見させる。

ⅱ）①と②の点 $x \to 0$ の時の極限値，片側極限値を解析することによって「極限と片側極限」の関係を学習者に発見させる。

ⅲ）③の関数は「極限と片側極限」の関係によって点 $x = 0$ の右側と左側の式が違うにもかかわらず点 $x \to 0$ 時に関数の極限値が存在する。関数の極限値が存在するかどうかを判断する際に，この点の右側と左側が違う式で表すことによって判断できないことを学習者に発見させる。

3．5　不連続関数

不連続点の定義　$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ が成り立たないときに，関数 $f(x)$ は点 x_0 で**不連続**であるといい，点 x_0 を関数 $f(x)$ の**不連続点**という。

不連続点の分類

$$\text{不連続点}\begin{cases}\text{第１類不連続点}\begin{cases}\text{取り除きうる不連続点}\\ \text{跳躍する不連続点}\end{cases}\\ \text{第２類不連続点}\end{cases}$$

跳躍的な不連続点　関数 $f(x)$ は点 $x \to x_0$ の左側と右側の極限値ともに存在し，しかし，$\lim_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-} f(x)$ であるならば，点 x_0 は関数 $f(x)$ の**跳躍的な不連続点**という。

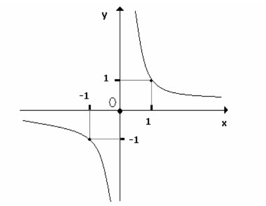
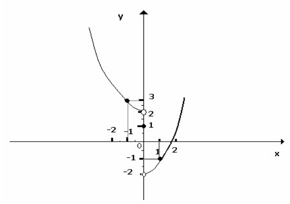
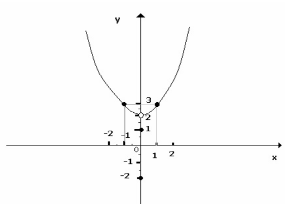
取り除きうる不連続点　関数 $f(x)$ は点 $x \to x_0$ の極限値が存在している。しかし $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$ であるときに点 x_0 は**取り除きうる不連続点**[19]である。

19　山野熙・安藤　洋美『現代の総合数学Ⅱ』，現代数学社，1972 年，153 頁。

第１種の不連続点　跳躍的な不連続点と取り除きうる不連続点と併せて，**第１種の不連続点**[20]という。
第２種の不連続点　関数 $f(x)$ は点 x_0 で，右側極限値と左側極限値の少なくとも一つが存在しなければ，点 x_0 を関数の**第２種の不連続点**という。

扱う関数：

① $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　② $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x<0\\ 1, & x=0\\ x^2-2, & x>0\end{cases}$　③ $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

①は $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$ ので，点 $x=0$ が第２類不連続点である。②は $2=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-2$ ので，点 $x=0$ が跳躍的な不連続点である。③は $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2\neq f(0)$ ので，点 $x=0$ が取り除きうる不連続点である。

ねらい：

ⅰ）①，②，③の関数ともに点 $x=0$ は不連続点である。しかし，関数の極限の概念を用いて，不連続の原因を解析するならば，①，②，③の不連続の原因はそれぞれ違うのである。学習者に①，②，③の点 $x=0$ でそれぞれ違う原因で不連続のことを発見させる。

ⅱ）①，②，③の不連続点を分析することによって学習者が関数の極限と関数の連続との関係，および関数の極限の重要性を学習者に発見させる。

おわりに

本論文は連続関数の指導内容について検討した。しかし，教育内容を議論することに止まっていた。連続関数の授業プランというレベルに至っていない。今後の課題は未完成であった連続関数の授業プランの試作を行うことである。連続関数の授業プランを作成する際に，以下のような効果が得られるものにしたい。①増分の概念で連続関数の定義を自ら発見できる。与えられた関数は連続関数かどうかを判断できる。②連続関数の性質を把握できる。③連続関数と関数の極限との関係を自ら発見できる。④極限の考え方を把握できる。⑤関数の極限を用いて連続と不連続を分析することによって，関数の極限の重要性を認識できる。

20　第１類不連続点および第２類不連続点についての分類は主に「笠原浩司『微分積分学』　サイエンス社，(1974 年，頁 33)」を参照した。

付記　本稿は，2004年度に北海道大学大学院教育研究科へ提出した修士論文の一部分に加筆・修正を加えたものである。

参考文献

福井常孝・上村外茂男など『解析学入門』内田老鶴圃新社　1962年
山野熙・安藤　洋美『現代の総合数学Ⅱ』　現代数学社　　1972年
笠原浩司　『微分積分学』　サイエンス社　1974年
上見練太郎　他『微分』　共立出版株式会社　1995年
上見練太郎　他『積分』　共立出版株式会社　1995年
足立俊明　『微分積分Ⅰ』培風館　1997年
井上純治　他『級数』　共立出版株式会社　1998年
加藤久子　『概説　微分積分』サイエンス社　1999年
遠山啓編『現代数学教育講座　2関数』明治図書　1970年
土井捷三・三上勝夫・須田勝彦「運動の解析を基礎とした正比例関数の指導」『北海道大学教育学部紀要』第18号 北海道大学教育学部 1971年
山口　格・須田勝彦「関数指導体系に関する基礎的研究」，『北海道大学教育学部紀要』第50号，北海道大学教育学部　1988年
須田勝彦「量概念をめぐって」『教授学の探究』，第11号，1993年
　須田勝彦・氏家英夫　「序章　関数指導の目的・内容・方法」，『量の解析に基づく指数関数・対数関数の指導』，北海道地区数学教育協議会　2000年
渡邊勝著『運動と微分積分』北海道地区数学教育協議会･高校サークル 1999年