経済学研究 56-3
北海道大学 2007.1

二階堂による無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題と競争均衡の存在証明への適用

久保田 肇

1．はじめに

ワルラス (1874,77) によって構築された，有限個の財が存在する市場経済モデルにおける市場均衡 (または競争均衡) として表現される，モデル内の整合的な解の存在という問題について，ワルラス自身は，超過需要関数の 0 次同時性とワルラス法則に基づいて，方程式の数と未知数の数が同じなのでその体系に解が存在する，という事を示すだけで済ませていたが，1930 年代のワルト (1935,36) は，カッセル (1924) によって簡略に表現されたワルラスモデルに，その整合的な (非負) 解が存在する事を示した[1)]。その後，1950 年代になって，アロー‐ドブリュー (1954)，マッケンジー (1954)，ゲール (1955)，そして，二階堂 (1956a) らが，より一般的なワルラスモデルにその整合的な解である競争均衡が存在する事を示した。アロー‐ドブリュー (1954) による証明では，問題を抽象ゲーム形式における解の存在問題へ変換し，このゲームに (ナッシュ) 均衡解が存在するというドブリュー (1952) による結果を利用して，競争均衡の存在証明を行った[2)]。マッケンジー (1954) による証明では，国際貿易における多数国多数財モデルであるグレアムモデルという枠組みにおいて，超過需要の符号に応じて価格が変動するという価格調整機構に基づく写像と角谷の不動点定理を利用して，このモデルの競争均衡である世界自由貿易均衡が存在する事を証明した。特質すべき事は，このマッケンジーの論文において初めて競争均衡の存在証明に直接的に不動点定理が用いられたという事である[3)]。

その際に，アロー‐ドブリュー (1954) は十分に大きな範囲での競争均衡が本来の競争均衡である事を示し，競争均衡の存在問題を結局はそのような十分に大きな範囲で競争均衡を見つける事に

---

1) ワルラスは数学的には方程式の数と未知数の数が同じという事から市場均衡が存在するとしていたが，そのような市場均衡は市場の価格調節機能を表す模索過程を通じで実現されると考えていた。また，カッセルモデルに経済学的に意味のある非負解が存在するかという問題は,1930 年代にツォイテン，ナイサー，フォン・シュタッケルベルグ，シュレジンガーらの一連の議論の後に，ワルトにより解決された。

2) アロー‐ドブリューで必要となるドブリュー (1952) の抽象経済におけるナッシュ均衡の存在定理は，角谷の不動点定理より一般的なアレンベルグ・モントゴメリー・ビーグルの不動点定理を用いて証明されている。しかし，ベルジュの最大値定理による最適解の上半連続性によって最適戦略対応の上半連続性 (または閉性) が成立して，そこに角谷の不動点定理を利用すれば証明できるので，アロー‐ドブリューが利用したドブリュー (1952) の抽象経済におけるナッシュ均衡の存在定理はドブリュー (1952) による本来の証明よりもはるかに容易に示せるのである。この観点より，1970 年代になってから，ソンネンシャイン‐シェイファー (1975) やゲール‐マスコーレル (1975) によって，選好の推移性を仮定しない経済における抽象経済のナッシュ均衡の存在問題が議論となったが，その証明でも用いられるのは角谷の不動点定理である。

3) 因みに，マッケンジーによると，彼がシカゴのコールズファンデーションにいる時に，非線形計画法で有名なスレーターから，角谷の不動点定理が均衡理論に何らかの形で関連があるという事を聞いて角谷の不動点定理を知ったという事である。なお，ナッシュ(1950) による非協力ゲームにおけるナッシュ均衡の存在証明も，角谷の不動点定理を利用しているが，その時点ではまだその結果がどのように競争均衡の存在証明と関連してるかが明らかではなかったので，やはり，均衡理論との直接的な関係で角谷の不動点定理を利用したのは，マッケンジー (1954) が最初であると考えていいと思われる。面白い事に，後のナッシュ(1951) やマッケンジー (1959) では，どちらの証明も角谷の不動点定理ではなくて連続関数に関するブラウワーの不動点定理を利用する形に修正されている。

帰着させた。そして，ゲール (1955) と二階堂 (1956a) は，このような観点に立脚して，十分に大きな範囲に制限した超過需要対応に対して競争均衡が存在する事を示すために必要となる道具として，ゲール・二階堂の補題を確立した。この補題の条件を超過需要対応が満たせば競争均衡が存在するのである。ゲール (1955) では KKM の補題に基づいてその証明しており，二階堂では角谷の不動点定理を利用して証明している[4)]。特に，この二階堂 (1956a) の証明は，その明晰さとその価格調節機構との関連から，その後の一般均衡理論の古典的著書であるドブリュー (1959) において，ゲール・二階堂の補題の証明として取り入れられ，同時に，ゲール (1955) や二階堂 (1956a) における競争均衡の存在証明と同様な証明方法も踏襲されている。初期の日本語で書かれた一般均衡理論に関するテキストである二階堂 (1960) でも同様である。これ以降は，この証明方法が多くのテキストにおける有限個の財が存在する市場経済の競争均衡の存在証明の主流となって，現在まで利用されている[5)]。

ところで，以上で考察している市場経済においては，財の数が有限個存在するような古典的な市場経済モデルを前提にしており，それはドブリュー (1959) によって議論されているように，財の特性，取引される場所や時点，そして不確実性の状態が全て有限であるような経済である。しかし，取引される時点や不確実性の状態が無限個あるような市場経済には，上記の結果を適用してその競争均衡の存在を示す事はできない。そのような経済はドブリュー (1954) が初めて取り扱い，無限個の財が存在するケースも含むような一般的な線形空間において，競争均衡とパレート最適性の関係に関する厚生経済学の基本定理の証明を行った[6)]。古典的な経済では財空間や価格空間が同一の有限次元ユークリッド空間であるが，ドブリュー (1954) において大事な点は，一般的な線形空間を財空間として，明示的に財空間と価格空間を区別し，これらの空間上で定義される双対写像が価格で評価した財の組合せの評価額であると解釈した事である。

ただし，ドブリュー (1954) ではこのような経済における競争均衡の存在証明は行わなかったが，無限個の財が存在する経済における競争均衡の存在問題は，後に点列の集合 s を財空間としたペレッグ - ヤーリー (1970) や本質的に有界な可測関数族 L_∞ を財空間としたビューリー (1972) によって証明された。ペレッグ - ヤーリー (1970) はコアーの非空性に関するスカーフの定理とドブリュー - スカーフ (1963) によるコアーと競争均衡に関する極限定理を利用して，その存在証明を行い，一方ビューリー (1972) は，本来の無限次元財空間経済の競争均衡が，(実現可能集合と価格集合の $*$ 弱コンパクト性によって)，有限個の財を持つ次元が有限であるような有限次元財空間経済の競争均衡からなる (有向) 点列の極限になる，という事を用いてその存在証明を行った[7)]。ビューリー

[4)] ゲールによるゲール・二階堂の補題の証明は，KKM の補題と，角谷がその不動点定理の証明で利用した，単体分割に基づくブラウワーの不動点定理による近似の手法を利用しているが，クーン (1956) はアイレンベルグ・モンドゴメリーの不動点定理を利用して直接的にゲール・二階堂の補題を証明している。しかし，二階堂で示されたように，実際には角谷の不動点定理で十分なのである。更に，宇沢-鈴村の同値定理によって，競争均衡の存在定理から角谷の不動点定理も導出できる事も判明している。これら KKM の補題，ブラウワーの不動点定理，そして，角谷の不動点定理等の内容や関連についてはボーダー (1985) において詳しく説明されている。

[5)] ゲール・二階堂の補題ではユークリッド空間の非負象限が用いられたが，この条件をより一般的な閉凸錐へ拡張したのがドブリュー (1956) であり，これらの結果は通常ゲール・二階堂・ドブリューの補題 (GND-lemma) と呼ばれている。

[6)] ドブリュー (1954) の一般的な線形位相空間における厚生経済学の第二基本定理は，後に問題となる生産集合の内部の非空性に基いて，凸集合の分離定理を利用して証明されている。二階堂 (1957b) において二階堂 (1956b) に触れている部分の内容から，二階堂 (1956b) から二階堂 (1957b) への拡張はこの内点条件にあった模様である。因みに，ドブリュー (1954) では，選好の連続性として，期待効用関数表現に関するハースタイン - ミルナー (1952) において用いられた選好の連続性を利用していて，通常の選好の上 (下) 半連続性よりも弱い連続性を利用している。なお，ドブリュー (1954) は二階堂 (1956b,57b,59) のどの参考文献にも掲載されていない。

[7)] ビューリー (1972) の証明では，有限次元財空間の均衡価格を全空間に拡張するために Krein - Rutman(1948) の結果を利用しているが，この論文は二階堂 (1957b) でも参考文献の 1 つとして掲載されている。ただし，二階堂 (1957b) の本文の中でどのように使われているかは不明確である。また，L_∞ はその正象限が $||\cdot||_\infty$− ノルム位相で内点を持つので凸集合の分離定理の利用にあまり問題は起きないが，s はその正象限が直積位相では内点を持たないので，凸集合の分

(1972) のオリジナル (1969,92) では，パレート最適性と競争均衡に関する厚生経済学の第二基本定理を利用して有限個の財が存在する市場経済における競争均衡の存在を示した根岸 (1960) の手法に沿って，その存在証明を行った[8)]。その後この問題は，無限次元財空間モデルにおける競争均衡の存在問題として，1980 年代の一般均衡理論の 1 つの主要な話題として，数多くの論文で取り上げられて議論された[9)]。

古典的な有限個の財が存在する市場経済における競争均衡の存在証明において，ゲール (1955) や二階堂 (1956a) が行ったように，無限次元財空間モデルの競争均衡の存在証明を，ゲール・二階堂の補題に基づいて証明するという事も考えられる。そのためには無限次元でのゲール・二階堂の補題が必要であるが，それが二階堂 (1956b,57b,59) の主要な目的である。前二者は無限次元ノルム空間を利用し，後者は更に局所凸線形位相空間へ拡張した[10)]。

前二者では，無限次元の財空間を持つ無限次元経済の均衡集合を，超過供給対応の像の (∗弱) コンパクト性に基づいて，有限個の財を持つ有限次元部分経済の競争均衡集合からなる有限交差族を利用して，その証明を行っている。有限次元の結果を利用した近似による手法を利用するという点でビューリー (1972) とある意味で同様であり，この証明は大変に簡易で理解しやすい。ビューリー (1972) では有限次元部分経済に有限次元財空間経済の競争均衡の存在定理を適用しているのに対して，二階堂 (1956b,57b) では有限次元部分経済に有限次元財空間経済のゲール・二階堂の補題を適用しているのである。そして，二階堂 (1959) では一般的な線形位相空間におけるナッシュ均衡の存在やミニマックス定理等を含む，かなり一般的な結果を証明してから，その結果を利用して前二者と同様な手法でその証明を行っている。しかし，その最初の一般的な結果の証明は煩雑である[11)]。

1980 年代以降に発展した無限次元財空間モデルの議論では，不思議な事に，二階堂 (1956b,57b,59) には全く触れられていない[12)]。理由として幾つかあると思われる。まずは，二階堂 (1956b,57b) がディスカッションペーパーであってどの雑誌にも掲載されて発表されなかった事である。特に，(1956b) の論文名に無限個の財が存在する経済の競争均衡の存在という言葉が明示的に入っていたので，何らかの形で英文雑誌に掲載されていれば後の無限次元財空間モデルの文献に貢献していたと思われる。一方，二階堂 (1959) は日本の英文の数学雑誌には掲載されたが，一般的な線形位相空間におけるナッシュ均衡の存在やミニマックス定理等を含むより一般的な結果を示してから，その結果に基づいて無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題を証明しているが，無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題それ自身を主要な題材とはしていないために論文名に無限次元財空間モデルの競争均衡の存在を想定させる部分が入っておらず，その結果として無限次元財空間モデルにおける競争均衡の存在に関連するものとして促えられなかったからではないかと思われる[13)]。特に，二階堂 (1959) は，ドブリュー (1959) の後の一般均衡論の著名なテキストで

離定理を利用する際には，ペレッグ - ヤーリ (1970) が行ったように，上手く工夫を施す必要がある。

8) ビューリー (1992,69) では純粋交換経済を利用したが，マギール (1981) では，生産経済のケースのビューリー (1972) の結果を，根岸 (1960) の手法を利用して証明した。

9) マスコーレル-ゼーム (1991) による概説論文やアリプランティス等 (1989) による書籍によって，無限次元財空間モデルにおける競争均衡の存在問題は，現在では詳しく解説されている。

10) 二階堂 (1956b) は二階堂 (1957a) の参考文献で挙げられているが，残念ながら筆者はその実物を目にしてはいない。しかしながら，二階堂 (1957b) では，この論文が二階堂 (1956b) の改訂版と述べていて，その中で二階堂 (1956b) に触れている内容から判断すると，二階堂 (1956b) の結果を窺い知る事が出来る。

11) 二階堂 (1957b) の注 (2 において，そこで用いたノルム空間のケースの結果が容易に一般的線形位相空間にまでも拡張できると述べているが，二階堂 (1959) ではこの線に沿って二階堂 (1957b) の証明をそのまま拡張するという方針は取られなかった。そこで，久保田 (2006) では二階堂 (1959) のモデルの超過供給対応を二階堂 (1957b) と同様に凸値として，二階堂 (1957b) の証明方針に沿って二階堂 (1959) の無限次元のゲール・二階堂の補題を証明している。

12) 最近の浦井 (2000) だけが唯一の例外である。

13) 実際，無限次元財空間における均衡の存在というような題名を持つ Bojan(1974) や Elbarkoky(1977)(原文ロシア語)

ある二階堂 (1968) の参考文献に掲げられているので，二階堂 (1959) の論文名に無限次元財空間における競争均衡の存在を想定させる部分があれば，多くの一般均衡論の専門家の目に触れて，二階堂 (1959) による無限次元のゲール・二階堂の補題が，もっと世に知られていたのではないかと思われる[14)]。

更に，二階堂 (1956b,57b,59) では，そこで証明した無限次元のゲール・二階堂の補題を適用する事でその競争均衡の存在が示せるような無限次元財空間モデルの例を何ら与えていないので，この事もまた理由の 1 つになったのではないかと思われる。有限次元のケースのゲール (1955) や二階堂 (1956a) では，ゲール・二階堂の補題はそれ自身が議論の目的ではなくて，それを利用して古典的な有限次元財空間のモデルにおける競争均衡の存在を示すというのが目的である。したがって，無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題の結果と証明と共に，その結果を利用して証明できる無限次元財空間を持つ経済モデルの例を取り上げていれば，より望ましかったと考えられる。

そこで本稿では，l_∞ を財空間とする簡略化されたビューリー (1972) の無限次元財空間モデルを一例に取り上げて，古典的な有限次元のケースと同様にして，二階堂 (1956b,57b,59) において示されたような無限次元のゲール・二階堂の補題を適用してその競争均衡の存在を示す。ただし，二階堂 (1956b,57b,59) で利用された線形位相とビューリー (1972) で利用された線形位相に少し違いがあるために，無限次元のゲール・二階堂の補題を適用する際には，本来の二階堂 (1956b,57b,59) の無限次元のゲール・二階堂の補題をそのまま利用する事は出来ず，若干修正する必要が起こる。そこで本稿では，同様の問題意識を持つフローレンザーノ (1983) の議論を参考にして，修正された二階堂 (1956b,57b,59) の無限次元のゲール・二階堂の補題を確立する。この補題を利用すれば，古典的な有限次元のケースと同様な議論の進め方に沿って，簡略化されたビューリー (1972) のモデルにおける競争均衡の存在を示す事ができる[15)]。

この修正された無限次元のゲール・二階堂の補題を利用して，簡略化されたビューリー (1972) のモデルにおける競争均衡の存在を示す際には，古典的な有限次元のケースと同様に，この無限次元経済を十分に大きい範囲に制限した経済の超過需要対応を利用する。ただ，二階堂 (1956b,57b,59) での線形位相とビューリー (1972) の線形位相の若干の違いによって，超過需要対応が価格集合全体で定義できるとは限らず，超過需要対応をそれが非空値として定義されている価格の集合から，それを含む（価格の）集合へ拡張する必要が起こる。この点を考慮すると，二階堂 (1956b,57b,59) の元来の無限次元のゲール・二階堂の補題をそのまま利用する事は出来ず，同一の証明方法を利用するが，少し修正を加える必要が起こる[16)]。そして，この修正された無限次元のゲール・二階堂の補題を，l_∞ を財空間とする簡略化されたビューリー (1972) の経済モデルへ適応して，その経済に

といった論文は，マスコーレル-ゼーム (1991) の概説論文も含めて，この分野の 1980 年代以降の文献の参考文献に度々引用されている。

14) 80 年代の無限次元財空間モデルの初期の文献であるアリプランティス-ブラウン (1983) も，市場超過需要関数に関する顕示選好の議論との関連で，二階堂 (1968 第 6 章) の市場超過需要関数の粗代替性で扱われた顕示選好の議論を利用していて，二階堂 (1968) に言及している。したがって，二階堂 (1959) の論文名が無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題を示唆するようなものであれば，必ずアリプランティス-ブラウン (1983) によって取り上げられたはずである。

15) フローレンザーノ (1983) においても，無限次元のゲール・二階堂の補題を利用した同様な議論によって，ビューリー (1972) モデルにおける競争均衡の存在定理が与えられている。フローレンザーノ (1983) は純粋交換経済を利用したが，本稿では生産経済を利用する。

16) フローレンザーノ (1983) もこの点を考慮して議論している。もしも二階堂先生が二階堂 (1956b,57b,59) の結果を利用してその競争均衡の存在が示せるような無限次元経済モデルの例を考えていれば，この点をどのように修正したのか興味がある所である。本稿で扱う l_∞ を財空間とする経済モデルは，二階堂 (1956b,57b,59) の中の一番最初の二階堂 (1956b) の結果を修正すれば得られるので，二階堂 (1957b,59) という方向へ議論を発展させると同時に，l_∞ を財空間とする経済モデルへ実際にその結果を適用して競争均衡の存在を示すという方向へも進んでいれば，面白い結果が得られていたと考えられる。

競争均衡が存在する事を示す。これによって，二階堂 (1956b,57b,59) においては行われなかった，そこで示された結果を利用する事でその競争均衡の存在が示せるような無限次元財空間経済モデルの具体例を，構成した事になる。この点が本稿の役割で，二階堂 (1956b,57b,59) を補完する役割は十分に達成したと考えられる。

２．無限次元経済モデルのゲール・二階堂の補題：モデル

まず本稿では，l_∞ を財空間とする簡略化されたビューリー (1972) の経済モデルにおける競争均衡の存在証明に適用可能な，無限次元のゲール・二階堂の補題を示す必要があり，本節ではそのために必要となるモデルの枠組みを与える。その証明は後の二つの節で行う。そして，その後の第 6 節において，l_∞ を財空間とする簡略化されたビューリー (1972) の経済モデルを構成し，本稿で示す無限次元のゲール・二階堂の補題を利用して，その経済における競争均衡の存在を証明する。ここで，l_∞ は有界数列の集合で $||\cdot||_\infty-$ ノルムを伴った無限次元ノルム空間であり，この l_∞ は総和可能な数列の集合 l_1 のノルム双対空間で $l_\infty = (l_1, ||\cdot||_1)^*$ である[17)]。一方，l_∞ のノルム双対空間は ba という (N 上の) 有界な有限加法的測度で $ba = (l_\infty, ||\cdot||_\infty)^*$ である[18)]。財空間としては l_∞ を利用して，価格空間として ba を利用する。l_∞ を財空間とする経済モデルを分析する第 6 節において，l_1 の価格集合上では超過需要対応が非空となる事を示すが，ba の価格集合上では非空となるとは限らない[19)]。経済学的な観点からは l_1 を価格集合として利用する方がいいのであるが，ビューリー (1972) 以降，ba を l_∞ 上で定義された経済モデルの価格空間としてそこから均衡価格を見つけ，その後で ba 内の均衡価格から l_1 内の均衡価格を最終的に構成するという，二段階の順序で議論を進める[20)]。

以下では，これらの事を考慮しながら二階堂 (1959，第 5 節) に沿って無限次元のゲール・二階堂の補題を議論するために必要となるモデルを構成してその解説を行う[21)]。E をある 1 つの実ハウスドルフ局所凸線形位相空間とする[22)]。この線形位相を τ とすると，この線形位相については，凸平衡な集合から構成される原点の基本近傍系が存在する[23)]。E 上の τ に関して連続な線形汎関数の集合である E の双対空間を E^* とする。この時，$(\cdot,\cdot) : E \times E^* \to R, (x,p) \in E \times E^* \to x \cdot p$

---

17) l_∞ は $||x||_\infty = \sup_{t\in N} |x_t|$ によってノルム空間になり，また，l_1 は $||x||_1 = \Sigma_{t=1}^{\infty}|x_t|$ によってノルム空間になる。この時，$int_{||\cdot||_\infty}(l_\infty^+) \neq \emptyset$ であるが，$int_{||\cdot||_1}(l_1^+) = \emptyset$ である。更に，双対写像 $(\cdot) : l_\infty \times l_1 \to R$ は，l_∞ には $*$ 弱位相 $(\sigma(l_\infty, l_1))$，l_1 には $||\cdot||_1-$ ノルム位相を与えると，$||\cdot||_\infty-$ 有界集合 B と l_1 の直積集合 $B \times l_1$ 上では，直積位相 $(\sigma(l_\infty, l_1) \times ||\cdot||_1)$ に関して連続になり，故に，p と x の両変数について同時的に連続になる。これに付いては，例えば，アリプランティス-ボーダー (1999 系 6.47 p.260) を参照。特に，R^n を l_1 の部分集合とみなせば，双対写像 $(\cdot) : l_\infty \times R^n \to R$ も $B \times R^n$ 上で p と x の両変数について同時的に連続になる。また，l_1 が可分なノルム空間なので，l_∞ のノルムに関する閉球 B 上では，$*$ 弱位相 $(\sigma(l_\infty, l_1))$ は距離付け可能であり，B の中では $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1))$ 閉包は全て点列の極限によって特徴付けられる。これに付いては，例えば，宮島 (2005 定理 2.105 p.162) を参照。

18) バナッハ極限は ba には属するが l_1 には属さないので $ba \backslash l_1 \neq \emptyset$ である。吉田 − ヒュイットの分解定理によって，ba の要素は l_1 の要素とそれ以外の純粋有限加法的測度に分解される。この純粋有限加法的測度はもちろん $||\cdot||_\infty-$ ノルムに関して連続であるが，l_∞ の点に対してその任意有限個の成分を 0 に置き換えてもその値は変わらないという性質を持っている。純粋有限加法的測度の典型例がバナッハ極限である。この分解定理については，日本語では藤田－吉田 (1991, 定理 7.15,P.405) を参照。

19) 二階堂 (1956b,57b,59) の結果では，ba を利用した線形位相を選んで議論を進めているが，ここでは l_1 を利用した線形位相を選んで議論を進めて行くために，フローレンザーノ (1983) で用いられたのと同様の議論に沿った修正が必要となる。これに付いては以下で議論する。

20) フローレンザーノ (1983) でも，ba に均衡価格を見つけてから先の議論は，ビューリー (1972) の議論を利用すればいいと述べているだけである。本稿でも ba から l_1 に属する均衡価格を構成する議論は行わない。これについては，ビューリー (1972)，プレスコット - ルーカス (1972)，または，久保田 (2004) を参照。

21) 必要に応じて二階堂 (1957b) で触れられた議論も取り入れる。

22) 二階堂 (1956b,57b) では E として (無限次元) ノルム空間が使われていたが，二階堂 (1959) ではより一般的な線形位相空間が使われる事になった。

23) 線形位相なので，線形空間としてのベクトル演算がこの位相に関して連続となるが，局所凸線形位相は更に半ノルム族によって生成される位相として特徴付ける事が出来る。

を，$E\times E^*$ 上で定義された双線形関数とすれば，$p\in E^*$ に対して $(\cdot,p):E\to R$ を連続にするような E 上の最弱の (局所凸) 線形位相が E の弱位相 $\sigma(E,E^*)$ であり，最強の (局所凸) 線形位相がマッキー位相 $\tau(E,E^*)$ である[24)]。また，対応する E^* 上の最弱の線形位相，つまり，$x\in E$ に対して $(x,\cdot):E^*\to R$ を連続にするような E^* 上の最弱の線形位相が E^* の $*$ 弱位相 (または汎弱位相)$\sigma(E^*,E)$ であり，E^* 上の最強の線形位相，つまり，$x\in E$ に対して $(x,\cdot):E^*\to R$ を連続にするような E^* 上の最強の線形位相が E^* のマッキー位相 $\tau(E^*,E)$ である[25)]。この E に対しては，ある局所凸線形位相空間 $({}^-E,{}^-\tau)$ が存在して，E が ${}^-E$ 上の ${}^-\tau$ に関して連続な線形汎関数の集合である ${}^-E$ の双対空間 $({}^-E,{}^-\tau)^*$，つまり，$E=({}^-E,{}^-\tau)^*$ となっているとする。この事は ${}^-E\subset E^*$ と想定できる。E の線形構造と整合的な擬順序を $\geq$ とすると，それは E のある (原点を頂点とした) 凸錐 P を用いて $x\geq y\Leftrightarrow x-y\in P$ として特徴付けられる。この凸錐 $P=E^+=\{x\in E:x\geq 0\}$ を E の正錐という[26)]。そして，この E の順序 $\geq$ を利用して，E^* 上の順序 $\geq$ を，$p\geq q\Leftrightarrow p\cdot x\geq q\cdot x\ \forall x\in E^+$ によって定義し，$(E^*)^+=\{p\in E^*:p\geq 0\}$ を E^* の正錐とする[27)]。

凸錐 $P(\subset E)$ に対して，その ${}^-E$ における双対錐 $({}^-P)^*$ を $({}^-P)^*=\{p\in({}^-E):x{\cdot}p\leqq 0\ \forall x\in P\}$ とする。${}^-E$ の弱位相 $(\sigma({}^-E,E))$ の定義より各 $x\in P$ は ${}^-E$ の弱位相 $(\sigma({}^-E,E))$ で連続な線形汎関数なので，その連続性より $({}^-P)^*$ は弱 $(\sigma({}^-E,E)-)$ 閉である。更に，P の (${}^-E$ を利用した) 第二双対錐 $({}^-P)^{**}$ を $\{x\in E:x\cdot p\leqq 0\ \forall p\in({}^-P)^*\}$ とする。E の $*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^-E)-)$ の定義より各 $p\in({}^-P)^*$ は E の $*$ 弱 $(\sigma(E,{}^-E)-)$ 連続な線形汎関数なので，その連続性より $({}^-P)^{**}$ は $*$ 弱 $(\sigma(E,{}^-E)-)$ 閉である[28)]。E における一つの凸錐 P に対して，$<({}^-P)^*>=({}^-P)^*\backslash\{0\}(\subset({}^-E))$

24) この時，マッキー-アレン定理より，$\sigma(E,E^*)\leqq\tau\leqq\tau(E,E^*)$ となる事が知られている。そして，分離定理よりこれらの線形位相は同一の閉凸集合族とを持ち，また，マッキー定理より同一の有界集合族を持つ事が知られている。$\sigma(E,E^*)$ は半ノルム族として $\{|x\cdot p|:p\in E^*\}$ を利用して生成される線形位相であり，$\tau(E,E^*)$ は，直ぐ後で述べる $*$ 弱位相 $\sigma(E^*,E)$ を用いて，$\{\sup_{p\in V^*}|x\cdot p|:V^*\subset E^*,V^*$ は凸平衡 $\sigma(E^*,E)-$ コンパクト集合 $\}$ を半ノルム族として利用して生成される線形位相である。

25) 数理経済学の文献で最初に線形位相空間を用いたのはドブリュー (1954) と思われるが，弱位相や $*$ 弱位相等，その線形位相の性質については明示的に述べていない。それに対して，二階堂 (1956b,57b) では (無限次元) ノルム空間を利用してはいるが，その弱位相や $*$ 弱位相を用い，更には，双対空間の単位球が $*$ 弱位相でコンパクトであるというバナッハ・アラオグルーの定理も利用している。因みに，1953 年の日付のある，期待効用理論に関するハースタイン-ミルナー (1953) で著名なハースタインによって書かれたコウルズコミッションのディスカッションペーパー (数学) は，バナッハ空間の弱位相，$*$ 弱位相，アラオグルーの定理等の基本的な性質や命題を解説している。マッキー位相は $l_\infty^*=ba$(有限加法的測度族) の分解定理である吉田・ヒューイットの分解定理と共に，ビューリー (1972) で明示的に利用され，それ以降数理経済学で頻繁に利用される事となった。弱位相と $*$ 弱位相や吉田・ヒューイットの分解定理は，例えばヒルデンブランド (1974) でも利用されている。二階堂 (1956b,57b,59) では線形位相に関してブルバキ (位相線形空間) に触れていて，この本ではマッキー位相に関するマッキー定理が述べられているが，二階堂 (1956b,57b,59) ではマッキー位相には全く触れられていない。

26) ここで擬順序とは，反射性と推移性を満たす二項関係であり，それが線形構造と整合的という意味は，この擬順序 $\geq$ が $x\geq y\to x+z\geq y+z\ \forall z\in E$，そして $x\geq y\to\lambda x\geq\lambda y\ \forall\lambda>0$ を満たすという事である。この擬順序 $\geq$ が付いた線形空間 E を順序線形空間とい，更に，E の正錐 E^+ が $\tau-$ 閉集合の時に，順序線形空間 E を順序線形位相空間という。

27) これらの関係は，(E,τ) が $(l_\infty,||\cdot||_\infty)$ に，E^* が ba に，そして，$({}^-E,{}^-\tau)$ が $(l_1,||\cdot||_1)$ に，それぞれ対応している。l_1 の順序 $\geq$ は $p=(p_t)\geq p'=(p'_t)\Leftrightarrow p_t\geq p'_t\ \forall t=1,2,\cdots$，$l_\infty$ の順序 $\geq$ は $x=(x_t)\geq x'=(x'_t)\Leftrightarrow x_t\geq x'_t\ \forall t=1,2,\cdots$ であり，$l_1^+=\{p\in l_1:p\geq 0\}$，$l_\infty^+=\{x\in l_\infty:x\geq 0\}=\{x\in l_\infty:(x,p)\geqq 0\ \forall p\in l_1^+\}$ となる。$x(p)\geqq 0,x(p)\neq 0$ の時に $x(p)>0$ とする。この時，$e=(1,1,\cdots)\in int_{||\cdot||_\infty}(l_\infty^+)$ なので $int_{||\cdot||_\infty}(l_\infty^+)\neq\emptyset$ である。また，$ba^+=\{\pi\in ba:(x,\pi)\geq 0\ \forall x\in l_\infty\}$ として与えられる。

28) 二階堂 (1957b,59) も含めて通常は次のようにする。凸錐 $P(\subset E)$ に対して，その双対錐 P^* を $\{p\in E^*:x\cdot p\leqq 0\ \forall x\in P\}$ と定義し，更に，P の第二双対錐 P^{**} を $\{x\in E:x\cdot p\leqq 0\ \forall p\in P^*\}$ と定義する。この時には，E^* の $*$ 弱位相 $(\sigma(E^*,E))$ の定義より各 $x\in P$ は E^* の $*$ 弱 $(\sigma(E^*,E)-)$ 連続な線形汎関数なので，その連続性より P^* は $*$ 弱 $(\sigma(E^*,E)-)$ 閉である。また，E の弱位相 $(\sigma(E,E^*))$ の定義より各 $p\in P^*$ は E の弱 $(\sigma(E,E^*)-)$ 連続な線形汎関数なので，その連続性より P^{**} は弱 $(\sigma(E,E^*)-)$ 閉である。しかし，最終的に l_1 から均衡価格を見つけるために l_1 に基づいた線形位相を利用するという視点から，ここでは本文のように E^* ではなくて ${}^-E$ を利用する形にした。因みに，二階堂 (1957b,59) では，以下の補題 6 までの $\sigma(E,{}^-E)$ と $({}^-P)^*$ に対応する部分が τ と P^* で成立する事を示している。第 5 節において，τ と P^* を用いた本来の補題 5 も利用する。

として非ゼロな $p \in ({}^-P)^*$ の集合とする。局所凸線形位相空間 E をその財空間として，その市場経済モデルにおける超過需要対応を $\phi :< ({}^-P)^* >\to E\backslash\{\emptyset\}$ とする[29]。すると問題は，有限次元のケースと同様にして，どのような条件の下で $(\phi(\overline{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となる $\overline{p} \in< ({}^-P)^* >$ が存在するか，という事である。そして，その条件を与えるのが，本稿で考察する修正された二階堂のゲール・二階堂の補題の最初のものである。ここでは，各 $p \in< ({}^-P)^* >$ に対して $\phi(p) \neq \emptyset$ としている[30]。そして，l_∞ を財空間とする簡略化されたビューリー (1972) の経済モデルに，無限次元のゲール・二階堂の補題を適用してその競争均衡の存在を示す際には更なる修正が必要となり，それが本稿で考察する修正された二階堂のゲール・二階堂の補題の二番目のものである。これはフローレンザーノ (1983) によるゲール・二階堂の補題に対応している。

３．幾つかの補題

この節では，修正された無限次元におけるゲール・二階堂の補題を証明するために必要となる幾つかの補題を確立する。局所凸線形位相空間 E に対して以下の結果が成立する。

補題１ E と同一でない $*$ 弱 $(\sigma(E,{}^-E)-)$ 閉凸錐 P に対して，$({}^-P)^*$ は 0 以外の点を含む[31]。

補題２ P を E における一つの凸錐とすると，$x \in cl_{\sigma(E,{}^-E)}(P)$ となる必要十分条件は任意の $p \in ({}^-P)^*$ に対して $x \cdot p \leqq 0$ となる事である[32]。

補題３ E における凸錐 P の内点 ($*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^-E))$ に関する) を u とすると，任意の非 0 な $p \in< ({}^-P)^* >$ に対して $u \cdot p < 0$ となる[33]。

また，E または ${}^-E$ における凸錐 P は，それが 0 を除いては x と $-x$ を同時に含まない時に尖っている ($Pointed$) といわれる。つまり，凸錐が原点を通る直線を含まず，$P \cap (-P) = \{0\}$ となるという事である。するとこの時に以下の結果が成り立つ。

補題４ もしも E における凸錐 P の ($*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^-E))$ に関する) 内部が非空ならば，$({}^-P)^*$ は尖っている[34]。

補題５ もしも E における凸錐 P の内部 ($*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^-E)$ に関する) が非空でしかも $cl_{\sigma(E,{}^-E)}(P)$ が E と同一でないならば，$< ({}^-P)^* >$ は非空で凸である[35]。

---

29) 二階堂 (1956b,57b,59) では超過需要対応を $\phi :< (P)^* >\to E\backslash\{\emptyset\}$ としているが，ここでは $\phi :< ({}^-P)^* >\to E\backslash\{\emptyset\}$ としている。

30) l_∞ に $*$ 弱位相 $(\sigma(l_\infty, l_1))$ を利用すると，$< ({}^-P)^* >$ 上で超過需要点が非空になる事が示せるが，弱位相 $(\sigma(l_\infty, ba))$ を利用しても望ましいコンパクト性が成立しないので，$< (P)^* >$ 上で超過需要点が非空になる事は示せない。無限次元財空間モデルの文献では，(超過) 需要関数が価格集合全体で定義されず，ある価格に対して需要点が決められないような例が様々指摘されている。

31) 凸集合に関する分離定理の一形式による。二階堂 (1957b 補題 2) や二階堂 (1959 補題 4) を参照。ここでは，そこで用いられた位相として $*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^-E))$ を利用している。

32) 凸錐と第二双対錐に関する双対定理より $cl_{\sigma(E,{}^-E)}(P) = ({}^-P)^{**}$ である。二階堂 (1957b 補題 3) や二階堂 (1959 補題 5) を参照。ここでは，そこで用いられた位相として $*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^-E))$ を利用している。

33) $p(\neq 0) \in ({}^-P)^*$ に対して $u \cdot p = 0$ とすると，$(\cdot, p)$ の $*$ 弱 $(\sigma(E,{}^-E))$ 連続性と $u \in int_{\sigma(E,{}^-E)}(P)$ より，ある $u' \in P$ に対して $u \cdot p > 0$ となって $p \in ({}^-P)^*$ に矛盾するからである。二階堂 (1957b 補題 1) や二階堂 (1959 補題 6) を参照。ここでは，そこで用いられた位相として $*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^-E))$ を利用している。

34) $p \in ({}^-P)^*\backslash\{0\}$ とし，また，P の $*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^-E))$ に関する内点の一つ u を取る。すると，補題 3 より $-u \cdot p > 0$ となって，$-u \notin ({}^-P)^*$ であり，$({}^-P)^*$ は尖っている。二階堂 (1957b 補題 4) や二階堂 (1959 補題 7) を参照。ここでは，そこで用いられた位相として $*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^-E))$ を利用している。

35) $*$ 弱閉凸錐 $cl_{\sigma(E,{}^-E)}(P)$ が E と同一でないので補題 1 より $< ({}^-(cl_{\sigma(E,{}^-E)}(P)))^* >\neq \varnothing$ となる。$P \subset$

E における $*$ 弱位相 $(\sigma(E,^-E))$ を利用して，P が $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 閉凸錐で $P\cap(-P)\neq P$ となっているとする。$P\cap(-P)$ は P に含まれる最大の線形部分空間なので，この条件は P が線形部分空間でない事を表している。また，もしも P が (E における) 内点を含んでいれば，この事は $P\neq E$ と同値になる。しかし，以下では $P\cap(-P)\neq P$ となっている一般的な P が，非空な $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 内部を持ち E と一致しないような凸錐によって近似される事を示す。最初に $u\in P\backslash(P\cap(-P))$ を任意に 1 つ選ぶ。この時，$u\neq 0$ である。すると $*$ 弱位相 $(\sigma(E,^-E))$ は E 上の 1 つの局所凸線形位相なので，$-u\notin P$ と P の $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 閉性より，0 のある凸平衡 $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 近傍 U を選べば，$(-u+U)\cap P=\varnothing$ となる。そこで，$V(\subset U)$ となる 0 の任意の凸平衡 $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 近傍 V に対して，$Q(V)$ を $u+V$ によって張られる凸錐 $\cup_{\lambda>0}\lambda(u+V)$ として，$P(V)=cl_{\sigma(E,-E)}(P+Q(V))(\supset P)$ とする。すると，$P(V)$ は $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 閉であり，しかも $(u+V)\subset Q(V)\subset P(V)$ なので $P(V)$ の $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 内部は非空となる。この時，次の補題が成立する。

補題６ (i) $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ に関する 0 の任意の凸平衡近傍 $V(\subset U)$ に対して，$-u\notin P(V)$，
(ii) $P=\cap\{P(V):*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ に関する 0 の任意の凸平衡近傍 $V(\subset U)\}$[36]。

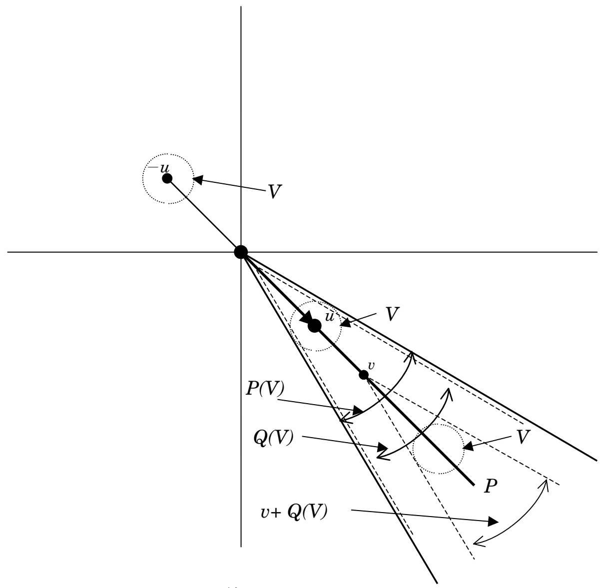
補題 6 においては，$P(V)$ は $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 閉であり，しかも $-u\notin P(V)$ なので $P(V)\neq E$ であり，したがって，$P(V)$ に対して補題 4,5 が適用可能になる。

ここで，対応 (多価写像) の上半連続性と閉性に関して議論する。S と X を二つのハウスドルフ空間として $\varphi:S\to X\backslash\{\emptyset\}$ を集合値写像（対応）とする。この時，(1)：任意の $p\in S$ と任意の開近傍 $U(\varphi(p))$ に対して p のある開近傍 $V(p)$ が存在して任意の $q\in V(p)$ に対して $\varphi(q)\subset U(\varphi(p))$ となる時に，φ は上半連続 $(u.h.c)$ と呼ばれる[37]。また，(2)：φ のグラフ $G_\varphi=\{(p,x)\in S\times X: x\in\varphi(p)\}$ が $S\times X$ の直積位相で閉集合となる時に，φ は閉 $(closed)$ と呼ばれる。連続関数の定義より，連

$(cl_{\sigma(E,-E)}(P))$ より $(^-(cl_{\sigma(E,-E)}(P)))^*\subset(^-P)^*$ なので，$p\in<(^-(cl_{\sigma(E,-E)}(P)))^*>$ とすれば $p\neq 0$ で $p\in(^-P)^*$ となって，$p\in<(^-P)^*>\neq\varnothing$ となる。次に，$p,q\in<(^-P)^*>,\lambda\in(0,1)$ とする。まず $(^-P)^*$ の凸性によって，$\lambda p+(1-\lambda)q\in(^-P)^*$ となる。そして，$u\in int_{\sigma(E,-E)}(P)$ とすると，補題 3 より $u\cdot p<0, u\cdot q<0$ となるので，$u\cdot(\lambda p+(1-\lambda)q)=\lambda(u\cdot p)+(1-\lambda)(u\cdot q)<0$ となり，故に，$\lambda p+(1-\lambda)q)\neq 0$ で $\lambda p+(1-\lambda)q)\in<(^-P)^*>$ となって，$<(^-P)^*>$ は凸である。二階堂 (1959，補題 8) では $int_\tau(P)$ が E と同一でないとしているが，ここでは τ を $\sigma(E,^-E)$ に，そして，$cl_{\sigma(E,-E)}(P)$ が E と同一ではない，とした。第 5 節では，τ を用いる本来の結果も利用する。

36) 二階堂 (1957b, 補題 7) や二階堂 (1959, 補題 8)。ここでは，そこで用いられた位相として $*$ 弱位相 $(\sigma(E,^-E))$ を利用している。証明は以下の通りである。まず以下では，近傍は全て $*$ 弱 $(\sigma\left(E,^-E\right)-)$ に関するとする。(i) の証明：$-u\in P(V)$ としてみる。すると，ある $x\in P,\lambda\geqq 0,a,b\in V$ に対して $-u=x+\lambda(u+a)+b$ となる。したがって，$-u=x/(1+\lambda)+\lambda a/(1+\lambda))+b/(1+\lambda)$ となる。この時，P が錐なので $x/(1+\lambda)\in P$ で，更に，V の凸性によって $[\lambda a/(1+\lambda))+b/(1+\lambda)]\in V$ である。故に，V の平衡性により $(-u+V)\cap P\neq\varnothing$ となって，$V\subset U$ より $(-u+U)\cap P\neq\varnothing$ となるが，これは U の選び方に矛盾する。(ii) の証明：0 の任意の凸平衡近傍 $V(\subset U)$ に対して $P(V)$ の定義より $P(V)\supset P$ なので $P\subset\cap\{P(V):0$ の任意の凸平衡近傍 $V(\subset U)\}$ である。そこで，0 の任意の凸平衡近傍 $V(\subset U)$ に対して $y\in P(V)$ となるが $y\notin P$ となるとする。まず，$y\in P(V)$ より，ある $x_V\in P,\lambda_V\geqq 0,a_V,b_V\in V$ に対して $y=x_V+\lambda_V(u+a_V)+b_V$ となる。すると，$y-(x_V+\lambda_V u)=\lambda_V a_V+b_V=c_V$ となるが，P が凸錐なので $x_V+\lambda_V u\in P$ である。$y\notin P$ なので P の $(\tau-)$ 閉性より，0 のある凸平衡的近傍 $W\subset U$ を選んで，$(y+W)\cap P=\varnothing$ とできる。この時，$y+c_V=(x_V+\lambda_V u)\in P$ なので，$c_V\notin W$ である。この時，最初に，$\lambda_V\to\infty(V\to 0)$ を示す。n を任意に固定して，任意の $V\subset W/n$ に対して $\lambda_V>n-1$ を示せばよい。V の凸性によって $c_V/(1+\lambda_V)=[\lambda_V a_V/(1+\lambda_V))+b_V/(1+\lambda_V)]\in V\subset W/n$ であり，故に，$c_V\in W(1+\lambda_V)/n$ となる。しかし，$c_V\notin W$ なので，$(1+\lambda_V)/n>1$ でなくてはならず，$\lambda_V>n-1$ となる。そして，$c_V/(1+\lambda_V)\in V$ なので $c_V/\lambda_V=y/\lambda_V-(x_V/\lambda_V+u)\in(1+1/\lambda_V)V$ であり，$x_V/\lambda_V+u\in y/\lambda_V+(1+1/\lambda_V)V$ となる。そして，$V\downarrow 0$ とすると $\lambda_V\to\infty$ となるので $y/\lambda_V+(1+1/\lambda_V)V\to 0$ となり，故に，$x_V/\lambda_V+u\to 0$，つまり，$\lim_{V\downarrow 0}x_V/\lambda_V=-u$ となる。すると，P が錐なので $x_V\in P$ より $x_V/\lambda_V\in P$ となるので，故に，$\lim_{V\downarrow 0}x_V/\lambda_V=-u\in cl_{\sigma\left(E,^-E\right)}(P)=P$ となるが，これは $-u\notin P$ に矛盾する。したがって，$P\supset\cap\{P(V):*$ 弱 $(\sigma\left(E,^-E\right)-)$ に関する 0 の任意の凸平衡近傍 $V(\subset U)\}$ となって，故に，$P=\cap\{P(V):*$ 弱 $(\sigma\left(E,^-E\right)-)$ に関する 0 の任意の凸平衡近傍 $V(\subset U)\}$ となる。

37) $\varphi(p)$ を含む任意の開近傍 $U(\varphi(p))$ に対してではなくて，$\varphi(p)$ を含む任意の開半空間 $H(\varphi(p))$ に対して同様な結果が



第 1 図

続関数はそれを対応とみなすと上半連続と同値であり，また，閉でもある。二つの上半連続対応の合成写像もまた上半連続である。これらの上半連続性と閉性という条件は一般には同値ではないが，条件を付け加える事によって両者の関係を特徴付ける事が出来る。それに関して次の結果が成立する。

補題 7　S をコンパクトとする。すると，次の二つの条件は同値である。(a) : φ は上半連続であり，全ての $\varphi(p)$ がコンパクトである。(b) : φ は閉であり，X のコンパクト集合 T が存在して $\cup_{p\in S}\varphi(p) \subset T$ となる[38]。

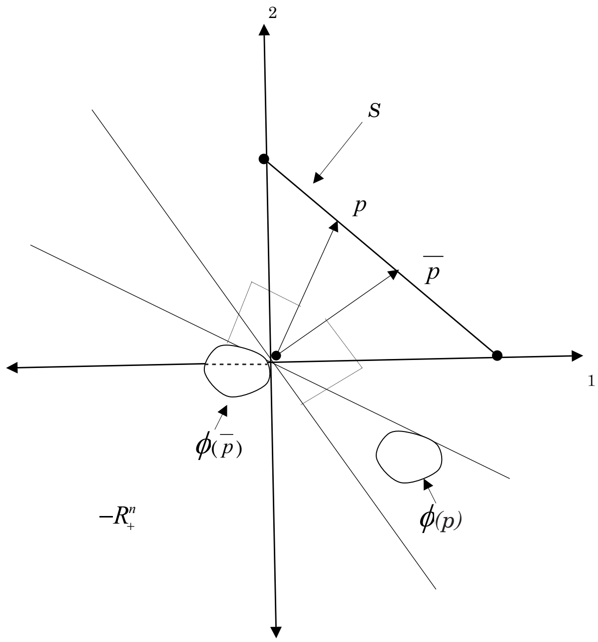
本稿では二階堂 (1957b) の証明に従うが，そこでは二階堂 (1956a) で示された，$n-$ 次元ユークリッド空間 (有限次元部分空間) におけるゲール・二階堂の補題を利用しているので，まず，この $n-$ 次元ユークリッド空間における結果を述べる。S^n を $n-$ 次元ユークリッド空間 R^n の基本単体 $\{p \in R^n : p \geqq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$，また，$R^n_+$ を R^n の非負象限 $\{x \in R^n : x \geqq 0\}$ として，更に，超過需要対応を $\phi : S^n \to R^n \backslash \{\emptyset\}$ とする。

補題 8（ゲール・二階堂） 超過需要対応を $\phi : S^n \to R^n \backslash \{\emptyset\}$ が非空コンパクト凸値で上半連続であり，各 $p \in S^n$ に対して $x \in \phi(p) \to p \cdot x \leqq 0$(弱ワルラス法則) を満たすとする。すると，ある $\overline{p} \in S^n$ が存在して $\phi(\overline{p}) \cap (-R^n_+) \neq \emptyset$ となる。故に，ある $\overline{x} \in \phi(\overline{p})$ に対して $\overline{x} \leqq 0$ となる[39]。

成立する時に，φ は $upper\ demi-continuous(u.d.c)$ といわれ，ヤネリス (1985) において用いられた。そして，ヤネリス (1985) では，上半連続のケースの無限次元財空間のゲール・二階堂の補題を，凸錐 P の内部の非空性を仮定した状況で，$u.d.c.$ のケースへ拡張した。

[38] 二階堂 (1957b pp.8-9)，二階堂 (1959 p.361)，クライン-トンプソン (1984 p.78) 等を参照。(a) では $\varphi(S) = \cup_{p\in S}\varphi(p)$ もコンパクトになる。また，$(b) \to (a)$ は S のコンパクト性を仮定せずに成立する。

[39] 二階堂 (1956a pp.139-41)，二階堂 (1957b 補助定理)，ドブリュー (1959 (1) pp.82-3)，二階堂 (1960 定理 pp.317-9) 等を参照。



第２図

最後に次の補題を示す[40]。$(E,\tau)^* = E^*, P^* = \{p \in E^* | p \cdot x \leqq 0\ \forall x \in P\}$ とする。

補題９　E における凸錐 P の (τ に関する) 内部が非空として $u \in int_\tau(P)$ とすると，$\Delta^* = \{p \in P^* : p \cdot u = -1\}$ は $\sigma(E^*, E)-$ コンパクトであり，$P^* = \cup_{\lambda \geqq 0} \lambda \Delta^*$ である[41]。

以上の補題を利用して，以下で修正された二階堂による無限次元のゲール・二階堂の補題の証明を行う。

４．無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題：証明

本節では，二階堂 (1957b,59) で示された無限次元のケースのゲール・二階堂の補題を修正した最初のものを証明する。E を局所凸線形位相空間とし，この E に対してはある局所凸線形位相空

[40] この補題の証明ではアラオグルー・ブルバキの定理を利用するが，それによると，U を E の原点の近傍とすると，$U^o = \{p \in E^* : |p \cdot x| \leqq 1\}$（$U$ の極）が $*$ 弱位相 $(\sigma(E^*, E))$ でコンパクトになる。そして，E がノルム空間のケースでは，E^* の閉単位球 $B^* = \{p \in E^* : ||p|| \leqq 1\}$ が $*$ 弱位相 $(\sigma(E^*, E))$ でコンパクトになる。

[41] フローレンザーノ (1983 命題 2)。その証明は以下の通りである。まず，P^* が $*$ 弱 $(\sigma(E^*, E)-)$ 閉で $u \in P$ が E^* 上の $*$ 弱 $(\sigma(E^*, E))$ 連続な汎関数なので，その連続性から Δ^* も $*$ 弱 $(\sigma(E^*, E)-)$ 閉である。u が P の $\tau-$ 内点なので，原点 0 のある凸平衡 $\tau-$ 近傍 W が存在して $(u+W) \subset P$ となる。故に，W の平衡性によって任意の $w \in W$ と $p \in P^*$ に対して $p \cdot (u+w) \leqq 0, p \cdot (u-w) \leqq 0$ となる。もちろん，$p \cdot u \leqq 0$ であるが，特に，$w \neq 0, p \neq 0$ とすると $p \cdot w \neq 0$ となるので，$p \cdot u = 0$ とならず，故に，$p \in < P^* >$ に対して $p \cdot u < 0$ となり，$p/(p \cdot u) \in \Delta^*$ となる。また，$w \in W$ を任意に 1 つ固定すると，任意の $q \in \Delta^*$ に対して $q \cdot (u+w) = q \cdot u + q \cdot w = -1 + q \cdot w \leqq 0$ となるので $q \cdot w \leqq 1$ となる。そして，W の平衡性によって $-w \in W$ でもあるので，同様にして，$q \cdot -w \leqq 1$ となって $q \cdot w \geqq -1$ となり，故に，$|q \cdot w| \leqq 1$ となる。これは Δ^* が W の極集合 W° の部分集合である事を示している。すると，アラオグルー・ブルバキの定理より W° は $*$ 弱コンパクトであり，Δ^* は $*$ 閉なので，故に，Δ^* は $*$ 弱コンパクトである。P^* は凸錐なので $\Delta^* \subset P^*$ より $\lambda \Delta^* \subset P^*\ \forall \lambda \geqq 0$ となって $\cup_{\lambda \geqq 0} \lambda \Delta^* \subset P^*$ となる。$0 \in (P^* \cap (\cup_{\lambda \geqq 0} \lambda \Delta^*))$ なので，$p \in < P^* >$ とすると，補題 3 より $p \cdot u < 0$ となるので，$p \cdot u/(-p \cdot u) = -1$ となるので，$\lambda' = 1/(-p \cdot u) > 0$ とすれば，$p \in \lambda' \Delta^*$ となり，故に，$P^* \subset (\cup_{\lambda \geqq 0} \lambda \Delta^*)$ となって $P^* = (\cup_{\lambda \geqq 0} \lambda \Delta^*)$ となる。$\tau = \sigma\left(E, {}^- E\right)$ としてこの補題を利用する場合には，$(E,\tau)^* = \left({}^- E\right)$ で $P^* = \left({}^- P\right)^*$ である。

間 $({}^{-}E,{}^{-}\tau)$ が存在して，$E=({}^{-}E,{}^{-}\tau)^{*}$ となっているとする。$({}^{-}E)^{*}$ は ${}^{-}E$ 上の ${}^{-}\tau$ に関して連続な線形汎関数の集合である $({}^{-}E)$ の双対空間である。そして，P を E の $*$ 弱 $(\sigma(E,{}^{-}E)-)$ 閉凸錐で $(-P\cap P)\neq P$ とする[42]。まず最初にその定理を述べる。

定理 1　対応 $\varphi:<({}^{-}P)^{*}>\to E\backslash\{\emptyset\}$ が次の条件を満たすとする。(i) : 任意の $p\in<({}^{-}P)^{*}>$ に対して $\varphi(p)$ は非空凸で $*$ 弱 $(\sigma(E,{}^{-}E)-)$ コンパクトである。(ii) : L を $({}^{-}P)^{*}$ の任意の有限次元の凸部分錐として $<({}^{-}P)^{*}>\cap L$ には弱位相 $(\sigma({}^{-}E,E))$，E には $*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^{-}E))$ を用いて，φ を $<({}^{-}P)^{*}>\cap L$ に制限した対応 $\varphi:<({}^{-}P)^{*}>\cap L\to E\backslash\{\emptyset\}$ が上半連続である。(iii) : φ による $<({}^{-}P)^{*}>$ の像である $\cup_{p\in<({}^{-}P)^{*}>}\varphi(p)$ が $*$ 弱 $(\sigma(E,{}^{-}E)-)$ コンパクトである。(iv) : $p\in<({}^{-}P)^{*}>$ に対して $x\in\phi(p)\to p\cdot x\leqq 0$(弱ワルラス法則) を満たす。この時，ある $\overline{p}\in<({}^{-}P)^{*}>$ が存在して $\varphi(\overline{p})\cap P\neq\emptyset$ となる。

補題 8 の有限次元部分空間のケースの条件と比べてみると，一番大きな違いは，有限次元部分空間のケースのように，φ の上半連続を定義域である $<({}^{-}P)^{*}>$ 全体で成立するとしているのではなくて，その有限凸部分錐 $L(\cap<({}^{-}P)^{*}>)$ 上でのみ成立するとしている事である。$({}^{-}P)^{*}$ の有限凸部分錐 L は $({}^{-}P)^{*}$ の有限個の一次独立なベクトル $\{p_1,\cdots,p_m\}$ によって生成される線形部分空間 $[p_1,\cdots,p_m]$ と $({}^{-}P)^{*}$ の共通集合である。そして，有限次元空間上では局所凸線形位相空間は $m-$ 次元ユークリッド空間の位相と同値という意味で一意的で，更に，$m-$ 次元ユークリッド空間 R^m の双対空間 $(R^m)^{*}$ に対しては，$(R^m)^{*}=R^m$ が成立する。したがって，補題 8 の有限次元部分空間のケースの条件が，各有限次元凸部分錐 $(L\cap<({}^{-}P)^{*}>)$ 上で成立すると，仮定していると考えられる。φ の上半連続性が $<({}^{-}P)^{*}>$ 全体で成立すれば，φ の上半連続性が有限凸部分錐 $L(\cap<({}^{-}P)^{*}>)$ 上で成立するのは言うまでもないが，もちろん，この逆は一般には言えない。後に取り扱う l_∞ を財空間とする簡略されたビューリー (1972) の経済モデルでは，実際にこの (ii) が成立する事を示す[43]。ただし，(iii) についてはその成立を示す事はできず，そのために更なる修正を加える必要がある。それについては次節で議論する[44]。

定理の証明. 原点 0 の $*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^{-}E))$ に関する凸平衡近傍の 1 つを V とすると，補題 6 の P を少し広げた $P(V)$ に対しては $P\subset P(V)$ となっているので，$({}^{-}P(V))^{*}\subset({}^{-}P)^{*}$ となる。また，全ての $P(V)$ は u を共通の $*$ 弱位相 $(\sigma(E,{}^{-}E))$ に関する内点として含んでいるが，どれも $-u$ を含んでいない。したがって，$P(V)$ は補題 5 の条件を満たしているので，$<({}^{-}P(V))^{*}>$ は非空で凸となる。そこで，$<({}^{-}P(V))^{*}>$ から任意に選んで固定した有限集合を $F=\{p_1,\cdots,p_m\}$ とする。$<({}^{-}P(V))^{*}>$ の凸性から F の凸包に対して $co(F)\subset<({}^{-}P(V))^{*}>$ となる。今，二つの連続関数を定義する。まず，$\alpha:E\to R^m$ を $\alpha_i(x)=p_i(x), i=1,\cdots,m$ とする。$p_i\in{}^{-}E$ は E 上の $*$ 弱 $(\sigma(E,{}^{-}E)-)$ 連続な汎関数なので，$\alpha_i:E\to R$ は $*$ 弱 $(\sigma(E,{}^{-}E)-)$ 連続になり，$\alpha:E\to R^m$ も $*$ 弱 $(\sigma(E,{}^{-}E)-)$ 連続である。次に，$\beta:S^m\to<({}^{-}P(V))^{*}>$ を $\beta(w)=\sum_{i=1}^{m}w_ip_i$ とする。β は $p_i, i=1,\cdots,m$ の凸結合なので，線形位相の性質より値域に $({}^{-}E)$ 上の弱位相 $(\sigma({}^{-}E,E)-)$ を利用すると β は連続になる。この時，$co(F)\subset<({}^{-}P(V))^{*}>$ なので $\beta(w)\in<({}^{-}P(V))^{*}>$ である。そして，α,β,φ の合成写像 $\alpha\circ\varphi\circ\beta$ を $\phi:S^m\to R^m$ とする。$\phi(w)=\alpha(\varphi(\beta(w)))$ なの

[42] この時，$({}^{-}E)\subset E^{*}$ より E の $\sigma(E,{}^{-}E)-$ 位相の方が E の $\sigma(E,E^{*})-$ 位相より粗いので P は $\sigma(E,E^{*})-$ 閉凸錐であるが，更に，E の $\sigma(E,E^{*})-$ 位相の方が E の $\tau-$ 位相より粗いので，結局，P は $\tau-$ 閉凸錐である。τ は E の当初の線形位相である。

[43] フローレンザーノ (1983) やアリプランティス - ブラウン (1983) でも，このビューリー型の無限次元財空間経済モデルにおいて (ii) が成立する事を述べている。

[44] ビューリー型の無限次元財空間経済モデルに対して，同様の議論がフローレンザーノ (1983) によって行われている。この点も次節で議論する。

で，$\phi(w)$ は w を係数とした $p_1,\cdots,p_m$ の凸結合 $\beta(w)$ によって与えられる超過需要ベクトル (の集合)$\varphi(\beta(w))$ の各 $p_1,\cdots,p_m$ による評価額ベクトル (の集合)$(p_1(\varphi(\beta(w))),\cdots,p_m(\varphi(\beta(w))))$ である。$\beta(S^m)=co(F)\subset<(^-P(V))^*>$ なので (iii) によって φ は $\beta(S^m)$ 上で上半連続である。

最初に，この $\phi:S^m\to R^m$ が補題 8 の条件を満たす事を示す。まず，$\beta(w)=q$ とすると $\varphi(q)\neq\emptyset$ なので $\varphi(q)$ の各 p_i による評価額も存在して $\phi(w)\neq\emptyset$ である。次に，$r,r'\in\phi(w),\gamma\in(0,1)$ に対して $r''=\gamma r+(1-\gamma)r''$ とする。$r,r'\in\phi(w)$ より，ある $y,y'\in\varphi(\beta(w))$ が存在して $r=\alpha(y),r'=\alpha(y')$ となる。$\varphi(\beta(w))$ は凸なので $\gamma y+(1-\gamma)y'\in\varphi(\beta(w))$ で $\alpha(\gamma y+(1-\gamma)y')\in\phi(w)$ である。すると，α は線形なので $\alpha(\gamma y+(1-\gamma)y')=\gamma\alpha(y)+(1-\gamma)\alpha(y')=\gamma r+(1-\gamma)r'=r''\in\phi(w)$ となり，$\phi(w)$ は凸である。また，$\varphi(q)$ は $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ コンパクトで各 p_i は $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 連続なので，ワイエルシュトラスの定理より $p_i(\varphi(q))(\subset R)$ もコンパクトであり，故に，$\phi(w)(\subset R^m)$ はコンパクトである。ϕ の上半連続性は，α,β が連続関数なので対応として考えると上半連続であり，上半連続対応の合成写像が上半連続になる事によって成立する。最後に弱ワルラス法則について考える。$r\in\phi(w)$ とすると，ある $z\in\varphi(\beta(w))$ が存在して $r=\alpha(z)=(p_1(z),\cdots,p_m(z))$ となる。(iv) より $[\beta(w)](z)\leqq 0$ であるが，$w\cdot r=\sum_{i=1}^m p_i(z)w_i=(\sum_{i=1}^m w_ip_i)(z)=[\beta(w)](z)\leqq 0$ となるので，ϕ に対しても弱ワルラス法則が成立する。

したがって，$\phi:S^m\to R^m$ は補題 8 の条件を満たすので，ある $\overline{w}\in S^m$ が存在して $\phi(\overline{w})\cap(-R^m_+)\neq\emptyset$ となり，ある $\overline{x}\in\varphi(\beta(\overline{w}))$ に対して $(p_1(\overline{x}),\cdots,p_m(\overline{x}))\leqq 0$ となる。この時，$\beta(\overline{w})\in<(^-P(V))^*>\subset<(^-P)^*>$ なので $\overline{x}\in\varphi(\beta(\overline{w}))\subset\Gamma=\cup_{p\in<(^-P)^*>}\varphi(p)$ であり，$P(V,F)=\{x\in E:p_i(x)\leqq 0,p_i\in F\}=\{x\in E:p_i(x)\leqq 0,i=1\cdots,m\}$ とすると，$\overline{x}\in P(V,F)$ なので，$(P(V,F)\cap\Gamma)\neq\emptyset$ となる。$P(V,F)$ は p_i が $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 連続なので $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 閉である。この結果は $<(^-P(V))^*>$ の任意の有限集合 F について成立するが，そのような F について $P(V,F)$ の族 $\{P(V,F):F\subset<(^-P(V))^*>,\#F<\infty\}$ を考えると，その族が Γ に対して有限交差性を満たす事になる。すると，仮定から Γ は $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ コンパクトなので，$[(\cap_{F\subset<(^-P(V))^*>}P(V,F))\cap\Gamma]\neq\emptyset$ となる。そして，$P(V)$ は $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-$ 閉凸錐なので，E 上に $*$ 弱位相 $(\sigma(E,^-E))$ を利用すれば，補題 2 より $P(V)=\{x\in E:p(x)\leqq 0,\forall p\in(^-P(V))^*\}=\{x\in E:p(x)\leqq 0,\forall p\in<(^-P(V))^*>\}\subset P(V,F)(=\{x\in E:p(x)\leqq 0,p\in F,\#F<\infty,F\subset<(^-P(V))^*>\})$ となり，$P(V)\subset(\cap_{F\subset<(^-P(V))^*>}P(V,F))$ となる。しかし，$p\in<(^-P(V))^*>$ に対して $F=\{p\}$ とすれば $(\cap_{F\subset<(^-P(V))^*>}P(V,F))\subset(\cap_{\{p\}\subset<(^-P(V))^*>}P(V,\{p\}))=\{x\in E:p(x)\geqq 0,\forall p\in<(^-P(V))^*>\}=P(V)$ となるので，結局，$P(V)=(\cap_{F\subset<(^-P(V))^*>}P(V,F))$ となる。したがって，$[(\cap_{F\subset<(^-P(V))^*>}P(V,F))\cap\Gamma]\neq\emptyset$ より $(P(V)\cap\Gamma)\neq\emptyset$ となる。そして，これが 0 の任意の $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 近傍 V について成立するが，$N^*(0)$ を 0 の $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 近傍系として，$P(V)$ の族 $\{P(V):V\in N^*(0)\}$ を考えると，近傍の性質よりこの族が Γ に対して再び有限交差性を満たすので，$[(\cap_{V\in N^*(0)}P(V))\cap\Gamma]\neq\emptyset$ となる。補題 6 の (ii) より $(\cap_{V\in N^*(0)}P(V))=P$ なので $(P\cap\Gamma)\neq\emptyset$ となり，故に，ある $\overline{p}\in<(^-P)^*>$ が存在して $(\varphi(\overline{p})\cap P)\neq\emptyset$ となる。これが求めていた結果である。 □

この証明は二階堂 (1957b,1959(凸値のケース)) で使われた証明を基本的に踏襲している。そこで，二階堂 (1957b,1959(凸値のケース) の本来の定理との比較を行う。本来の定理では，上記の定理 1 の (^-E) 内の $(^-P)^*$ ではなくて財空間 (E,τ) の $\tau-$ 閉凸錐 P に対する双対空間 E^* 内の極錐 P^* を，また，E 上には $*$ 弱位相 $(\sigma(E,^-E))$ ではなくて弱位相 $(\sigma(E,E^*))$ を，そして，E^* には $*$ 弱位相 $(\sigma(E^*,E))$ を，それぞれ利用して，上と同様な証明に沿って，$(\varphi(\overline{p})\cap P)\neq\emptyset$ となる

$\overline{p} \in< (P)^* >$ の存在を示している[45]。その際の証明では，上の証明と同様に価格集合のコンパクト性は何ら利用しておらず，(iii) に対応する条件が重要になっている。

ここで，条件 (ii) と (iii) について考察する。今，財空間 E の $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E))$ 閉凸錐 P が $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E))$ 内点を持って $int_{\sigma(E,^-E)}(P) \neq \emptyset$ となっているとする。$u \in int_{\sigma(E,^-E)}(P)$ を1つ固定して $C_u = \{p \in (^-P)^* : p \cdot u = -1\}$ とすると，$(E, \sigma(E,^- E))^* = (^-E)$ と前節の補題9より，C_u は $(*)$ 弱 $(\sigma(^-E, E) -)$ コンパクトである。そして，次の条件を考える。$(ii)' :< (^-P)^* >$ には $(*)$ 弱位相 $(\sigma(^-E, E))$，E には $*$ 弱位相 $(\sigma(E,^- E))$ を用いて，$\varphi :< (^-P)^* > \to E$ が $< (^-P)^* >$ 上で上半連続である。$(ii)'$ ならば (ii) である。今，$\psi :< (^-P)^* > \to E$ を $\psi(p) = \varphi(p/(-p \cdot u))$ によって定義すれば，$\psi(< (^-P)^* >) = \varphi(C_u)$ となる。C_u が $(*)$ 弱 $(\sigma(^-E, E) -)$ コンパクトであり，φ が C_u 上でも $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E) -)$ 上半連続なので，補題7によって $\varphi(C_u)$ は $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E) -)$ コンパクトになる。$p/(-p \cdot u)$ は $< (^-P)^* >$ 上で $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E) -)$ 連続なので，ψ は $< (^-P)^* >$ 上で $*$ 弱位相 $(\sigma(E,^- E))$ に関して上半連続である。更に，(i) も (iv) も成立する。故に，$\psi :< (^-P)^* > \to E$ は定理の条件 $(i) - (iv)$ を満たす。したがって，ある $\overline{p} \in< (^-P)^* >$ が存在して $(\psi(\overline{p}) \cap P) = (\varphi(\overline{p}/(-\overline{p} \cdot u)) \cap P) \neq \emptyset$ となり，$\varphi :< (^-P)^* > \to E$ が $(i), (ii)', (iv)$ を満たすだけで，$\overline{p}/(-\overline{p} \cdot u) \in< P^* >$ に対して $(\varphi(\overline{p}/(-\overline{p} \cdot u)) \cap P) \neq \emptyset$ となる。したがって，この場合には φ に対して条件 (iii) を仮定しなくていい。一方，$\varphi :< (^-P)^* > \to E$ に対する上記の定理1の証明では，価格集合 C_u の $(*)$ 弱 $(\sigma(E,^- E) -)$ コンパクト性には一切触れずに，その代わりに $\Gamma = \cup_{p \in < (^-P)^* >} \varphi(p)$ の $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E) -)$ コンパクト性という (iii) を利用している。そして，(iii) によって $(\varphi(\overline{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となる $\overline{p} \in< (^-P)^* >$ の存在が示されている[46]。

ただし，一般には (ii) だけからは (iii) が導出されないので，そのためにこの定理1では (iii) を仮定している。しかし，後の第6節において l_∞ を財空間とした経済モデルにおける競争均衡の存在を示す際には，この (iii) が成立せず，それを $(iii)' : \Gamma = \cup_{p \in < (^-P)^* >} \varphi(p)$ は $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E) -)$ 相対コンパクトである，へ変更する必要が生じる。その結果として，(iii) によって示されている $(\varphi(\overline{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となる $\overline{p} \in< (^-P)^* >$ の存在という部分の議論にも，修正が必要となる。したがって，l_∞ を財空間とした経済モデルにおける競争均衡の存在問題に対して，二階堂 (1956b,57b,59) の無限次元のゲール・二階堂の補題を適用するためには，この点を考慮して本来の二階堂 (1956b,57b,59) の無限次元のゲール・二階堂の補題に，更なる修正を加える必要が生じる。それがフローレンザーノ (1983) が考察したケースであり，次節でこの更なる修正を必要とするケースを取り扱う。

ところで，アリプランティス - ブラウン (1983) は，無限次元財空間モデルにおける超過需要関数を利用して，そのモデルにおける市場均衡の存在問題を扱ったが，本稿の議論とも関連するので，ここで少しそこで示された結果について触れておく。アリプランティス - ブラウン (1983) では，無限次元の財空間 E におけるの財束の大小関係に対応する順序構造 $\geq$ を明示的に E に取り入れ，E 上の線形位相としてこの順序構造 $\geq$ と整合的なものを用いる。E の線形構造と整合的な擬 (半) 順序 (反射性と推移性が成立) を $\geq$ として，擬順序 $\geq$ の付いた線形空間 E が順序線形空間であり，凸錐 $P = E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ が E の正錐である[47]。そして，E の正錐 E_+ が $\tau -$ 閉

[45] 詳しい証明については久保田 (2006) 参照。

[46] したがって，l_∞ を財空間，l_1 を価格空間とするケースで (iii) が成立すれば，定理1は $\overline{p} \in l_1$ となる事を意味する。すると，例えばビューリー (1972) による吉田 - ヒュイットの分解定理に基づくような間接的議論を利用せずに，直接的な議論によって $\overline{p} \in l_1$ となるのである。ただし，現在ではまだ l_∞ の経済モデルにおいて (iii) が成立するかどうかは不明である。

[47] 順序線形空間 E の擬順序 $\geq$ に対して，任意の $x, y \in E$ に対して (x, y) の上限 $\sup(x, y)$ と (x, y) の下限 $\inf(x, y)$ が E に存在して，線形空間 E が束 (*Lattice*) になっている時に，E を線形束またはリース空間 (*Riesz Space*) という。この時，$\sup(x, 0) = |x|$ を x の絶対値，$[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ を x と y の順序区間，また，$A \subset E$ に対して $x, y \in A \to [x, y] \subset A$ となる時に A を固形的 (*Solid*) という。そして，リース空間の部分空間 A は，

集合の時の順序線形空間 E が順序線形位相空間である[48]。この時，アリプランティス - ブラウン (1983) の主要な結果は次のように述べる事ができる。(E, E') をリース双対系として，価格単体 Π は $E_+^\sim$ の非空凸 $*$ 弱 $(\sigma(E', E)-)$ コンパクト集合で，Π の強正な要素の集合 $S = \{p \in \Pi : p \gg 0\}$ は Π で $*$ 弱 $(\sigma(E', E)-)$ 稠密であり，更に，S によって生成された錐 $= \cup_{\lambda \geqq 0} \lambda S$ は $E_+^\sim$ で $*$ 弱 $(\sigma(E', E)-)$ 稠密であるとする。そして，($E_+^\sim$ の) 凸部分集合 $D(\subset \Pi)$ 上で定義されて E へ写す超過需要関数 $\varphi : D \to E$ が，(a) : D は Π における $*$ 弱 $(\sigma(E', E)-)$ 稠密部分集合 (稠密条件)，(b) : E 上の局所凸線形位相 τ が存在し，$\varphi : (D, \sigma(E', E)) \to (E, \tau)$ は連続 (連続条件)，(c) : もしも有向点列 $\{p^\alpha\} \subset D$ が $p^\alpha \to p(*$ 弱位相 $(\sigma(E', E))) \in \Pi \backslash D$ ならば，ある $q \in D$ が存在して，$\limsup_{\alpha\uparrow} q \cdot \varphi(p^\alpha) > 0$ となる (境界条件)，(d) : $p \in D$ ならば $p \cdot \varphi(p) = 0$(ワルラス法則)，を満たすならば，$\varphi(p) \leqq 0$ となる均衡価格の集合が非空で $*$ 弱 $(\sigma(E', E)-)$ コンパクトである[49]。その証明では，やはり二階堂 (1956b,57b,59) に基づく定理 1 の証明と同様な，有限次元部分空間列による近似という手法を利用している。ただし，後に本稿でも扱う l_∞ を財空間とした簡略化したビューリー (1972) のモデルは連続性条件 (b) を満たさないので，アリプランティス - ブラウン (1983) によるこの結果を直接適用して，ビューリー (1972) のモデルにおける競争均衡の存在を示す事はできない。しかし，後に示すように，ビューリー (1972) のモデルでは本節の定理 1 の有限次元上での連続性条件 (ii) を満たすので，アリプランティス - ブラウン (1983) は，本節の定理 1 やフローレンザーノ (1983)，そして，アリプランティス - ブラウン (1983) によるこの結果の証明で用いたのと同様な，有限次元部分空間列による近似の議論に沿って，このビューリー (1972) のモデルにおける競争均衡の存在を別途証明している[50]。本稿でも後にこの証明を行う。

5．フローレンザーノ (1983) のゲール・二階堂の補題：証明

本節では，前節で示した修正された二階堂による無限次元のゲール・二階堂の補題における条件 (iii) : $\Gamma = \cup_{p \in <(^-P)^*>} \varphi(p)$ は $*$ 弱 $(\sigma(E, ^-E)-)$ コンパクトである，を $(iii)'$: $\Gamma = \cup_{p \in <(^-P)^*>} \varphi(p)$ は $*$ 弱 $(\sigma(E, ^-E)-)$ 相対コンパクトである，へ変更したケースを考える。これはフローレンザーノ (1983) も考察している。フローレンザーノ (1983) では，前節の定理 1 の証明と同様な，(ii) に基づく有限次元部分空間による近似を利用して同様な結果を示し，その結果をノルム空間 (^-E) の双対空間 E を財空間とした経済モデルにおける競争均衡の存在に適用している。本稿でも，次節の l_∞ を財空間とした経済モデルにおける競争均衡の存在を示す際に，この結果を利用する。ただし，(iii) によって $(\varphi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となる $\bar{p} \in <(^-P)^*>$ の存在を示した前節の定理 1 では，直接的に $(^-P)^*$ から均衡価格を見つけたのであるが，$(iii)'$ を利用する本節での議論では，直接的に $(^-P)^*$

$|x| \leqq |y|, y \in A \to x \in A$ となる時にイデアル (*Ideal*) といわれる。E 上の線形汎関数 $\phi : E \to R$ は，ϕ による E の順序区間の像が常に R の有界集合である時に，順序有界 (*Order Bounded*) といわれる。そして，E 上の順序有界な線形汎関数の集合は E の順序双対空間 (*Order Dual*) といわれ，$E^\sim$ と表記する。$\phi, \varphi \in E^\sim$ に対しては，$x \in E_+$ ならば $\phi(x) \geqq \varphi(x)$ となる時に $\phi \geqq \varphi$ という順序を与え，$E_+^\sim = \{\phi \in E^\sim : \phi \geqq 0\}$ を E 上の正線形汎関数の集合とする。そして，$x > 0$ ならば $\phi(x) > 0$ となる時に，ϕ を強正 (*Strictky Positive*) といい，$\phi \gg 0$ と表記する。

[48] 順序線形位相空間 E が線形束で，更に E の線形位相 τ に関して $\sup(x, y)$ と $\inf(x, y)$ の演算が連続な時に，E を線形位相束 (*Topological Linear Lattice*) または位相リース空間 (*Topological Riesz Space*) という。この時，線形位相 τ の原点の基本近傍系は平衡凸固形的な集合族となるので，この線形位相 τ を局所固形的 (*Locally Solid*) という。そして，(L, L') をリース空間の組として，L' が L 上のある局所固形的線形位相に関する双対空間になっている時に，(L, L') をリース双対系と呼ぶ。そして，(L, L') をリース双対系ならば L'_+ は $L_+^\sim$ において $*$ 弱 $(\sigma(L', L)-)$ 稠密である事が知られている。$\tau(l_\infty, l_1)$ が局所固形的なので，(l_∞, l_1) はリース双対系であり，更に，バナッハ・アラオグルーの定理より，l_∞ の任意の順序区間が $\sigma(l_\infty, l_1)-$ コンパクトなので，このケースは特に，対称的 (*Symmetric*) リース双対系といわれる。(l_∞, ba) はリース双対系であるが，対称的ではない。

[49] アリプランティス - ブラウン (1983，p.198，定理 3.6) であり，浦井 (2000) でもこの結果の一般化が試みられている。

[50] フローレンザーノ (1983) がアリプランティス - ブラウン (1983) に言及している所から察すると，この点がまさにフローレンザーノ (1983) の論点であったように思われる。

から均衡価格を見つけられず, $(^{-}P)^*$ における有向点列 (ネット) の極限という形で見つけなくてはならない。そのためには価格集合を $*$ 弱 $(\sigma(E^*, E)-)$ コンパクトにして価格集合の範囲を制限する必要があり，本節では E を $int_\tau(P) \neq \emptyset$ となる局所凸線形位相空間とする[51]。補題 6 を利用する近似の議論は，有限次元では上手く働くが，本節の無限次元のケースでは上手く働かないので，最初から $int_\tau(P) \neq \emptyset$ とする必要がある[52]。

まず，ある $u \in int_\tau(P) \neq \emptyset$ を利用して，価格集合を $\Delta^* = \{p \in P^* : p \cdot u = -1\} (\subset E^*)$ とする。補題 9 より Δ^* は $*$ 弱 $(\sigma(E^*, E)-)$ コンパクトである。ただし，超過需要は $\Delta^- = (\Delta^* \cap (^{-}E))$ のみで定義されていて，均衡価格は Δ^* に属するが Δ^- に属するとは限らない。そこで，超過需要対応の定義域を (Δ^* 内で)Δ^- を含む領域に拡張し，それに応じて超過需要対応の値も拡張する[53]。l_∞ を財空間にした経済モデルでは，経済的に意味のある位相の採用から，(^{-}E) に対応する l_1 の価格集合上では有限次元のケースと同様にして需要点の存在が示せるが，E^* に対応する ba の価格集合上ではそのようにしては示せない。そこで l_1 の価格集合上で定義された需要対応を ba の価格集合上に拡張するために，このような拡張の操作が必要になる。(S, τ) と (X, τ_X) を二つのハウスドルフ空間として $\varphi : S \to X \backslash \{\emptyset\}$ を対応 (集合値写像) とする。今，(S', τ') を $S' \supset S$ となる 1 つのハウスドルフ空間とする。φ のグラフ $G_\varphi = \{(p, x) \in S \times X : x \in \varphi(p)\} (\subset S' \times X)$ の $S' \times X$ における直積位相での閉包 $cl_{\tau' \times \tau_X}(G_\varphi) (\subset S' \times X)$ を考える。$T = \{p \in S' : \exists x \in X, (p, x) \in cl_{\tau' \times \tau_X}(G_\varphi)\} (\subset cl_{\tau'}(S))$ として，対応 $\widehat{\varphi} : T \to X \backslash \{\emptyset\}$ を，$x \in T \to \widehat{\varphi}(p) = \{x \in X : (p, x) \in cl_{\tau' \times \tau_X}(G_\varphi)\}$ と定義する。この定義では，$\varphi : S \to X \backslash \{\emptyset\}$ をある意味で拡張しているが，$p \in S$ に対して $\widehat{\varphi}(p) = \varphi(p)$ となるとは限らず，一般には $\widehat{\varphi}(p) \supset \varphi(p)$ となるだけである。(S, τ) に対応するのが $(\Delta^-, \sigma(^{-}E, E))$ であり，(S', τ') に対応するのが $(\Delta^*, \sigma(E^*, E))$ である[54]。

E を局所凸線形位相空間で $P(\neq E)$ を E における $\sigma(E, ^{-}E)-$ 閉凸錐で $int_\tau(P) \neq \emptyset$ とする。この時，$(^{-}E) \subset E^*$ より E の $\sigma(E, ^{-}E)-$ 位相の方が E における $\sigma(E, E^*)-$ 位相より粗いので P は $\sigma(E, E^*)-$ 閉凸錐であるが，E の $\sigma(E, E^*)-$ 位相の方が E の $\tau-$ 位相より粗いので，P は $\tau-$ 閉凸錐である。また，$u \in int_\tau(P)$ として，$\Delta^* = \{p \in P^* : p \cdot u = -1\}$ および $\Delta^- = \Delta^* \cap (^{-}E)$ であるが，$u \in int_\tau(P)$，P の $\tau-$ 閉凸錐性，そして，$P \neq E$ によって，P は（τ を用いた）本来の補題 5 の条件を満たしていて，$< P^* >$ は非空で凸となる。更に，補題 7 から Δ^* は非空凸で $*$ 弱 $(\sigma(E^*, E)-)$ コンパクトになる。また，P が E における $*$ 弱 $(\sigma(E, ^{-}E)-)$ 閉凸錐で $P \neq E$ な

---

[51] 二階堂 (1957b) の内容から判断すると，二階堂 (1956b) では E に $*$ 弱位相 $(\sigma(E, E^*))$ を利用して，この内点条件を前提にして，定理 1 のような無限次元財空間モデルのゲール・二階堂の補題を，証明しているようである。したがって，具体的に l_∞ を財空間とする経済モデルを考えて，そのような経済に競争均衡が存在する事を示そうとしていれば，二階堂 (1957b,59) とは違った形で二階堂 (1956b) を発展させていたのではないかと考えられる。

[52] ただし，有限次元のケースのように，最初から超過需要対応が弱 $(\sigma\left(^{-}E, E\right)-)$ コンパクトな価格集合上で定義されていれば，$int_\tau(P) = \emptyset$ でも補題 6 を利用する近似の議論は，有限次元と同様に上手く働く。

[53] フローレンザーノ (1983 定義 1 pp.211)。二階堂 (1957b,59) と同様に，フローレンザーノ (1983 補題 1 pp.212-3) では，Δ^* 上で定義されている超過需要対応 φ の上半連続性を，有限次元部分空間上のみで仮定していて，Δ^* 上では仮定していない。そのため，Δ^* 上での上半連続性の代わりにこの拡張を利用している。実際，フローレンザーノ (1983 系 1 pp.213-4) では，Δ^* 上での超過需要対応 φ の上半連続性を仮定し，その場合にはこの拡張が元の超過需要対応 φ であると述べている。ただし，フローレンザーノ (1983，補題 1 pp.212-3) の超過需要対応 φ は Δ^* 上で定義されているが，その証明では，超過需要対応 φ の Δ^- 上での値しか利用していないので，実際には，超過需要対応 φ を Δ^- 上でのみ定義して，それをここでのように Δ^- を含む領域まで拡張するという方が良いと思われる。

[54] フローレンザーノ (1983) では，l_∞ に対応する財空間を持った経済モデルに対して，フローレンザーノ (1983 補題 1 pp.212-3) を適用してその経済の準均衡の存在を示している。そこでその財空間を l_∞ とすると，$*$ 弱位相 $(\sigma(l_\infty, l_1))$ を利用している事により，有限次元のケースと同様にして，(^{-}E) に対応する l_1 の価格集合上での需要点の存在を示している。しかし，同様にしては示せないために，E^* に対応する ba の価格集合上での需要点の存在は示していない。ところが，フローレンザーノ (1983 補題 1 pp.212-3) では超過需要対応が Δ^* 上で定義されている事を前提にしているが，$*$ 弱位相 $(\sigma(l_\infty, l_1))$ を $E = l_\infty$ に対して利用すると，Δ^* と Δ^- が異なるために，超過需要対応が Δ^- 上では定義されても Δ^* 上で定義されるとは限らず，フローレンザーノ (1983 補題 1 pp.212-3) を l_∞ を財空間とするケースは直接的には適用出来ない。しかし，フローレンザーノ (1983 補題 1 pp.212-3) の証明では，実際には超過需要対応が Δ^- 上で定義されていれば良いので，本稿のような写像の拡張を利用すればこの点は解決されると思われる。

ので，補題 1 よりある $p \in ({}^{-}E)\backslash\{0\}$ が存在して $0 \geqq p\cdot x\ \forall x \in P$ となる。すると $({}^{-}E) \subset E^*$ より $p \in < P^* >$ となるが，p を E^* の点と見なせば，$u \in int_{\tau}(P)$ と補題 3 より $p\cdot u < 0$ となる。すると $p\cdot u/(-p\cdot u) = -1$ であり，$(-p\cdot u) > 0$ より $p/(-p\cdot u) \in \Delta^- = (\Delta^* \cap ({}^{-}E))$ となるので，Δ^- は非空凸である。フローレンザーノ (1983) の定理を述べる。

定理 2（フローレンザーノ（1983）） 対応 $\varphi : \Delta^- \to E\backslash\{\emptyset\}$ が次の条件を満たすとする。$(i)'$: 任意の $p \in \Delta^-$ に対して $\varphi(p)$ は非空凸で $*$ 弱 $(\sigma(E, ({}^{-}E)-)$ コンパクトである。$(ii)''$: L を $(P^* \cap ({}^{-}E))$ の任意の有限次元の凸部分錐として $\Delta^- \cap L$ には $*$ 弱位相 $(\sigma({}^{-}E, E))$，E には $*$ 弱位相 $(\sigma(E, {}^{-}E))$ を用いて，φ を $\Delta^- \cap L$ に制限した対応 $\varphi : \Delta^- \cap L \to E\backslash\{\emptyset\}$ が上半連続である。$(iii)'$: φ による Δ^- の像である $\Gamma = \cup_{p\in\Delta^-}\varphi(p)$ がある $*$ 弱 $(\sigma(E, {}^{-}E)-)$ コンパクト集合 Ψ に含まれる。(iv) : $p \in \Delta^-$ に対して $x \in \phi(p) \to p\cdot x \leqq 0$(弱ワルラス法則) を満たす。この時，$\Delta = \{p \in \Delta^* : \exists x \in E, (p, x) \in cl_{\sigma(E^*,E)\times\sigma(E,{}^{-}E)}(G_{\varphi})\}(\subset cl_{\sigma(E^*,E)}(\Delta^-))$ として φ の拡張対応 $\widehat{\varphi} : \Delta \to \Psi$ を，$p \in \Delta \to \widehat{\varphi}(p) = \{x \in X : (p, x) \in cl_{\sigma(E^*,E)\times\sigma(E,{}^{-}E)}(G_{\varphi})\}$ によって定義すれば，ある $\overline{p} \in (\Delta \subset)\Delta^*$ が存在して $\widehat{\varphi}(\overline{p}) \cap P \neq \emptyset$ となる[55)]。

まず，前節の定理 1 と同様に，φ の上半連続性を定義域である Δ^- 全体で成立するとしているのではなくて，その有限凸部分錐 L との共通集合 $(L \cap \Delta^-)$ 上でのみ成立するとしている。$(P^* \cap E^-)$ の有限凸部分錐 L は $(P^* \cap E^-)$ の有限個の一次独立なベクトル $\{p_1, \cdots, p_m\}$ によって生成される線形部分空間 $[p_1, \cdots, p_m]$ と $(P^* \cap E^-)$ の共通集合であるので，$(L \cap \Delta^-)$ は結局これら有限個の一次独立なベクトル $\{p_1, \cdots, p_m\}$ を，Δ^- に属するように伸縮した $\{p'_1, \cdots, p'_m\}$ による凸包 $co(\{p_1, \cdots, p_m\})$ である。また，定理 1 と同様に，$(ii)''$ で補題 8 の有限次元部分空間のケースの条件が各有限次元凸部分錐 L 上で成立すると仮定している。しかし，超過需要対応 φ は価格集合 Δ^* の部分集合である Δ^- 上でのみ定義されていて，Δ^* 上で定義されている必要はない。そのために，帰結の $\widehat{\varphi}(\overline{p}) \cap P \neq \emptyset$ となる $\overline{p} \in \Delta^*$ の存在の部分では，$\overline{p} \in \Delta^-$ となるとは限らなず，Δ^- 上で定義されいている φ を Δ 上へ拡張した $\widehat{\varphi}$ を用いて，結論の $\widehat{\varphi}(\overline{p}) \cap P \neq \emptyset$ を導いている。更に，$\Gamma = \cup_{p\in\Delta^-}\varphi(p)$ ではなくてそれを含む Ψ を，$*$ 弱 $(\sigma(E, {}^{-}E)-)$ コンパクトとしている。これらの点で，二階堂 (1956b,57b,59) に沿った前節の定理 1 とも異なっている。

定理の証明. まず，Δ^- から任意に選んで固定した有限集合を $F = \{p_1, \cdots, p_m\}$ とする。Δ^- の凸性から F の凸包に対して $co(F) \subset \Delta^-$ となる。今，二つの連続関数を定義する。まず，$\alpha : E \to R^m$ を $\alpha_i(x) = p_i(x), i = 1, \cdots, m$ とする。$p_i \in ({}^{-}E)$ よりそれは E 上の $*$ 弱 $(\sigma(E, {}^{-}E)-)$ 連続な線形汎関数なので，$\alpha_i : E \to R$ は $*$ 弱 $(\sigma(E, {}^{-}E)-)$ 連続になり，$\alpha : E \to R^m$ も $*$ 弱 $(\sigma(E, {}^{-}E)-)$ 連続である。次に，$\beta : S^m \to \Delta^-$ を $\beta(w) = \sum_{i=1}^m w_i p_i$ とする。β は $p_i, i = 1, \cdots, m$ の凸結合なので，線形位相の性質より値域に $({}^{-}E)$ 上の弱 $(\sigma({}^{-}E, E)-)$ 位相を利用すると，β は連続になる。この時，$co(F) \subset \Delta^-$ なので $\beta(w) \in \Delta^-$ である。そして，α, β, φ の合成写像 $\alpha \circ \varphi \circ \beta$ を $\phi : S^m \to R^m$ とする。$\phi(w) = \alpha(\varphi(\beta(w)))$ なので，$\phi(w)$ は w を係数とした $p_1, \cdots, p_m$ の凸結合 $\beta(w)$ によって与えられる超過需要ベクトル (の集合)$\varphi(\beta(w))$ の各 $p_1, \cdots, p_m$ による評価額ベクトル (の集合)$(p_1(\varphi(\beta(w)), \cdots, p_m(\varphi(\beta(w))))$ である。$\beta(S^m) = co(F) \subset \Delta^-$ なので (iii) によって φ は $\beta(S^m)$ 上で上半連続である。すると，全定理の証明と同じく，この $\phi : S^m \to R^m$ が補題 8 の条件を満たす。したがって，ある $\overline{w_F} \in S^m$ が存在して $\phi(\overline{w_F}) \cap (-R^m_+) \neq \emptyset$ となり，$\overline{x_F} \in \varphi(\beta(\overline{w_F}))$ に対して $(p_1(\overline{x_F}), \cdots, p_m(\overline{x_F})) \leqq 0$ となる。この時，$\beta(\overline{w_F}) \in \Delta^-(\subset \Delta^*)$ なので

55) フローレンザーノ (1983 補題 1 pp.212-3)。そこでは，ここでの $*$ 弱位相 $(\sigma(E, {}^{-}E))$ に対応する線形位相として，任意の $*$ 弱位相 $(\sigma(E, E^*))$ より粗いものを考えているが，ここでは本文のようにした。また，そこでは超過需要対応 φ を Δ^* 上で定義されているとしているが，それもここでは本文のように，φ を Δ^- 上で定義されているとした。

$\overline{x_F} \in \varphi(\beta(\overline{w_F})) \subset \Gamma = \cup_{p\in\Delta^-}\varphi(p) \subset \Psi$ であり，Γ の $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ 閉包を $\overline{\Gamma} = cl_{\sigma(E,^-E)}(\Gamma)$，また，$P(F) = \{x \in E : p_i(x) \leqq 0, p_i \in F\} = \{x \in E : p_i(x) \leqq 0, i = 1\cdots, m\}$ とすると，$\overline{x_F} \in P(F)$ であり，$(P(F) \cap \overline{\Gamma}) \supset (P(F) \cap \Gamma) \neq \emptyset$ となる[56]。$P(F)$ は p_i が $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ 連続なので $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ 閉である。この結果は Δ^- の任意の有限集合 F について成立する。そこで，そのような F についての族 $\{F : F \subset \Delta^-, \#F < \infty\}$ を考えると，その族が $\overline{\Gamma}$ に対して有限交差性を満たす事になる。仮定から Γ は $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ 相対コンパクトなので $\overline{\Gamma}$ は $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ コンパクトであり，故に，$[(\cap_{F\subset\Delta^-}P(F)) \cap \overline{\Gamma}] \neq \emptyset$ となる。P は $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ 閉凸錐であり，$(^-P)^* = \{p \in (^-E) : p{\cdot}x \leqq 0, \forall p \in P\}$ として，E 上に $*$ 弱位相 $(\sigma(E,^- E))$ を利用すれば，補題 2 より $P = \{x \in E : p(x) \leqq 0, \forall p \in (^-P)^*\} = \{x \in E : p(x) \leqq 0, \forall p \in < (^-P)^* >\} \subset \{x \in E : p(x) \leqq 0, p \in F, \#F < \infty, F \subset \Delta^-\}$ となるので，$P \subset (\cap_{F\subset\Delta^-}P(F))$ となる。しかし，$p \in (^-P)^*$ に対して $F = \{p\}$ とすれば $(\cap_{F\subset\Delta^-}P(F)) \subset (\cap_{\{p\}\subset\Delta^-}P(\{p\})) = \{x \in E : p(x) \leqq 0, \forall p \in < (^-P)^* >\} = P$ となるので，$P = (\cap_{F\subset\Delta^-}P(F))$ となる。したがって，$[(\cap_{F\subset\Delta^-}P(F)) \cap \overline{\Gamma}] \neq \emptyset$ より $(P \cap \overline{\Gamma}) \neq \emptyset$ となる。

今，$\overline{x} \in (P \cap \overline{\Gamma})$ とする。$\overline{x} \in \overline{\Gamma}$ なので，$N^*(0)$ を 0 の $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ 近傍系とすると，0 の任意の $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ 近傍 V に対して $[(\overline{x} + V) \cap \Gamma] \neq \emptyset$ となり，$\forall V \in N^*(0)\ \exists x_V \in \Gamma\ x_V \in (\overline{x} + V)$ となる。すると，$x_V \in \Gamma = \cup_{p\in\Delta^-}\varphi(p)$ より $\exists p_V \in \Delta^-(\subset \Delta^*)\ x_V \in \varphi(p_V)$ となる。そこで，$V \prec V' \Longleftrightarrow V \supset V'$ によって有向集合 $(N^*(0), \prec)$ を定義する。まず，$\forall V \in N^*(0)\ \exists x_V \in \Gamma\ x_V \in (\overline{x} + V)$ となるので，$x_V \to \overline{x}(\prec\uparrow)$ となる。そして，$(x_V, p_V)_\prec$ は有向点列 (ネット) になるが，Δ^* と $\overline{\Gamma}$ はそれぞれ $*$ 弱 $(\sigma(E^*, E)-)$ コンパクトと $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ コンパクトなので，この有向点列 (ネット) には収束する有向部分点列 (サブネット) が存在し，$(x_V, p_V) \to (\overline{x}, \overline{\pi}) \in \overline{\Gamma} \times \Delta^*$ となる。まず，$x_V \in \varphi(p_V), p_V \in (\Delta^-)$ なので $(p_V, x_V) \in G_r(\varphi)$ であり，故に，$(\overline{\pi}, \overline{x}) \in (cl_{\sigma(E^*,E)\times\sigma(E,^-E)}(G_r(\varphi)))(\subset \Delta^* \times \overline{\Gamma})$ となって，$\overline{x} \in \widehat{\varphi}(\overline{\pi})(\subset \overline{\Gamma})$ である。すると，$\overline{x} \in (P \cap \overline{\Gamma})$ より $\overline{x} \in (\widehat{\varphi}(\overline{\pi}) \cap P)$ となるので，$\exists \overline{\pi} \in (\Delta \subset)\Delta^*$ に対して $(\overline{x} \in)(\widehat{\varphi}(\overline{\pi}) \cap P) \neq \emptyset$ となる。これが求めていた結果である。 □

この証明は，二階堂 (1957b,59) に沿った前節の定理 1 の証明方法を利用しているが，その際の証明とは違って Γ の $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ コンパクト性が利用できず，その代わりに $\overline{\Gamma}$ の $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ コンパクト性と Δ^* の $*$ 弱 $(\sigma(E^*, E)-)$ コンパクト性を利用している。そのために結果として，$\overline{\pi} \in \Delta^*$ は成立しているが，$\overline{\pi} \in \Delta^-$ とは限らない[57]。この結果を $int_\tau(P) \neq \emptyset$ ではなくて前定理のように $(P \cap -P) \neq P$ へと一般化しようとすると，示せる事は $(P \cap \overline{\Gamma}) \neq \emptyset$，つまり，$\exists x \in P\ \forall V \in N^*(0)\ \exists p_V \in < (^-P)^* >, x_V \in (\varphi(p_V) \cap (x + V))$ となる事だけである。そして，$x_V \to x$ となるが，有向点列 (p_V) についてはその極限が存在する事は一般には分からない[58]。

---

56) ここまでは二階堂 (1957b,59) の証明とフローレンザーノ (1983) の証明で違いはないが，以下の部分が違いがある。ここでは二階堂 (1957b,59) に沿った証明方法で進めて行くが，これ以降のフローレンザーノ (1983) の証明についても，この証明の後に触れる。

57) もちろん，$\Psi = \Gamma$ となっていれば $\Delta^- = \Delta^*$ なので $\overline{\pi} \in \Delta^-$ となる。ビューレー (1972) 以来，l_∞ のケースでは最初に $(l_\infty)^*$ である ba から均衡価格を見つけた後で，その価格の ba の部分集合である l_1 の部分も均衡価格であるという事を示す，二段階の議論立てになっている。定理 1 と定理 2 から $\Psi = \Gamma$ となっていれば直接的に均衡価格が l_1 に属するという事を示せるのが分かる。ただし，l_∞ を財空間とした経済モデルにおいて $\Psi = \Gamma$ となるかは不明である。この l_∞ を財空間とした経済に関する結果は次節で説明する。

58) $\Delta_V = \{p \in (P(V)^* \cap (^-E)) : p \cdot u = -1\}(\subset (\cup_{V\in N^*(0)}\Delta_{V'}) \subset \Delta^- \subset \Delta^*)$ とすると，$int_{\sigma(E,^-E)}(P(V)) \neq \emptyset$ と補題 8 よりこれは $*$ 弱 $(\sigma(E,^- E)-)$ コンパクトで，$V \supset V' \Longleftrightarrow \Delta_V \subset \Delta_{V'}$ となるが，$\cup_{V\in N^*(0)}\Delta_{V'}$ も，また，$u \in int_\tau(P)$ ではないので Δ^* も，$*$ 弱 $(\sigma(E^*, E)-)$ コンパクトとは限らず，故に，$p_V \in \Delta_V$ となったとしても，(p_V) が収束する有向部分点列を持つとは限らない。そこで上記の定理では，$u \in int_\tau(P)$ とする事で Δ^* を $*$ 弱 $(\sigma(E^*, E)-)$ コンパクトにして，その結果として $(p_V)(\subset \Delta^*)$ に収束する有向部分点列が存在して $p_V \to \overline{p} \in \Delta^*$ となる事を，利用しているのである。有限次元のケースでは，$||p|| = 1$ となる単位球のコンパクト性によって，P を外側から P_V で近似しても常に $||p_V|| = 1$ なので，$p_V \to \overline{p}, ||\overline{p}|| = 1$ となる $\overline{p}$ の存在が示せて，このような問題は起きな

また，$(P(F)\cap\overline{\Gamma})\neq\emptyset$ を示した部分から以下がフローレーンザーノ (1983，p.213) の証明とは異なっているが，フローレーンザーノ (1983，p.213) の証明は以下のようになっている。$(P(F)\cap\overline{\Gamma})\neq\emptyset$ を満たすような F についての族 $F=\{F : F\subset\Delta^-, \#F<\infty\}$ を考えると，$F\prec F' \Longleftrightarrow F\subset F'$ によって $(F,\prec)$ は有向集合になり，$\overline{x_F}\in(P(F)\cap\Psi), \beta(\overline{w_F})\in(\Delta^-\subset)\Delta^*$ に対して $(\overline{x_F},\beta(\overline{w_F}))_\prec$ は有向点列 (ネット) になるが，Δ^* と Ψ はそれぞれ $*$ 弱 $(\sigma(E^*,E)-)$ コンパクトと $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ コンパクトなので，この有向点列 (ネット) には収束する部分有向点列 (サブネット) が存在して，$(\overline{x_F},\beta(\overline{w_F}))\rightarrow(\overline{x},\overline{\pi})\in\Psi\times\Delta^*$ となる。まず，$\overline{x_F}\in\varphi(\beta(\overline{w_F})), \beta(\overline{w_F})\in(\Delta^-)$ なので，$(\beta(\overline{w_F}),\overline{x_F})\in G_r(\varphi)$ であり，故に，$(\overline{\pi},\overline{x})\in cl_{\sigma(E^*,E)\times\sigma(E,E^-)}(G_r(\varphi))$ なので，$\overline{x}\in\widehat{\varphi}(\overline{\pi})$ である。示す事は $\overline{x}\in P$ である。$\overline{x}\notin P$ とすると，P が $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 閉凸錐なので，補題 1 より $\exists q\in(^-P)^*\backslash\{0\}$ が存在して，$q\cdot\overline{x}>0\geqq q\cdot y\ \forall y\in P$ となるが，補題 3 より $q\cdot u<0$ なので $q\in\Delta^-$ と出来る。ところで，$\overline{x_F}\rightarrow\overline{x}$ と $*$ 弱位相 $(\sigma(E,^-E))$ の定義より $q\cdot\overline{x_F}\rightarrow q\cdot\overline{x}>0(\prec\uparrow)$ となるので，$q\in F'$ となる，$\prec$ で十分先の任意の F' に対して $q\cdot\overline{x_{F'}}>0$ となり，故に，$\overline{x_{F'}}\notin P(F')$ となる。しかし，Δ^- の任意の有限集合 F について $\overline{x_F}\in P(F)$ であったので，これは矛盾であり，故に，$\overline{x}\in P$ である。したがって，$\exists\overline{\pi}\in\Delta^*$ に対して $(\overline{x}\in)(\widehat{\varphi}(\overline{\pi})\cap P)\neq\emptyset$ となる。有向集合を構成する際に，このフローレーンザーノ (1983) の証明では，$(P(F)\cap\overline{\Gamma})\neq\emptyset$ を満たすような F についての族 $F=\{F : F\subset\Delta^-, \#F<\infty\}$ を利用しているが，上記の証明では，0 の $*$ 弱 $(\sigma(E,^-E)-)$ 近傍系 $N^*(0)$ を利用している。

次節において，上記の定理 2 を応用して l_∞ を財空間とした経済モデルにおいて競争均衡が存在する事を示して，フローレーンザーノ (1983) の修正を施した，二階堂の無限次元空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題の適用例を与える。

6．無限次元財空間モデルにおける競争均衡の存在：ビューリー (1972) モデルへの応用

この節では，l_∞ を財空間とする簡略化されたビューリー (1972) の無限次元財空間経済モデルを取り上げ，前節で示した，フローレンザーノ (1983) に沿って修正した，二階堂による無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題である定理 2 を適用して，その経済に競争均衡が存在する事を示す[59]。フローレンザーノ (1983) では純粋交換経済を取り扱ったが，ここでは生産経済を取り扱う。その証明では，有限次元財空間モデルにおいてゲール (1955)，二階堂 (1956)，そしてドブリュー (1959) が行ったものと同様にして，実現可能集合の有界性を利用して，まず，十分に大きな範囲に制限した経済において，ゲール・二階堂の補題を適用して競争均衡を見つけ，その後で，その競争均衡が，範囲の制限のない本来の経済における競争均衡である事を示す。有限次元のケースの証明と殆ど同様に議論は進んでいくが，経済学的な観点から選ばれた線形位相と整合的な価格集合のコンパクト性が得られない点と，更には，有限次元上での超過需要対応の上半連続性しか示せないためにその像のコンパクト性が得られない点から，前節において二階堂による無限次元のゲール・二階堂の補題を，フローレンザーノ (1983) に沿って定理 2 のように修正した理由が，明らかになる。

ここでは，1 つの $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ 閉集合である $C^h(\subset l_\infty^+)$ を選好関係 R^h(反射性, 完備性, 推移性) が定義される消費集合として持ち，$\omega^h\in C^h$ を初期保有点として持つような H 人の消費者と，原

い。もちろん，超過需要対応が定義されている Δ^- が最初から弱 $(\sigma(E^-,E)-)$ コンパクトであれば，$u\in int_\tau(P)$ と仮定しなくても，有限次元のケースと同様な議論によって，$p_V\rightarrow\overline{p}\in\Delta^-$ となる。

[59] 既に述べているように，l_∞ は有界数列の集合で $||\cdot||_\infty-$ ノルムを与えた無限次元ノルム空間であり，総和可能な数列の集合に $||\cdot||_1-$ ノルムを与えた無限次元ノルム空間 l_1 のノルム双対空間である。l_∞ のノルム双対空間は ba という (N 上の) 有界な有限加法的測度である。

点を頂点とする $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 閉凸錐となっている総生産集合 Y が存在するような，生産経済を考える。選好関係 R^h に関しては，$x \in C^h$ に対して $R^h(x)$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 閉とし，$R^h(x)$ の下部 $(R^h)^-(x) = \{y \in C^h : x \in R^h(y)\}$ は $||\cdot||_\infty-$ ノルム閉とする[60]。更に，選好は強単調的，つまり，$x > y \to x \in P^h(y)$ であり，凸，つまり，$x' \in P^h(x)\ \alpha \in (0,1) \to (\alpha x' + (1-\alpha)x) \in P^h(x)$ であるとする。するとこの時，$x \in C^h$ に対して $R^h(x)$ は凸となる。また，初期保有点に関しては，各 h に対してある正数 $\alpha^h > 0$ と $\overline{\omega}^h \in C^h$ が存在して $\omega^h \geqq \overline{\omega}^h + \alpha^h e$ とし，$\omega = \sum_{h=1}^{H} \omega^h$ とする。そして，総生産集合 Y に関しては，自由処分が可能で $-(l_\infty^+) \subset Y$ となっていて，$(\omega + Y) \cap l_\infty^+$ は $||\cdot||_\infty-$ 有界になっているとする。するとこの時，$e = (1, 1, \cdots) \in int_{||\cdot||_\infty}(l_\infty^+)$ より $int_{||\cdot||_\infty}(l_\infty^+) \neq \emptyset$ なので $int_{||\cdot||_\infty}(Y) \neq \emptyset$ となり，また，ある正数 $m > 0$ が存在して $z \in ((\omega + Y) \cap l_\infty^+)$ ならば $z \leqq me$ となる。特に，後者によって経済全体での競争均衡を見つける際には，十分に大きい範囲に経済を制限して競争均衡を見つければよいという事になる。

まず，$e \in int_{||\cdot||_\infty}(l_\infty^+)$ を利用して，一般価格集合 Π を $\Pi = \{p \in Y^* : p\cdot(-e) = -1\}(\neq \emptyset)$ とすれば，$-e \in int_{||\cdot||_\infty}(Y)$ と前節の補題 9 によって，Π は $*$ 弱 $(\sigma(ba, l_\infty)-)$ コンパクトである。また，l_1 に制限された価格集合 Δ を $\Delta = \Pi \cap l_1 = \{p \in (Y^* \cap l_1) : p\cdot(-e) = -1\}(\subset \Pi)$ とする。$Y \neq l_\infty$ なので補題 1 より $\Delta \neq \emptyset$ となる。ただし，Δ には補題 9 が適用できないので $*$ 弱 $(\sigma(l_1, l_\infty)-)$ コンパクトとは限らない[61]。消費者 h の予算対応 $B^h : \Pi \to C^h$ を，$p \in \Pi \to B^h(p) = \{x \in C^h : p\cdot x \leqq p\cdot\omega^h\}$ によって定義する。$\omega^h \in B^h(p)$ より $B^h(p) \neq \emptyset\ \forall p \in \Pi$ である。$p \in \Pi$ とすると $p \in Y^*$ なので最大利潤は 0 であり，故に，企業から消費者への配当の分配は考慮しなくていい。この時，$B^h(p)$ は $p \cdot x$ の線形性によって凸である。また，C^h は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 閉なので弱 $(\sigma(l_\infty, ba)-)$ 閉であり，$p \cdot x$ の l_∞ 上での弱 $(\sigma(l_\infty, ba)-)$ 連続性によって，$B^h(p)$ は弱 $(\sigma(l_\infty, ba)-)$ 閉である[62]。需要対応 $\varphi^h : \Pi \to C^h$ を，$p \in \Pi \to \varphi^h(p) = \{x \in B^h(p) : y \in B^h(p) \to x \in R^h(y)\}$ によって定義する[63]。選好の凸性によって $\varphi^h(p)$ は凸になる。$x, x' \in \varphi^h(p)$ として $\alpha \in (0,1)$ に対して $\alpha x + (1-\alpha)x'$ を考えると，$B^h(p)$ の凸性より $(\alpha x + (1-\alpha)x') \in B^h(p)$ となる。そして，x と x' は無差別なので $(x, x' \in) R^h(x) = R^h(x')$ であり，選好の凸性により $R^h(x)$ は凸になるので，$(\alpha x + (1-\alpha)x') \in R^h(x)$ となる。すると，$x \in \varphi^h(p)$ によって $y \in B^h(p) \to x \in R^h(y)$ なので R^h の推移性より $y \in B^h(p) \to (\alpha x + (1-\alpha)x') \in R^h(y)$ となり，$(\alpha x + (1-\alpha)x') \in \varphi^h(p)$ となる。故に，$\varphi^h(p)$ は凸である。特に，Δ 上に価格を制限したケースでは，$p \cdot x$ の l_∞ 上での $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 連続性によって，$B^h(p)$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 閉である。また，選好の強単調性を前提にしているので，$x \in \varphi^h(p)$ ならば $p \cdot x = p \cdot \omega^h$ となる。実際，$\alpha > 0$ に対して $x + \alpha e > x$ なので選好の強単調性より $x + \alpha e \in P^h(x)$ となるが，$p \cdot x$ の l_∞ 上での弱 $(\sigma(l_\infty, ba)-)$ 連続性によって $\alpha \to 0 \Longrightarrow p \cdot (x + \alpha e) \to p \cdot x$ となるので，$p \cdot x < p \cdot \omega^h$ とすると十分に 0 に近い $\alpha (> 0)$ に対して $p \cdot (x + \alpha e) < p \cdot \omega^h$ となる。これは x よりも望ましい点が予算集合の中に存在している事を示しているので，$x \in \varphi^h(p)$ に矛盾し，故に，$p \cdot x = p \cdot \omega^h$ となる。総超過

---

60) 後に触れるように，均衡価格を l_1 から構成する際には，$R^h(x)$ の下部 $(R^h)^-(x)$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 閉とする必要がある。

61) これによって超過需要対応 (のグラフ) を拡張するという操作が必要となり，これが，フローレンザーノ (1983) に沿って，二階堂による無限次元のゲール・二階堂の補題を修正する必要が生じた理由の 1 つである。

62) 因みに，$l_\infty^+ = \{x \in l_\infty : x \geq 0\} = \{x \in l_\infty : (x,p) \geqq 0\ \forall p \in l_1^+\} = \cap_{p \in l_1^+}\{x \in l_\infty : (x,p) \geqq 0\}$ であるが，$*$ 弱位相 $(\sigma(l_\infty, l_1))$ の定義より $p \in l_1$ に対しては，$p \cdot x$ が l_∞ 上で x に関して $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 連続なので，$\{x \in l_\infty : (x,p) \geqq 0\}$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 閉であり，故に，その共通部分である l_∞^+ も $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 閉である。

63) $R^h(x)$ から導かれる強選好集合 $P^h(x)$ を利用すれば，$\varphi^h(p) = \{x \in B^h(p) : B^h(p) \cap P^h(x)) = \emptyset\}$ である。

需要対応 $\psi:\Pi\to l_\infty$ を $p\in\Pi\to\psi(p)=\sum_{h=1}^{H}\varphi^h(p)-\sum_{h=1}^{H}\omega^h=\varphi(p)-\omega$ によって定義する。この時，各消費者にとって $x\in\varphi^h(p)\Longrightarrow p\cdot x=p\cdot\omega^h$ となっているので，$p\in\Pi$ に対して $p\cdot\psi(p)=p\cdot(\sum_{h=1}^{H}\phi^h(p)-\sum_{h=1}^{H}\omega^h)=\sum_{h=1}^{H}(p\cdot\phi^h(p)-p\cdot\omega^h)=0$ であり，ワルラス法則が成立する。

$\widetilde{x}=(x^1,\cdots,x^H)\in\times_{h=1}^{H}C^h$ をこの経済の配分と定義し，$(\sum_{h=1}^{H}x^h-\sum_{h=1}^{H}\omega^h)\in Y$ となる時に配分 $\widetilde{x}$ は実行可能的と定義する。$\widetilde{X}=\{\widetilde{x}\in\times_{h=1}^{H}C^h:(\sum_{h=1}^{H}x^h-\sum_{h=1}^{H}\omega^h)\in Y\}$ を実行可能な配分の集合とする。$0\in Y$ と $\omega^h\in C^h$ によって $\widetilde{\omega}=(\omega^1,\cdots,\omega^H)\in\widetilde{X}$ となるので，$\widetilde{X}\neq\emptyset$ である。そして，$\overline{\widetilde{x}}=(\overline{x^1},\cdots,\overline{x^H})\in\widetilde{X},\overline{x^h}\in\varphi^h(\overline{p}),h=1,\cdots,H,\overline{p}\in\Pi$ となる時に，$(\overline{\widetilde{x}},\overline{p})=(\overline{x^1},\cdots,\overline{x^H},\overline{p})$ を競争均衡と定義する[64]。この時の総生産量 $\overline{y}$ は $\overline{y}=(\sum_{h=1}^{H}\overline{x^h}-\sum_{h=1}^{H}\omega^h)(\in Y)$ で与えられる[65]。また，ベクトル演算の連続性と C^h 及び Y の $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ 閉性によって，$\widetilde{X}$ は直積 $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)^H-)$ 閉である。$\widetilde{X^h}=\{x^h\in C^h:(\sum_{k=1}^{H}x^k-\sum_{k=1}^{H}\omega^k)\in Y,\exists x^k\in C^k,k=1,\cdots,H\}$ を消費者 h の実行可能な消費集合とする[66]。$\widetilde{X^h}$ は凸集合である。そして，$x^h\in\widetilde{X^h}$ とすると，任意の $k\neq h$ に対してある $x^k(\geqq 0)$ が存在して $\sum_{k=1}^{H}x^k\leqq me$ となるので，$(0\leqq)x^h\leqq me-\sum_{k\neq h}x^k\leqq me$ より，$\widetilde{X^h}$ は $||\cdot||_\infty-$ ノルム有界となる[67]。そこで，各 $\widetilde{X^h}$ が $||\cdot||_\infty-$ ノルム有界なので，任意の h に対して $\widetilde{X^h}\subset int_{||\cdot||_\infty}(B)$ となるように l_∞ のノルム閉球 B を選んでおく。そして，B 上に制限した予算対応 $\widetilde{B^h}:\Pi\to C^h$ を $p\in\Pi\to\widetilde{B^h}(p)=\{x\in(C^h\cap B):p\cdot x\leqq p\cdot\omega^h\}=(B^h(p)\cap B)(\neq\emptyset)$ により，また，B 上に制限した需要対応 $\widetilde{\varphi^h}:\Pi\to C^h\cap B$ を，$p\in\Pi\to\widetilde{\varphi^h}(p)=\{x\in\widetilde{B^h}(p):y\in\widetilde{B^h}(p)\to x\in R^h(y)\}$ により，それぞれ定義する。B は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ コンパクトで，$p\in\Delta$ に対しては $B^h(p)$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ 閉なので $\widetilde{B^h}(p)$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ コンパクトである。需要対応 $\widetilde{\varphi^h}$ の非空性は Π 上ではなく Δ 上でのみ示す。$\varphi^h(p)$ の凸性の議論と同様にして，$\widetilde{B^h}(p)$ の凸性と選好の凸性によって $\widetilde{\varphi^h}(p)$ も凸になる。B 上に制限した総超過需要対応 $\widetilde{\psi}:\Pi\to l_\infty$ を $p\in\Pi\to\widetilde{\psi}(p)=\sum_{h=1}^{H}\widetilde{\varphi^h}(p)-\sum_{h=1}^{H}\omega^h$ によって定義する。この時，各消費者の予算制約より弱ワルラス法則 $p\cdot\widetilde{\psi}(p)\leqq 0$ が成立する[68]。

[64] $\overline{p}\in\Delta$ とは限らないので $\overline{p}\in\Pi$ としている。

[65] この時の総生産量 $\overline{y}$ については，選好の単調性よって各消費者の予算制約が等号で成立して $\overline{p}\cdot\overline{x^h}=\overline{p}\cdot\omega^h$ となるので，$\overline{p}\cdot\overline{y}=\overline{p}\cdot\sum_{h=1}^{H}\overline{x^h}-\overline{p}\cdot\sum_{h=1}^{H}\omega^h=0$ となり，$\overline{y}$ は $\overline{p}$ の価格の下で利潤最大化を実現している。

[66] もちろん，$\widetilde{X}\subset\times_{h=1}^{H}\widetilde{X^h}$ である。

[67] 実際には，$\widetilde{X^h}$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ コンパクトになる。今，$x^{h\alpha}\in\widetilde{X^h},x^{h\alpha}\to_{\sigma(l_\infty,l_1)}x^h(\alpha\uparrow)$ とすると，$\widetilde{X^h}$ の定義より任意の $k\neq h$ に対して $(x^{k\alpha})\in\widetilde{X^k}$ が存在して，$(\Sigma_{k=1}^{H}x^{k\alpha}-\Sigma_{k=1}^{H}\omega^k)\in Y$ となる。そして，$\widetilde{X^k}$ は $||\cdot||_\infty-$ ノルム有界なので，バナッハ・アラオグルー定理により $\widetilde{X^k}$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ 相対コンパクトになり，故に，$x^{k\alpha}\to_{\sigma(l_\infty,l_1)}x^k(\alpha\uparrow)$ と出来る。この時，$x^{k\alpha}\in C^h$ で C^h は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ 閉なので $x^k\in C^h$ である。そして，$(\Sigma_{k=1}^{H}x^{k\alpha}-\Sigma_{k=1}^{H}\omega^k)\to_{\sigma(l_\infty,l_1)}(\Sigma_{k=1}^{H}x^k-\Sigma_{k=1}^{H}\omega^k)$ となるが，Y は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ 閉なので，$(\Sigma_{k=1}^{H}x^k-\Sigma_{k=1}^{H}\omega^k)\in Y$ となり，故に，$x^h\in\widetilde{X^h}$ となって，$\widetilde{X^h}$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ コンパクトである。この時，$\widetilde{X}\subset\times_{k=1}^{H}\widetilde{X^k}$ なので，$\widetilde{X}$ は直積 $*$ 弱位相 $(\sigma(l_\infty,l_1)^H-)$ で相対コンパクトになるが，$\widetilde{X}$ は直積 $*$ 弱位相 $(\sigma(l_\infty,l_1)^H-)$ で閉なので，$\widetilde{X}$ は直積 $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)^H-)$ コンパクトである。

[68] B 上に需要点があってしかも予算が余るという可能性があるために，この時点では $p\cdot\widetilde{\psi}(p)=0$ となるとは限らない。

また，各 h に対して $\widetilde{\varphi^h}(p) \subset B$ なので $\widetilde{\psi}(p)$ も $||\cdot||_\infty-$ 有界となり，故に，$\widetilde{\psi}(p)$ は l_∞ の十分に大きいノルム閉球 $\widetilde{\Psi}$ に含まれる。この $\widetilde{\Psi}$ も $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクトである。また，各 $\widetilde{\varphi^h}(p)$ が凸なので $\widetilde{\psi}(p)$ も凸である。最初に，Δ 上での需要対応 $\widetilde{\varphi^h}$ の非空性を示す。

補題 10　需要対応 $\widetilde{\varphi^h} : \Delta \to (C^h \cap B)$ は非空凸 $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクト値である。

証明.　$x \in \widetilde{B^h}(p), p \in \Delta$ に対して $\widetilde{R^h}(x) = (\widetilde{B^h}(p) \cap R^h(x))$ とする。$R^h(x)$ は仮定より $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 閉であり，また，$\widetilde{B^h}(p)$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクトなので，$\widetilde{R^h}(x)$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクトである。すると，$\{\widetilde{R^h}(x) : x \in \widetilde{B^h}(p)\}$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクト集合 $\widetilde{B^h}(p)$ の $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 閉集合族となるが，選好関係 R^h の完備性と推移性によって，有限個の消費点には必ず最大点が存在するので，$\{\widetilde{R^h}(x) : x \in \widetilde{B^h}(p)\}$ は有限交差性を満たす。したがって，$\widetilde{B^h}(p)$ の $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクト性により $\cap_{x\in\widetilde{B^h}(p)}\widetilde{R^h}(x) \neq \emptyset$ となる。すると，$\cap_{x\in\widetilde{B^h}(p)}\widetilde{R^h}(x) = \widetilde{\varphi^h}(p)(\neq \emptyset)$ なので $\widetilde{\varphi^h}(p)$ は非空 $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクトである。□

$\widetilde{\varphi^h}(p) \neq \emptyset$ は $p \in \Delta$ に対してだけ示されている事に注意する。この補題より，B 上に制限した総超過需要対応 $\widetilde{\psi}$ は Δ 上では非空値として定義される。そこで，$\widetilde{\psi} : \Pi \to l_\infty$ ではなくて $\widetilde{\psi} : \Delta \to l_\infty$ を取り上げる。そして，$\widetilde{\psi} : \Delta \to l_\infty$ が定理 2 の $(i)', (ii)', (iii)', (iv)'$ を満たす事を示す。

補題 11　$\widetilde{\psi} : \Delta \to l_\infty$ は定理 2 の $(i)', (ii)'', (iii)', (iv)'$ を満たす[69)]。

証明. $\widetilde{\psi}(p) = \sum_{h=1}^{H}\widetilde{\varphi^h}(p) - \sum_{h=1}^{H}\omega^h$ なので，$p \in \Delta$ に対しては $\widetilde{\varphi^h}(p) \neq \emptyset$ より $\widetilde{\psi}(p) \neq \emptyset$ であり，更に，$\widetilde{\varphi^h}(p)$ が $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクトなので，$\widetilde{\psi}(p)$ も $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクトになる。もちろん，$(\cup_{p\in\Delta}\widetilde{\psi}(p)) \subset \widetilde{\Psi}$ である[70)]。また，既に $\widetilde{\psi}$ が Π 上で弱ワルラス法則を満たすので Δ 上でも弱ワルラス法則を満たす。したがって，$\widetilde{\psi} : \Delta \to l_\infty$ は定理 2 の $(i)', (iii)', (iv)'$ を満たすので，$\widetilde{\psi}$ に定理 2 の結果を応用するためには $(ii)''$ を示せばいい。

そこで $\widetilde{\psi}$ が定理 2 の $(ii)''$ を満たす事を示す。Δ から有限個の点 $\{p_1, \cdots, p_l\}$ を選んで，Δ^l をその凸包 $co\{p_1, \cdots, p_l\} = \Delta^l(\subset \Delta)$ とする。この時，$\widetilde{\psi}$ が Δ^l 上で上半連続である事を示せばいい。$p \in \Delta$ に対しては，$\widetilde{\psi}(p) = \sum_{h=1}^{H}\widetilde{\varphi^h}(p) - \sum_{h=1}^{H}\omega^h$ で，$\widetilde{\varphi^h}(p)$ が $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクトなので，$\widetilde{\varphi^h}$ が Δ^l 上で上半連続であれば，$\widetilde{\psi}$ も Δ^l 上で上半連続になる。故に，$\widetilde{\varphi^h}$ が Δ^l 上で上半連続である事を示せばいいが，$\widetilde{\varphi^h}(\cdot) \subset B$ よって $\widetilde{\varphi^h}$ の像が $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクト集合に含まれるので，補題 7 の $(b) \to (a)$ により，$\widetilde{\varphi^h}$ が $\Delta^l \times \Psi$ における弱位相 $(\sigma(l_1, l_\infty)) \times *$ 弱位相 $(\sigma(l_\infty, l_1))$ の直積位相で閉グラフを持つ事を示せばいい。ところで，Δ^l は l_1 の有限次元 (コンパクト) 部分集合なので，Δ^l 上では弱位相 $(\sigma(l_1, l_\infty))$ と $||\cdot||_1-$ ノルム位相はどちらも有限次元ユークリッド空間の位相と同値であり，弱位相 $(\sigma(l_1, l_\infty))$ と $||\cdot||_1-$ ノルム位相を区別する必要はない。したがって，$\widetilde{\varphi^h}$ が $\Delta^l \times \Psi$ における $||\cdot||_1-$ ノルム位相 $\times *$ 弱位相 $(\sigma(l_\infty, l_1))$ の直積位相で閉グラフを持つ事を示せばいい。この時，B が $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクトなので $p \cdot x$ は $l_1 \times B$ 上で $||\cdot||_1-$ ノ

69) フローレンザーノ (1983) やアリプランティス‐ブラウン (1983) では，この証明を明示的には入れていないので，本稿では入れておいた。

70) ここで $(\cup_{p\in\Delta}\widetilde{\psi}(p)) \subset \widetilde{\Psi}$ であり，$\widetilde{\Psi}$ が $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクトなので，$(\cup_{p\in\Delta}\widetilde{\psi}(p))$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ 相対コンパクトであるが，$*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクトとは限らない。このために定理 1 を適用する事が出来ず，これが，更にこの点を考慮に入れて修正した定理 2 を示す必要が生じた二つ目の理由である。もちろん，$(\cup_{p\in\Delta}\widetilde{\psi}(p))$ が $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty, l_1)-)$ コンパクトであれば，定理 1 によって直接的に l_1 に均衡価格が存在する事を示せるが，今の所この点は不明である。

ルム位相 ×∗ 弱位相 ($\sigma(l_\infty, l_1)$) の直積位相に関して同時的に連続であり，Δ^l は l_1 の (有限次元のコンパクト) 部分集合なので，$p \cdot x$ も $\Delta^l \times B$ 上で $||\cdot||_1-$ ノルム位相 ×∗ 弱位相 ($\sigma(l_\infty, l_1)$) の直積位相に関して同時的に連続である。更に，B は $||\cdot||_\infty-$ ノルム有界集合なのでその上の ∗ 弱位相 ($\sigma(l_\infty, l_1)$) は距離付け可能となり，故に，$(B \times \Delta^l)$ 上の $||\cdot||_1-$ ノルム位相 ×∗ 弱位相 ($\sigma(l_\infty, l_1)$) の直積位相は点列によって特徴付けられる。

そこで，$(p^n, x^{hn})_{n=1}^\infty \in Gr(\widetilde{\varphi^h})(\subset (\Delta^l \times B))$ で $(p^n, x^{hn}) \to_{||\cdot||_1 \times \sigma(l_\infty, l_1)} (\widehat{p}, \widehat{x^h})$ とする。まず，Δ^l はコンパクト集合なので $\widehat{p} \in \Delta^l$ である。$x^{hn} \in (C^h \cap B)$ で $(C^h \cap B)$ が ∗ 弱 ($\sigma(l_\infty, l_1)-$) コンパクトなので ∗ 弱 ($\sigma(l_\infty, l_1)-$) 閉であり，$x^{hn} \to_{\sigma(l_\infty, l_1)} \widehat{x^h}$ なので $\widehat{x^h} \in (C^h \cap B)$ である。また，$(p^n, x^{hn}) \to (\widehat{p^n}, \widehat{x^h})$ とすると，$p^n \cdot x^{hn} \leqq p^n \cdot \omega^h$ で $p \cdot x$ が $\Delta^l \times B(\supset (p^n, x^{hn})_{n=1}^\infty)$ 上で $||\cdot||_1-$ ノルム位相 ×∗ 弱位相 ($\sigma(l_\infty, l_1)$) の直積位相に関して同時的に連続である事から $\widehat{p} \cdot \widehat{x^h} \leqq \widehat{p} \cdot \omega^h$ となり，$\widehat{x^h} \in \widetilde{B^h}(\widehat{p})$ となる。故に，$\widehat{x^h} \in \widetilde{\varphi^h}(\widehat{p})$ のためには，$z \in \widetilde{B^h}(\widehat{p}) \to \widehat{x^h} \in R^h(z)$ を示せばいい。そこで，ある $z \in \widetilde{B^h}(\widehat{p})$ に対して $z \in P^h(\widehat{x^h})$ となったとする。$z \in \widetilde{B^h}(\widehat{p})$ より $\widehat{p} \cdot z \leqq \widehat{p} \cdot \omega^h$ である。$\omega^h - \overline{\omega}^h \in int_{||\cdot||_\infty}(l_\infty^+)$ なので，生産の自由処分の仮定より $\overline{\omega}^h - \omega^h \in int_{||\cdot||_\infty}(Y)$ であり，$\widehat{p} \in Y^*$ によって $\widehat{p} \cdot (\overline{\omega}^h - \omega^h) < 0$ となって，$\widehat{p} \cdot \omega^h > \widehat{p} \cdot \overline{\omega}^h$ である[71]。$\alpha \in (0,1)$ とすると $(\alpha z + (1-\alpha)\overline{\omega}^h) \in \widetilde{B^h}(\widehat{p})$ で $\widehat{p} \cdot (\alpha z + (1-\alpha)\overline{\omega}^h) < \widehat{p} \cdot \omega^h$ となるので，$p^n \to \widehat{p}$ より十分に大きな n に対して $p^n \cdot (\alpha z + (1-\alpha)\overline{\omega}^h) < p^n \cdot \omega^h$ となる。しかし，$x^{hn} \in \widetilde{\varphi^h}(p^n)$ なので $x^{hn} \in R^h((\alpha z + (1-\alpha)\overline{\omega}^h))$ であり，選好の上半連続性より $R^h((\alpha z + (1-\alpha)\overline{\omega}^h))$ は ∗ 弱位相 ($\sigma(l_\infty, l_1)-$) 閉なので，$n \to \infty \Longrightarrow x^{hn} \to \widehat{x^h}$ によって $\widehat{x^h} \in R^h((\alpha z + (1-\alpha)\overline{\omega}^h))$ となり，$(\alpha z + (1-\alpha)\overline{\omega}^h) \in (R^h)^{-1}(\widehat{x^h})$ となる。そして，選好の下半連続性より $(R^h)^{-1}(\widehat{x^h})$ は $||\cdot||_\infty-$ 閉であり，$\alpha \to 1$ とすると $(\alpha z + (1-\alpha)\overline{\omega}^h) \to_{||\cdot||_\infty} z$ なので，$z \in (R^h)^{-1}(\widehat{x^h})$ となって，$\widehat{x^h} \in R^h(z)$ となる。しかし，これは $z \in P^h(\widehat{x^h})$ に矛盾するので，$\widehat{x^h} \in \widetilde{\varphi^h}(\widehat{p})$ であり，$Gr(\widetilde{\varphi^h})$ は ($||\cdot||_1 \times \sigma(l_\infty, l_1))-$ 直積位相で) 閉である。したがって，$\widetilde{\varphi^h}$ は Δ^l 上で上半連続であり，$\widetilde{\psi}$ も Δ^l 上で上半連続になって $(ii)''$ も成立する。 □

以上によって，$\widetilde{\psi} : \Delta \to l_\infty$ は定理 2 の $(i)', (ii)'', (iii)', (iv)'$ を満たす事が示されたので，$\widetilde{\psi}$ に定理 2 が適用可能となり，その結果を利用すれば，l_∞ を財空間とする経済に競争均衡が存在する事を示す事が出来る。以下がその定理である。

定理３（ビューリー (1972)） l_∞ を財空間とする有限人の消費者が存在して，以下の条件を満たす生産経済を考える。(1) : 各消費者は ∗ 弱 ($\sigma(l_\infty, l_1)-$) 閉集合 $C^h(\subset l_\infty^+)$ を消費集合として，その上には反射性，完備性，そして推移性を満たす選好関係 R^h が定義されている。また，各消費者の初期保有点 $\omega^h \in C^h$ は，ある正数 $\alpha^h > 0$ と $\overline{\omega}^h \in C^h$ が存在して $\omega^h \geqq \overline{\omega}^h + \alpha^h e$ となっている。(2) : $x \in C^h$ に対して $R^h(x)$ は ∗ 弱 ($\sigma(l_\infty, l_1)-$) 閉であり，$R^h(x)$ の下部 $(R^h)^{-1}(x) = \{y \in C^h : x \in R^h(y)\}$ は $||\cdot||_\infty-$ ノルム閉である。更に，選好は強単調的で $x > y \to x \in P^h(y)$ で，凸で $x' \in P^h(x)$ $\alpha \in (0,1) \to (\alpha x' + (1-\alpha)x) \in P^h(x)$ である。(3) : 総生産集合 Y は原点 0 を頂点とする ∗ 弱 ($\sigma(l_\infty, l_1)-$) 閉凸錐で，自由処分が可能で $-(l_\infty^+) \subset Y$ である。(4) : $(\omega + Y) \cap l_\infty^+$ は $||\cdot||_\infty-$ 有界である。この時，この経済には $ba^+ \backslash \{0\}$ に属するような均衡価格を持つ競争均衡が存在する[72]。

証明. $\widetilde{\psi}$ に $P = Y$ として定理 2 を適用すると，その帰結によってある $(\overline{p}, \overline{x}) \in (cl_{(\sigma(ba, l_\infty) \times \sigma(l_\infty, l_1)}$

[71] 補題 3 では $(E, ^-E)$ を利用したが，二階堂 (1957b,59) の本来の形では，(E, E^*) を利用してその成立を示している。ここでは，二階堂 (1957b,59) の本来の結果を，$E = l_\infty$ で $||\cdot||_\infty-$ ノルム位相をその上の位相として適用すればいい。

[72] ビューリー (1972 定理 1) では L_∞ を用いたが，この定理 3 はその一例である l_∞ を利用した簡略化した結果である。また，ビューリー (1972 定理 1) では一般的な凸生産集合を利用しているが，ここでは凸錐生産集合を用いている。

$(Gr(\widetilde{\psi}))(\subset(\Pi\times\widetilde{\Psi}))$ が存在して $\overline{x}\in Y$ となる。この $\overline{p}$ に付いては $p\in\Delta(\subset l_1^+)$ とは限らない事に注意する。$\overline{x}\in Y$ なので $\overline{p}\in\Pi\subset Y^*$ より $\overline{p}\cdot\overline{x}\leqq 0$ である。$(\overline{p},\overline{x})\in(cl_{(\sigma(ba,l_\infty)\times\sigma(l_\infty,l_1)}(Gr(\widetilde{\psi}))(\subset(\Pi\times\widetilde{\Psi}))$ なので，$(U,V)\prec(U',V')\Longleftrightarrow(U,V)\supset(U',V')$ によって有向集合 $(N(0),\prec)$ を定義すれば，ある有向点列 $(p^\alpha,x^\alpha)\in Gr(\widetilde{\psi})(\subset(\Pi\times\widetilde{\Psi}))$ が存在して $(p^\alpha,x^\alpha)\to_{(\sigma(ba,l_\infty)\times\sigma(l_\infty,l_1)}(\overline{p},\overline{x})(\alpha\uparrow)$ となる。$(p^\alpha,x^\alpha)\in Gr(\widetilde{\psi})$ なので $\sum_{h=1}^H x^{h\alpha}\in\widetilde{\psi}(p^\alpha)$ であり，$x^{h\alpha}+\omega^h=z^{h\alpha}\in\widetilde{\varphi^h}(p^\alpha)(\subset(B\cap C^h)),\forall h=1,\cdots,H$ である。すると，$(x^{h\alpha})_\alpha$ も $||\cdot||_\infty-$ 有界なので $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ 収束部分有向点列が存在し，ある $\overline{x^h}$ に対して $x^{h\alpha}\to_{\sigma(l_\infty,l_1)}x^h(\alpha\uparrow)$ となる。すると，$x^{h\alpha}+\omega^h\in(B\cap C^h)$ なので $x^h+\omega^h\in(B\cap C^h)$ であり，更に，$\sum_{h=1}^H x^{h\alpha}=x^\alpha\to_{\sigma(l_\infty,l_1)}\overline{x}(\alpha\uparrow)$ なので，$\overline{x}=\sum_{h=1}^H\overline{x^h}\in Y$ である。したがって，$\overline{x^h}+\omega^h=\overline{z^h}\in\widetilde{X}^h(\subset int_{||\cdot||_\infty}(B)),\forall h=1,\cdots,H$ であり，$\widetilde{\overline{z}}=(\overline{z^h})\in\widetilde{X}$ である。この時，$\overline{z^h}\in int_{||\cdot||_\infty}(B)$ である事に注意する。

最初に，この $(\overline{p},\widetilde{\overline{z}})$ が各消費者の消費集合を $(B\cap C^h)$ とした経済の競争均衡である事を示す。そのためには，$\overline{z^h}\in\widetilde{\varphi^h}(\overline{p})$ が成立して $\overline{z^h}$ が $\overline{p}$ の下で需要点になっている事を示せばよい。まず，$z'\in(P^h(\overline{z^h})\cap B)$ とすると，$x^{h\alpha}\to_{\sigma(l_\infty,l_1)}\overline{x^h}(\alpha\uparrow)$ より $z^{h\alpha}{\to}\sigma(l_\infty,l_1)\overline{z^h}(\alpha\uparrow)$ であり，選好の連続性より $(P^h)^{-1}(z')(\ni\overline{z^h})$ は $*$ 弱 $(\sigma(l_\infty,l_1)-)$ 開なので，十分に大きな α に対して $z'\in(P^h(z^{h\alpha})\cap B)$ となる。そして，$z^{h\alpha}\in\widetilde{\varphi^h}(p^\alpha)$ なので，需要点の定義より $p^\alpha\cdot z'>p^\alpha\cdot\omega^h$ となり，$p^\alpha\to_{\sigma(ba,l_\infty)}\overline{p}(\alpha\uparrow)$ より $\overline{p}\cdot z'\geqq\overline{p}\cdot\omega^h$ となる。すると $\overline{z^h}\in int_{||\cdot||_\infty}(B)$ と任意の十分に小さい $\beta(>0)$ に対して，選好の単調性より $\overline{z^h}+\beta e\in(P^h(\overline{z^h})\cap B)$ となるので，$\overline{p}\cdot(\overline{z^h}+\beta e)\geqq\overline{p}\cdot\omega^h$ となる。そこで，$\beta\to 0$ とすれば $\overline{p}\cdot\overline{z^h}\geqq\overline{p}\cdot\omega^h$ となる。これは全ての $h=1,\cdots,H$ に対して成立するので $\overline{p}\cdot\sum_{h=1}^H(\overline{z^h}-\omega^h)\geqq 0$ となるが，$\overline{p}\cdot\sum_{h=1}^H(\overline{z^h}-\omega^h)=\overline{p}\cdot\sum_{h=1}^H\overline{x^h}=\overline{p}\cdot\overline{x}\leqq 0$ なので，$\overline{p}\cdot\sum_{h=1}^H\overline{x^h}=\overline{p}\cdot\sum_{h=1}^H(\overline{z^h}-\omega^h)=0$ であり，故に，$\overline{p}\cdot\overline{x^h}=0$，つまり，$\overline{p}\cdot\overline{z^h}=\overline{p}\cdot\omega^h,\forall h=1,\cdots,H$ である。したがって，$\overline{z^h}\in\widetilde{B^h}(\overline{p})$ となって，$\overline{z^h}$ は $\overline{p}$ の価格の時の予算制約を満たす。今，ある $z'\in(P^h(\overline{z^h})\cap B)$ に対して $\overline{p}\cdot z'=\overline{p}\cdot\omega^h(>0)$ となったとする。選好の連続性から $P^h(\overline{z^h})$ はノルム $(||\cdot||_\infty-)$ 開なので，十分に 1 に近い任意の $\beta\in(0,1)$ に対して $\beta z'+(1-\beta)\overline{\omega}^h\in(P^h(\overline{z^h})\cap B)$ となり，$\overline{p}\in\Pi\subset Y^*$ より $\overline{p}\cdot\overline{\omega}^h<\overline{p}\cdot\omega^h$ なので，$\overline{p}(\beta z'+(1-\beta)\overline{\omega}^h)=\beta\overline{p}\cdot z'+(1-\beta)\overline{p}\cdot\overline{\omega}^h<\beta\overline{p}\cdot z'+(1-\beta)\overline{p}\cdot\omega^h=\overline{p}\cdot\omega^h$ となる。しかし，これは $z\in(P^h(\overline{z^h})\cap B)\Longrightarrow\overline{p}\cdot z\geqq\overline{p}\cdot\omega^h$ となる事に矛盾する。したがって，$z'\in(P^h(z^{h\alpha})\cap B)\Longrightarrow\overline{p}\cdot z'>\overline{p}\cdot\omega^h=\overline{p}\cdot\overline{z^h}$ となって，$\overline{z^h}\in\widetilde{\varphi^h}(\overline{p}),h=1,\cdots,H$ である。また，$\overline{x}\in Y$ で $\overline{p}\in\Pi\subset Y^*$ より $\overline{p}\cdot\overline{x}\leqq 0$ であるが，$\overline{p}\cdot\overline{x}=\overline{p}\cdot\sum_{h=1}^H\overline{x^h}=0$ なので，$\overline{x}$ に対する (Y 上での) 利潤最大化条件も成立する。これより，$(\overline{p},\widetilde{\overline{z}})$ は各消費者の消費集合を $(B\cap C^h)$ とした経済の競争均衡である事が判明した。

最後に，$(\overline{p},\widetilde{\overline{z}})$ は各消費者の消費集合を C^h とした本来の経済の競争均衡である事を示す。そのためには，$\overline{z^h}\in\varphi^h(\overline{p}),h=1,\cdots,H$ を示せばよいが，既に $\overline{z^h}$ は $(B\cap C^h)$ 上で需要点である事が示されているので，$z'\in(P^h(\overline{z^h})\cap B^c)\Longrightarrow\overline{p}\cdot z'>\overline{p}\cdot\omega^h=\overline{p}\cdot\overline{z^h}$ を示せばいい。そこで，ある $z'\in(P^h(\overline{z^h})\cap B^c)$ に対して $\overline{p}\cdot z'\leqq\overline{p}\cdot\omega^h$ となったとする。$\beta\in(0,1)$ に対して $\beta z'+(1-\beta)\overline{z^h}$ を考えると，$\overline{p}\cdot(\beta z'+(1-\beta)\overline{z^h})=\beta\overline{p}\cdot z'+(1-\beta)\overline{p}\cdot\overline{z^h}\leqq\overline{p}\cdot\omega^h$ となり，更に，選好の凸性より $(\beta z'+(1-\beta)\overline{z^h})\in P^h(\overline{z^h})$ である。しかし，十分に 0 に近い $\beta'\in(0,1)$ に対しては $\overline{z^h}\in int_{||\cdot||_\infty}(B)$ により $(\beta'z'+(1-\beta')\overline{z^h})\in B$ となるので，$(\beta'z'+(1-\beta')\overline{z^h})\in(P^h(\overline{z^h})\cap B)$ となり，故に，$\overline{z^h}\in\widetilde{\varphi^h}(\overline{p})$ より $\overline{p}\cdot(\beta z'+(1-\beta)\overline{z^h})>\overline{p}\cdot\omega^h$ となる。しかしこれは矛盾であり，故に，$z'\in P^h(\overline{z^h})\Longrightarrow\overline{p}\cdot z'>\overline{p}\cdot\omega^h=\overline{p}\cdot\overline{z^h}$ となって，$\overline{z^h}\in\varphi^h(\overline{p}),h=1,\cdots,H$ となる。したがって，$(\overline{p},\widetilde{\overline{z}})$ は C^h を各消費者の消費集合とした本来経済の競争均衡である。 □

こうして，有限次元のケースと同様の議論の流れに沿って，二階堂 (1956b,57b,59) で示された無限次元におけるゲール・二階堂の補題の修正版を超過需要対応に適用する事により，無限次元財

空間モデルにおける競争均衡の存在を示した事になる。二階堂 (1956b,57b,59) では，無限次元経済モデルにおけるゲール・二階堂の補題は証明されているが，その結果を用いる事で競争均衡の存在が示せるような経済モデルの例が与えられていなかったので，ここにその一例を与えた事になる。因みにフローレンザーノ (1983) では，生産集合が l_∞ の負錐 $-(l_\infty^+)$ の部分集合となっているような純粋交換経済を取り扱っていたが，ここでは l_∞ の負錐 $-(l_\infty^+)$ を部分集合として含むような生産経済を取り扱っている[73)]。

ただし，その適用に際しては，二階堂 (1956b,57b,59) の本来の定理はそのままでは利用できず，フローレンザーノ (1983) が行ったような修正が必要である。実際，上記の証明の流れは有限次元のケースとほぼ同様であるが，超過需要対応が Δ 上で定義されていても均衡価格が Δ に属するとは限らないために，価格集合を $\Pi(\supset \Delta)$ まで拡張しておく必要があり，それに応じて超過需要対応も拡張する必要がある。この点に有限次元のケースとの違いがある。したがって，上記の l_∞ を財空間とするケースでは，二階堂 (1956b,57b,59) で示された無限次元におけるゲール・二階堂の補題を本来の結果のままで適用する事は出来ず，フローレンザーノ (1983) のように，線形位相や価格集合の取り方をやや修正する必要がある。ただし，その証明の精神は依然とし本来のものが踏襲されている。

もちろん，均衡価格は Π に属しているが，ビューリー (1972) 以来の議論を用いれば，上記の定理 3 で (1) の C^h を l_∞^+ として (2) の $R^h(x)$ の下部 $(R^h)^{-1}(x) = \{y \in l_\infty^+ : x \in R^h(y)\}$ が $||\cdot||_\infty-$ ノルム閉であるという部分を $*$ 弱 ($\sigma(l_\infty, l_1)-$) 閉へ変更し，更に，$y = (y_t) = (y_1, y_2, \cdots) \to y(t) = (y_1, y_2, \cdots, y_t, 0, 0, \cdots)$ と定義して，(3) に $y \in Y \to \exists t' \in N, \forall y > t', y(t) \in Y$ という条件 (随時操業停止可能性) を加えれば，定理 3 で保証される $ba^+\backslash\{0\}$ に属するような均衡価格 p を吉田・ヒューイット分解定理で $p = p_c + p_{pfa}$ とすれば，その l_1- 部分の p_c も均衡価格である事が示せる。したがって，Δ から均衡価格を見つける事ができるのである[74)]。

この l_∞ の例では，その正錐 l_∞^+ が $||\cdot||_\infty-$ ノルムの内点を含み，そして，生産経済が自由処分を満たして $-(l_\infty^+)$ を含んでいる。故に，無限次元のゲール・二階堂の補題において利用する ($||\cdot||_\infty-$ ノルム) 閉凸錐が $||\cdot||_\infty-$ ノルムの内点を含むケースに対応するので，このケースには二階堂 (1956b) の結果が一番対応していると思われる。したがって，利用する閉凸錐が内点を含まないケースへ一般化する二階堂 (1957b,59) の方向へ進む以外に，二階堂 (1956b) の結果を使ってその競争均衡の存在が示せるような経済モデルの例が，l_∞ のケースで与えられていれば，無限次元経済モデルにおける競争均衡の存在のために必要となる無限次元のゲール・二階堂の補題が，更に洗練されて行ったと考えられる。その結果として，無限次元財空間モデルの文献で，ドブリュー (1954) と並んで二階堂 (1956b,57b,59) も，先駆的文献として扱われる事になったのではないかと考えられる。

ビューリー (1972) による上記の定理 3 の本来の証明は，有限次元空間の競争均衡の存在定理に基づく有限次元空間の競争均衡列による近似という直接的な手法を用いている。それに対して本稿における上記の定理 3 の証明は，有限次元空間のゲール・二階堂の補題に基づく有限次元空間の競争均衡列による近似という手法に基づいて無限次元のゲール・二階堂の補題を証明し，その後でこの結果を本来の経済モデルへ適応するという間接的な手法を用いている。そして，有限次元のケー

73) もちろん，初期保有点 ω^h が $\exists\ \alpha^h > 0, \varpi^h \in C^h, \omega^h \geq \varpi^h + \alpha^h e$ という条件を満たすという，かなり強い条件を仮定しているが，これらの条件はマッケンジー (1959) によって導入された既約性 (Irredicibility) に置き換える事が出来る。また，l_1 から均衡価格を見つけるという議論までも含めるならば，ビューリー (1972) による生産排除条件 (随時操業停止可能性) の他に，更に，消費集合にベック (1988) によって導入された消費排除条件を導入すればよい。

74) この点については，ビューリー (1972，定理 3)，プレスコット - ルーカス (1972) を参照。久保田 (2004) でもこの結果を議論している。ベック (1988) によって導入された消費排除条件を導入すれば，l_∞^+ より一般的な消費集合へ変更できる。

スの角谷の不動点定理を局所凸線形位相空間へ一般化したファン・グリックスバーグの不動点定理の証明では，有限次元部分空間列による元空間の近似を考えて，その有限次元部分空間には角谷の不動点定理を用いて不動点列を構成し，この列の極限が元空間の不動点であるということを示している。結局，ファン・グリックスバーグによる局所凸線形位相空間での不動点定理の証明，ビューリー (1972) による無限次元経済における競争均衡の存在定理の証明，そして二階堂による無限次元経済におけるゲール・二階堂の補題の証明では，有限次元部分空間には角谷の不動点定理を用いて不動点の列を構成するか，有限次元部分空間にアロー・ドブリュー・マッケンジーの競争均衡の存在定理を用いて競争均衡の列を構成するか，または，有限次元部分空間にはゲール・二階堂の補題を用いて競争均衡の列を構成するか，といった何らかの形でどこかで有限次元の結果を利用するという，興味深い共通点が存在するのである[75]。

7．終わりに

以上で，二階堂 (1956b,57b,59) では与えられていなかった，そこで示された無限次元のゲール・二階堂の補題を利用して，古典的な有限次元のケースと同様な議論の進め方に沿って競争均衡の存在を示す事が出来るような一例を与える，という仕事を終了した事になる。ここでは，ドブリュー (1954) が例として取り上げ，ビューリー (1972) が最終的にはその競争均衡の存在を示した l_∞ の経済モデルを取り上げた。この簡略化されたビューリー (1972) の無限次元財空間モデルに二階堂 (1956b,57b,59) の無限次元のゲール・二階堂の補題を適用する際には，二階堂 (1956b,57b,59) で利用された線形位相とビューリー (1972) の経済モデルで利用された位相に少し違いがあるために，超過需要関数が価格集合全体で定義できるとは限らず，そのために超過需要対応を価格集合全体で定義されるように拡張する必要が起こる。この点を考慮すると，二階堂 (1956b,57b,59) の元来の無限次元のゲール・二階堂の補題をそのまま利用する事は出来ず，フローレンザーノ (1983) のように修正する必要があるが，本来の証明を踏襲した形で修正可能である事を示した。もしも二階堂先生が二階堂 (1956b,57b,59) の結果を利用してその競争均衡の存在が示せるような無限次元経済モデルの例を考えていれば，この点を修正する必要に直面して，1950 年に何らかの形で修正がなされていて，その後の無限次元財空間における競争均衡の存在問題に対して著しい貢献をしていたのではないかと思われる。もちろん，経済モデルの例に触れられていないとはいえ，有限次元ユークリッド空間におけるゲール・二階堂の補題を証明して競争均衡の存在証明に応用した直後に，無限次元空間において超過供給対応を想定して，ゲール・二階堂の補題を定式化してその証明を行ったという点で，二階堂 (1956b,57b,59) の貢献や意義は何ら損なわれないと思われる[76]。

ここでは l_∞ という空間を例として取り上げたが，マスコーレール (1986) のプロパーネス条件と同様に，二階堂 (1957b,59) の目的は，$int_{||\cdot||_\infty}(l_\infty^+) \neq \emptyset$ となる l_∞ のような空間ではなく，このような内点条件が満たされない空間で無限次元のゲール・二階堂の補題を確立する事にあったので，そのようなケースでも二階堂 (1957b,59) で示された無限次元のゲール・二階堂の補題を利用して競争均衡の存在が示せるような例を見つける事が，次の課題であろう。

---

75) ただし，ゼーム (1987) のように選好の推移性を仮定しないケースでは，選好の推移性がないと有限次元財空間のケースでは超過需要対応が価格集合の全体で定義されるとは限らないので，有限次元のゲール・二階堂の補題を，有限次元部分空間へ適用する事はできない。しかし，ゲール - マスコーレル (1975) やシェイファー - ソンネンシャイン (1975) の結果によって有限次元財空間における競争均衡の存在は確立されているので，有限次元財空間モデルの競争均衡の存在定理を有限次元部分空間へ適用するというビューリー (1972) の議論は，依然として使えるのである。

76) 無限次元のゲール・二階堂の補題は 1980 年代以降にヤネリス (1985)，メータ - タラフダー (1987)，そして浦井 (2000) 等によって更に発展させられている。

参考文献

[1] Aliprantis,C.D., and K.Border.(1999): *Infinite Dimensional Analysis*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York)
[2] ――――――, and D.J.Brown.(1983): "Equilibria in markets with a Riesz space of commodities." *Journal of Mathematical Economics* 11, pp.189 -207.
[3] ――――――, ―――――― and O. Burkinshaw.(1987a): "Edgeworth equilibria." *Econometrica* 55, pp. 1109 - 1138.
[4] ――――――, ―――――― and ―――――― .(1987b): "Edgeworth equilibrium in production economies." *Journal of Economic Theory* 43, pp. 252 - 291.
[5] ――――――, ―――――― and ―――――― .(1989): *Existence and Optimaility of Competitive Equilibria.* (Springer-Verlag, New York)
[6] Aliprantis,C.D., and O.Burkinshaw.(1985): *Positive Operators*. (Academic Press, New York)
[7] ―――――― and ―――――― .(2003): *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*. (American Mathematical Society)
[8] Araujo, A.(1985): "Lack of Pareto optimal allocation in economies with infinitely many commodities." *Econometrica* 53, pp. 265 - 290.
[9] ――――――, and P. K. Monteiro.(1994): "The general existence of extended price equilibria with infinitely many commodities" *Journal of Economic Theory* 63, pp. 408 - 419.
[10] Arrow, K, J and G, Debreu.(1954): "Existence of an equilibrium for a competitive economy." *Econometrica* 22, pp. 265 - 290.
[11] Begle, E.G.(1950): "A fixed point theorem." *Annals of Mathematics* 51, pp. 544 - 550.
[12] Berge, C.(1963): *Topologiacl Spaces*. (Oliver Boyd, San Franscisco)(Dover reprint 2001)
[13] Bewley, T.(1969,91): "A theorem on the existence of competitive equilibria in a market with a finite number of agents and whose commodity space is L_∞ ." in *Equilibrium Theory with Infinitely Many Commodities*. ed. by M. Ali Kahn and N. Yannelis. (Springer -Verlag, New York)
[14] ―――――― .(1972): "Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities." *Journal of Economic Theory* 4, pp. 514 - 540.
[15] Bojan, P.(1974): "A generalization of theorem on the existence of competitive economic equilibrium in the case of infinitely many commodities." *Mathematica Balkanica* 4, pp.491 - 494.
[16] Border, K.(1985): *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory.* (Cambridge Unversity Press, Oxford)
[17] Cassel, G.(1924): *The Theory of Social Economy.* (Harcout Bruce, New York)(邦訳:『社会経済学原理』 大野信三訳 岩波書店 大正 15 年)
[18] Debreu, G.(1952): "A social equlibrium existence theorem." *Proceedings of National Academy of Science* 38,pp. 886 - 893.
[19] ――――――.(1954): "Valuation equilibrium and Pareto optimal." *Proceedings of National Academy of Science* 40,pp. 588 - 94.
[20] ――――――.(1956): "Market Equilibrium." *Proceedings of National Academy of Science* 42, pp. 876 -878.
[21] ――――――.(1959): *Theory of Value*. (Wiley, New York)(邦訳:『価値の理論』丸山徹訳 東洋経済新報社 1977)
[22] ――――――, and H.Scarf.(1963): "A limit theorem on the core of an economy." *International Economic Review* 4, pp.235 - 246.
[23] Dunford, N., and J. Schwartz.(1958): *Linear Operators Part 1:General Theory.* (Interscience, New York)
[24] Eilenberg, S. and D. Montgomery.(1946): "Fixed point theorems for multivalued transformations." *American Journal of Mathematics* 68, pp.214 - 222.
[25] Elbarkoky, R.A.(1977): "Existence of equilibrium in economics with Banach commodity space." *Akad. Nauk.Azeraijan SSR Dokl* 33, pp.8 - 12.

[26] Fan, K.(1952): “Fixed point and minimax theorem in locally convex topological linear spaces.” *Proceedings in the American Mathematical Society* 38, pp.121 - 126.

[27] Florenzano, M.(1983): “On the existence of equilibria in economies with an infinite dimensional commodity space.” *Journal of Mathematical Economics* 12, p. 207 - 219.

[28] Gale, D.(1955): “The law of supply and demand.” *Mathematica Scandinavica* 3, p.155 - 169.

[29] ————, and Mas-Colell(1974): “An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences.” *Journal of Mathematical Economics* 2, pp.9 - 15.

[30] Glicksberg, K.(1952): “A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points.” *Proceedings in the American Mathematical Socaiety* 38, pp.170 - 174.

[31] Herstein,I.N. and J.Milnor.(1953): “An axiomatic approach to measurable utility.” *Econometrica* 21, pp.291 - 297.

[32] Jones, L.(1984): “A competitive model of commodity differentiation.” *Econometrica* 52, pp.507 - 530.

[33] ————.(1987a): “Special problem arising in the study of economies with infinitely many commodities.” in *Models of Economic Dynamics*. ed. by H. Sonnenschein. pp. 184 - 205. (Springer-Verlag, New York), p. 819 - 841.

[34] ————.(1987b): “Existence of equilibria with infinitely many commodities, Banach lattice reconsidered.” *Journal of Mathematical Economics* 16, pp. 89 - 104.

[35] ————.(1990): “Equilibrium in competitive, infinite dimensional settings.” Chapter 7 in *Advances in Economic Theory* ed. by J. Laffont. (Cambridge University Press, New York)

[36] Kakutani, S.(1941): “A generalization of Brouwer's fixed point theorem.” *Duke Mathematical Journal* 8, p.457 - 9.

[37] Klein,E and A. Thompson.(1984): *Theory of Correspondences*. (Wiley, New York)

[38] Krein,M. and M. A. Rutman.(1950): “Linear Operataors leaving invariant a cone in a Banach space.” *American Mathematical Society Translation*, No. 26.

[39] Kuhn, H.(1956): “A note on ‘The law of supply and demand.’” *Mathematica Scandinavica* 4, pp.143 - 146.

[40] Magill, M.(1981): “An equilibrium existence theorem.” *Journal of Mathematical Analysis And Applications* 84, pp.162 - 169.

[41] Mas-Colell, A.(1975):“A model of equilibrium with differenciated commodities.” *Journal of Mathematical Economics* 2, pp. 236 - 296.

[42] ————.(1986):“The price existence problem in topological vector lattices.” *Econometrica* 54, pp.1039 - 1054.

[43] ————, and W. R. Zame.(1989): “Equilibrium theory in infinite dimensional space.” Chapter 34 in *Handbook of Mathematical Economics* Vol. 4. ed. by W. Hildenbrand and H. Sonnenschein.

[44] McKenzie, L. W.(1954): “On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems." *Econometrica* 22, pp. 147 - 161.

[45] ————.(1959):“On the existence of general equilibrium for a competitive market.” *Econometrica* 27, pp. 54 - 71.

[46] ————.(1981):“The classical theorem on existence of competitive equilibrium.” *Econometrica* 49, pp. 819 - 841.

[47] Mehta,G. and E,Tarafdar.(1987): “Inifinite-dimensional Gale-Nikaido-Debreu theorem and a fixed point theorem of Tarafdar.” *Journal of Mathematical Economics* 41, pp.333 - 339.

[48] Nash,J.(1950): “Equilibrium states in N-person games.” *Proceedings of National Academy of Science of the U.S.A.* 36, pp.48 - 49.

[49] Nash,J.(1951): “Non-cooperative games.” *Annals of Mathematics* 54, pp.289 - 295.

[50] Negishi,T.(1960): "Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy." *Metroeconomica* 12, pp.92 - 97.

[51] Nikaido,H.(1956a): "On the classical multilateral exchange problem." *Metroeconomica* 3, pp.135 - 145.

[52] ――――.(1956b):"On the existence of competitive equilibrium for infinitely many commodities." Tech. Report, No.34, Dept. of Econ., Stanford University.

[53] ――――.(1957a): "A Supplementary note to 'On the classical multilateral exchange problem.'" *Metroeconomica* 9, pp.209 - 210.

[54] ――――.(1957b): "Existence of equilibrium based on Walras' law." ISER Discussion Paper No.2, Institute of Social and Economic Reserch, Osaka University, Japan.

[55] ――――.(1959): "Coincidence and some systems of inequalities." *Journal of Mathematical Society of Japan* 11(4), pp.354 - 373.

[56] ――――.(1968): *Convex Structure and Economic Theoery.* (Academic Press, New York)

[57] Peleg, B. and M. E. Yaari.(1970): "Markets with countably many commodities." *International Economic Review* 11, pp. 369 - 377.

[58] Prescott, E. C. and R. E. Lucas.(1972): "Price systems in infinite dimensional space." *International Economic Review* 13, pp. 416 - 422.

[59] Robertson, A. P., and W. Robertson.(1973): *Topological Vector Space*. 2nd ed. (Cambridg University Press, Cambridge)

[60] Shaefer, H. H.(1999): *Topological Vector Spaces*,2nd ed. (Springer Verlag, New York)

[61] Shafer, W. and H. Sonnenshein.(1975): "Equilibrium in abstract economies without ordered preferences." *Journal of Mathematical Economics* 2, pp. 345 - 348.

[62] Toussaint, S.(1984): "On the existence of equilibrium in economies with infinitely many commodities and without ordered preferences." *Journal of Economic Theory* 33, pp. 98 - 115.

[63] Urai, K.(2000): "Fixed point theorems and the existence of economic equilibria based on conditions for local directions of mappings." *Advances in Mathemetical Economics* 2, pp.87 - 118.

[64] Uzawa,H.(1962): "Walras'existence theorem and Brower's fixed point theorem." *Economic Studies Quarterly* 13, pp.52 - 60.

[65] Yannelis, N.(1985): "On a market equilibrium theorem with an infinite number of commodities." *Journal of Mathematical Analysis and Applications*,108, pp. 595 - 599.

[66] Yosida, K., and E. Hewitt.(1952): "Finitely additive measures." *Transactions of the American Mathematical Society* 72, pp. 46 - 66.

[67] Wald, A.(1935,68): "On the unique non-negative solvability of the new production equation(part 1)." in *Precursors in Mathematical Economics: An Anthology.* ed. by Baumol and Goldfield.(LSE 1968)

[68] ――――.(1936,68): "On the productuon equations of economic value theory(Part 2)." in *Precursors in Mathematical Economics: An Anthology.* ed. by Baumol and Goldfield.(LSE 1968)

[69] Zame, W. R.(1987): "Competitive equilibrium in production economies with an infinite dimensional commodity space." *Econometrica* 55, pp. 1075 - 1108.

[70] N. ブルバキ著 (小針晛宏訳).(1968,70)：『位相線形空間 1,2』 東京図書.

[71] 藤田 宏・吉田耕作 .(1991)：『現代解析入門』 岩波基礎数学選書 岩波書店.

[72] 伊藤清三・小松彦三郎編著 .(1977)：『解析学の基礎』 現代数学演習叢書 13 岩波書店.

[73] 久保田肇 .(2004)："無限期間定常経済モデルにおける厚生経済学の第 2 基本定理と競争均衡の存在定理：一般的消費集合のケース"『經濟學研究』(北海道大学) 第 54 巻 第 1 号，pp.17 − 47.

[74] ――――.(2006)："Nikaido(1956,57,59) による無限次元財空間モデルのゲール・二階堂・ドブリューの補題について"『彦根論叢』(滋賀大学) 第 360 号， pp.1 − 23.

[75] 宮島静雄 .(2005)：『関数解析』 横浜図書.

［76］二階堂副包 .(1960)：『現代経済学の数学的方法』 岩波書店.
［77］安井琢磨・二階堂副包 .(1957‐8)：『経済理論における数学的方法』 岩波講座 “現代応用数学” 岩波書店.
［78］山中　健 .(1966)：『線形位相空間と一般関数』 共立数学ロ座 16　共立出版.