



Title	クエット・ポアズイユ乱流の直接数値シミュレーション
Author(s)	黒田, 明慈
Degree Grantor	東京大学
Degree Name	博士(工学)
Issue Date	1990
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/20118
Type	doctoral thesis
File Information	29.thesis.pdf



クエット・ポアズイユ乱流の
直接数値シミュレーション

黒田明慈

クエット・ポアズイユ乱流の
直接数値シミュレーション

平成 2 年

黒田明慈

目次

記号表	iv
第1章 序論	1~11
§ 1. 1 壁面近傍の数値シミュレーションと乱流研究に対する貢献	2
§ 1. 2 計算対象及び本研究の目的	9
第2章 クエット・ポアズイユ乱流の直接数値シミュレーション	12~80
§ 2. 1 序	13
§ 2. 2 計算方法	15
2. 2. 1 基礎式	
2. 2. 2 時間的離散化	
2. 2. 3 空間的離散化	
2. 2. 4 アルゴリズム・FFT・その他	
§ 2. 3 計算条件	29
2. 3. 1 設定パラメータ	
2. 3. 2 初期条件及び収束判定	
2. 3. 3 格子解像度及び計算領域	
第3章 2次元ポアズイユ乱流の統計的特性	81~115

§ 3. 1	序	82
§ 3. 2	平均速度場	84
§ 3. 3	乱流強度	87
§ 3. 4	レイノルズ応力の壁面漸近挙動	90
§ 3. 5	乱流エネルギーの生成率	92
§ 3. 6	速度変動の歪度・平坦度	94
第4章 壁面近傍乱流場に対する平均速度勾配の効果		116~189
§ 4. 1	序	117
§ 4. 2	平均速度場	118
§ 4. 3	レイノルズ応力場	120
4. 3. 1	乱流強度	
4. 3. 2	非等方テンソル	
§ 4. 4	速度変動の歪度・平坦度	124
§ 4. 5	乱流エネルギー及びレイノルズ応力の収支	126
4. 5. 1	乱流エネルギーの収支	
4. 5. 2	レイノルズ応力の収支	
4. 5. 3	圧力・速度歪相関項	
§ 4. 6	壁面近傍の乱流構造	135
第5章 結論		190~194

謝辞	195
参考文献	197
APPENDIX	207
APPENDIX (A)	重み付き残差法とスペクトル法
APPENDIX (B)	チェビシェフ・タウ法
APPENDIX (C)	A Direct Numerical Simulation of the Fully Developed Turbulent Channel Flow at a Very Low Reynolds Number (from Proc. of ISCFD Symp., Nagoya, 1989)

記号表

b_{ij}	: レイノルズ応力の非等方テンソル成分
Cf_c	: 壁面摩擦係数 = $\tau_w / (\frac{1}{2} \rho U_c^2)$
Cf_n	: 壁面摩擦係数 = $\tau_w / (\frac{1}{2} \rho U_n^2)$
E_{ij}	: 速度変動の1次元スペクトル
D_{ij}	: 散逸率の1次元スペクトル
$F(u_i)$: 平坦度 = $\overline{u_i^4} / u_{rms}^4$
k	: 乱流の運動エネルギー = $u_k u_k / 2$
f	: 上下壁の平均速度勾配の比
J_{pij}	: $\overline{u_i u_j}$ 輸送方程式の圧力拡散項
J_{pk}	: 乱流エネルギー輸送方程式の圧力拡散項
J_{tij}	: $\overline{u_i u_j}$ 輸送方程式の乱流拡散項
J_{tk}	: 乱流エネルギー輸送方程式の乱流拡散項
J_{vij}	: $\overline{u_i u_j}$ 輸送方程式の粘性拡散項
J_{vk}	: 乱流エネルギー輸送方程式の粘性拡散項
L_i	: 計算領域の <i>i</i> 方向の最大波長
N_i	: <i>i</i> 方向のスペクトルモード数
P	: 平均圧力
P_{ij}	: $\overline{u_i u_j}$ 輸送方程式の生成項
P_k	: 乱流エネルギー輸送方程式の生成項
p	: 圧力変動成分
R_{ij}	: 二点相関係数

Re	: レイノルズ数
Re_0	: レイノルズ数 = $U_0 \delta / \nu$
Re_n	: レイノルズ数 = $2 U_n \delta / \nu$
Re_z	: レイノルズ数 = $u_z \delta / \nu$
s_{ij}	: 速度歪テンソル = $\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
S^*	: 無次元シェアパラメータ = $(\partial U / \partial y) \overline{u_i u_i} / \varepsilon$
$S(u_i)$: 歪み度 = $\overline{u_i^3} / u_{rms}^3$
t	: 時間
$T_n(x)$: m 次の第一種チェビシェフ多項式
u, v, w	: x, y, z 方向の速度変動成分
u_i	: 速度変動成分 ($i=1, 2, 3$ は各々 u, v, w に相当する)
\tilde{u}	: 速度成分 (瞬間値)
U, V, W	: x, y, z 方向の速度平均成分
U_i	: 平均速度成分 ($i=1, 2, 3$ は各々 U, V, W に相当する)
x, y, z	: 流れ方向、壁垂直方向、スパン方向
x_i	: 座標 ($i=1, 2, 3$ は各々 x, y, z に相当する)

ギリシャ文字

δ	: チャネル半幅
δ^*	: 排除厚さ

ε_k	: 乱流エネルギーの散逸率
ε_{ij}	: $\overline{u_i u_j}$ の散逸率
η	: コルモゴロフの長さスケール
θ	: 運動量厚さ
λ	: 低速ストリークのスパン方向平均間隔
ν	: 動粘性係数
Π_{ij}	: $\overline{u_i u_j}$ 輸送方程式の速度・圧力勾配相関項
π	: 円周率
ρ	: 密度
τ	: 剪断応力
υ	: コルモゴロフの速度スケール
ϕ_{ij}	: $\overline{u_i u_j}$ 輸送方程式の圧力・速度歪相関項
ω_i	: 渦度変動成分

添字

$(\)_b$: 下壁
$(\)_t$: 上壁
$(\)_w$: 壁面值
$(\)_{rms}$: RMS 値
$(\)^+$: 粘性パラメータ (u_τ , ν) による無次元化

- ($\bar{\quad}$) : 空間的あるいは時空間的平均値
- ($\hat{\quad}$) : スペクトル係数
- $\langle \quad \rangle$: 条件付き平均値

第 1 章

序 論

§ 1. 1 壁面乱流の数値シミュレーションと乱流研究に対する寄与

乱流の時間的空間的变化を再現する数値シミュレーションは、その手法によって大きく2つに分類される。ひとつは離散化された流体の運動量方程式（ナビエ・ストークス方程式）あるいはそれに準ずる方程式（渦度方程式等）を、直接数値積分する手法であり、直接数値シミュレーション（ダイレクト・シミュレーション、DNS）と呼ばれる。この手法では対象とする流れ場に含まれる全ての渦スケールを計算格子で捕らえる必要がある。すなわち、計算領域及び格子解像度の設定にあたって、

(1) 乱れの最大スケールが計算領域中に十分に収容できる。

(2) 散逸を担う小規模の渦スケールを十分に解像できる。

を満足する必要がある。渦の最大スケール l と最小スケール（コルモゴロフスケール η ）の比が $l/\eta \sim Re^{3/4}$ である（ランダウ & リフシッツ 1970）ことから3次元のDNSにおいて必要な格子数は $N \sim Re^{9/4}$ と見積ることができる。この見積では例えば $Re = 5000$ の流れ場を解くために 10^8 のオーダーの格子数が必要となり、現在のスーパーコンピュータの能力を越えている。しかしながら、低レイノルズ数流れに限られながらこれまでのDNSが成功をしているのは、散逸がコルモゴロフスケールの10倍以上のスケールでほとんどまかなわれているという事情によっている（Rogallo and Moin 1984）。

もうひとつの手法（ラージエディ・シミュレーション）では流れに含まれる渦をエネルギーの大部分を保有し、流れの境界条件への依存性が強い大規模渦と、それらより大きな波数領域に属する渦に分離して扱う。この分離は基礎方程式系に対して空間的平均化操作を行うことによってなされる。前者

の渦（大規模渦あるいはGrid Scale Eddy）については平均化操作が行われた方程式系に基づいて直接計算が行われ、後者の渦（小規模渦あるいはSub Grid Scale Eddy）についてはモデル化が行われる。このモデル化の導入によってDNSの場合に強い制約となるレイノルズ数の制限が緩和される。また、小規模な渦は境界条件に対する依存性が弱く、普遍的なモデルが構成し易いことから、工学上の様々な応用面での実用化が期待されている。しかしながら、壁面近傍の乱流場では乱流生成にかかわる主要な渦のスケールが流れ場全体のスケールに対して必然的に小さく、レイノルズ数の増加とともにこれらのスケールの差が広がるために前述のLESの優位性が失われ、数値シミュレーションとしての精度が劣化する。実用的な立場からは、壁関数などによる人工的な境界条件を導入し、格子数を節約することが必要となる（森西 1990）。

Deardorff(1970)、Schumann(1975)は十分に発達した2次元チャンネル内乱流のラージ・エディ・シミュレーション(LES)を、またGrotzbach and Schumann(1979)は、熱伝達を含む2次元チャンネル内乱流のLESを行っている。これらの研究を通じて、乱流の3次元計算が可能であり、チャンネル内乱流の壁から離れた領域におけるいくつかの特徴をよく再現できることが示された。しかしながらこれらのシミュレーションでは、壁面近傍での境界条件を対数領域で人工的に与えており、乱れの生成が最大となり物理的に興味深い緩和領域より壁側の力学を基本的に無視したものである。

壁面上での厳密な境界条件（滑りなし条件）の適用はMoin, Reynolds and Ferziger(1978)によって試みられた。これに続くMoin and Kim(1982)は、当時としては最大規模の516090の計算格子を用いて2次元チャンネル内乱流($Re_\tau = 13800$ 、 $\Delta x^+ = 62.8$ 、 $\Delta y^+ = 1.78 \sim 50.1$ 、

$\Delta z^+ = 15.7$)) の LES を行った。また、彼らは計算精度の向上を、流れ方向及びスパン方向の空間的離散化に擬スペクトル法を用いることによって試みている。その結果、速度変動強度などの統計的特性が既存の実験データと定性的に一致し、壁近傍におけるストリーク構造（例えば、Kline et al. 1967、Kim et al. 1971、Offen and Kline 1974）などの乱流構造が再現できることを示した。しかしながら、実験データとの定量的不一致、特に長さスケールが実験的に知られているもの（例えばストリークの平均間隔 $\lambda^+ \approx 100$ ）をはるかに大きく得られてしまう（ $\lambda^+ \approx 500$ ）などの問題点を残した。これらの不一致は壁近傍の渦スケールを十分に解像していないことによるものと考えられている。このような問題点を残しながらも彼らのデータベースはその後、壁面乱流の構造解析のために利用され、多くの功績を残したといえる。条件付き抽出法によってえられる平均的流れ場の空間構造の解析（Kim 1983, 1985）、馬蹄形渦構造に關与する壁面近傍渦度場の直接的観察及び統計的特性に關する研究（Moin and Kim 1985）、各種の条件付き抽出法によって得られる平均的渦度場の空間構造に關する研究（Kim and Moin 1986）、条件付き抽出法（4象現分類法）によって得られる平均的渦構造の時間発展のシミュレーション（Kim 1987）、Lumley(1970)によって提案された characteristic eddy decomposition の LES データベースへの適用（Moin 1984）、の各研究は壁近傍の渦構造に關して新たな知見を加えるとともに、大規模シミュレーションのデータベースの利用法に對してその後の研究に多くの示唆を与えた。

DNS に用いられるスペクトル法の流体力学問題への適用は Orszag を中心とするグループによって精力的に行われている（第2章、序を参照）。彼らは層流→乱流遷移の DNS（Orszag and Kells 1980）、テイラー・グリー

ン渦の解析 (Brachet et al. 1983) に加え、十分に発達した 2 次元チャンネル内乱流の DNS ($Re_z = 194$ 、 $\Delta x^+ = 38$ 、 $\Delta y^+ = 0.93 \sim 19$ 、 $\Delta z^+ = 19$) も試みている (Pelz et al. 1985)。この 2 次元チャンネル内乱流の DNS は解像度の点で十分とはいえず、計算結果に対する彼らの興味も定性的なものにとどまっている。

十分な解像度を有した、発達した壁面乱流の DNS は Moser and Moin (1984) によって初めて行われた (Moser and Moin 1987 も参照)。彼らはチャンネル中心流速とチャンネル半幅に基づくレイノルズ数 $Re = 2990$ の曲がりチャンネル乱流を約 100 万のスペクトルモード ($\Delta x^+ = 18$ 、 $\Delta y^+ = 0.2 \sim 8.2$ 、 $\Delta z^+ = 6$) を用いて計算している。この計算では高波数の散逸過程が十分に解像されているとはいえないが、Moin and Kim (1982) の LES の結果にみられた長さスケールの問題はみられず、既存の実験結果との整合性に定量的改善が得られている。またこの計算によって乱流エネルギーの散逸がコルモゴロフスケールの 15 倍以上のスケールでほとんどまかなわれていることが示された。これによって、前述の見積りに反して、このような低レイノルズ数の壁面乱流の DNS が現在のスーパーコンピュータの能力範囲で可能であることが示された点は、その後の DNS の発展に大きな勇気付けとなったといえる。

Kim, Moin and Moser (1987) は、約 400 万のスペクトルモードを用い、 $Re_\tau = 3300$ の 2 次元チャンネル内乱流の DNS を行った ($\Delta x^+ = 12$ 、 $\Delta y^+ = 0.05 \sim 4.4$ 、 $\Delta z^+ = 7$)。彼らの論文中に示されている計算結果と実験結果との比較は定量的には必ずしも良い一致を示しているとはいえない。しかしながら、近年の 3 次元画像処理流速計を用いた精密な測定結果 (Nishino and Kasagi 1989、 $Re_\tau = 3755$) は、速度変動の高次モーメントに至るまで Kim et al. の結果ときわめて良い一致を示しており、

D N S の結果が定量的にも信頼性の高いものであることを裏付けている。

D N S あるいは L E S では乱れの初生から終えんに至る全ての過程を計算領域中に収容することは望むべくもない。この場合に流れの境界条件をいかに適切に与え得るかが、現実的な流れ場をシミュレートする上で重要な鍵となる。この意味で二平板間の十分に発達した乱流場は流れ方向及びスパン方向に場が一様であり、これらの2方向に対して周期境界条件の適用が妥当となる扱い易い流れ場ということが出来る。また、周期境界条件の採用によってフーリエ・スペクトル法の利用が可能となり、解くべき連立方程式の形式の面で大きな単純化をもたらすとともに、スーパーコンピュータ向きのアルゴリズムを使えることから著しい計算の効率化が図れる。これらの事実は、2次元チャンネル乱流が壁面乱流の代表としてシミュレーションの対象として数多く取り上げられている大きな理由となっている。

Spalart(1986)は平衡乱流境界層の D N S を行うにあたって、流れ方向に周期境界条件を適用するために座標変換及びそれによって基礎方程式系に付加される項に対する近似を行うことによって境界層の発達を表現した (Weak Formulation)。Spalart(1988)この手法を用いて平衡乱流境界層の D N S を異なる4つのレイノルズ数 $Re_{\theta} = 225, 300, 670, 1410$ について行い、乱流統計量に対するレイノルズ数の影響を考察している。

乱流の直接シミュレーションは流体運動の基礎方程式として与えられるナビエ・ストークス方程式に基づいて行われる。ここでは、本質的に離散的な分子の集合体である流体を連続体として扱う統計論的近似、さらに層流において経験的に発見された、粘性応力と変形速度の比例関係 (ニュートンの法則) が乱流の場合にも成立するという仮定が含まれている。また、瞬時の

速度変動について、固体壁上で課される滑りなし条件も同様に経験的仮定あるいは統計論的近似に基づくものである。このような立場からは、直接シミュレーションとは、乱流という自然現象に対して上述のような物理的仮定の上で成立する力学的方程式系を、さらに離散化による偏微分方程式の近似、人工的な周期境界条件の仮定等を加えて近似的に解析する手法として位置づけられる。しかしながら、これによって得られる解は、既存の実験結果と定量的、定性的によい一致を示すことから、乱流現象を精度よく再現する手法としての有効性が確認されつつある。このようなDNSの乱流研究への寄与は、応用的な流れの予測手法としてではなく、詳細な基礎データを供給し得る風洞（数値風洞）を構成することにある。

DNSデータベースは、圧力、渦度など実験的に得ることが困難な物理量を含めて流れ場に関する情報を時空間的に密に供給することができる。この利点を活かした乱流構造に関する研究が近年数多くなされている。時空間的2点相関に基づく統計的手法（stochastic estimation、characteristic eddy decomposition）（例えば、Adrian and Moin 1988、Adrian 1990、Moser 1990、Moin and Moser 1989）、VITA（VISA）、4象現分類法等の条件付き抽出法（Johansson et al. 1990、Guezennec 1987）など、従来プローブ信号から乱流構造を抽出する手法をDNSデータベースに適用することによって、抽出される流れ場の空間的構造がより詳細に知られるようになった。また、3次元コンピューターグラフィックスを利用した瞬間的な流れ場の可視化（Robinson et al. 1990）も試みられている。この分野では秩序構造の力学的発生要因、複数の構造の相互関係、あるいは構造論的知見に基づく乱流モデルの構築、乱流制御技術への還元などの課題が残されており、これらの問題に対してDNSデータベースがどの様に利用できるかが今後の研究課題として興味深い。

D N S データベースは、 $k - \epsilon$ モデルや応力モデルなどの現象論的モデリングに必要な多くの情報を与え得る。データベースから得られる乱流エネルギーやレイノルズ応力の輸送方程式の各項とモデル項との直接比較が可能となり、従来のモデルに対する再検討や、新たな壁面修正関数あるいはモデルの提案がなされている (Mansour et al. 1988、Rogers et al. 1989、笠木ら 1989)。特に、圧力変動を含む項の具体的挙動は数値シミュレーションによって初めて明らかにされたものである。

また、D N S によって与えられる情報が測定機器や手法による特性によって左右されないという利点を活かして、熱線流速計の特性評価 (Moin and Spalart 1989、Suzuki and Kasagi 1990)、壁面剪断応力推定に伴う誤差評価 (高木 1990、笠木と西野 1990) など測定技術の評価にも D N S データベースが利用されている。

NASA Ames/Stanford Univ. の Center of Turbulence Research では 1987 年以来、当機関に蓄積された D N S データベースの利用法を公募して一般研究者との共同研究を行っており、乱流の構造解析、モデリング、理論の各分野で多くの成果が報告されている (Hunt 1988)。

§ 1. 2 計算対象及び本研究の目的

平行 2 平面に挟まれる十分に発達した流れ場で両平面が静止し圧力勾配のみで駆動される場合が平面ポアズイユ流、平均的な圧力勾配が存在せず 2 平面の相対運動によって駆動される場合が平面ジェット流と呼ばれる。またこれらの中間的な流れ、即ち 2 平面が相対運動し、平均圧力勾配も存在する場合がジェット・ポアズイユ流である。本研究で取り上げた系は、平面ポアズイユ流及びジェット・ポアズイユ乱流である（図 1. 2. 1）。図 1. 2. 1 において f は上壁の壁面速度勾配に対する下壁での平均速度勾配の比である。本研究では一連の計算を通じて、図 1. 2. 1 に示す上壁での摩擦速度とチャンネル幅によるレイノルズ数がほぼ一定となるよう保ち、 f のみが変わるように流れのパラメータ（2 平面の相対速度とチャンネル幅によるレイノルズ数及び無次元化された圧力勾配）を設定した。このことは、2 平面間隔が一定のチャンネルで上壁における平均速度勾配を一定に保つように圧力勾配を調整しながら下壁の速度を変化させる実験に相当する。

固体壁近傍の乱流場は、壁面の滑りなし条件、壁垂直方向の流体運動のブロッキング効果によって必然的に低レイノルズ数で、強い非等方性を有するため、その解析はきわめて困難なものとなっている。Rogers and Moin(1987)は一様剪断乱流を DNS によって再現し、壁面の存在しない場でもヘアピン状の渦構造が存在することを示し、壁面剪断流中のヘアピン渦の主たる生成要因は壁面の滑りなし条件によって引き起こされる強い速度勾配であることを指摘している。また、Lee et al.(1990)は、より強い平均剪断を伴う一様流中で、流れ方向に長く伸びたストリーク構造が存在し、また強い非等方性が生じることを示した。これらの研究を通じて、壁面近傍の乱流現象の理

解においては、固体壁が存在することによって現われる複数の力学的効果、即ち、

- (1) 低乱流レイノルズ数効果
- (2) 壁面垂直方向の速度変動の抑制
- (3) 強い速度勾配の効果

の各々について考察することの重要性が認識される。

本研究では、特に上記(3)に注目して、DNSで再現される前述の4種の流れ場の移動壁近傍で実現される異なる平均速度勾配の下での壁面近傍の乱流場の特性を明らかにすることにある。特に、平均剪断が存在しない(剪断自由な)壁面近傍乱流場に対する基礎的研究は、剝離点や再付着点の近傍など工学的に興味深い流れにおいてみられるにもかかわらず、測定の困難さなどから不足しているといえる。本研究で示される詳細な情報はこのような流れの基本的な理解のために有意義なものであると考えられる。

これに先立ち、第3章において2次元ポアズイユ流の計算結果を近年行われた信頼性の高いと考えられる測定結果及び既存のDNSの結果と比較することによって本研究で作成したDNSコードの検証を行う。また、4種の異なるレイノルズ数のDNS結果の比較にみられる乱流統計量のレイノルズ数依存性について報告を行う。

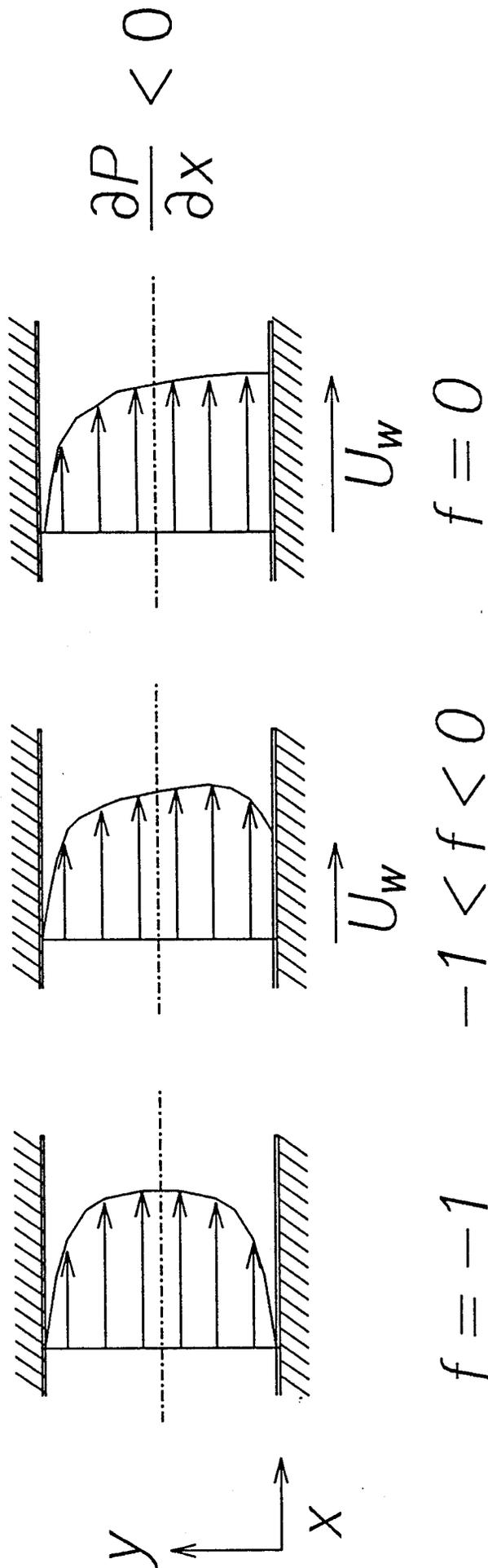


図 1. 2. 1 計算対象とした流れの様式図

第 2 章
クエット・ポアズイユ乱流の
直接数値シミュレーション

§ 2. 1 序

乱流のダイレクト・シミュレーション (DNS) は、コンピューターの大きな負荷を要するとともに限られた格子数で計算を行わなければならない、計算スキームの点でも高い精度を確保する必要がある。このため DNS では通常、空間的に最も高い精度が得られるスペクトル法 (Gottlieb and Orszag 1977、Canuto et al. 1988、Boyd 1989) を用いて行われる。スペクトル法の流体力学問題に対する適用に関する研究は Orszag を中心とするグループ (Orszag 1971a、Orszag 1971b、Orszag 1971c、Patterson and Orszag 1971、Orszag 1972、Orszag and Israeli 1974) によって精力的になされている。しかしながら、スペクトル法は非常に高い精度を有する反面、コーディングの複雑さあるいは適用範囲が単純な系に限られるため工学的な応用例は少なく、他の数値計算法 (差分法、有限要素法、境界要素法など) に比べて一般への普及が遅れている。この点については、スペクトル法に関するテキストが未だ少なく、また出版されているものも数学的な記述が多く、多くの利用者にとって必ずしも学習し易い環境が整っていないことも一因であると考えられる。この点を鑑みてスペクトル法の平易な解説として APPENDIX (A)、(B) を用意した。また、その重要な適用例として、本章では本シミュレーションで用いた手法について詳述している。

- スペクトル法を用いて $N-S$ 方程式を離散化する代表的な方法として、
- (1) $N-S$ 方程式及び連続の式をフーリエ・スペクトル法及びチェビシェフ・タウ法を用いて直接離散化する方法 (Moin and Kim, 1980)
 - (2) 連続の式を自動的に満たす基底関数を用いる方法 (Moser et al. 1983)
 - (3) $N-S$ 方程式を変形して基礎方程式から圧力を消去する方法 (Kim

et al. 1987)

が存在する。ここで(3)は、平行2平面に挟まれる流れの場合にのみ適用可能な手法であるが、この流れの場合には最も高い計算効率が得られると考えられ、本研究では(3)の手法にしたがって基礎式の離散化を行っている。

スペクトル法を用いた平行2平面間の十分に発達した乱流のDNSとしては平面ポアズイユ乱流(Kim et al. 1987)、平面クエット乱流(Lee 1989)について行われている。LeeによるDNSでは、流れ方向速度変動にスパン方向にチャンネル半幅程度の波長を持つ大きな揺らぎが観察され、計算領域をチャンネル幅の 8π (約25)倍、 4π (約12.6)倍とした場合にも流れ方向速度変動の2点相関が計算半領域中で十分に減衰しないという結果となっている。この現象は2平面が静止した平面ポアズイユ乱流の場合にはみられないものであるが、本研究で行ったシミュレーションのうち2平面が相對運動する場合に同様の傾向がみられた。本章ではこの点を含めて、計算領域の及び解像度の妥当性あるいは問題点についての検討を行う。

§ 2. 2 計算方法

2. 2. 1 基礎式

非圧縮性流体の運動を記述する Navier-Stokes の方程式及び連続の式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i, \quad i=1, 2, 3 \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1.2)$$

である。式の無次元化には代表長さとしてチャンネル半幅 δ 、代表長さとしては、2 平面が相対運動しない場合には壁面摩擦速度 u_τ を、相対運動する場合には相対速度の半値 u_r を用いており、それぞれの場合について $Re = u_\tau \delta / \nu$ 、 $Re = u_r \delta / \nu$ である。また、本節ではチャンネル中央を $x_2 = 0$ とし、 $x_2 = \pm 1$ に壁面が存在する座標系を用いる。

境界条件としては、流れ方向及びスパン方向には場が一様であることから、周期境界条件を適用する。

$$u_i(x_1, x_2, x_3; t) = u_i(x_1 + L_1, x_2, x_3; t) = u_i(x_1, x_2, x_3 + L_3; t) \quad (2.1.3)$$

ここで、 L_1, L_3 はそれぞれ、流れ方向、スパン方向に設定した計算領域を表わし、流れに含まれる最大スケールの渦に対して十分に大きくとる必要がある。

固体壁上では滑り無し条件、

$$u_i(x_1, \pm 1, x_3; t) = 0 \quad (2.1.4a)$$

但し、2 平板が相対運動する場合には、

$$u_1(x_1, \pm 1, x_3; t) = \pm 1 \quad (2.1.4b)$$

を適用する。

h_i は非線形項であり、非粘性流体の場合にエネルギー、運動量に加えて渦度を保存する回転形を用いた。

$$h_i \equiv \varepsilon_{ijk} u_j \omega_k - (\frac{1}{2} u_j u_j) \quad (2.1.5)$$

さて、(2.1.1)式に簡単な演算を施すことによって、次の形の式を導くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_2 = h_v + \frac{1}{Re} \nabla^4 u_2 \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_2 = h_g + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_2 \quad (2.1.7)$$

(2.1.6)式は、(2.1.1)の $i = 2$ の式に ∇^2 を施すことによって得られるものであり、(2.1.7)式は壁垂直方向の渦度方程式である。

また、連続の式(2.1.2)を、

$$f + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (2.1.8)$$

と表記しておく。但しここで、

$$f \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (2.1.9)$$

$$\omega_2 \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad (2.1.10)$$

$$h_v \equiv -\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) h_2 \quad (2.1.11)$$

$$h_g \equiv \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \quad (2.1.12)$$

本計算では基礎式として(2.1.6)、(2.1.7)及び連続の式(2.1.8)を用いる。ここで、(2.1.6)、(2.1.7)のみでは、 u_1 、 u_2 、 u_3 の空間的平均成分(瞬間場での (x_1, x_3) 平面での平均成分)の記述ができない。これら平均成分に関してはN-S方程式(2.1.1)を空間平均した、次式を用いる。

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = H_1 + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U_1 \quad (2.1.13)$$

$$0 = H_2 \quad (2.1.14)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial t} = H_3 + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U_3 \quad (2.1.15)$$

但し、

$$H_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \overline{\varepsilon_{ijk} u_j \omega_k} - \left(\frac{1}{2} \overline{u_j u_j} \right)_{,i} \quad (2.1.16)$$

これらの式において大文字変数及びオーバーバーは、 (x_1, x_3) 平面での空間的な平均を表わすものとする。式(2.1.14)には平行流 ($U_2 = 0$) の仮定が使われている。また、本計算ではスパン方向の平均圧力勾配は存在しない ($\partial P / \partial x_3 = 0$) ものとした。

これらの方程式系に対して壁面上での境界条件は、滑りなし条件(2.1.4)、連続の式(2.1.2)より、

$$u_2(\pm 1) = 0, \quad u_{2,2}(\pm 1) = 0, \quad \omega_2(\pm 1) = 0$$

$$U_1(\pm 1) = 0 \quad (2 \text{ 平面が静止している場合})$$

あるいは、

$$U_1(\pm 1) = \pm 1 \quad (2 \text{ 平面が相対運動する場合}) \quad (2.1.17)$$

$$U_3(\pm 1) = 0$$

となる。

基礎方程式系として(2.1.6)~(2.1.8)、(2.1.13)~(2.1.15)を用いると速度場を求める際に圧力場を解く必要がなくなる。圧力場が必要な場合にはポアソン方程式、

$$\nabla^2 p = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \quad (2.1.18)$$

を

ディリクレ型境界条件

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) p(\pm 1) = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(\pm 1) \quad (2.1.19)$$

あるいは、ノイマン型境界条件

$$\frac{\partial p}{\partial x_2}(\pm 1) = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_2(1) \quad (2.1.20)$$

のいずれかの境界条件の下で解けばよいが、本研究では計算アルゴリズム上さらに高い計算効率を得られるという理由で、N-S方程式(2.1.1)の流れ方向、スパン方向成分をそれぞれの方向に微分したものを加えることによって得られる次式を用いて圧力場を求めている。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_3^2}\right) p + \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_3}{\partial x_3} + \frac{1}{Re} \nabla^2 f \quad (2.1.21)$$

但し、空間的平均成分に関しては、

$$\overline{\nabla^2} = P \quad (2.1.22)$$

を用いて圧力場を求めている。本式を用いる場合、圧力項の時間的離散化には完全陰とした。上述の3手法によって得られる圧力場に差がないことを瞬間場の p_{rms} 及び可視化された圧力場の比較によって確認している。

2. 2. 2 時間的離散化

対流項に2次精度のAdams-Bashforth法を、拡散項にCrank-Nicolson法を用いると式(2.1.7)及び(2.1.16)の ω_2 に対する境界条件は、

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2\text{Re}} \nabla^2\right) \omega_2^{n+1} = \frac{\Delta t}{2} (3h_g^n - h_g^{n-1}) + \left(1 + \frac{\Delta t}{2\text{Re}} \nabla^2\right) \omega_2 \quad (2.2.1)$$

$$\omega_2^{n+1}(\pm 1) = 0$$

と表わせる。

壁垂直方向速度成分に関する4階の方程式(2.1.6)は次のように2つの2階の方程式に分解して解く(Kim et al. 1987)。

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2\text{Re}} \nabla^2\right) \phi^{n+1} = \frac{\Delta t}{2} (3h_v^n - h_v^{n-1}) + \left(1 + \frac{\Delta t}{2\text{Re}} \nabla^2\right) \phi^n$$

$$\nabla^2 u_2^{n+1} = \phi^{n+1}$$

$$u_2^{n+1}(\pm 1) = \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial x_2}(\pm 1) = 0 \quad (2.2.2)$$

ここで、非線形項を陽に離散化した結果得られた式(2.2.1)あるいは

(2.2.2)は、解 u_2^{n+1} 、 ϕ_2^{n+1} に対して線形化されていることに注目する。

即ち、解 u_2^{n+1} 、 ϕ_2^{n+1} は以下に示すように非一様解 u_{2p}^{n+1} 、 ϕ_p^{n+1} と一様解 u_{2a}^{n+1} 、 ϕ_a^{n+1} 、 u_{2b}^{n+1} 、 ϕ_b^{n+1} の和として次のように表わすことができる。

$$u_2^{n+1} = u_{2p}^{n+1} + c_a u_{2a}^{n+1} + c_b u_{2b}^{n+1} \quad (2.2.3)$$

$$\phi^{n+1} = \phi_p^{n+1} + c_a \phi_a^{n+1} + c_b \phi_b^{n+1} \quad (2.2.4)$$

ここで、

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2\text{Re}} \nabla^2\right) \phi_p^{n+1} = \frac{\Delta t}{2} (3h_v^n - h_v^{n-1}) + \left(1 + \frac{\Delta t}{2\text{Re}} \nabla^2\right) \phi^n$$

$$\phi_p^{n+1}(\pm 1) = 0 \quad (2.2.5a)$$

$$\nabla^2 u_{2p}^{n+1} = \phi_p^{n+1}$$

$$u_{2p}^{n+1}(\pm 1) = 0 \quad (2.2.5b),$$

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2\right) \phi_a^{n+1} = 0$$

$$\phi_a^{n+1}(1) = 0 \quad \phi_a^{n+1}(-1) = 1 \quad (2.2.6a)$$

$$\nabla^2 u_{2a}^{n+1} = \phi_a^{n+1}$$

$$u_{2a}^{n+1}(\pm 1) = 0 \quad (2.2.6b),$$

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2\right) \phi_b^{n+1} = 0$$

$$\phi_b^{n+1}(1) = 1 \quad \phi_b^{n+1}(-1) = 0 \quad (2.2.7a)$$

$$\nabla^2 u_{2b}^{n+1} = \phi_b^{n+1}$$

$$u_{2b}^{n+1}(\pm 1) = 0 \quad (2.2.7b)$$

定数 c_a と c_b は境界条件、

$$\frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial x_2}(\pm 1) = 0 \quad (2.2.8)$$

を満たすように決定される。

2. 2. 3 空間的離散化

流れ方向及びスパン方向にはフーリエ・スペクトル法、壁垂直方向にはチェビシェフ・タウ法を用いる。

ある物理量 u を

$$u(x_1, x_2, x_3; t) \sim \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2-1} \sum_{k_3=-N_3/2}^{N_3/2-1} \widehat{u}_n(k_1, k_3; t) \times \exp \{i2\pi (k_1 x_1/L_1 + k_3 x_3/L_3)\} T_n(x_2) \quad (2.4.1)$$

のように有限スペクトル展開で近似し、(2.2.1)、(2.2.5)～(2.2.7)の方程式に代入して得られる残差をガラーキンの手法で0として得られる方程式は流れ方向及びスパン方向にフーリエ・スペクトル法 (APPENDIX(A)参照) を適用することによっていずれも形式的に次の形に帰着する。

$$\widehat{u}_n^{(n+1)} + \beta' \widehat{u}_n^{(n+1)} = \widehat{q}_n^{(n)} \quad (2.4.2)$$

$$k_1 = -N_1/2 \sim N_1/2 - 1$$

$$k_3 = -N_3/2 \sim N_3/2 - 1$$

$$m = 0 \sim N_2 - 2$$

これらの方程式は最終的に、

$$c_{n-2} \beta' (m+1) \widehat{u}_{n-2}^{(n+1)} + \{4m(m-1)(m+1) - 2\beta' \alpha_{nm}\} \widehat{u}_n^{(n+1)} + \beta' \alpha_{n+2}(m-1) \widehat{u}_{n+2}^{(n+1)} = \widehat{Q}_n^{(n)} \quad (2.4.3)$$

$$\widehat{Q}_n^{(n+1)} = c_{n-2}(m+1) \widehat{q}_{n-2}^{(n)} - 2\alpha_{nm} \widehat{q}_n^{(n)} + \alpha_{n+2}(m-1) \widehat{q}_{n+2}^{(n)}$$

$$k_1 = -N_1/2 \sim N_1/2 - 1$$

$$k_3 = -N_3/2 \sim N_3/2 - 1$$

$$m = 2 \sim N_2$$

と表わすことができる (APPENDIX(B))。ここで、

$$c_n = 2 \quad \text{for } m = 0$$

$$= 1 \quad \text{for } m \geq 1$$

$$\alpha_n = 1 \quad \text{for } 0 \leq m \leq N_2 - 2$$

$$= 0 \quad \text{for } m \geq N_2 - 1$$

(2.2.1)、(2.2.5)～(2.2.7)の各式に対して、(2.4.3)に現われる定数、変数及び境界条件を表わす離散化式は以下のように分類できる。

① ω_2 (2.2.1)、 ϕ_p (2.2.5a)の場合、(2.4.3)式の右辺は、

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_n^{(n)} &= c_{n-2}(m+1)\widehat{X}_{n-2}^{(n)} - 2\alpha_n m \widehat{X}_n^{(n)} + \alpha_{n+2}(m-1)\widehat{X}_{n+2}^{(n)} \\ &- [c_{n-2}\gamma(m+1)\widehat{u}_{n-2}^{(n)} + \{4m(m-1)(m+1) - 2\gamma\alpha_n\}\widehat{u}_n^{(n)} \\ &+ \gamma\alpha_{n+2}(m-1)\widehat{u}_{n+2}^{(n)}] \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

境界条件を表わす式は、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{even}}}^{N_2} \widehat{u}_n^{(n+1)} = 0, & \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{N_2} \widehat{u}_n^{(n+1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

ここで、

$$\beta = -2 \operatorname{Re}/\Delta t$$

$$\beta' = \beta - \{(2\pi k_1/L_1)^2 + (2\pi k_3/L_3)^2\}$$

$$\gamma = -\beta - \{(2\pi k_1/L_1)^2 + (2\pi k_3/L_3)^2\}$$

$$\widehat{u} = \widehat{\omega}_2 \quad , \quad \widehat{X}_n^{(n)} = \beta \frac{\Delta t}{2} (3 \widehat{h}_{g_n}^{(n)} - \widehat{h}_{g_n}^{(n-1)}) \quad \text{for (2.2.1)}$$

$$\widehat{u} = \widehat{\phi}_p \quad , \quad \widehat{X}_n^{(n)} = \beta \frac{\Delta t}{2} (3 \widehat{h}_{v_n}^{(n)} - \widehat{h}_{v_n}^{(n-1)}) \quad \text{for (2.2.5a)}$$

② ϕ_a (2.2.6a)、 ϕ_b (2.2.7a) の場合、

$$\widehat{Q}_n^{(n)} = 0 \quad (2.4.6)$$

境界条件を表わす式は、

(2.2.6a) の場合

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{even}}}^{N_2} \widehat{u}_n^{(n+1)} &= \frac{1}{2}, & \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{N_2} \widehat{u}_n^{(n+1)} &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$\widehat{u} = \widehat{\phi}_a$$

(2.2.7a) の場合

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{even}}}^{N_2} \widehat{u}_n^{(n+1)} &= \frac{1}{2}, & \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{N_2} \widehat{u}_n^{(n+1)} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

$$\widehat{u} = \widehat{\phi}_b$$

(2.4.3) 式中の定数は、

$$\beta = -2 \operatorname{Re} / \Delta t$$

$$\beta' = \beta - \{(2\pi k_1/L_1)^2 + (2\pi k_3/L_3)^2\}$$

③ u_{2p} (2.2.5a)、 u_{2a} (2.2.6a)、 u_{2b} (2.2.7a) の場合、

$$\widehat{u} = \widehat{u}_{2p} \quad , \quad \widehat{q} = \widehat{\phi}_p^{(n)} \quad \text{for} \quad (2.2.5b)$$

$$\widehat{u} = \widehat{u}_{2a} \quad , \quad \widehat{q} = \widehat{\phi}_a^{(n)} \quad \text{for} \quad (2.2.5b)$$

$$\widehat{u} = \widehat{u}_{2b} \quad , \quad \widehat{q} = \widehat{\phi}_b^{(n)} \quad \text{for} \quad (2.2.5b)$$

境界条件はいずれの場合も、

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{even}}}^{N_2} \widehat{u}_n^{(n+1)} = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{N_2} \widehat{u}_n^{(n+1)} = 0 \quad (2.4.9)$$

(2.4.3) 式中の定数は、

$$\beta' = - \{ (2\pi k_1/L_1)^2 + (2\pi k_3/L_3)^2 \}$$

④ U_1 (2.1.13) 及び U_3 (2.1.15) の場合、

これらは $k_1 = k_3 = 0$ の場合のみが相当する。

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_n^{(n)} &= c_{n-2}(m+1)\widehat{X}_{n-2}^{(n)} - 2\alpha_n m \widehat{X}_n^{(n)} + \alpha_{n+2}(m-1)\widehat{X}_{n+2}^{(n)} \\ &- [c_{n-2}\gamma(m+1)\widehat{u}_{n-2}^{(n)} + \{4m(m-1)(m+1) - 2\gamma\alpha_n\}\widehat{u}_n^{(n)} \\ &+ \gamma\alpha_{n+2}(m-1)\widehat{u}_{n+2}^{(n)}] \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

ここで、

$$\beta = \beta' = -2 \operatorname{Re}/\Delta t$$

$$\gamma = -2 \operatorname{Re}/\Delta t$$

$$\widehat{u} = \widehat{U}_1, \quad \widehat{X}_n^{(n)} = \beta \frac{\Delta t}{2} (3\widehat{H}_{1n}^{(n)} - \widehat{H}_{1n}^{(n-1)}) \quad \text{for (2.2.13)}$$

$$\widehat{u} = \widehat{U}_3, \quad \widehat{X}_n^{(n)} = \beta \frac{\Delta t}{2} (3\widehat{H}_{3n}^{(n)} - \widehat{H}_{3n}^{(n-1)}) \quad \text{for (2.2.15)}$$

境界条件は (2.1.5a, b) より、

2 平板が相対運動しない場合、

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{even}}}^{N_2} \widehat{U}_{1n}^{(n+1)} = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{N_2} \widehat{U}_{1n}^{(n+1)} = 0 \quad (2.4.11)$$

2 平板が相対運動する場合、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{even}}} \widehat{U}_{1n}^{(n+1)} = 0, & \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}} \widehat{U}_{1n}^{(n+1)} = 1 \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

また、いずれの場合も、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{even}}} \widehat{U}_{3n}^{(n+1)} = 0, & \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}} \widehat{U}_{3n}^{(n+1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

尚、本計算に用いたプログラムでは ϕ_a と ϕ_b 、 u_{2a} と u_{2b} の対称性を利用して、実際には ϕ_a 、 v_a の式のみを解いている。また、これらの量については上記の手法を用いる外に以下の解析解を使ってもよい。

$$\widehat{\phi}_a = \frac{-\exp\{\sqrt{c}(x_2-1)\} + \exp\{-\sqrt{c}(x_2-1)\}}{\exp(2\sqrt{c}) - \exp(-2\sqrt{c})} \quad (2.4.14)$$

$$\widehat{\phi}_b = \frac{\exp\{\sqrt{c}(x_2+1)\} - \exp\{-\sqrt{c}(x_2+1)\}}{\exp(2\sqrt{c}) - \exp(-2\sqrt{c})} \quad (2.4.15)$$

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{2a} = \frac{\Delta t}{2\text{Re}} \left[\frac{\exp\{\sqrt{s}(x_2-1)\} - \exp\{-\sqrt{s}(x_2-1)\}}{\exp(2\sqrt{s}) - \exp(-2\sqrt{s})} \right. \\ \left. + \phi_a \right] \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{2b} = -\frac{\Delta t}{2\text{Re}} \left[\frac{\exp\{\sqrt{s}(x_2+1)\} - \exp\{-\sqrt{s}(x_2+1)\}}{\exp(2\sqrt{s}) - \exp(-2\sqrt{s})} \right. \\ \left. - \phi_b \right] \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

ここで、

$$c = \frac{\Delta t}{2\text{Re}} + (2\pi k_1/L_1)^2 + (2\pi k_3/L_3)^2$$

$$s = (2\pi k_1/L_1)^2 + (2\pi k_3/L_3)^2$$

以上の手法によって求めた $(n+1)$ ステップの \widehat{u}_{2n} 、 $\widehat{\omega}_{2n}$ から式 (2.1.

9) 及び (2.1.10) をスペクトル法を用いて離散化した式を用いて、 \widehat{u}_{1n} 、

\widehat{u}_{3n} 、 $\widehat{\omega}_{1n}$ 、 $\widehat{\omega}_{3n}$ を以下の手順によって求める。

$$\widehat{f}_{N_2} = 0, \quad \widehat{f}_{N_2-1} = -2N_2 \widehat{u}_{2N_2}$$

$$c_n \widehat{f}_n = \widehat{f}_{n+2} - 2(m+1) \widehat{u}_{2n+1} \quad m = 0, \dots, N_2 - 2$$

$$\widehat{u}_{1n} = -i \frac{(2\pi k_1/L_1) \widehat{f}_n + (2\pi k_3/L_3) \widehat{\omega}_{2n}}{(2\pi k_1/L_1)^2 + (2\pi k_3/L_3)^2}$$

$$m = 0, \dots, N_2$$

$$\widehat{u}_{3n} = -i \frac{(2\pi k_3/L_3) \widehat{f}_n - (2\pi k_1/L_1) \widehat{\omega}_{2n}}{(2\pi k_1/L_1)^2 + (2\pi k_3/L_3)^2}$$

$$m = 0, \dots, N_2$$

$$(\widehat{u}_{3.2})_{N_2} = 0, \quad (\widehat{u}_{3.2})_{N_2-1} = -2N_2 \widehat{u}_{3N_2}$$

$$c_n (\widehat{u}_{3.2})_n = (\widehat{u}_{3.2})_{n+2} + 2(m+1) \widehat{u}_{3n+1} \quad m = 0, \dots, N_2 - 2$$

$$(\widehat{u}_{1.2})_{N_2} = 0, \quad (\widehat{u}_{1.2})_{N_2-1} = -2N_2 \widehat{u}_{1N_2}$$

$$c_n (\widehat{u}_{1.2})_n = (\widehat{u}_{1.2})_{n+2} + 2(m+1) \widehat{u}_{1n+1} \quad m = 0, \dots, N_2 - 2$$

$$\widehat{\omega}_{1n} = (\widehat{u_{3.2}})_n - i (2\pi k_3/L_3) \widehat{u}_{2n}$$

$$\widehat{\omega}_{3n} = i (2\pi k_1/L_1) \widehat{u}_{2n} - (\widehat{u_{1.2}})_n$$

但し、 i は虚数単位、また、

$$c_n = 2 \quad \text{for } m = 0$$

$$= 1 \quad \text{for } m \geq 1$$

2. 2. 4 アルゴリズム・FFT・その他

計算に用いたプログラム全体の流れ図を図 2. 2. 1 に示す。非線形項の計算は、物理空間で計算を行う。非線形項計算に伴うエイリアジングエラーを避けるために、速度成分、渦度成分は物理空間に変換される前に高波数成分に 0 を補填することによって 1.5 倍に拡張されている (Orszag(1971)、APPENDIX(A)(B))。

時間間隔 ΔT は、計算が安定して進行することを条件として採用したが、この場合クーラン数 C は、

$$C \equiv \Delta T \left(\left| \frac{u_1}{\Delta x_1} \right| + \left| \frac{u_2}{\Delta x_2} \right| + \left| \frac{u_3}{\Delta x_3} \right| \right)_{\max} < 0.3$$

を満たすものであった。

高速フーリエ変換のプログラムは、Temperton(1983a, b) のアルゴリズムを基に 2, 3, 4, 6 を基数とするものを、また高速チェビシェフ変換については、Swarztrauber(1986) の手法を用いて、いずれも自作した。

圧力計算および統計量計算のためのデータ収集は 20 タイムステップ毎に行った。

計算は東京大学大型計算機センター内の HITAC-S820/80 および ㈱日立製作所神奈川工場内の S820/80E を用いた。1 タイムステップの計算に必要な c p u 時間は約 4 s e c、1 スペクトルモードあたりの c p u 時間は約 2.5 μ s e c であり、Kim et al.(1987) の約 40 s e c / 10 μ s e c (C R A Y - X M P)、Moser and Moin(1987) の約 22 s e c / 20 μ s e c (C R A Y - X M P 2 / 2) に比して高速なシミュレーションが可能であった。

§ 2. 3 計算条件

本節では、第4章に結果を示すポアズイユ乱流及びクエット・ポアズイユ乱流の計算条件を示し、設定した格子解像度、計算領域の妥当性について検討する。

2. 3. 1 設定パラメータ

前節でも述べたようにポアズイユ流の場合とクエット・ポアズイユ流の場合とでは、計算に用いた基礎式の無次元化の方法が異なっている。即ち、ポアズイユ流では無次元化のための代表長さとしてチャンネル半幅 δ 、代表速度として壁面摩擦速度 u_τ を用い、一方、クエット・ポアズイユ流の場合には代表長さとして、チャンネル半幅 δ 、代表速度として2平板の相対速度の半値 $U_w/2$ を用いている。これらの無次元化を行った場合、流れの条件を定めるパラメータは、ポアズイユ流の場合には、 $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$ 、クエット・ポアズイユ流の場合には、 $Re = U_w \delta / \nu$ 及び無次元圧力勾配、 $-(\delta / \rho U_w^2)(\partial P / \partial x)$ である。ポアズイユ流の場合には基礎式中に現われる無次元圧力勾配、 $-(\delta / \rho U_\tau^2)(\partial P / \partial x)$ は十分に発達したという状況下では壁面摩擦による損失と釣合って、 -1 という値をとり、パラメータとしての任意性を失う。表2. 3. 1にそれぞれのケースについて設定したパラメータを示す。ここで、クエット・ポアズイユ流のパラメータ設定にあたっては、次のことが考慮されている。

速度勾配の強い側の壁面摩擦速度とチャンネル半幅で定義したレイノルズ数を各ケースを通じてなるべく一定とする。

これによって、速度勾配の強い側の壁面パラメータで表現した無次元チャネ

ル幅が全ケースを通じてほぼ一定になる。

2. 3. 2 初期条件及び収束判定

各ケースの初期条件は以下のように与えた。

* ケース P

予備的に行った $Re\tau = 140$ ($N_1 = N_2 = N_3 = 96$, $L_1 = 4\pi\delta$, $L_3 = 2\pi\delta$) のシミュレーション結果を補間して初期条件とした。

* ケース CP1

ケース CP3 の途中結果を初期条件とした。但し、平均流がある程度発達するまではスペクトルモードを $64 \times 49 \times 64$ とした。

* ケース CP2

ケース CP1 と同様。

* ケース CP3

ケース P のデータをチャンネル中央で反転することによってクエット型にして初期条件とした。平均流の発達を促すために計算の途中段階で圧力勾配を設定値よりも大きく与えた。

一般に、平均流が変化するためにはかなりの計算ステップが必要とされ、この段階で細かい計算メッシュを用いることは経済的に相当の負担が予想される。平均流がある程度発達するまでは、乱流状態が維持できる範囲内でメッシュ数を減じて計算を行うことが得策である。

乱流場が十分に発達したことを判定するために以下の基準にしたがった。

- ① チャンネル各点における平均流速が一定となること
- ② 全剪断応力分布がチャンネル幅にわたって直線となること
- ③ 速度変動の2次の中心モーメントが準定常的变化に落ち着くこと

図2.3.1~2.3.4に各ケースに対して、流れ方向平均速度の及び速度変動3成分の2次の中心モーメントの時間変化を示す。図中の各点は、500ステップ（上壁の壁座標時間でおおよそ30）間の時空間平均値を示している。一般に高次モーメントほどばらつきが大きいのが、初期条件から一定時間を経た後は、それぞれの平均的な値の回りにばらつき、系統的な変化はみられなくなる。次章以降で特に断わりのないかぎり、図に矢印で示した範囲の値を用いて統計処理を行った。これらの統計処理を行った時間は、計算結果によって得られた時間スケール k/ε の最大値に対しておおよそ

ケース P	45 (k/ε) _{max}
ケース CP1	26 (k/ε) _{max}
ケース CP2	20 (k/ε) _{max}
ケース CP3	14 (k/ε) _{max}

である。

2. 3. 3 格子解像度及び計算領域

通常数値計算において、計算領域及び解像度の十分性はこれらのパラメータを変化させた場合に計算結果が大きく変化しないことによって確認される。しかしながら、膨大な計算機容量、CPU時間を要するDNSでは、このような確認を行うことは現在のコンピュータでは相当の困難を伴う。

上述の方法の他にDNSあるいはLESでは計算領域、解像度の十分性の目安として次の評価が用いられる (Kim et al. 1987、Moin and Moser 1984)。

(1)速度変動の2点相関係数が計算の半領域中で十分に減衰する。

(2)速度変動のパワースペクトルの高波数成分が十分に減衰し、特異な跳ね上がりを示さないこと。

さらに厳しい評価としては、

(3)散逸のスペクトルの高波数成分が十分に減衰し、特異な跳ね上がりを示さないこと。

(3)による評価が文献中に明確に示されているのはMoser and Moin(1984)によるDNSのみである。彼らの結果では(3)の条件が十分に満たされているとはいえないが、乱流エネルギーの大部分を担うラージスケールの渦運動に対する影響は小さいであろうとして妥協されている。

流れ方向およびスパン方向の計算領域(最大波長)は全ケースについてそれぞれ $5\pi\delta$ 、 $2\pi\delta$ とした。また、スペクトルモード数は流れ方向、壁垂直方向、スパン方向にそれぞれ128、97、128とした。このとき、物理空間での効果的な分解能は、

流れ方向 . . . 0.123 δ

壁垂直方向・・・0.000535 δ ～0.0327 δ

スパン方向・・・0.0491 δ

である。

摩擦速度と動粘性係数を用いてスケーリングした場合の計算領域（最大波長）及び解像度を各ケースについて表2. 3. 2、表2. 3. 3に示す。

解像度の十分性を評価するために壁近傍領域及びチャンネル中心における速度変動の流れ方向、スパン方向のエネルギー及び散逸の1次元スペクトル及びチェビシェフ係数の2乗平均を図2. 3. 5～2. 3. 9（ケースP）、図2. 3. 12～2. 3. 16（ケースCP1）、図2. 3. 19～2. 3. 23（ケースCP2）、図2. 3. 26～2. 3. 30（ケースCP3）に示す。ここでエネルギーの1次元スペクトル E_{ij} 及び散逸の1次元スペクトル D_{ij} は、例えば、スパン方向スペクトルの場合、次のように定義されている。

$$E_{ij}(k_z) = \frac{1}{L_z} \int_z \overline{u_i(x, y, z, t) u_j(x, y, z+z', t) e^{ik_z z'} dz'}$$

$$D_{ij}(k_z) = \frac{1}{L_z} \int_z \overline{u_{i,k}(x, y, z, t) u_{j,k}(x, y, z+z', t) e^{ik_z z'} dz'}$$

エネルギースペクトルは、高波数におけるエネルギー密度が低波数でのそれに対して1/1000以上の減衰を示し、また高波数部におけるスペクトルの跳ね上がりは観察される場合においてもほとんど無視できる程度である。散逸スペクトルは高波数における密度が低波数でのそれに対して最低で1/10の減衰を示す。またチャンネル中央部では最高波数部において D_{ij} の減衰率が低下する（横軸に平行になる）傾向がみられる。これは、最小スケールの散逸現象が十分には解像されていないことを示しているが、この波数部における散逸量は僅かであり、流れ場全体の特性に対する影響は小さいものと考えられる。

チェビシェフ係数には、いずれのケースも $1/10^7$ 程度の減衰がみられる。最高波数部において急激に減少しているが、これは境界条件（滑りなし条件）を満足するために付加したタウ項によるものである。

Kim et al. (1987)に指摘されているように、小スケール渦を計算上無視することによって与えられる計算結果への影響は、上記のスペクトルの観察からのみでは十分に判断し得ない。Kimらは計算結果の格子依存性について、彼らの2次元チャンネル流のDNSにおいて、 $\Delta x^+=11.8$ 、 $\Delta y^+=0.05\sim 4.4$ 、 $\Delta z^+=7.1$ の分解能を持つ場合と $\Delta x^+=17.7$ 、 $\Delta y^+=0.05\sim 4.4$ 、 $\Delta z^+=17.7$ の分解能を持つ場合の比較を行い、彼らの文献中に示された統計量（速度変動の歪度、平坦度、レイノルズ応力の漸近挙動を含む）に差が現われないことを報告している。本計算で設定した解像度は、速度勾配の強い上壁の壁面パラメータ（ u_{τ} 、 ν ）で評価した場合にKimらの解像度に匹敵するものである（表2.3.2）。

次に、速度変動の流れ方向、スパン方向の空間2点相関を図2.3.10、2.3.11（ケースP）、図2.3.17、2.3.18（ケースCP1）、図2.3.24、2.3.25（ケースCP2）、図2.3.31、2.3.32（ケースCP3）に示す。これらの2点相関は上述の1次元スペクトルをフーリエ変換することによって求めたものである。図には計算領域の $1/2$ までの相関が示されている。流れ方向、スパン方向には速度変動の周期性を仮定しているためこれらの方向に関して2点相関は計算領域の $1/2$ の点に対して対称となる。ケースPに関しては、チャンネル全域において2点相関は計算領域の $1/2$ の範囲で十分に減衰しており、計算領域の十分性を示している。これに対して、ケースCP1、CP2、CP3の下壁近傍では、スパン方向速度変動のスパン方向2点相関に十分な減衰がみられない。また、ケ

ースCP2、CP3では、流れ方向の速度変動成分が、大きい相関を残している。これらは、流れ場に含まれる大規模な渦が計算領域中に十分に捉えられていないことを示唆している。

本研究ではケースCP3の場合について、格子解像度を半減して計算領域を変化させた補助計算（ケースCP3(a)、CP3(b))を行い、低波数速度変動が乱流統計量に及ぼす影響について調べた。これらの計算領域及び用いたスペクトルモード数を表2.3.4に示す。

図2.3.33にケースCP3(b)の場合についてチャンネル中央での速度変動の流れ方向及びスパン方向の2点相関を示す。計算領域を流れ方向にチャンネル幅の約16倍、スパン方向に約6.3倍とした本ケースの場合にも流れ方向の速度成分の2点相関は計算領域の1/2で十分に減衰しないことが分かる。しかしながら、壁垂直方向及びスパン方向の速度変動の2点相関は速やかに減衰していることから、流れ方向の低波数の変動は乱流の輸送機構の観点からはあまり重要でないことが予想される。図2.3.34に上壁側からの平均速度分布を示す。座標は縦軸、横軸ともに上壁の壁面摩擦速度及び動粘性係数によって無次元化されている。格子解像度の低いケースCP3(a)、CP3(b)はチャンネル全幅にわたって相互にほぼ一致している。これらの値が対数領域でケースCP3に対して低い値をとるのは格子不足のため小スケールの乱れが十分に解像できず遷移領域で流れ方向速度変動と壁垂直方向速度変動の相関が大きく見積られるためである。図2.3.35に速度変動強度を示す。ここでも解像度の等しいケースCP3(a)とケースCP3(b)の結果は計算領域の違いにかかわらず良い一致を示している。解像度を十分に保った上で計算領域を広げる試みは計算機容量などの制限から行っていないが、以上の結果をみる限り、今回設定した計算領域で十分に捉えることのできなかつた流れ方向の低波数成分が流体中の1点で定義される乱流統計量に及ぼす

影響は小さいと考えられる。

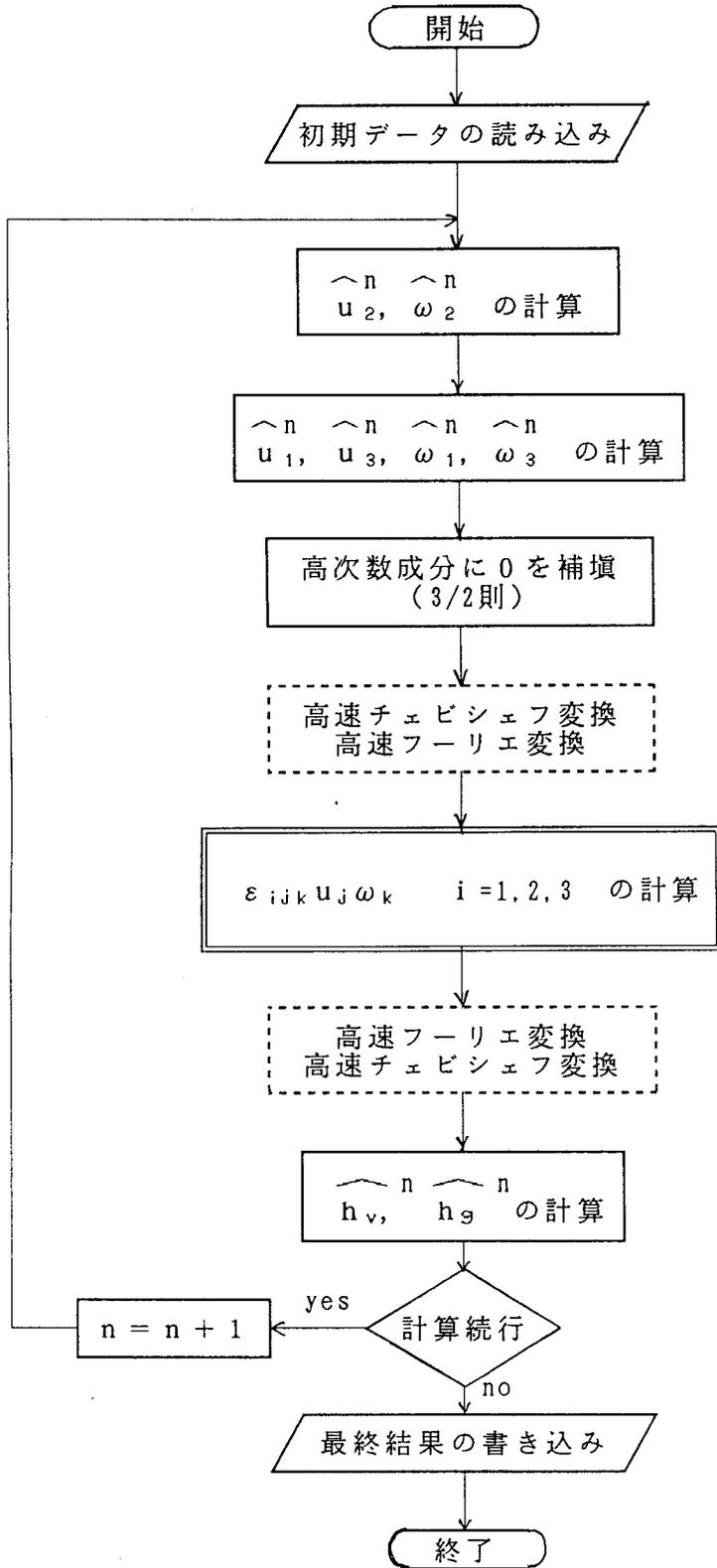


図 2. 2. 1 計算の流れ図

表 2. 3. 1 設定パラメータ

Case	$\frac{U_w \delta}{\nu}$	$\frac{u_z \delta}{\nu}$	$-\frac{\delta}{\rho U_w^2} \frac{\partial P}{\partial x}$
P	0	150	--
CP1	1800	--	4.34×10^{-3}
CP2	2640	--	1.86×10^{-3}
CP3	3000	--	1.33×10^{-3}

表 2. 3. 2 計算領域及び格子解像度

(上壁の壁面パラメータを用いた無次元化による)

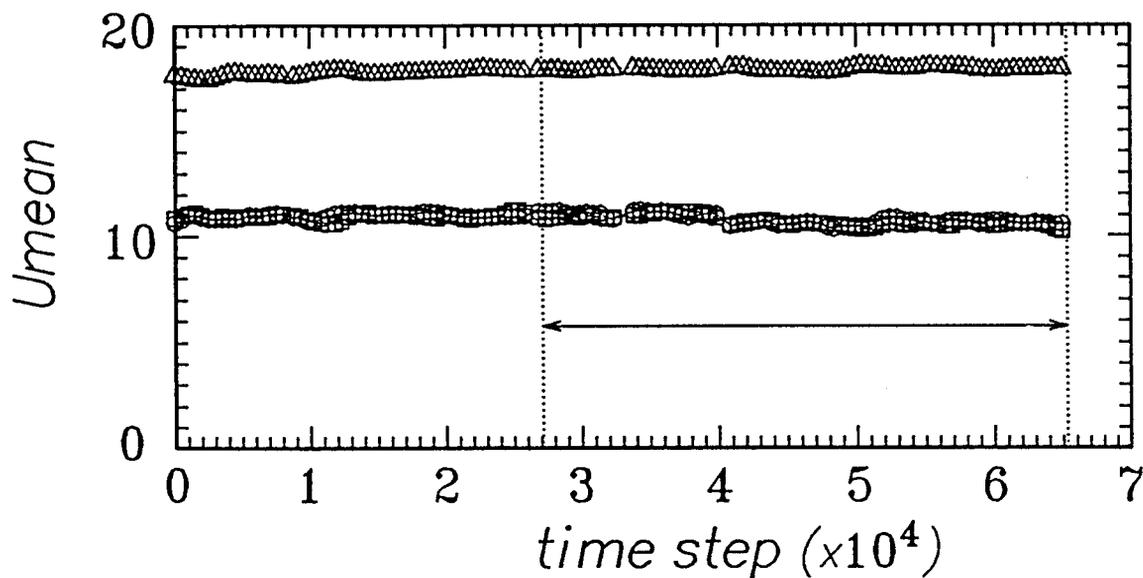
Case	Maximum Period			Resolution		
	Stream	Normal	Span	Stream	Normal	Span
P	2360	300	942	18.4	0.0803~4.91	7.36
C P 1	2320	296	930	18.2	0.0792~4.84	7.26
C P 2	2390	304	955	18.7	0.0814~4.97	7.46
C P 3	2420	308	968	18.9	0.0825~5.04	7.56

表 2. 3. 3 計算領域及び格子解像度

(下壁の壁面パラメータを用いた無次元化による)

Case	Maximum Period			Resolution		
	Stream	Normal	Span	Stream	Normal	Span
P	2360	300	942	18.4	0.0803~4.91	7.36
C P 1	1240	148	496	9.69	0.0423~2.58	3.86
C P 2	770	98	307	6.01	0.0262~1.60	2.41
C P 3	278	35	111	2.17	0.0095~0.579	0.87

(a)



(b)

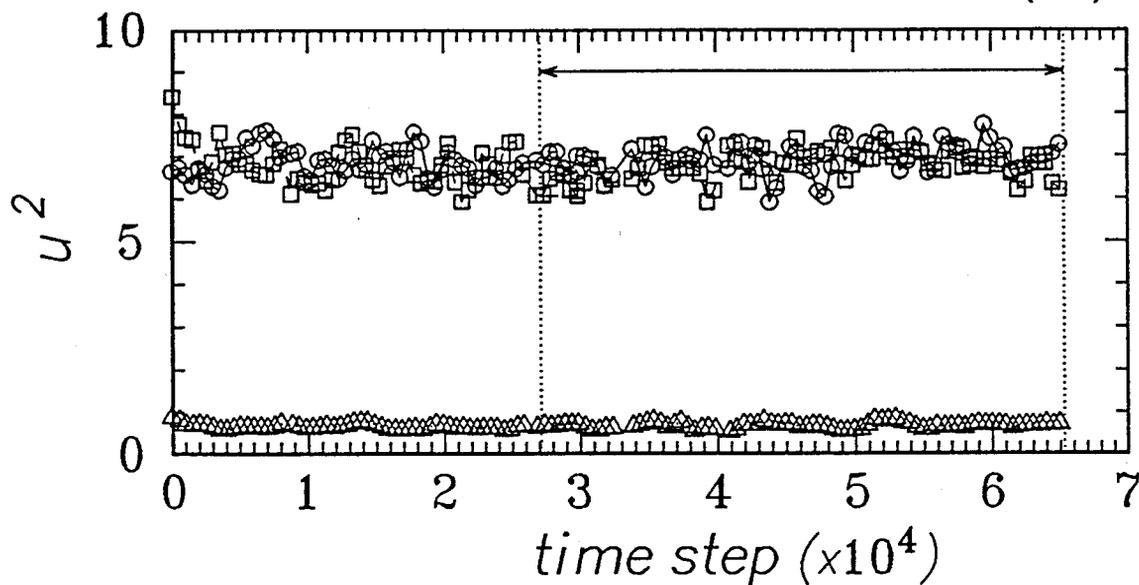
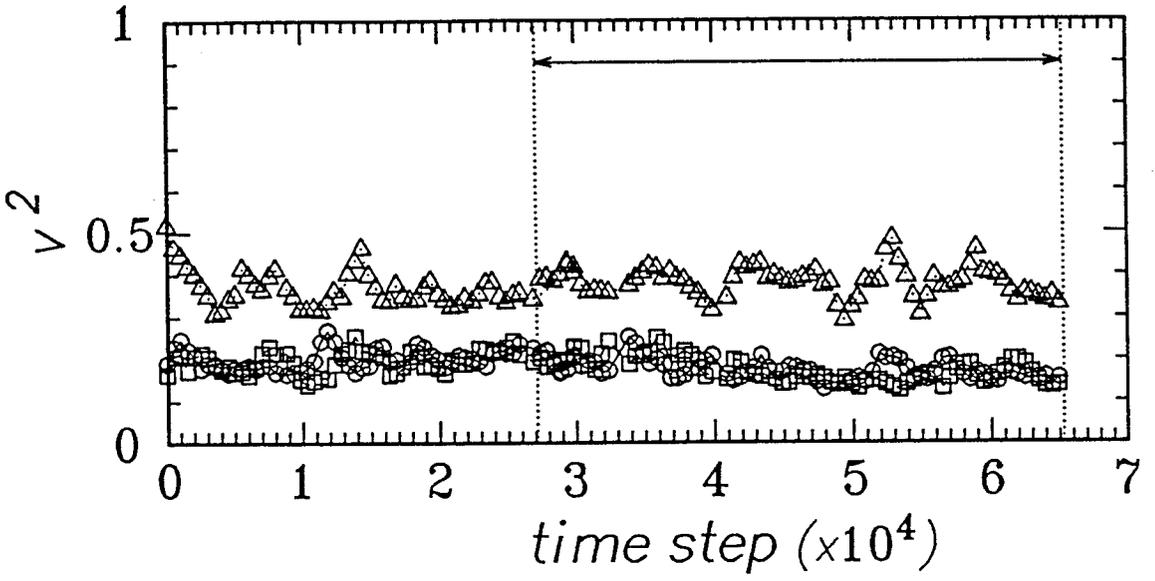


図 2. 3. 1 平均速度及び速度変動の時間発展 (ケース P)
○ ; $y/\delta = 0.1$ 、□ ; $y/\delta = 1.0$ 、△ ; $y/\delta = 1.9$
(a) 平均速度、(b) 流れ方向速度変動、

(c)



(d)

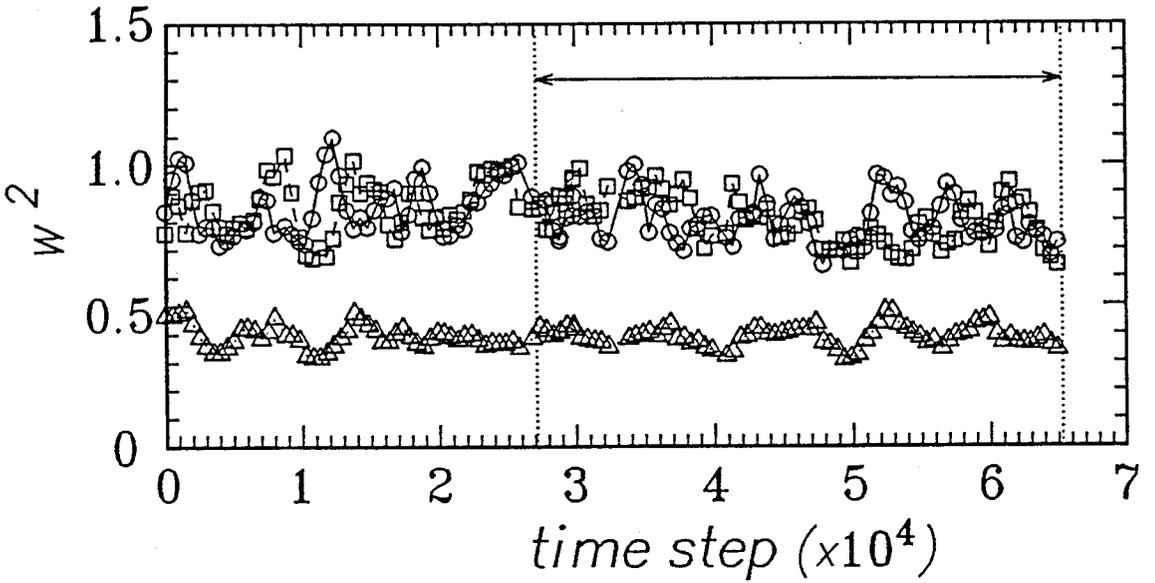


図 2. 3. 1 平均速度及び速度変動の時間発展 (前頁の続き)
(c) 壁垂直方向速度変動、(d) スパン方向速度変動

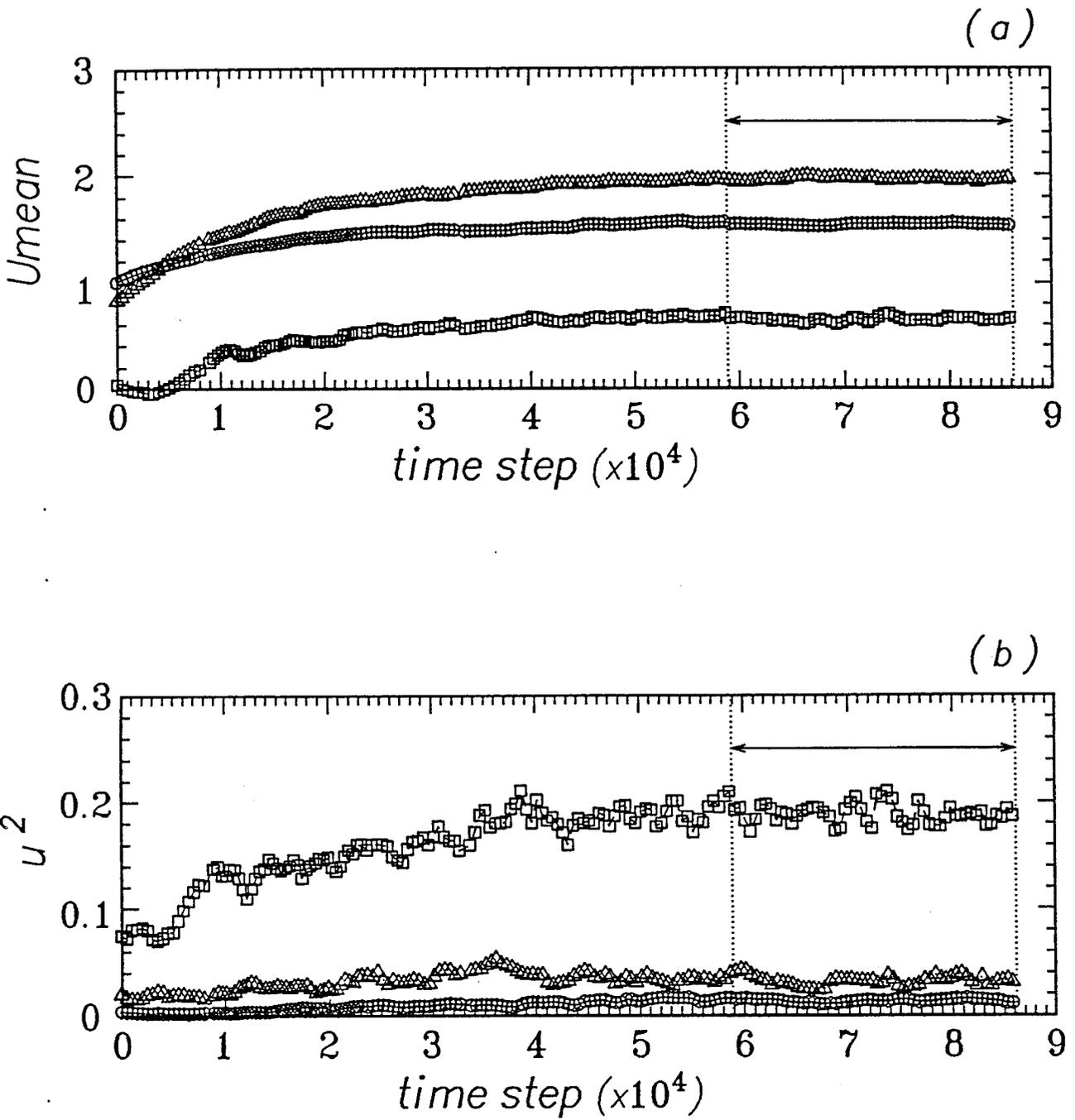


図 2. 3. 2 平均速度及び速度変動の時間発展 (ケース CP1)
○ ; $y/\delta = 0.1$ 、□ ; $y/\delta = 1.0$ 、△ ; $y/\delta = 1.9$
(a) 平均速度、(b) 流れ方向速度変動、

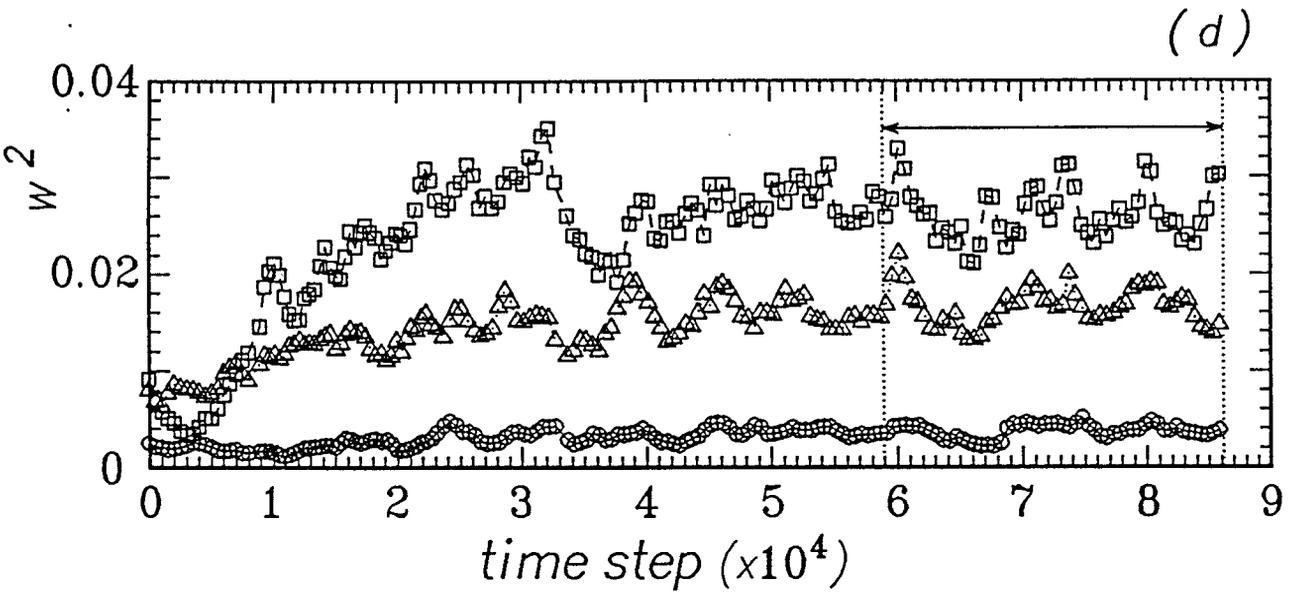
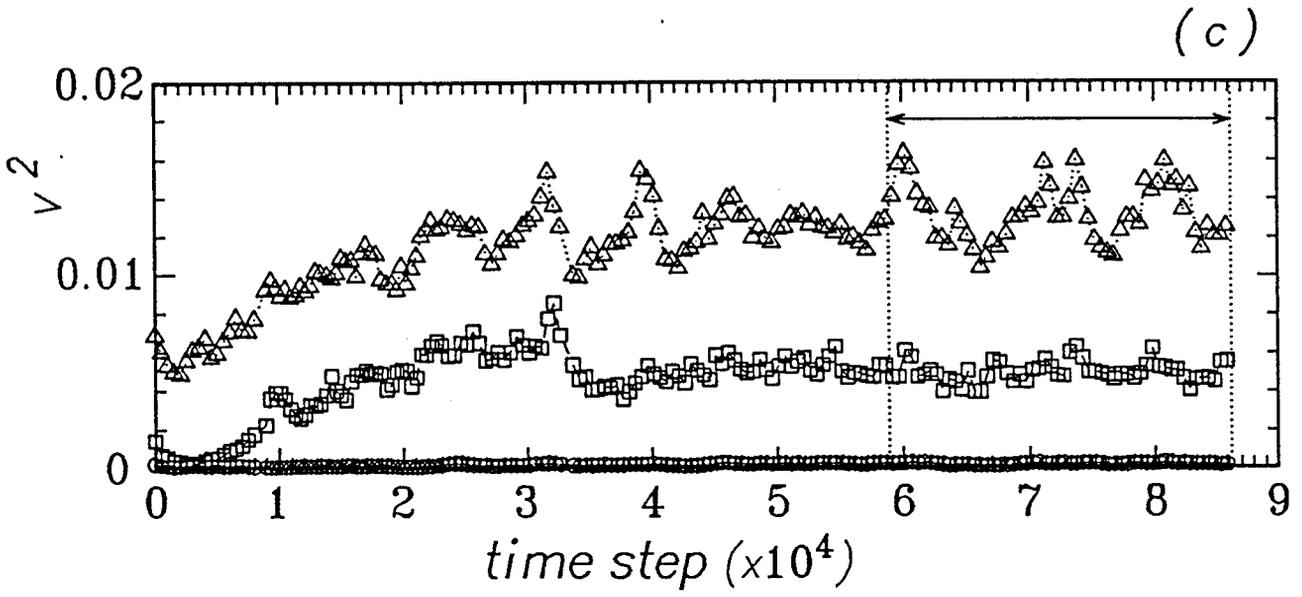
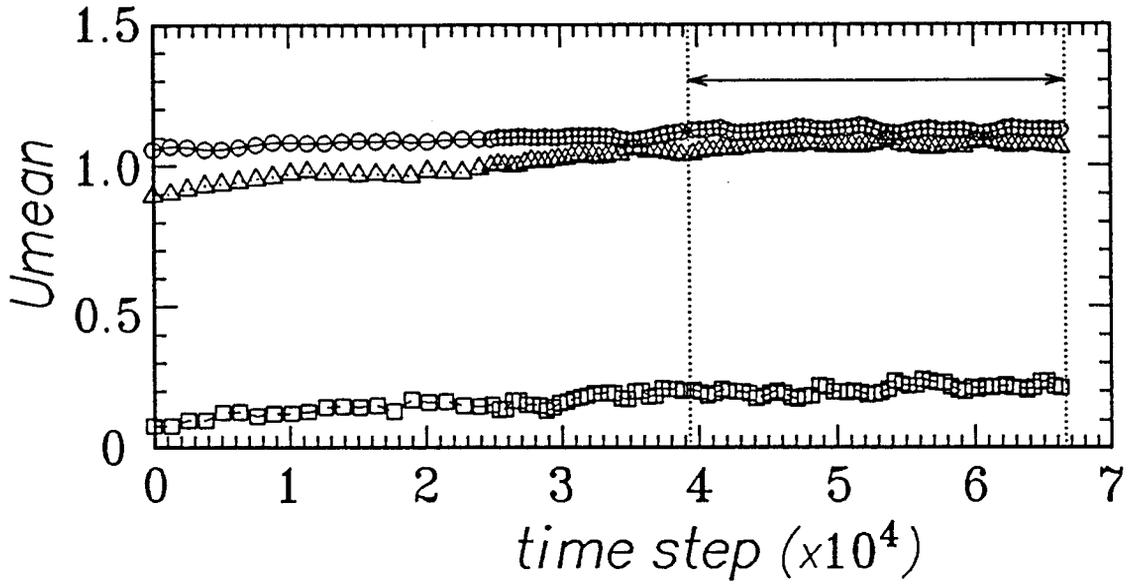


図 2. 3. 2 平均速度及び速度変動の時間発展 (前頁の続き)
(c) 壁垂直方向速度変動、(d) スパン方向速度変動

(a)



(b)

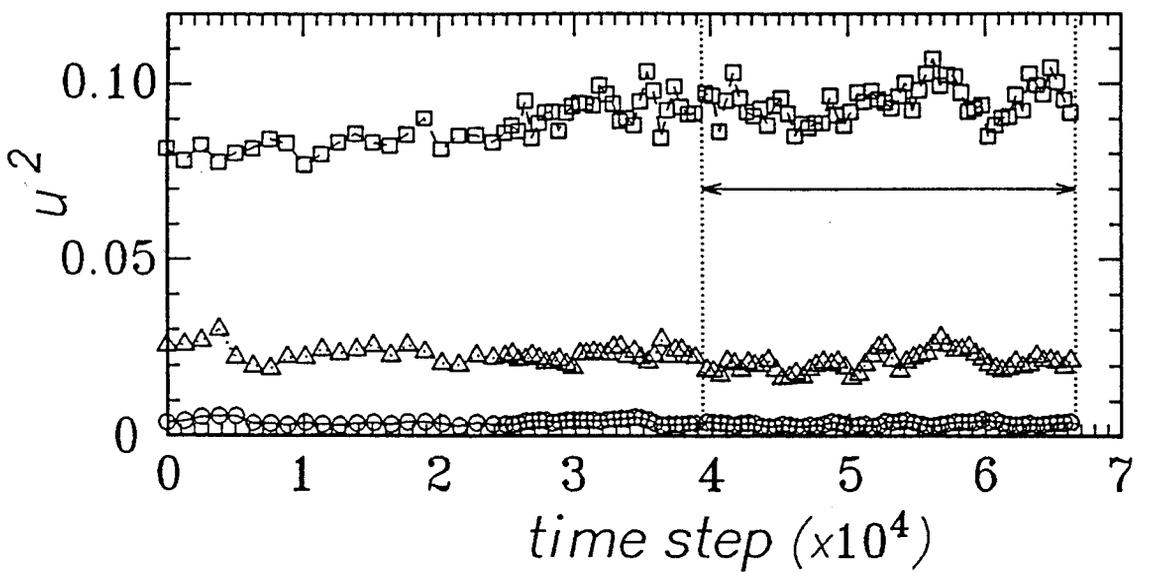
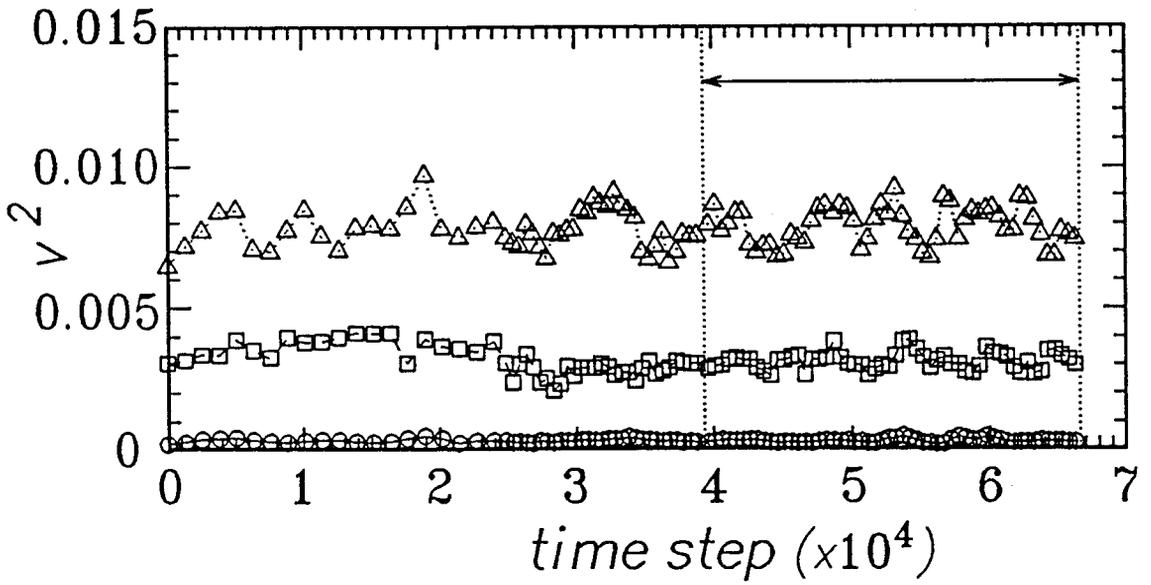


図 2. 3. 3 平均速度及び速度変動の時間発展 (ケース CP 2)
○ ; $y/\delta = 0.1$ 、□ ; $y/\delta = 1.0$ 、△ ; $y/\delta = 1.9$
(a) 平均速度、(b) 流れ方向速度変動、

(c)



(d)

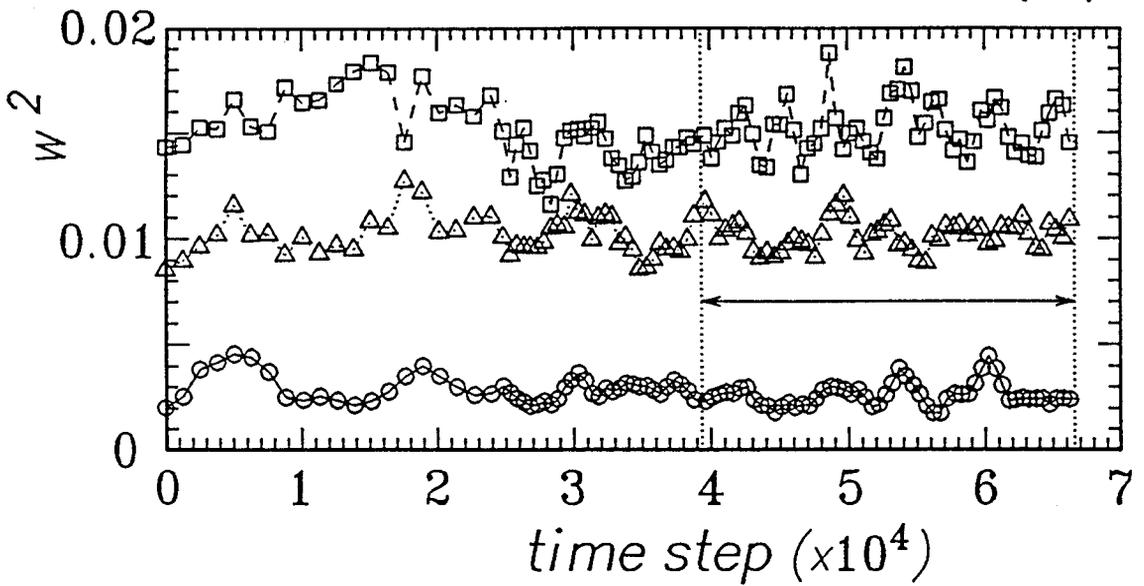
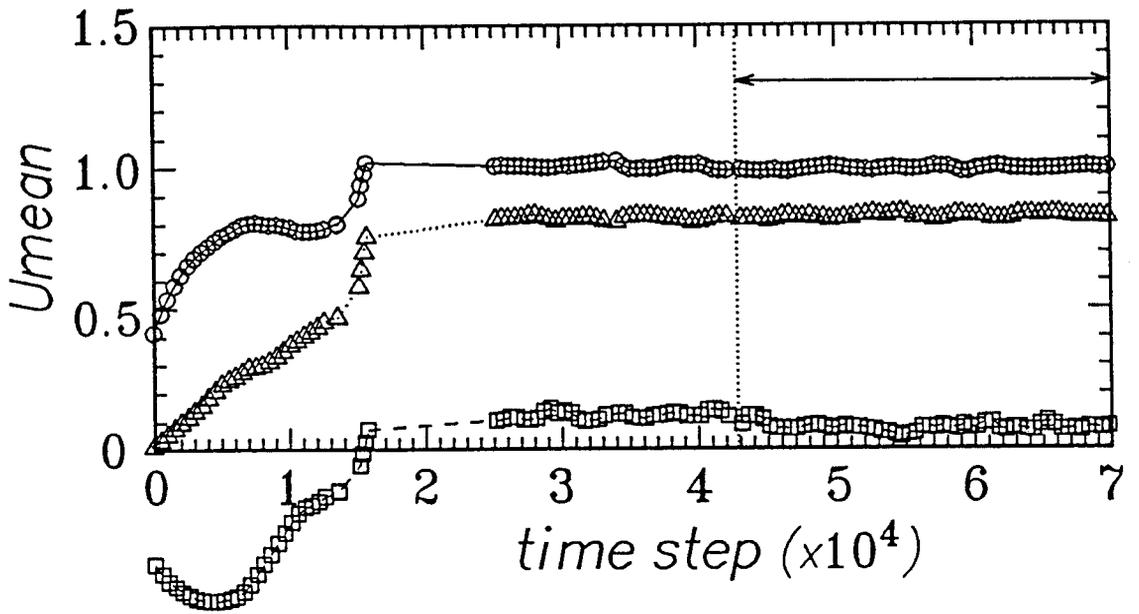


図 2. 3. 3 平均速度及び速度変動の時間発展 (前頁の続き)
(c) 壁垂直方向速度変動、(d) スパン方向速度変動

(a)



(b)

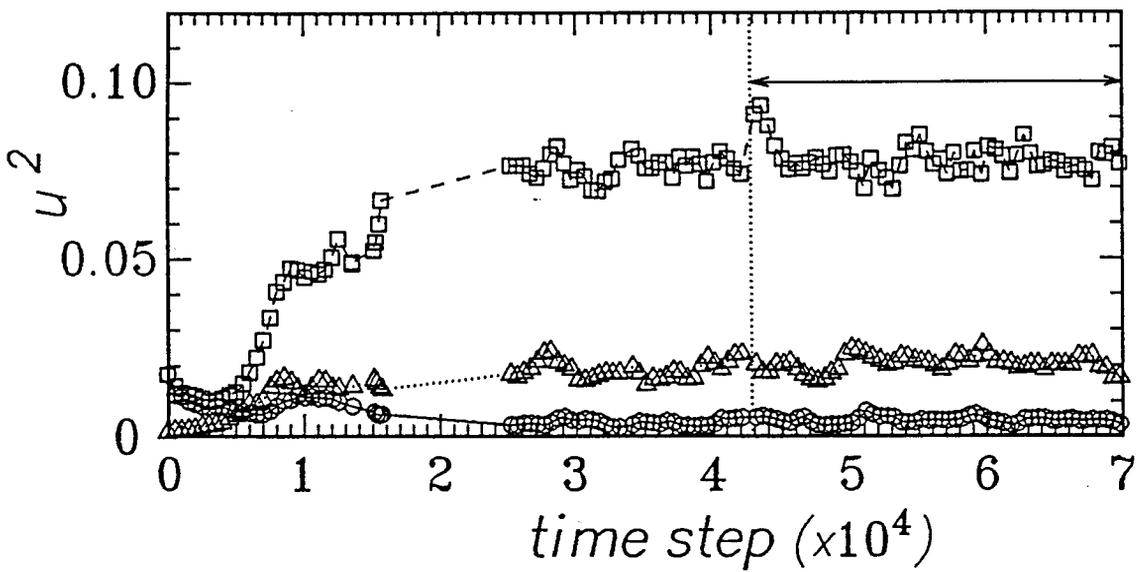


図 2. 3. 4 平均速度及び速度変動の時間発展 (ケース C P 3)
○ ; $y/\delta = 0.1$ 、□ ; $y/\delta = 1.0$ 、△ ; $y/\delta = 1.9$
(a) 平均速度、(b) 流れ方向速度変動、

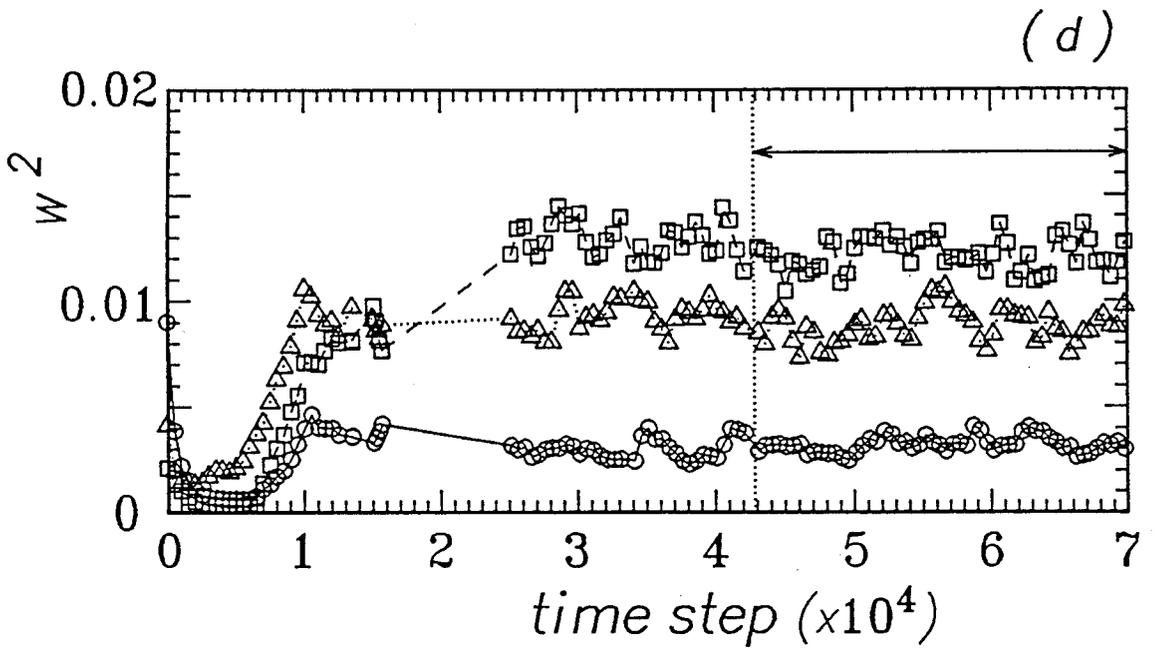
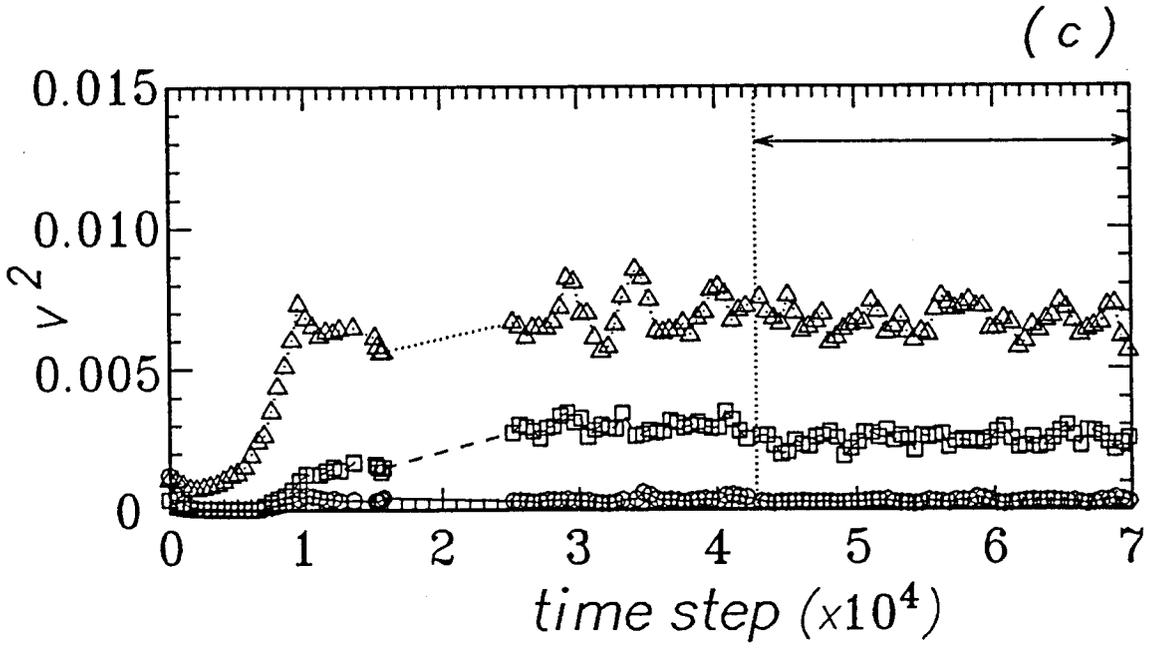


図 2. 3. 4 平均速度及び速度変動の時間発展 (前頁の続き)

(c) 壁垂直方向速度変動、(d) スパン方向速度変動

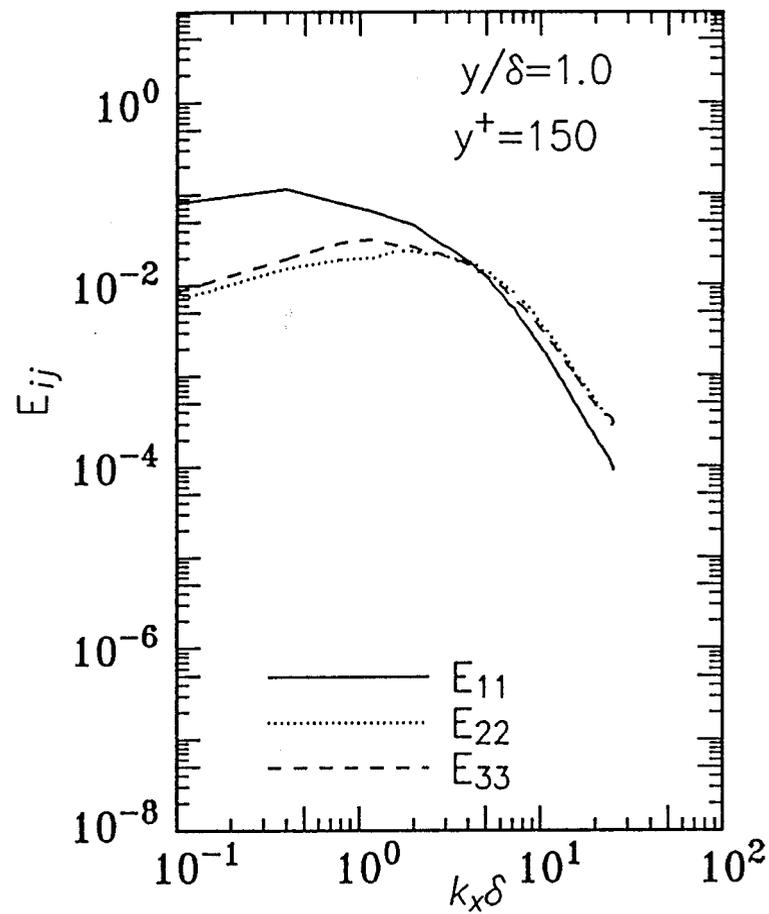
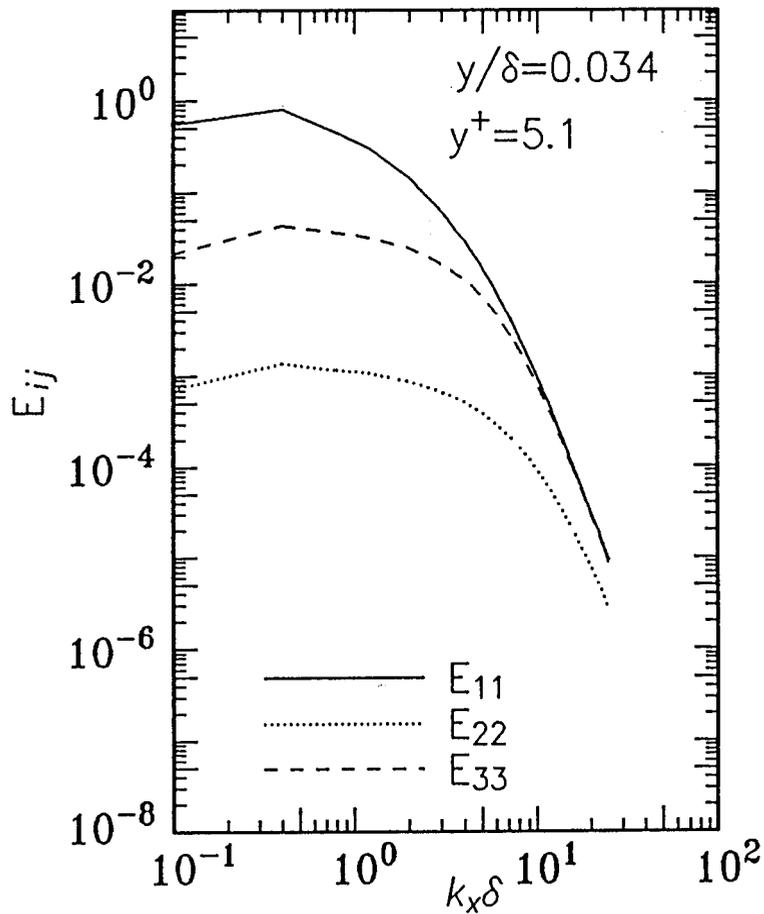


図 2. 3. 5 速度変動の流れ方向 1 次元スペクトル
 ケース P

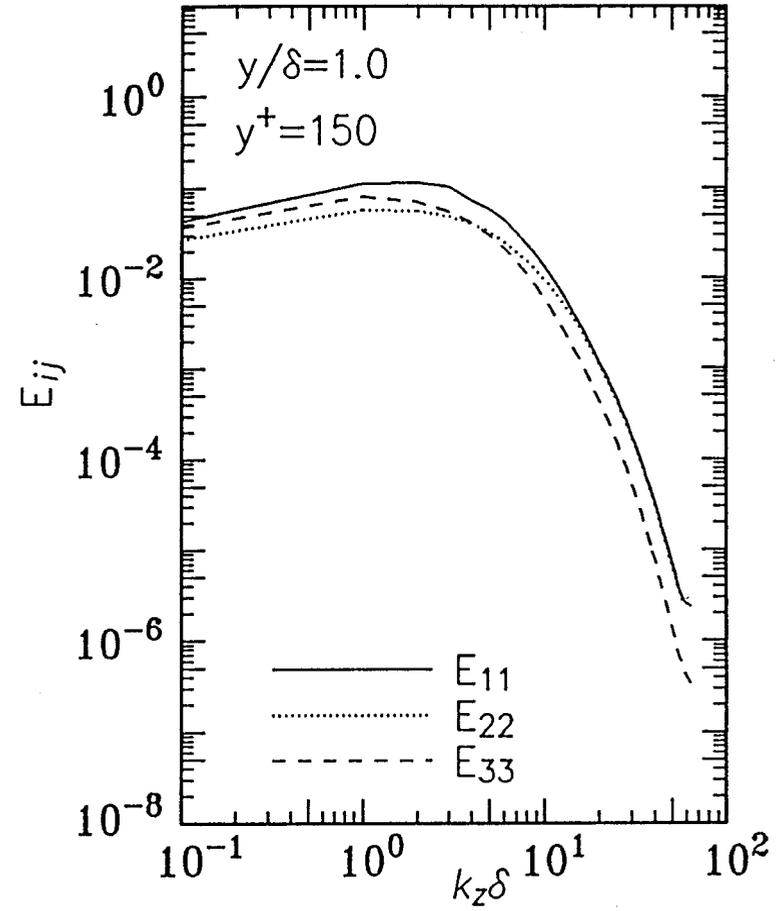
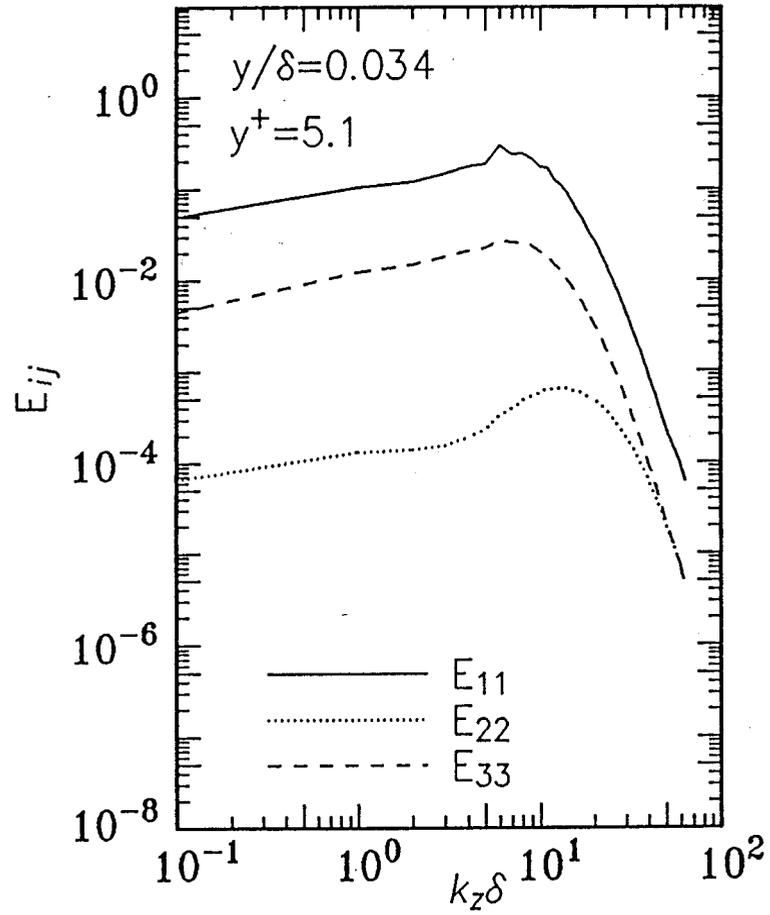


図 2. 3. 6 速度変動のспан方向1次元スペクトル
 ケース P

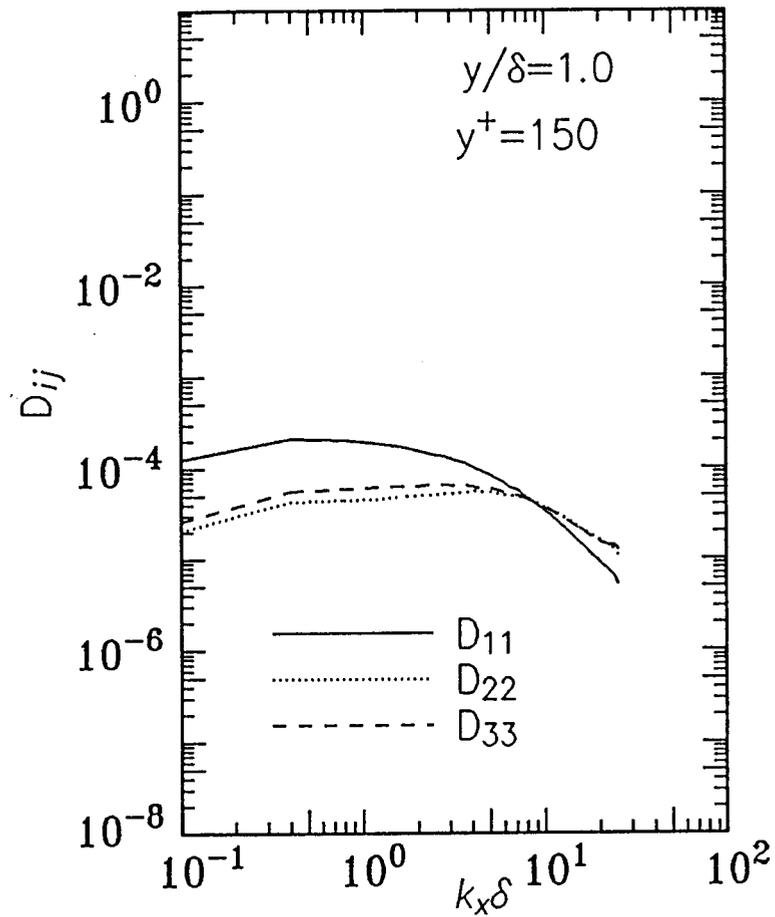
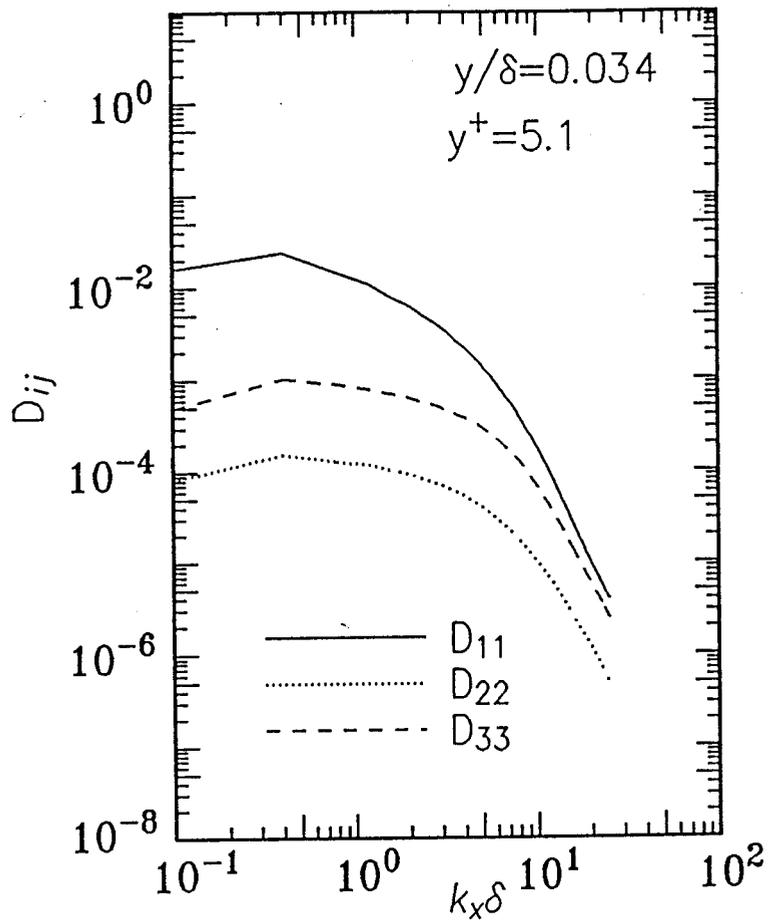


図 2. 3. 7 散逸の流れ方向 1 次元スペクトル
 ケース P

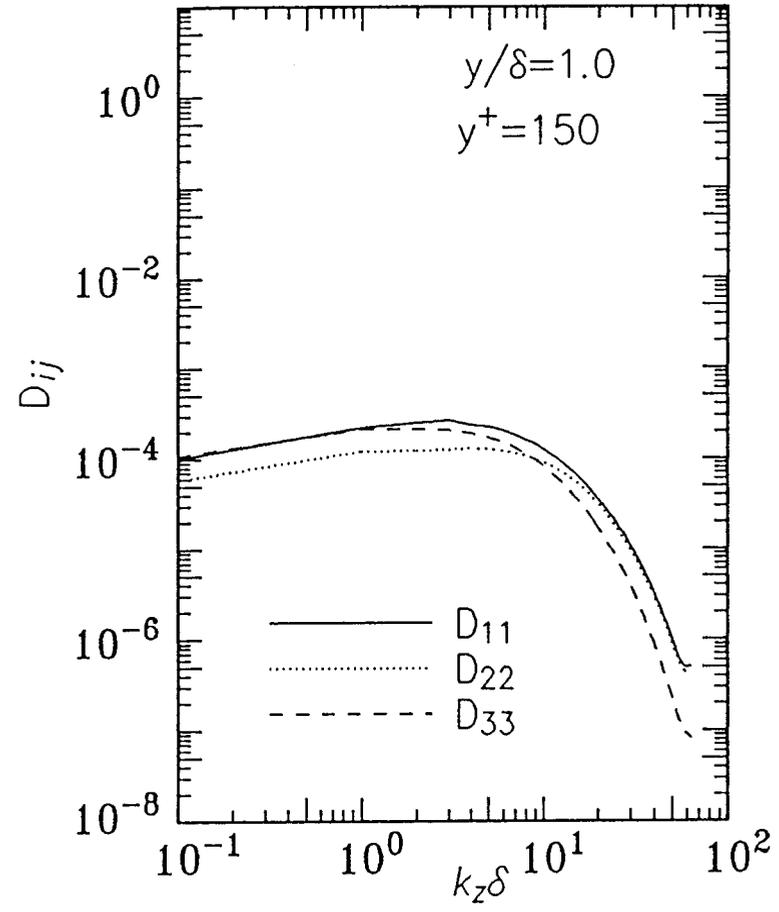
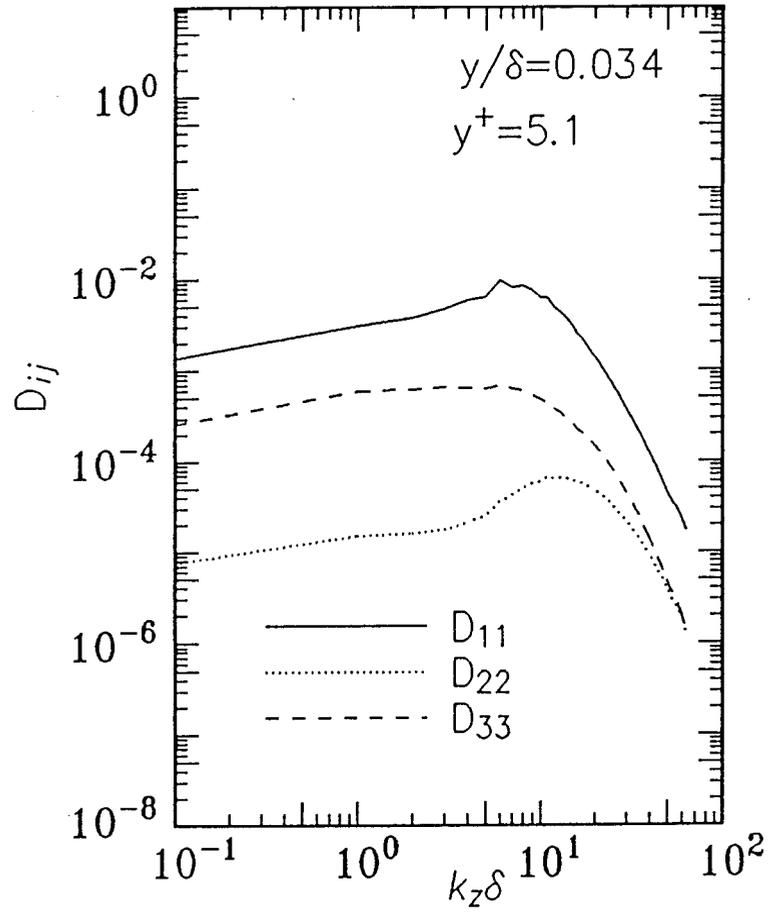


図 2. 3. 8 散逸のспан方向 1 次元スペクトル
ケース P

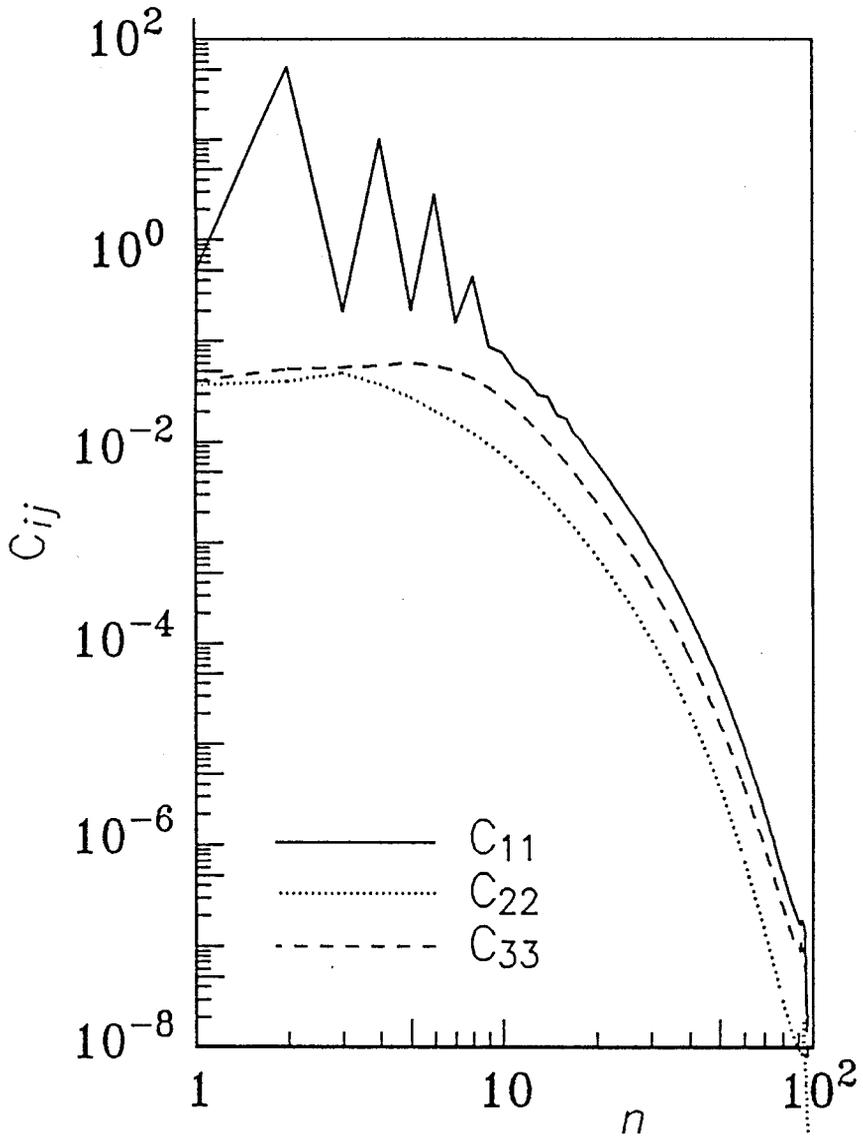


図 2. 3. 9 チェビシエフ係数の 2 乗平均値
ケース P

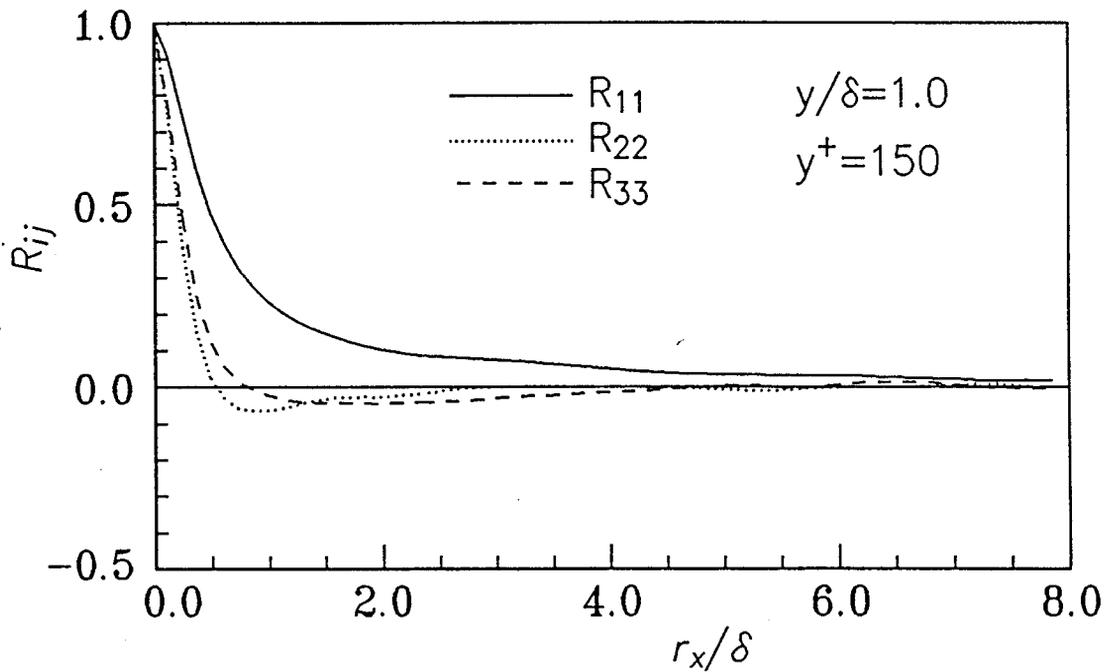
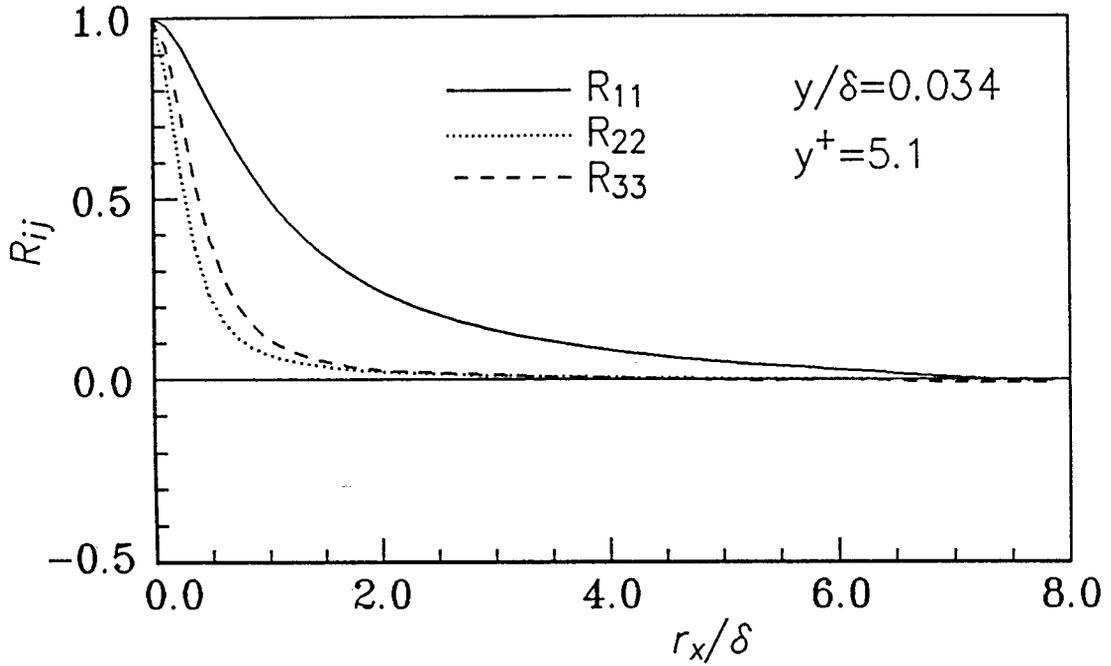


図 2. 3. 10 速度変動の流れ方向 2 点相関係数
ケース P

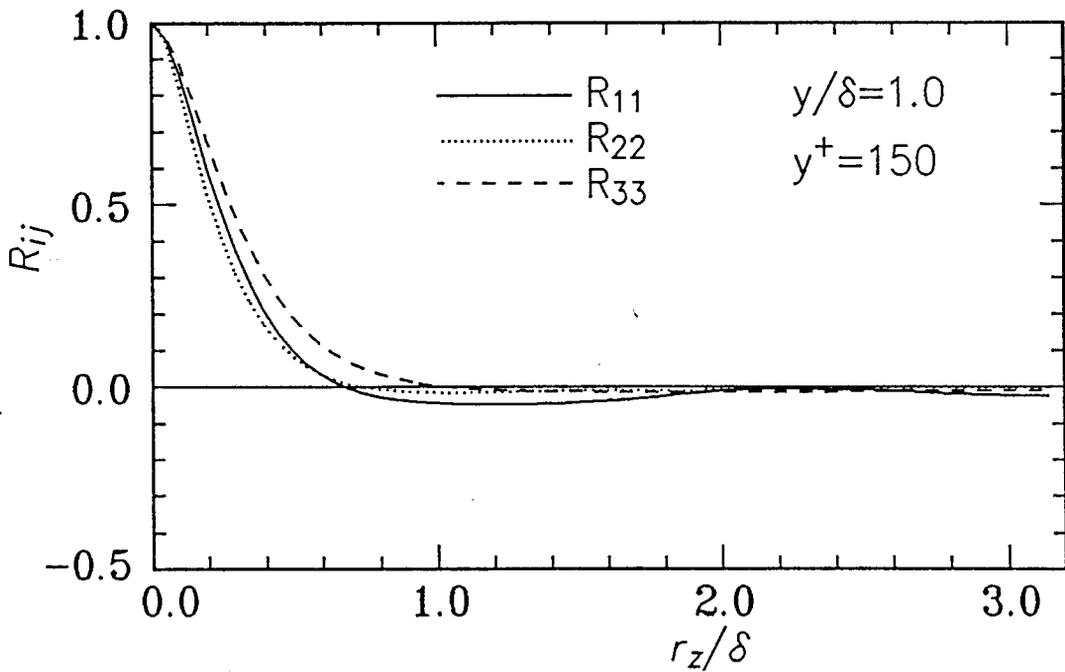
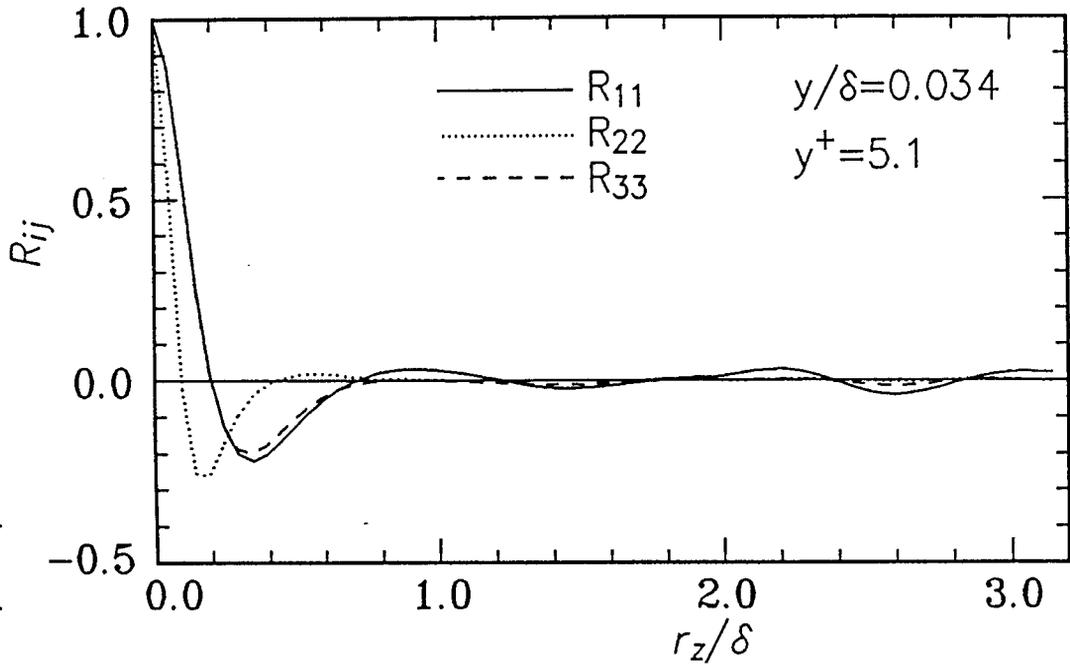


図 2. 3. 1 1 速度変動のSPAN方向2点相関係数
ケースP

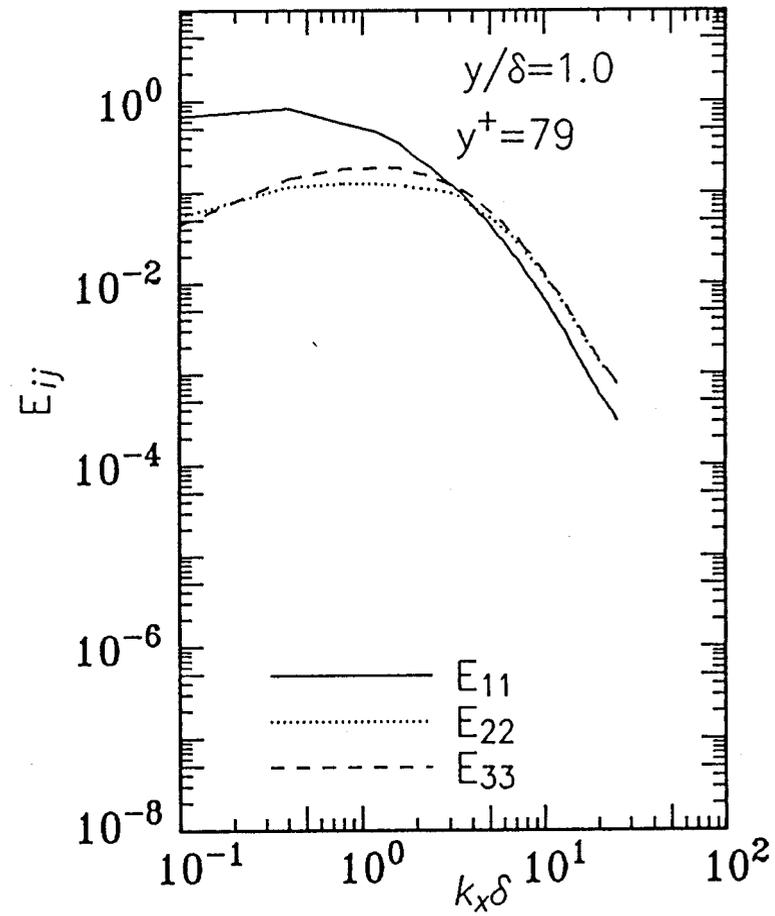
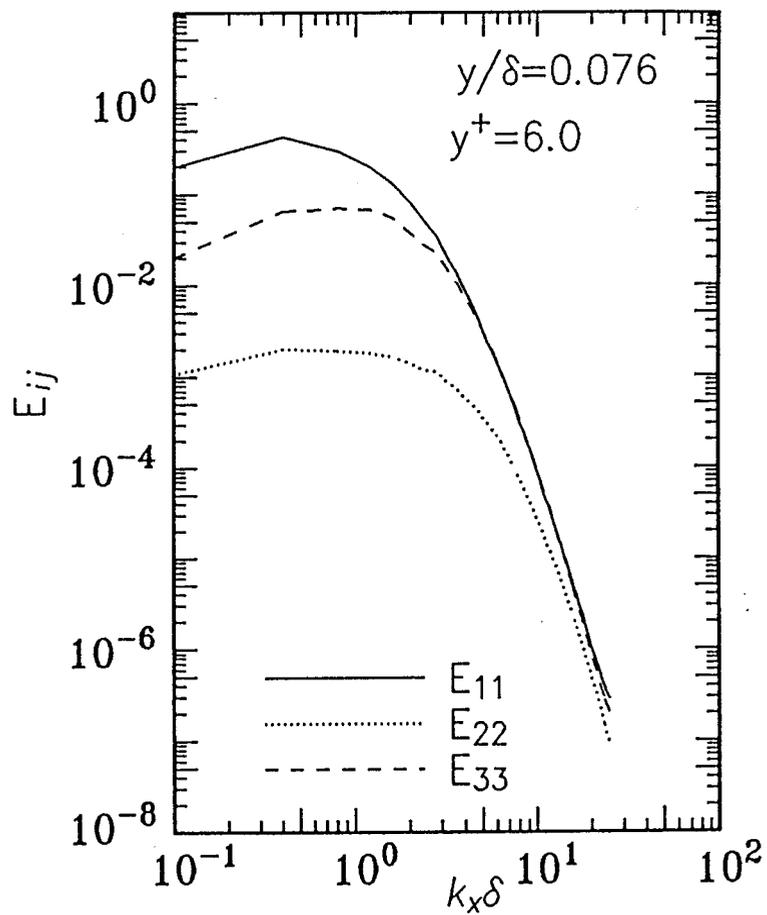


図 2. 3. 1 2 速度変動の流れ方向 1 次元スペクトル
 ケース C P 1

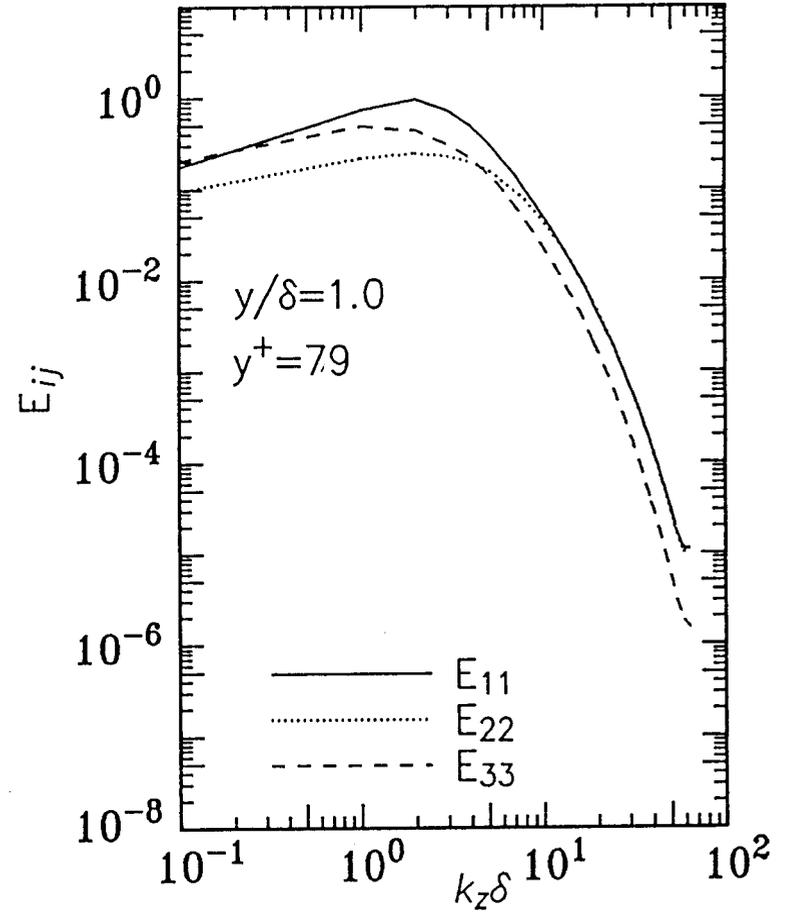
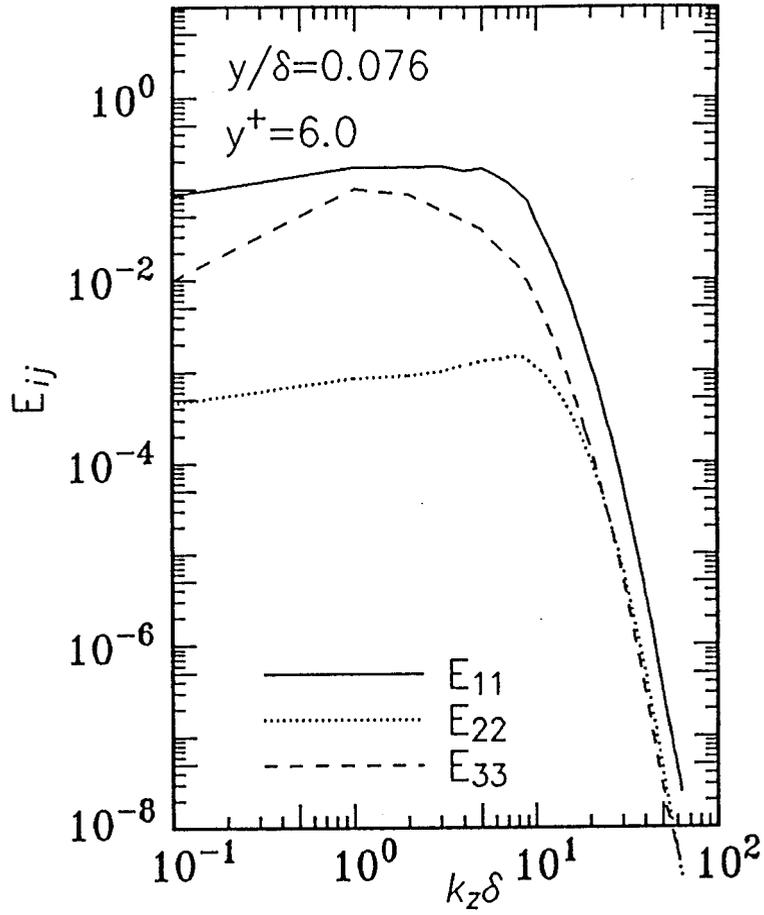


図 2. 3. 13 速度変動のспан方向 1次元スペクトル
 ケース C P 1

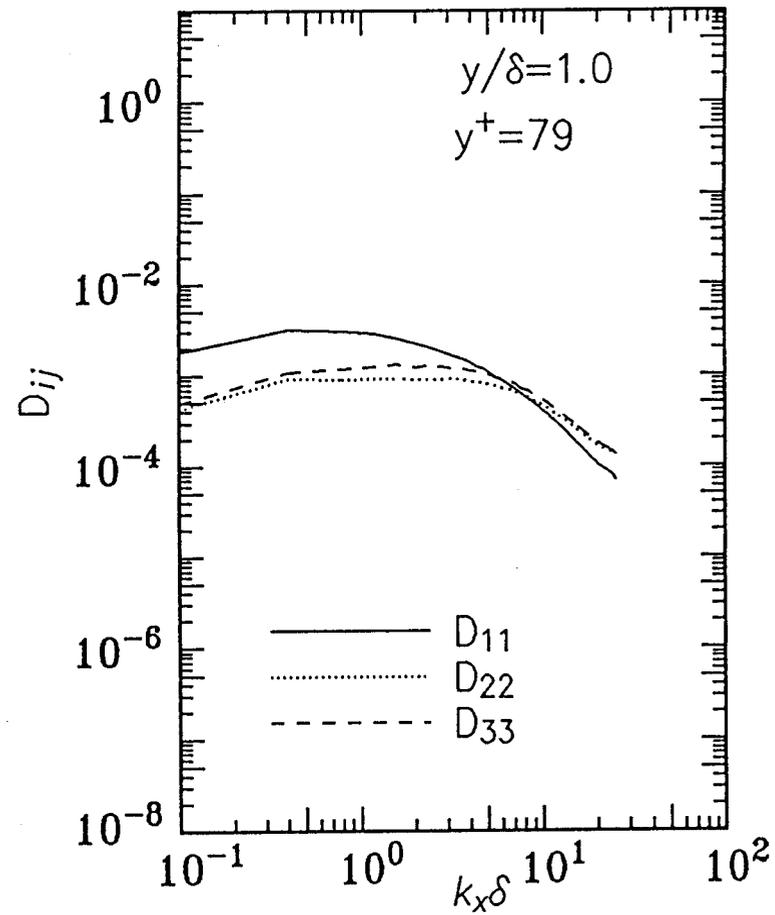
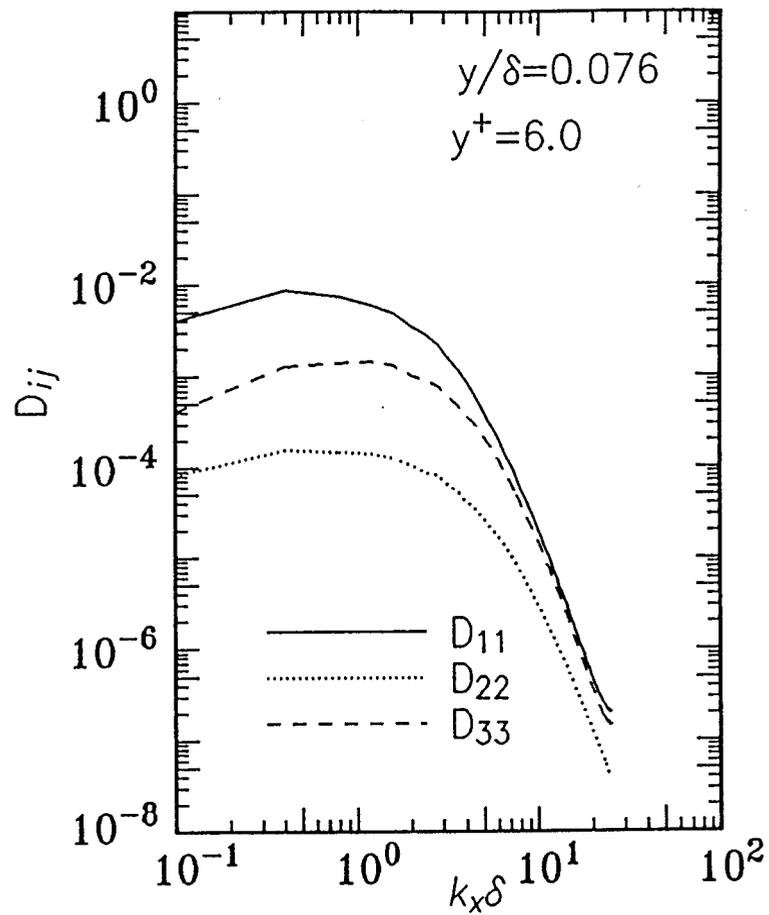


図 2. 3. 1 4 散逸の流れ方向 1 次元スペクトル
ケース C P 1

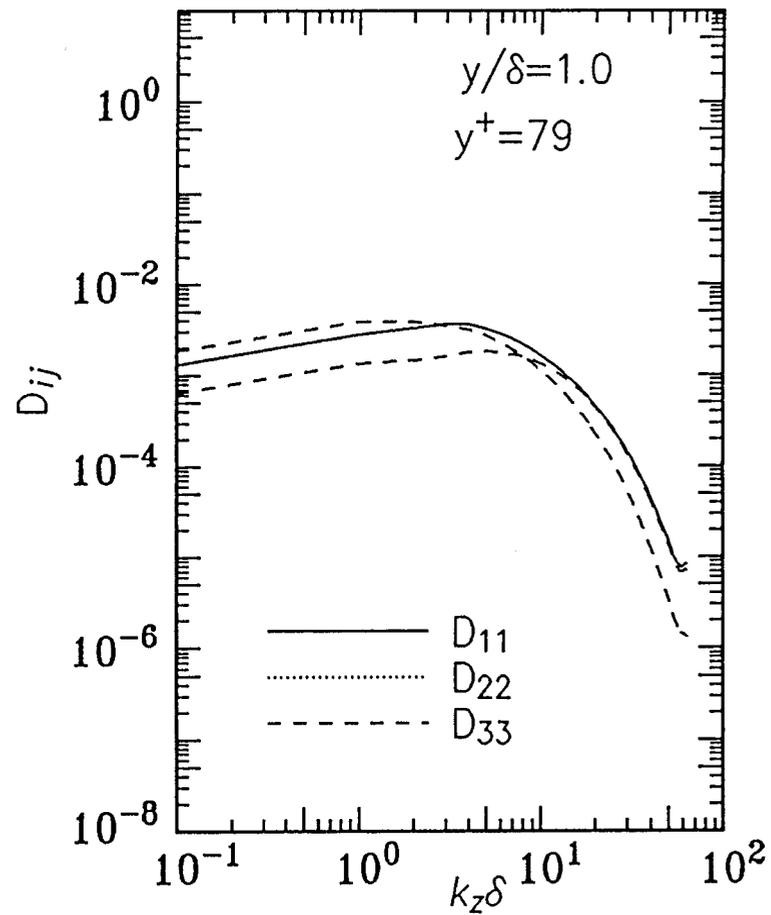
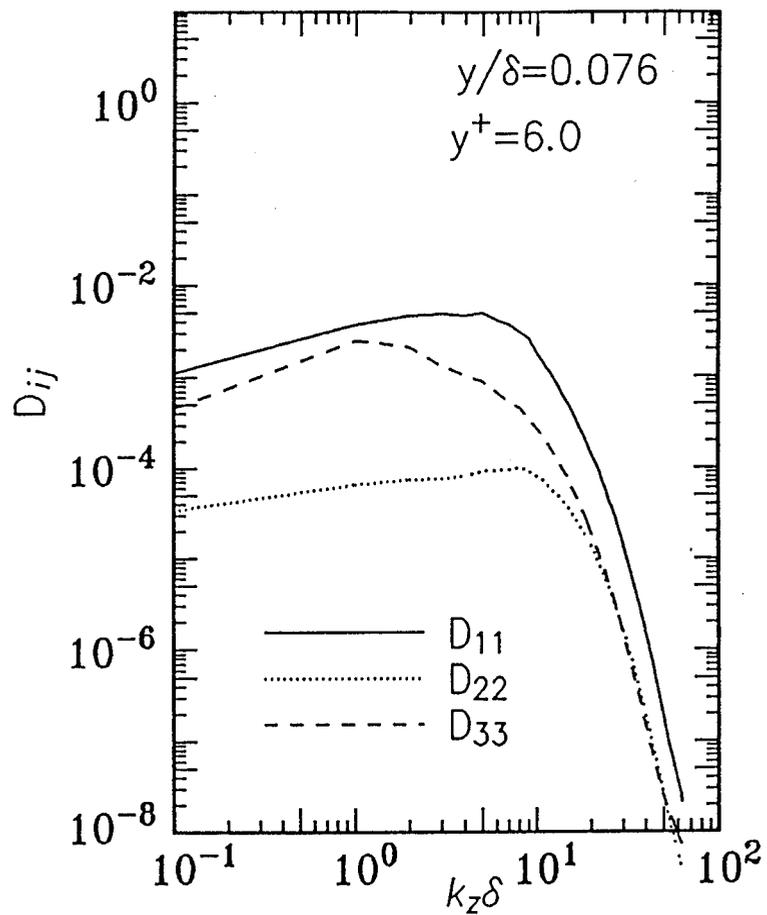


図 2. 3. 15 散逸のSPAN方向1次元スペクトル
 ケースCP1

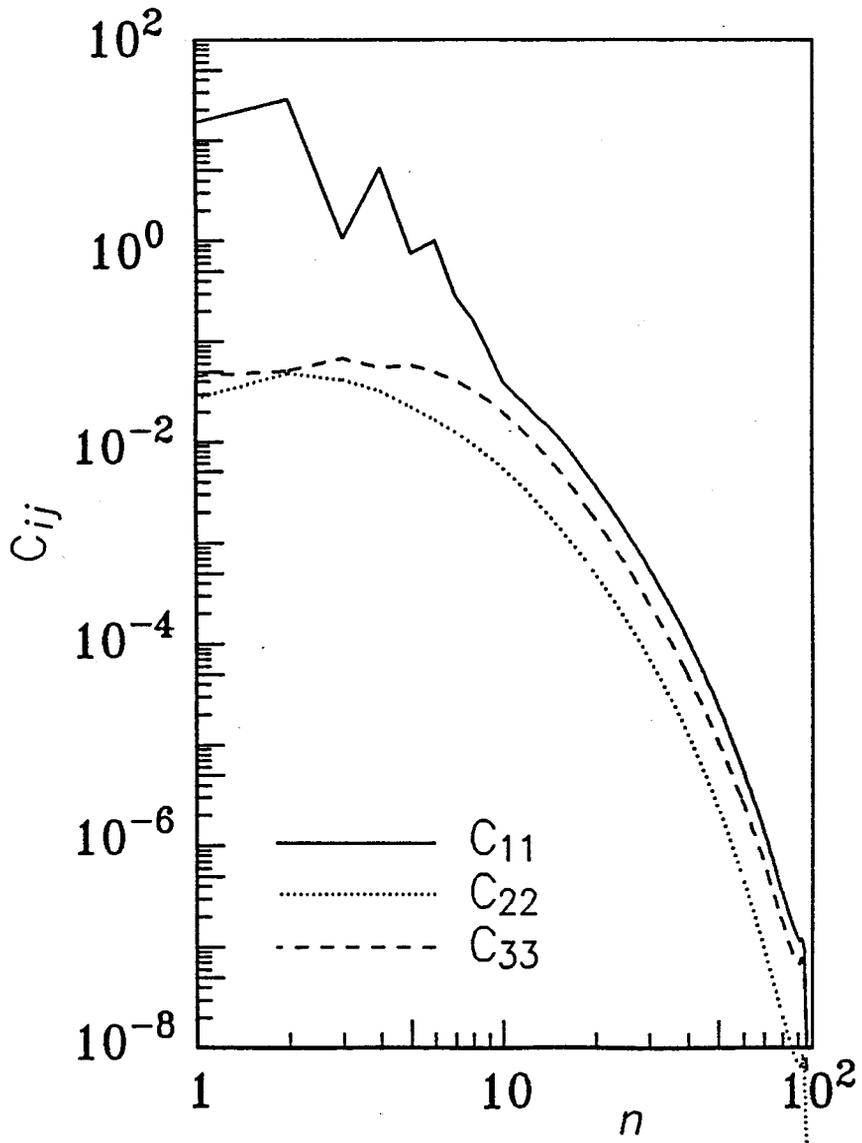


図 2. 3. 16 チェビシェフ係数の 2 乗平均値
ケース C P 1

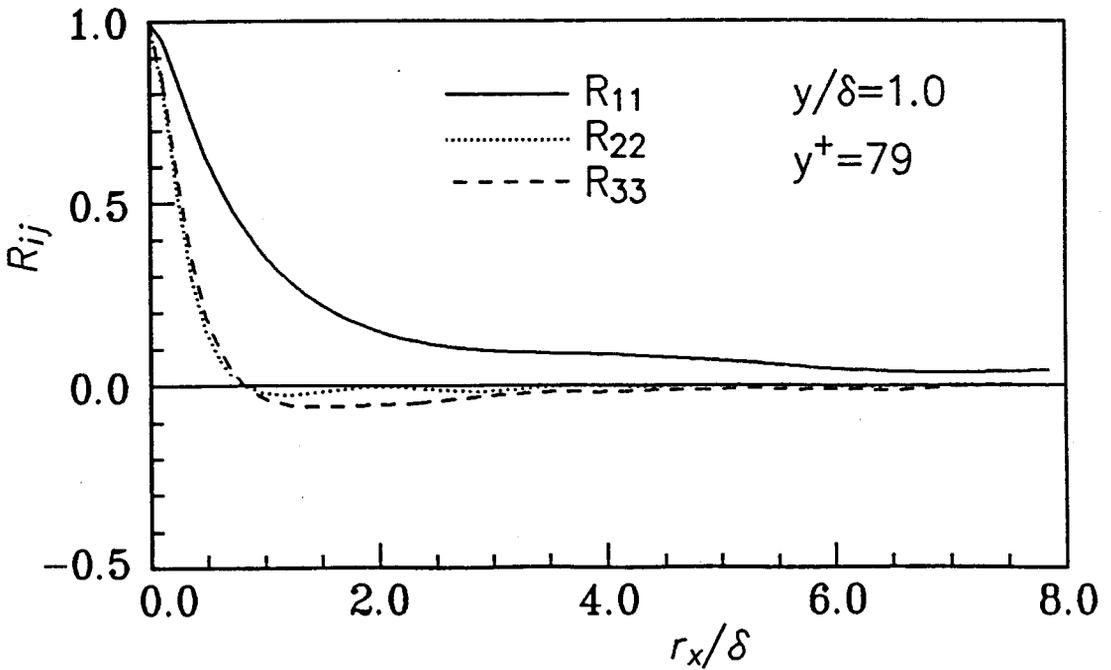
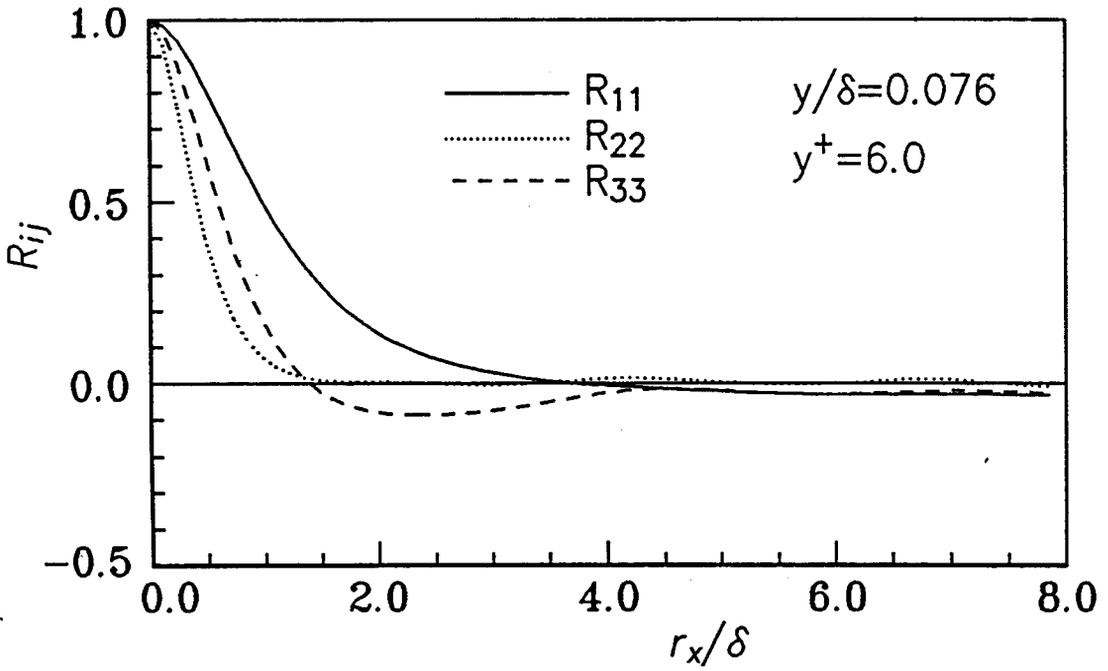


図 2. 3. 17 速度変動の流れ方向 2 点相関係数
ケース C P 1

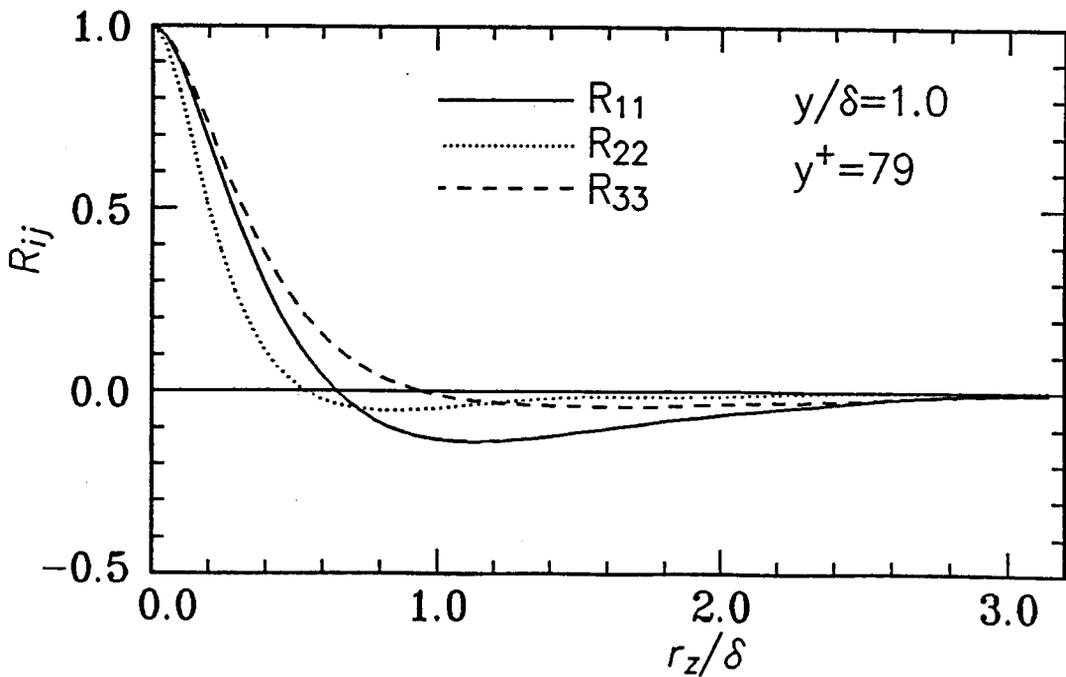
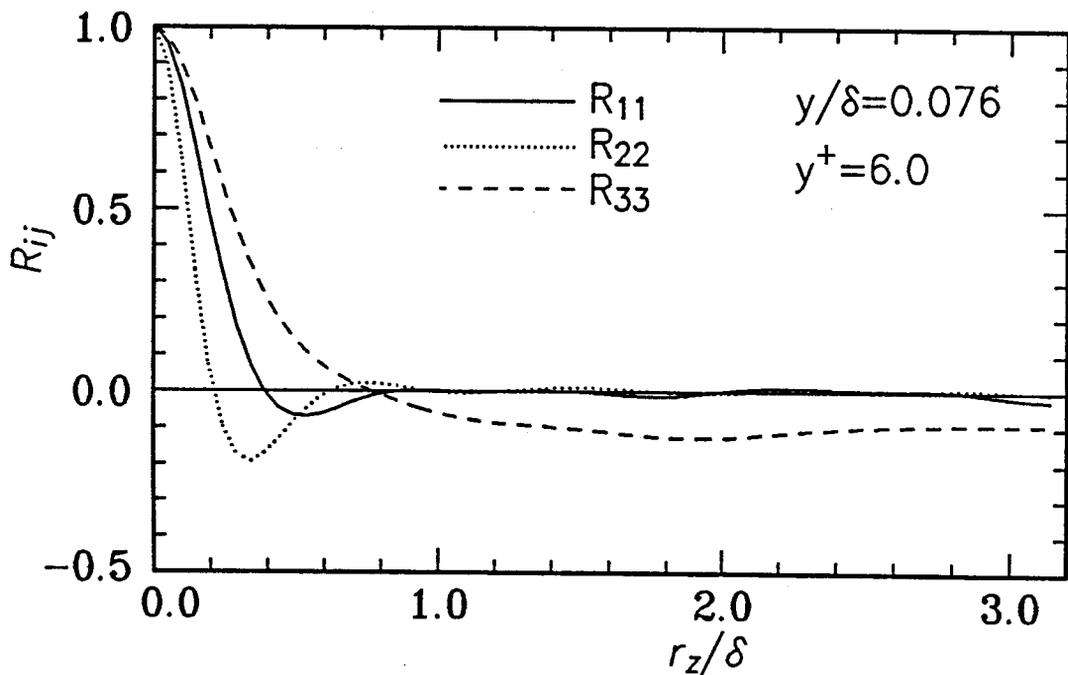


図 2. 3. 18 速度変動のспан方向 2 点相関係数
ケース C P 1

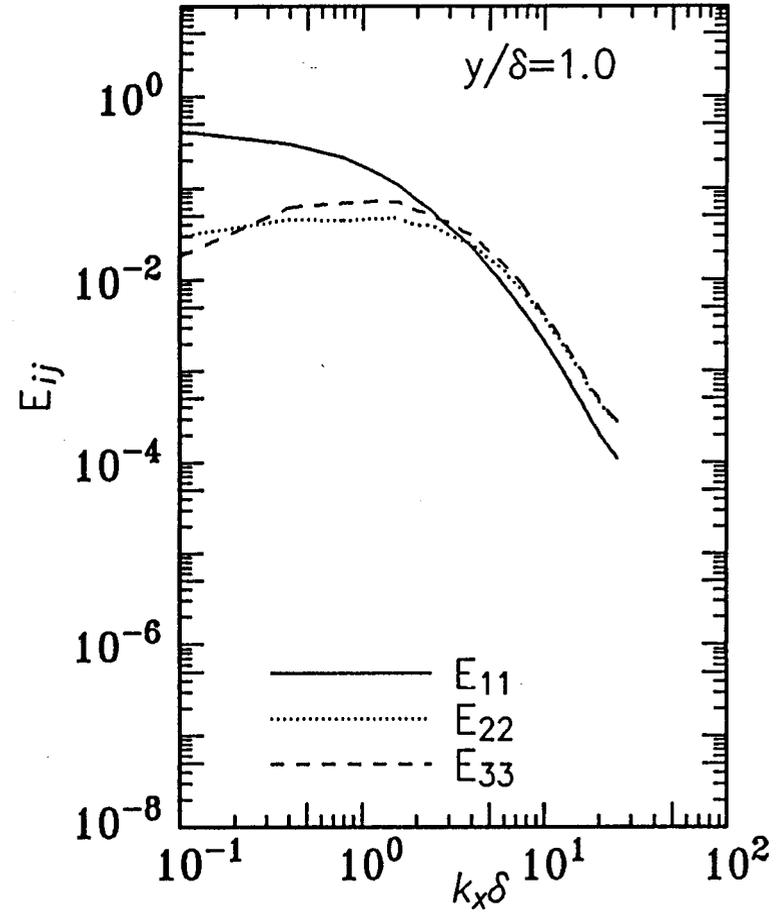
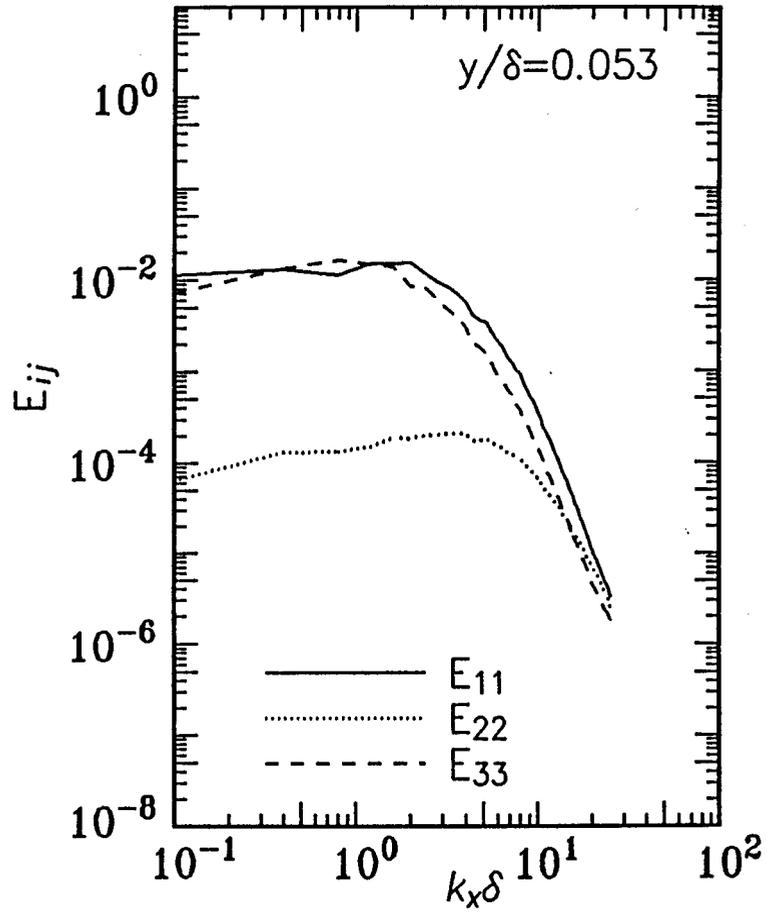


図 2. 3. 19 速度変動の流れ方向 1 次元スペクトル
 ケース CP 2

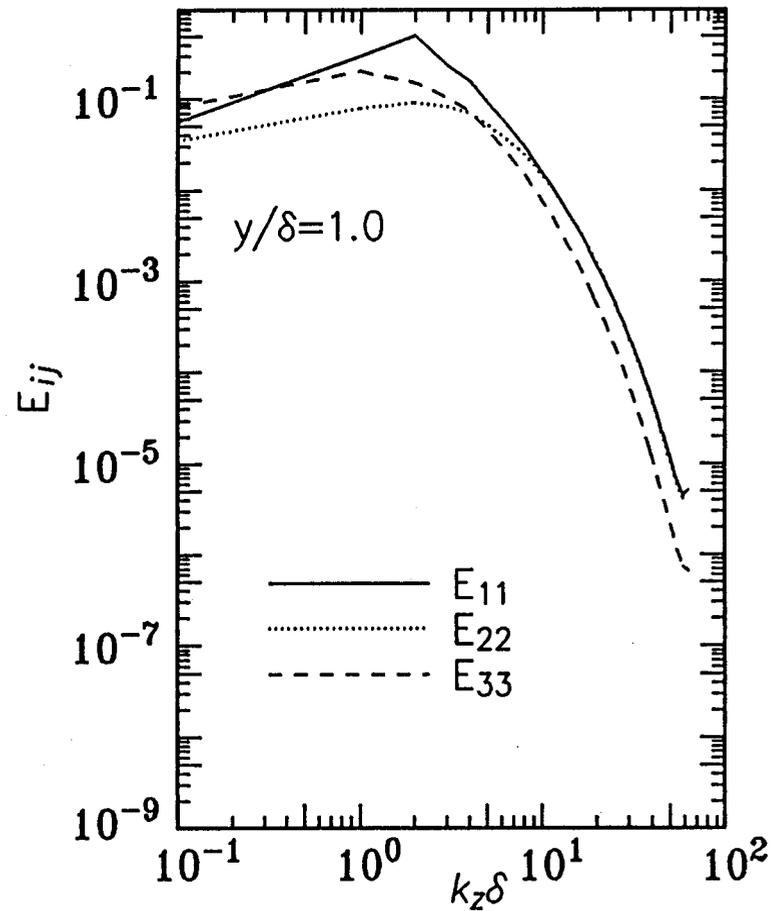
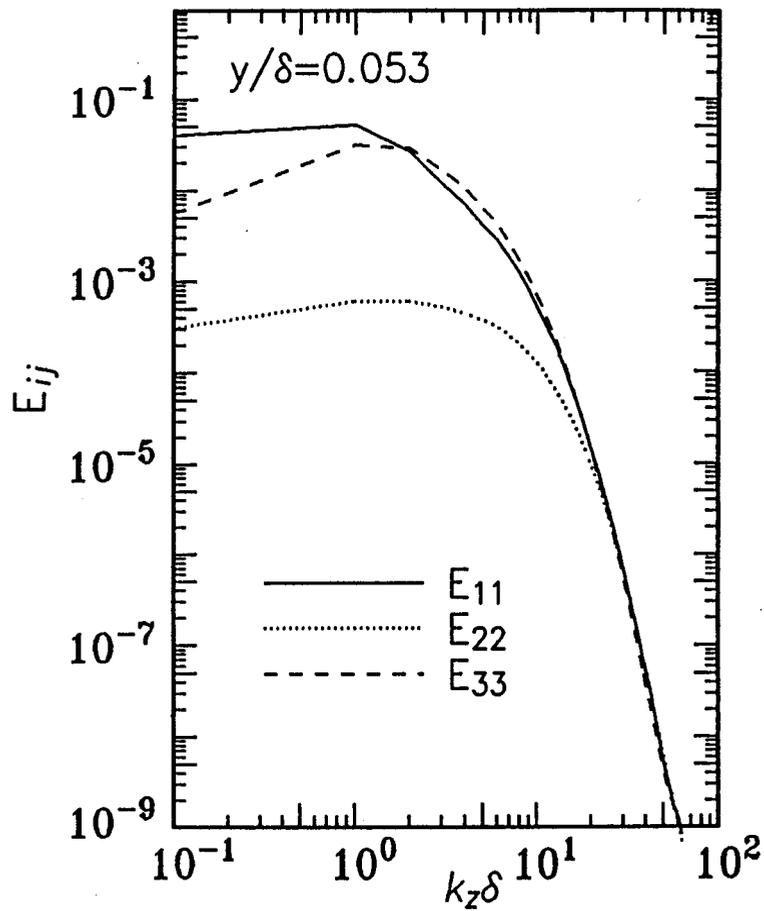


図 2. 3. 20 速度変動のSPAN方向1次元スペクトル
 ケースCP2

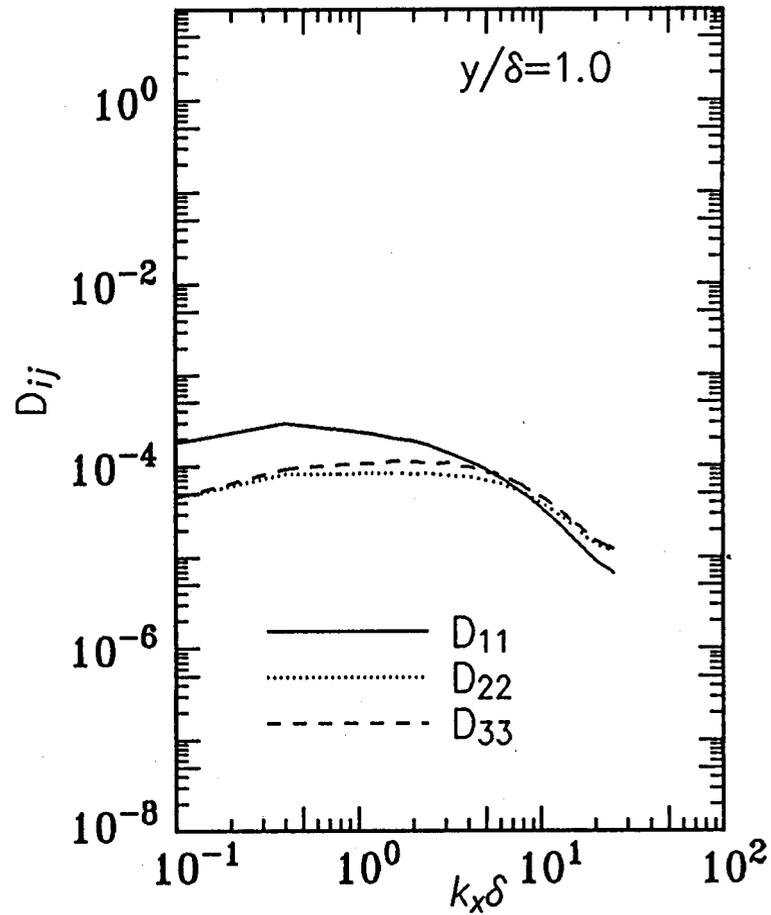
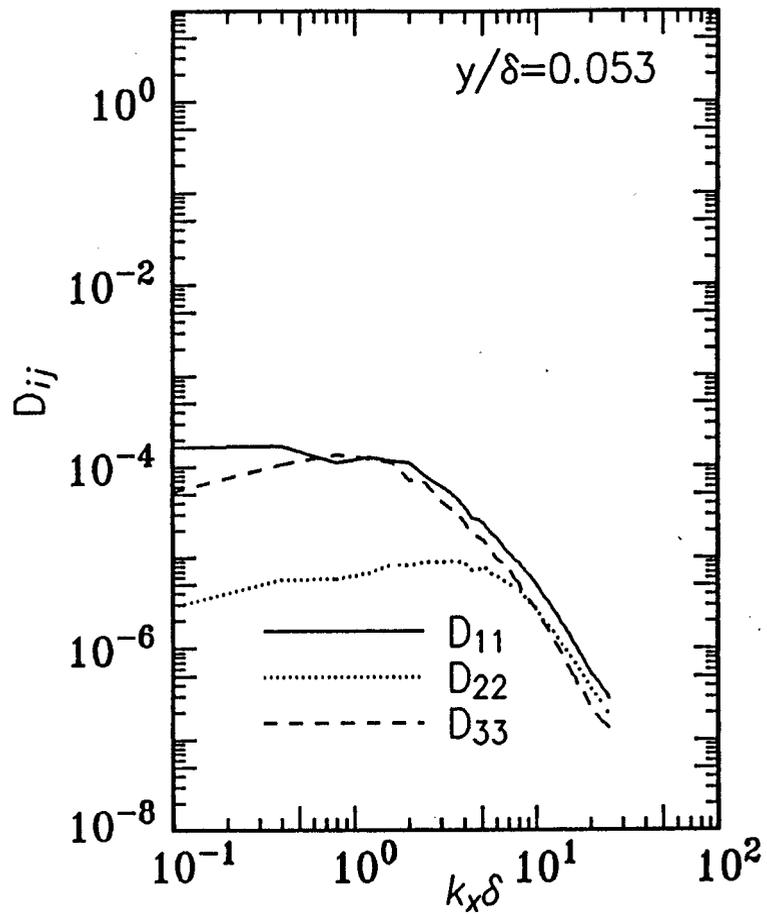


図 2. 3. 2 1 散逸の流れ方向 1 次元スペクトル
 ケース CP 2

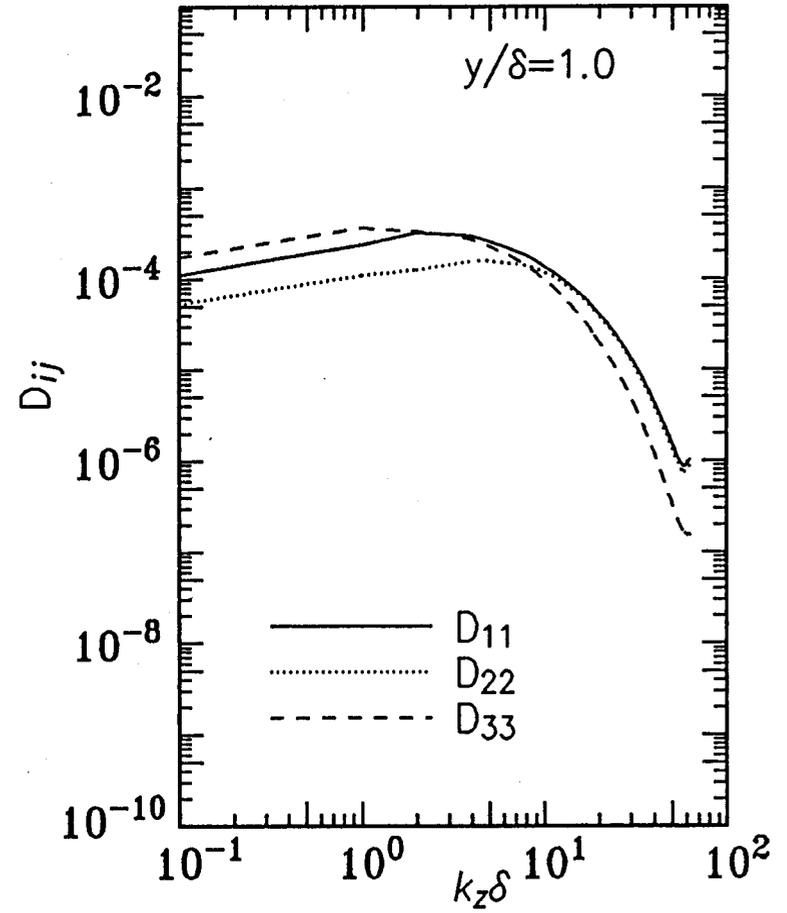
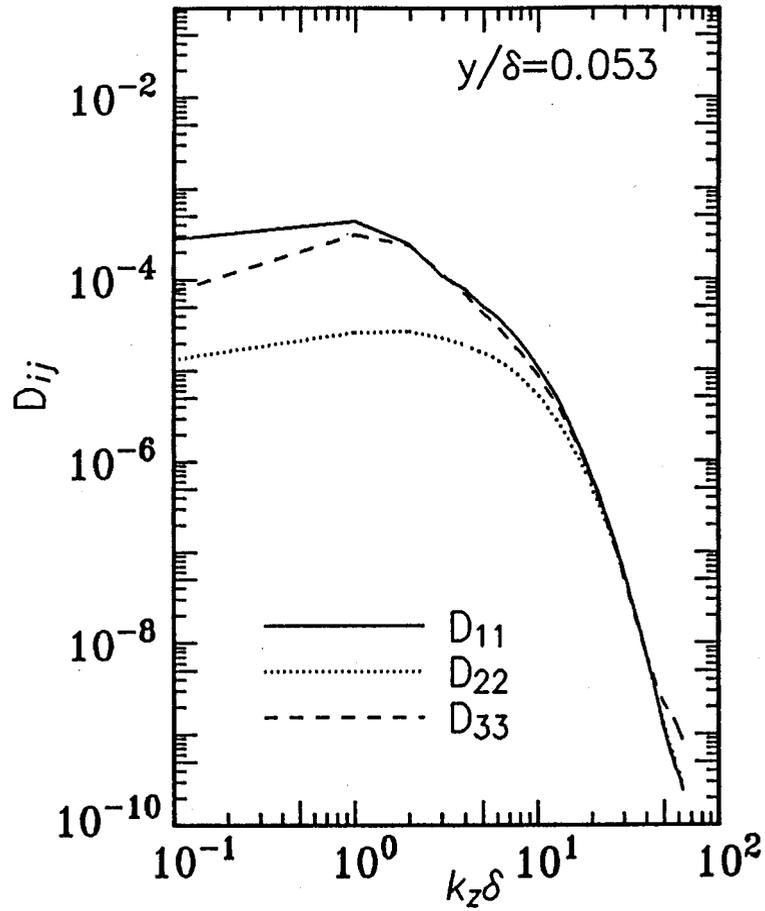


図 2. 3、22 散逸のspan方向1次元スペクトル
 ケースCP2

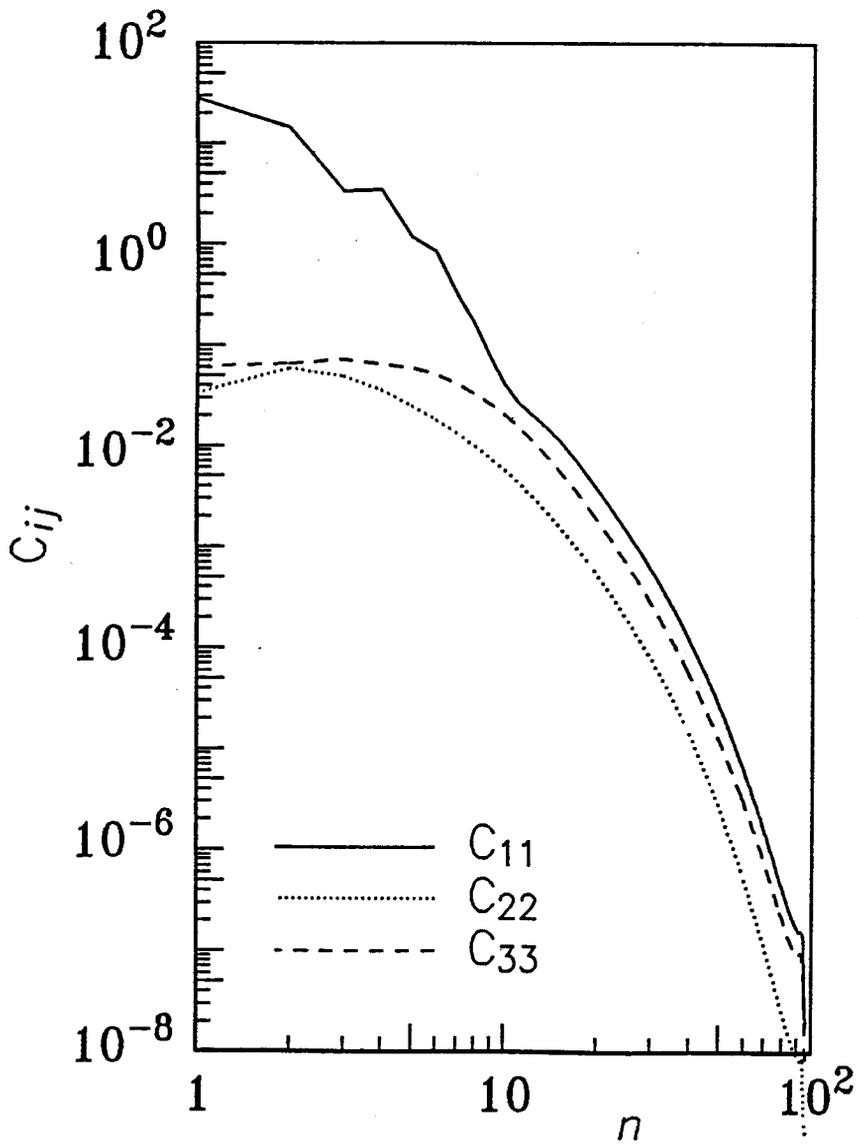


図 2. 3. 2 3 チェビシエフ係数の 2 乗平均値
ケース C P 2

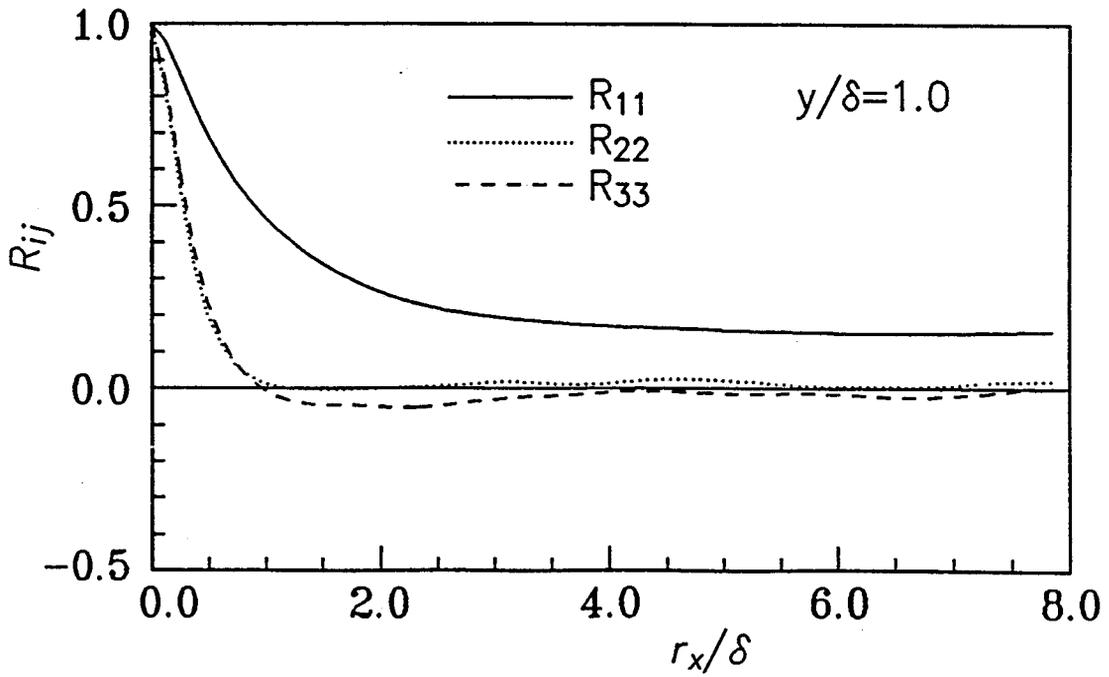
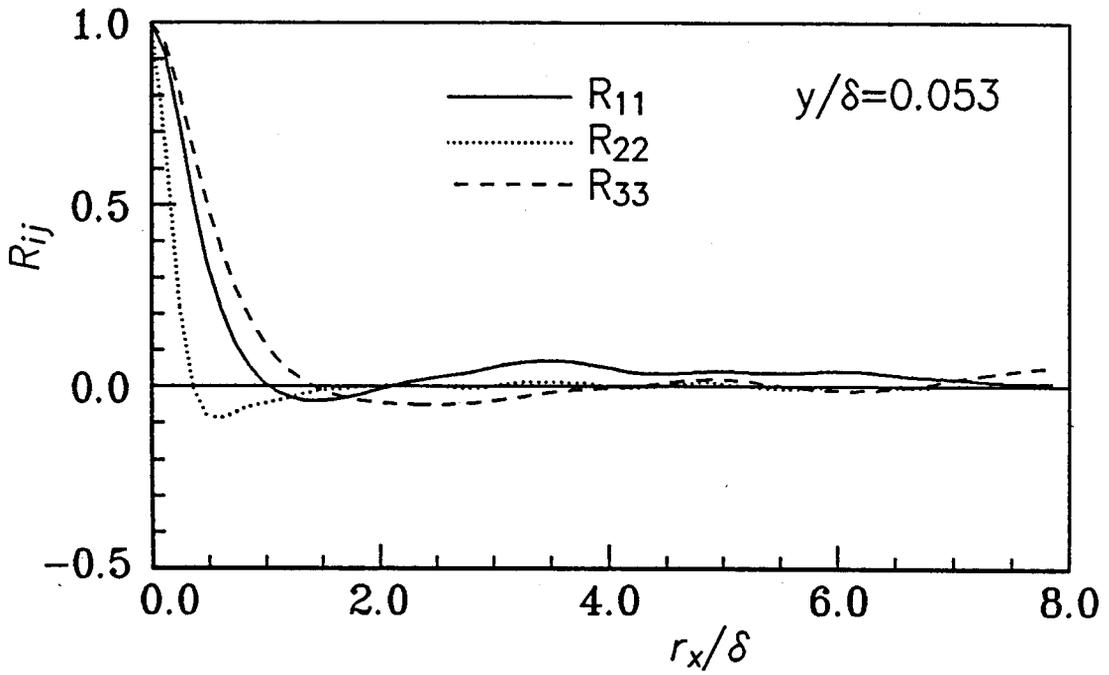


図 2. 3. 24 速度変動の流れ方向 2 点相関係数
ケース CP 2

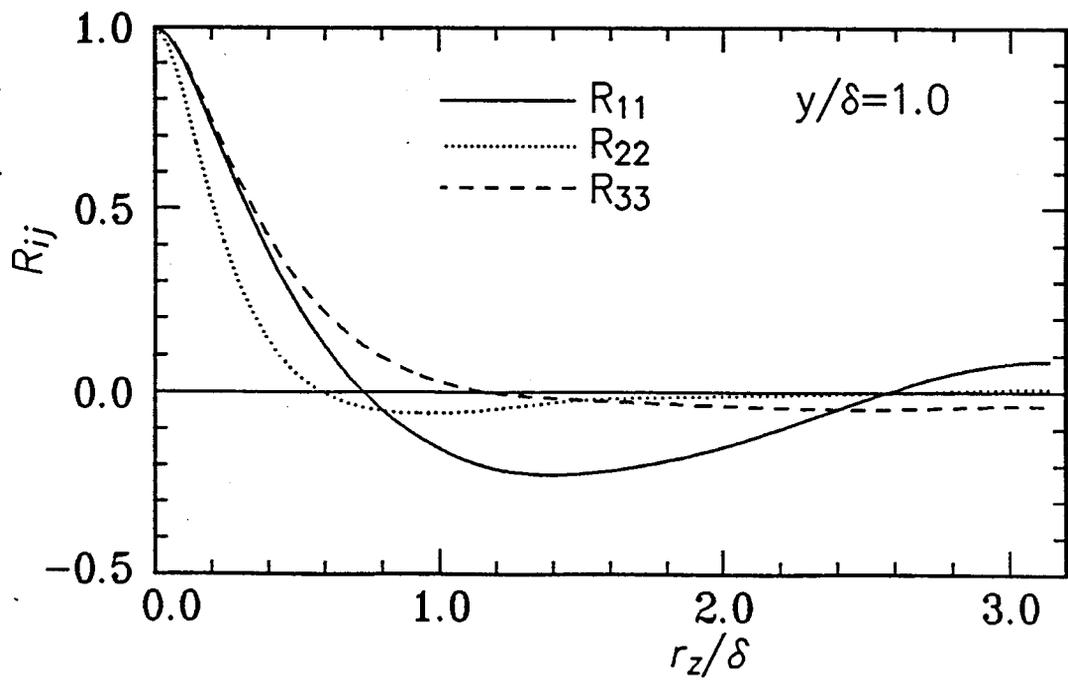
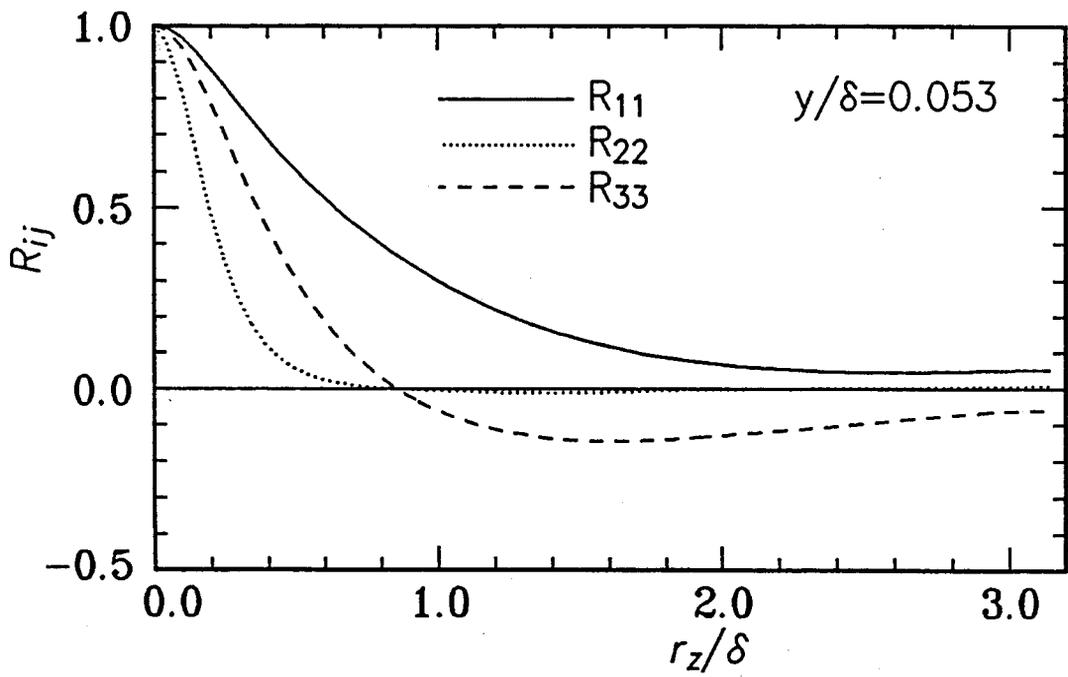


図 2. 3. 25 速度変動のスパン方向 2 点相関係数
ケース CP 2

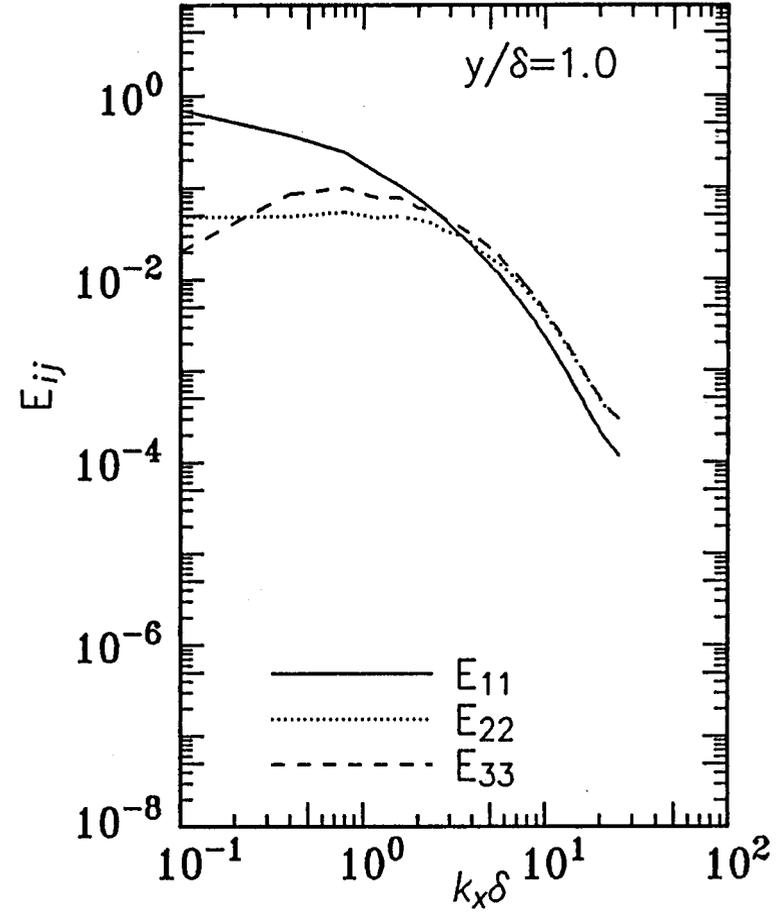
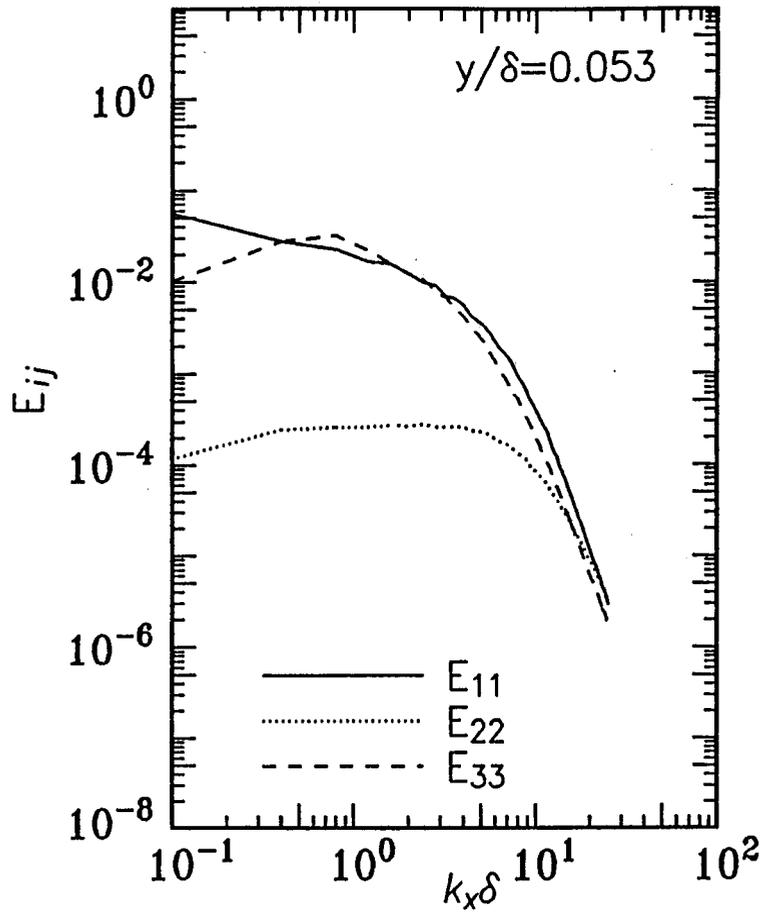


図 2. 3. 26 速度変動の流れ方向 1 次元スペクトル
ケース CP3

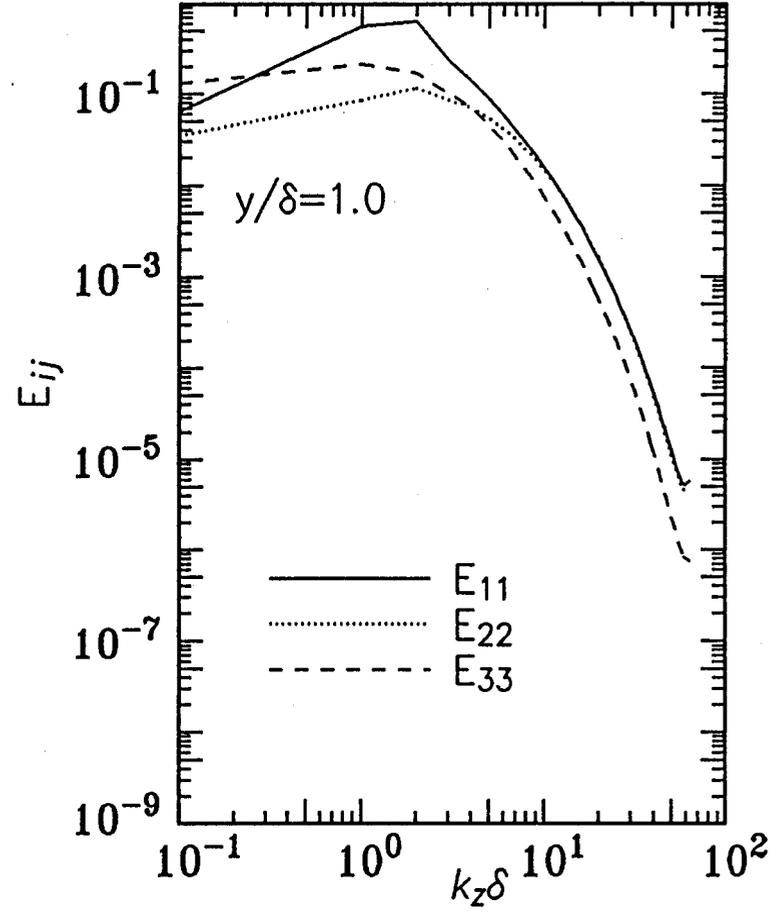
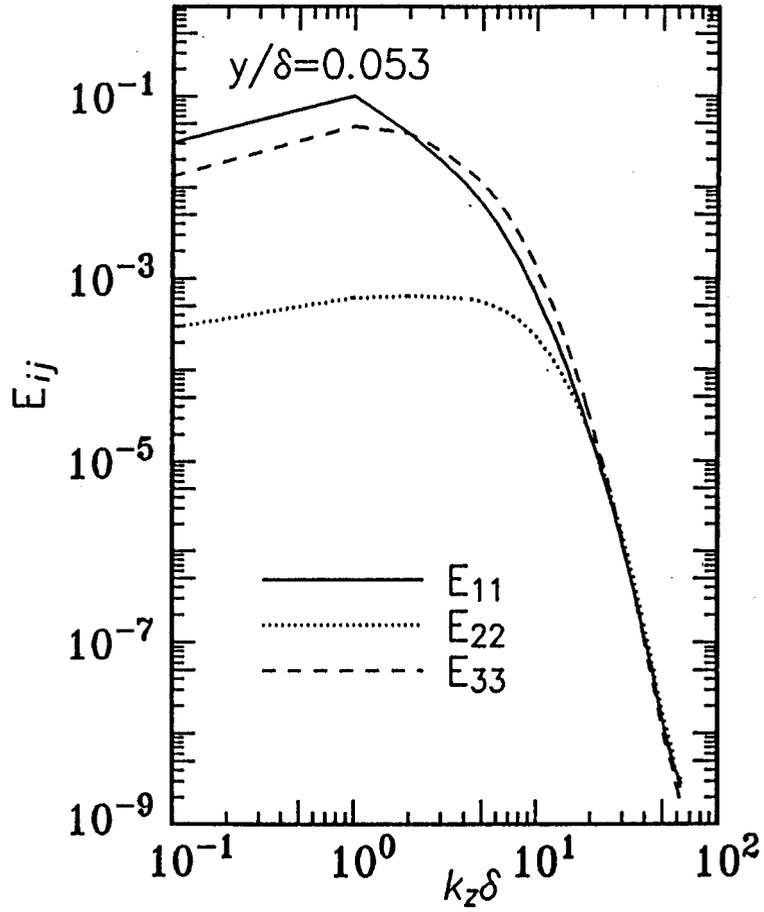


図 2. 3. 27 速度変動のспан方向 1次元スペクトル
 ケース C P 3

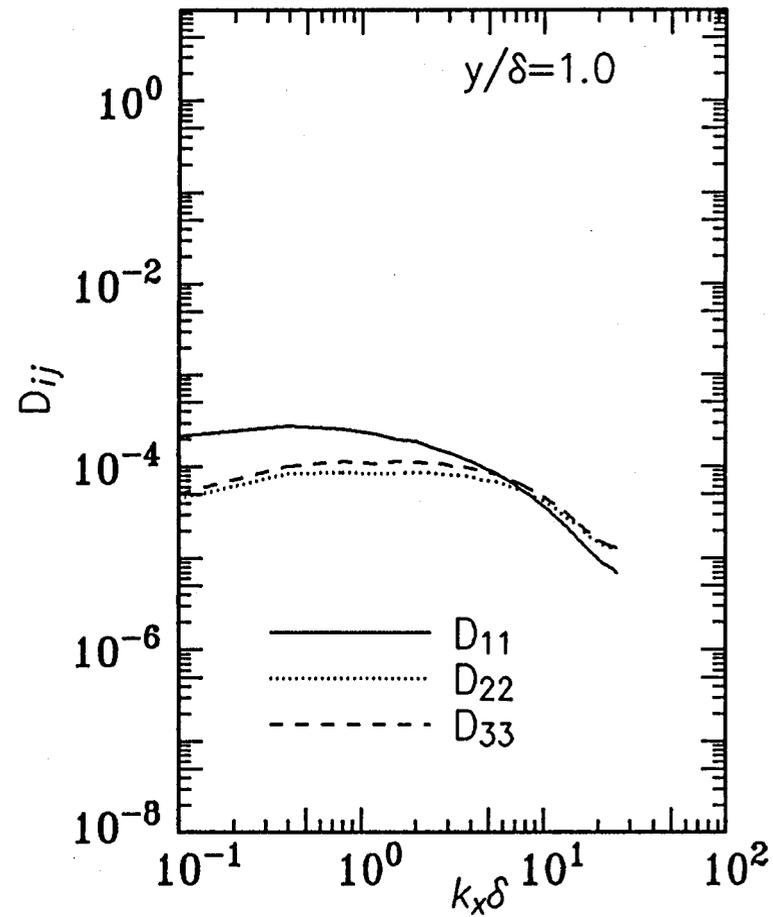
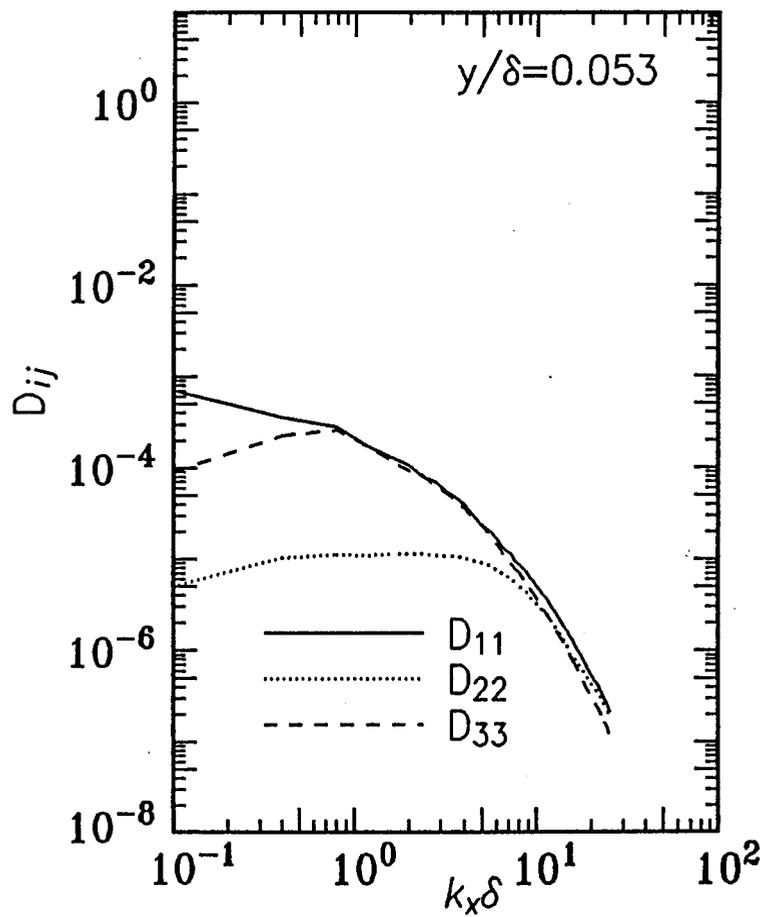


図 2. 3. 28 散逸の流れ方向 1 次元スペクトル
 ケース C P 3

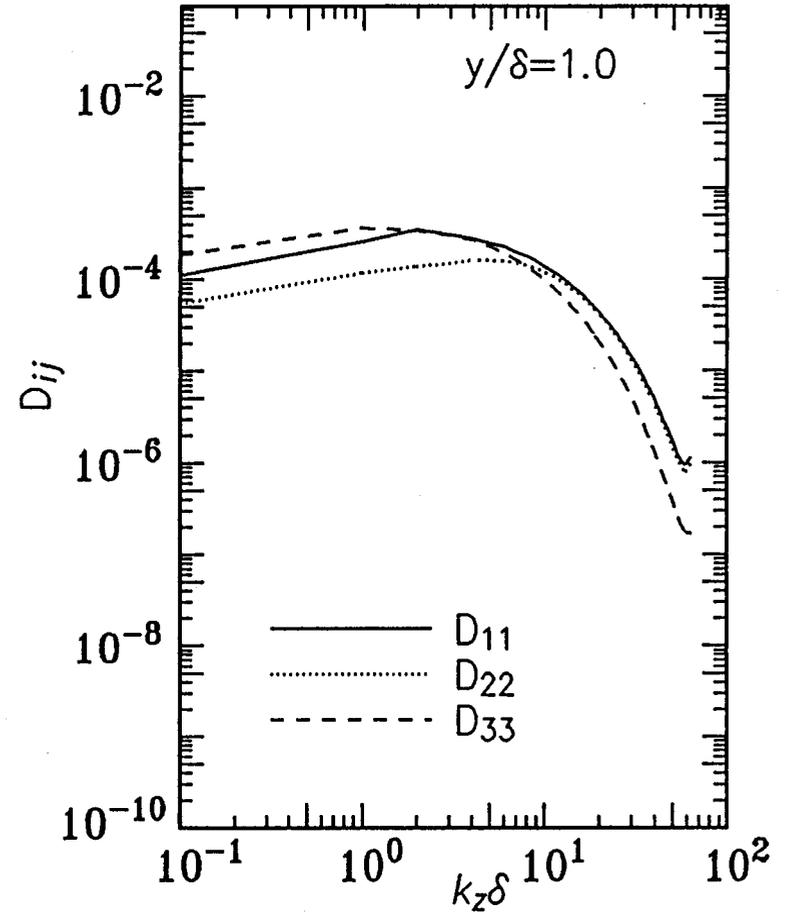
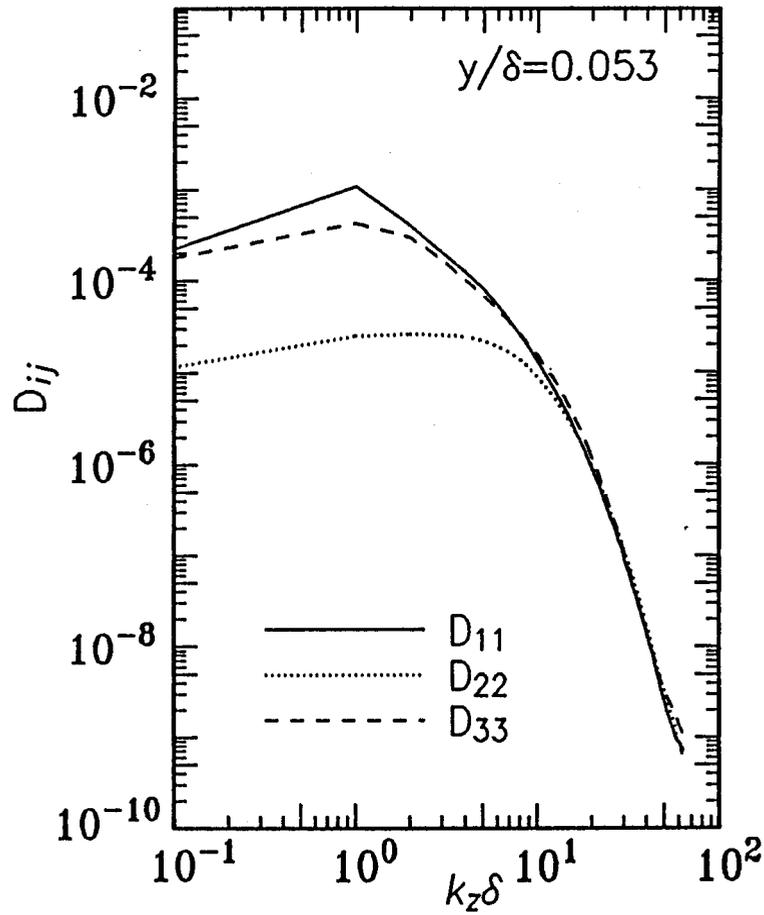


図 2. 3. 29 散逸のспан方向 1 次元スペクトル
 ケース C P 3

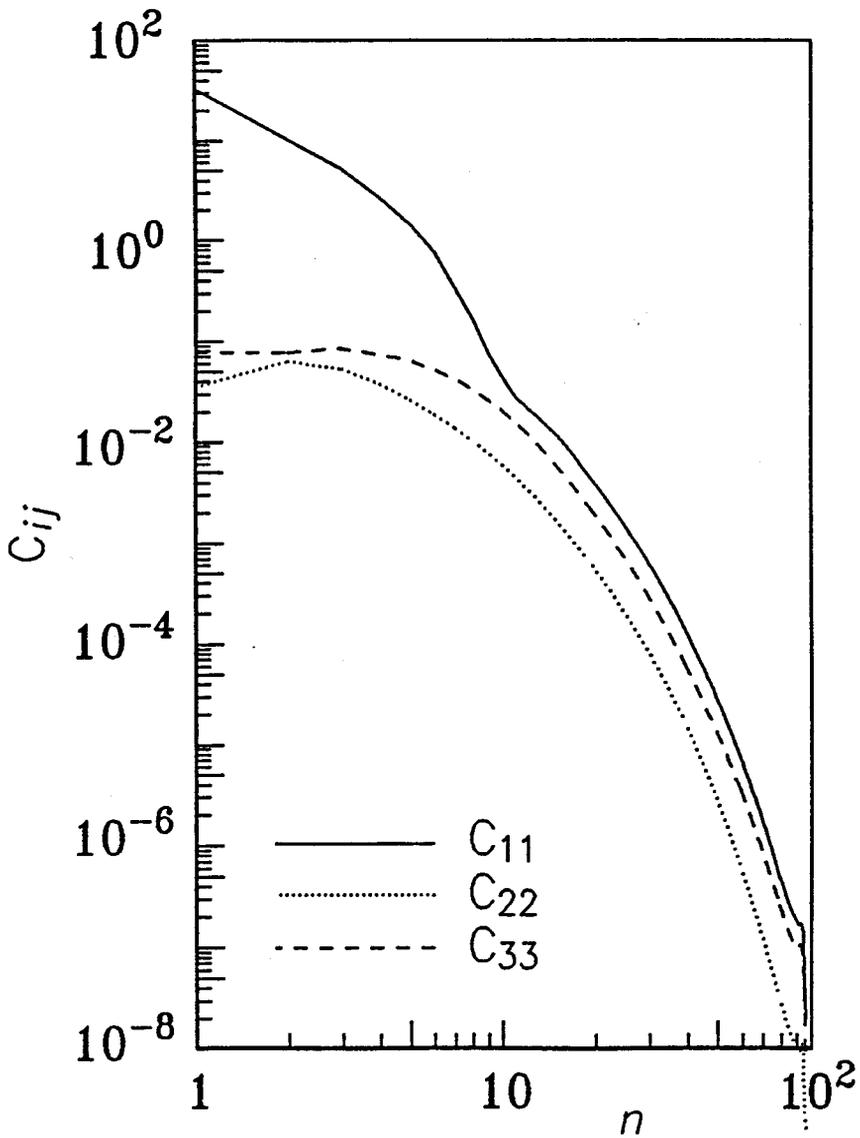


図 2. 3. 30 チェビシエフ係数の 2 乗平均値
ケース CP3

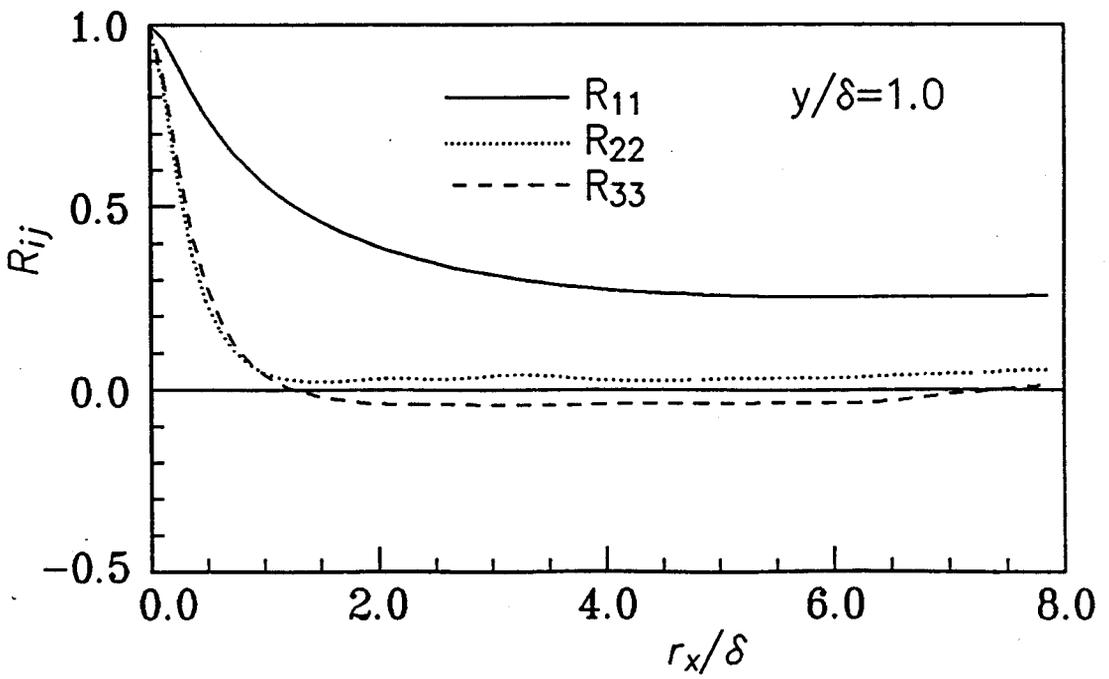
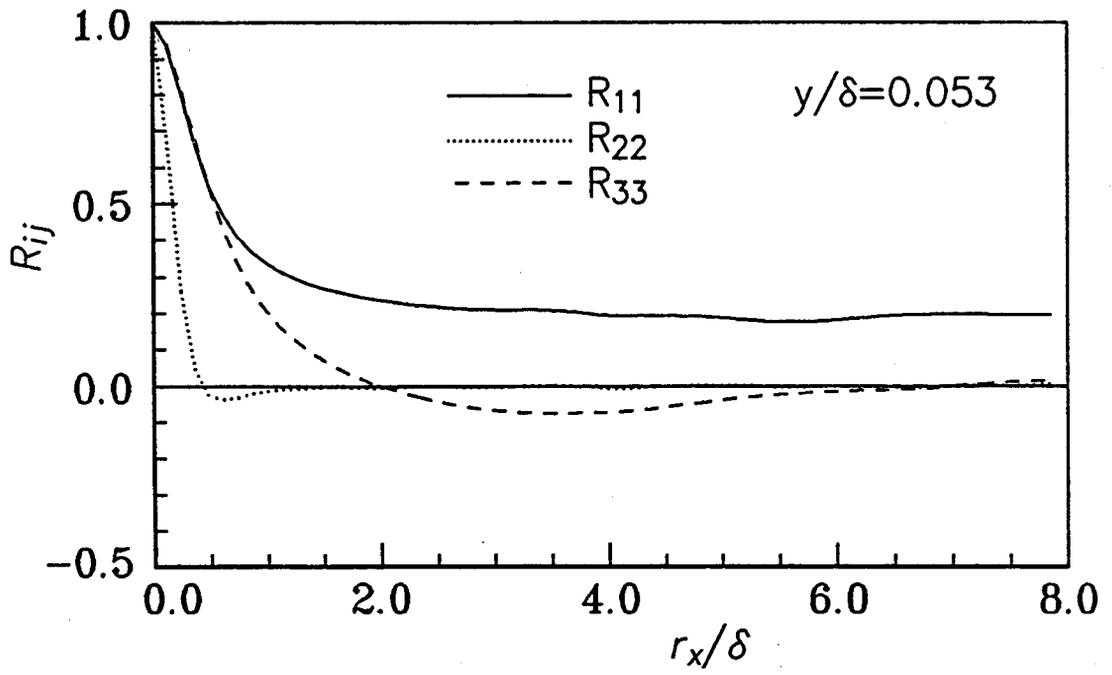


図 2. 3. 3 1 速度変動の流れ方向 2 点相関係数
ケース CP 3

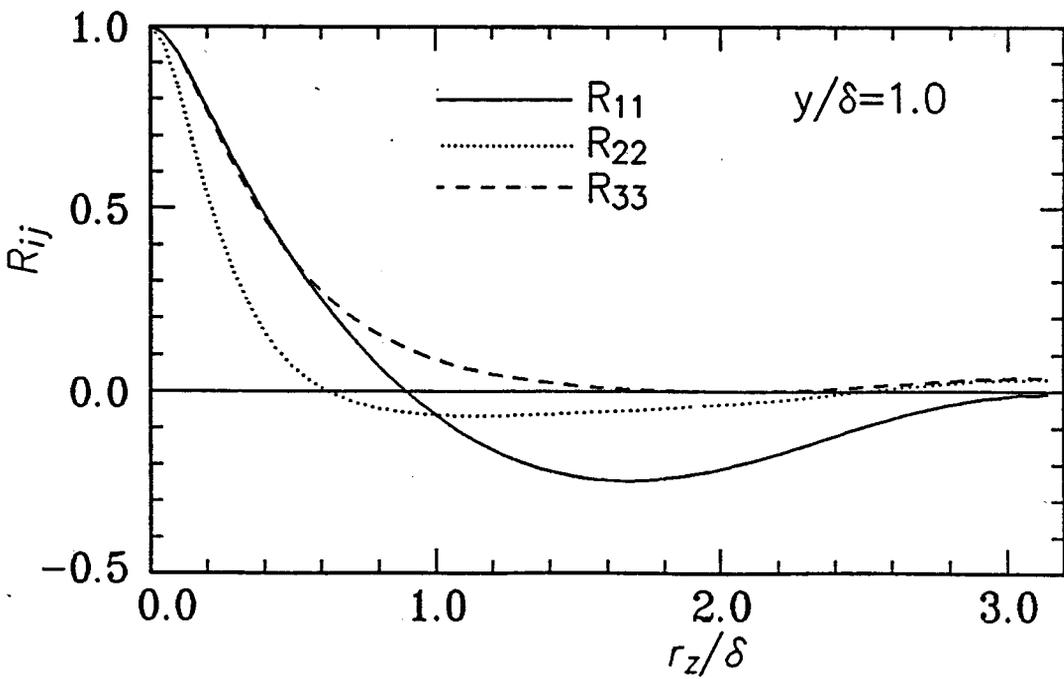
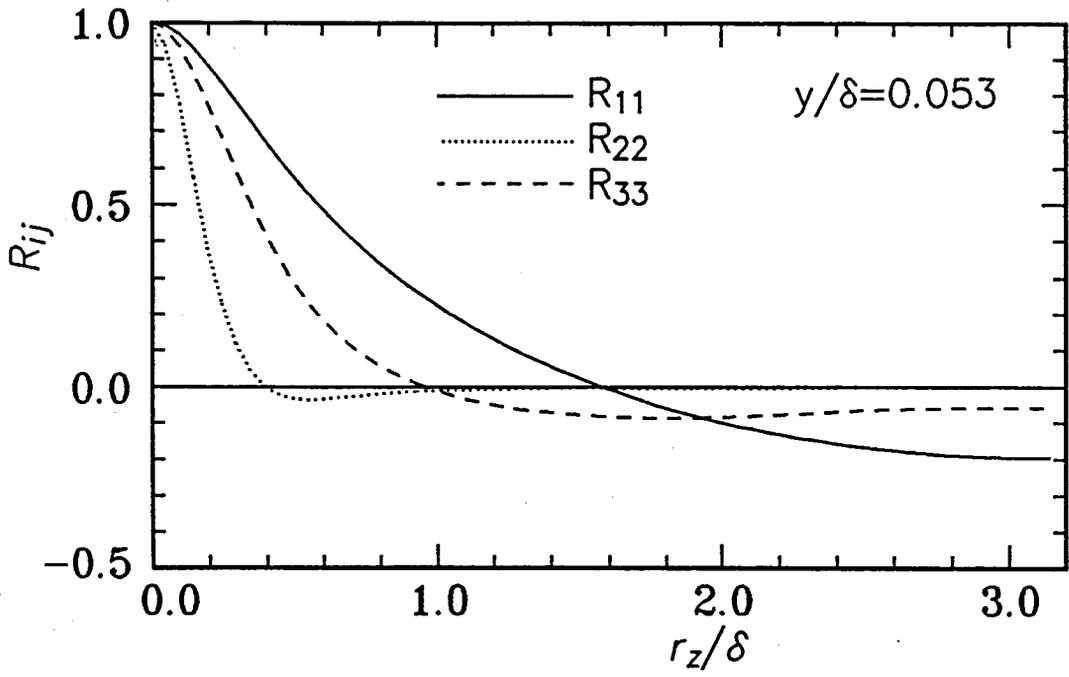


図 2. 3. 3 2 速度変動のSPAN方向2点相関係数
ケースCP3

表 2. 3. 4 補助計算の計算領域及びスペクトルモード数

C a s e	B_x/δ	B_z/δ	N_x	N_y	N_z
C P 3	5π	2π	128	97	128
C P 3 (a)	5π	2π	64	97	64
C P 3 (b)	10π	4π	128	97	128

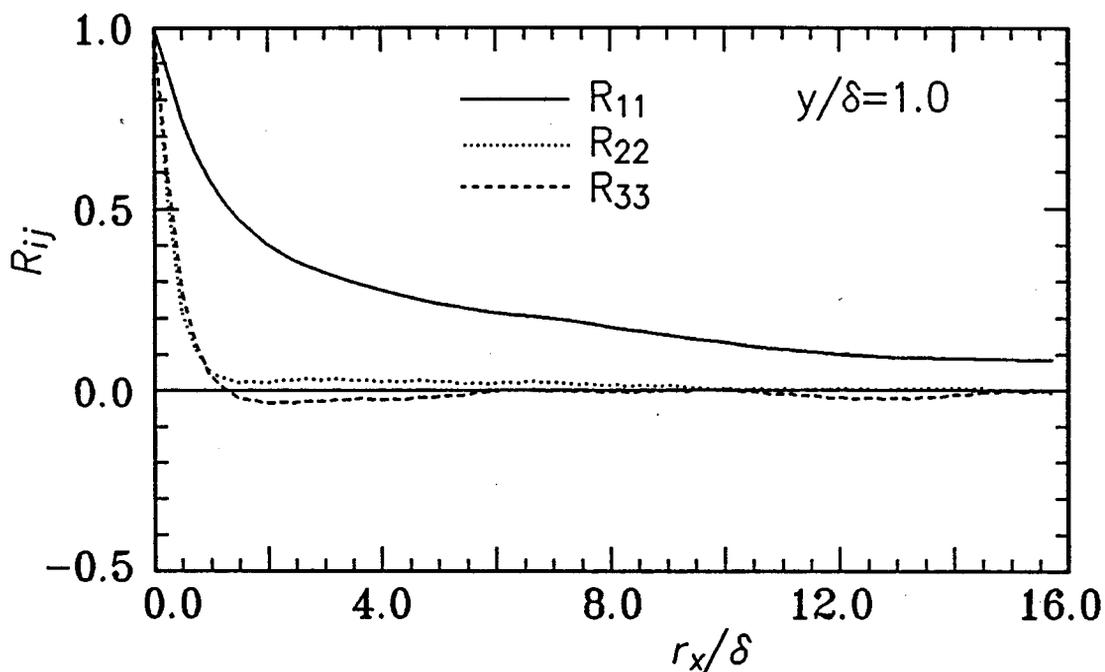


図 2. 3. 3 3 (a) 速度変動の流れ方向点相関係数
ケース CP 3 (b)

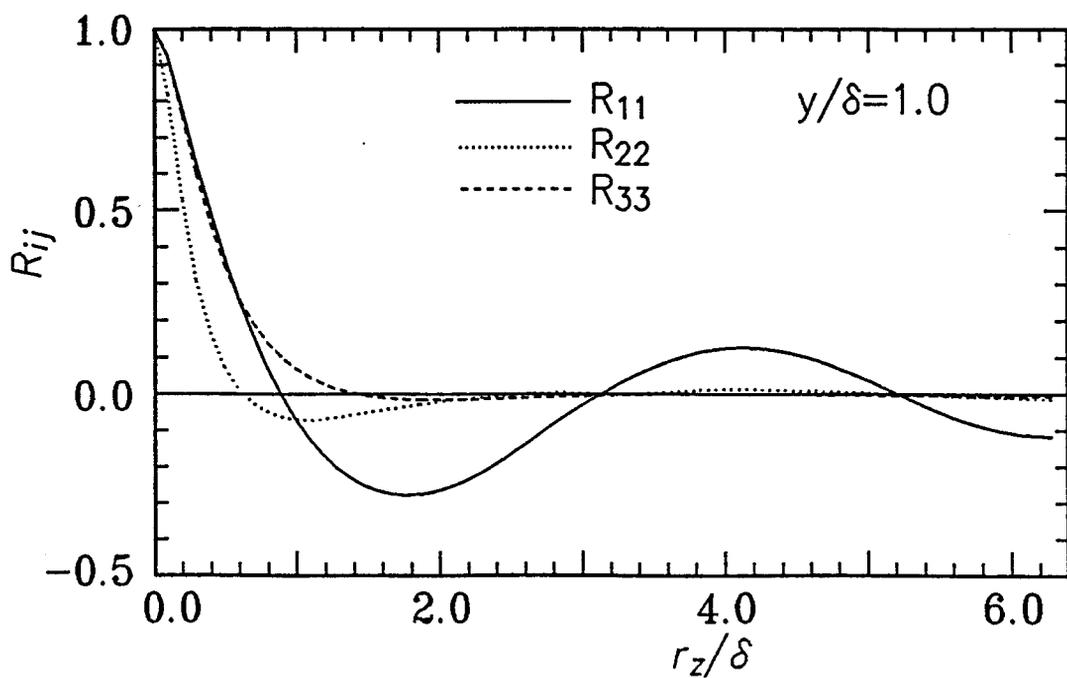


図 2. 3. 3 3 (b) 速度変動のспан方向点相関係数
ケース CP 3 (b)

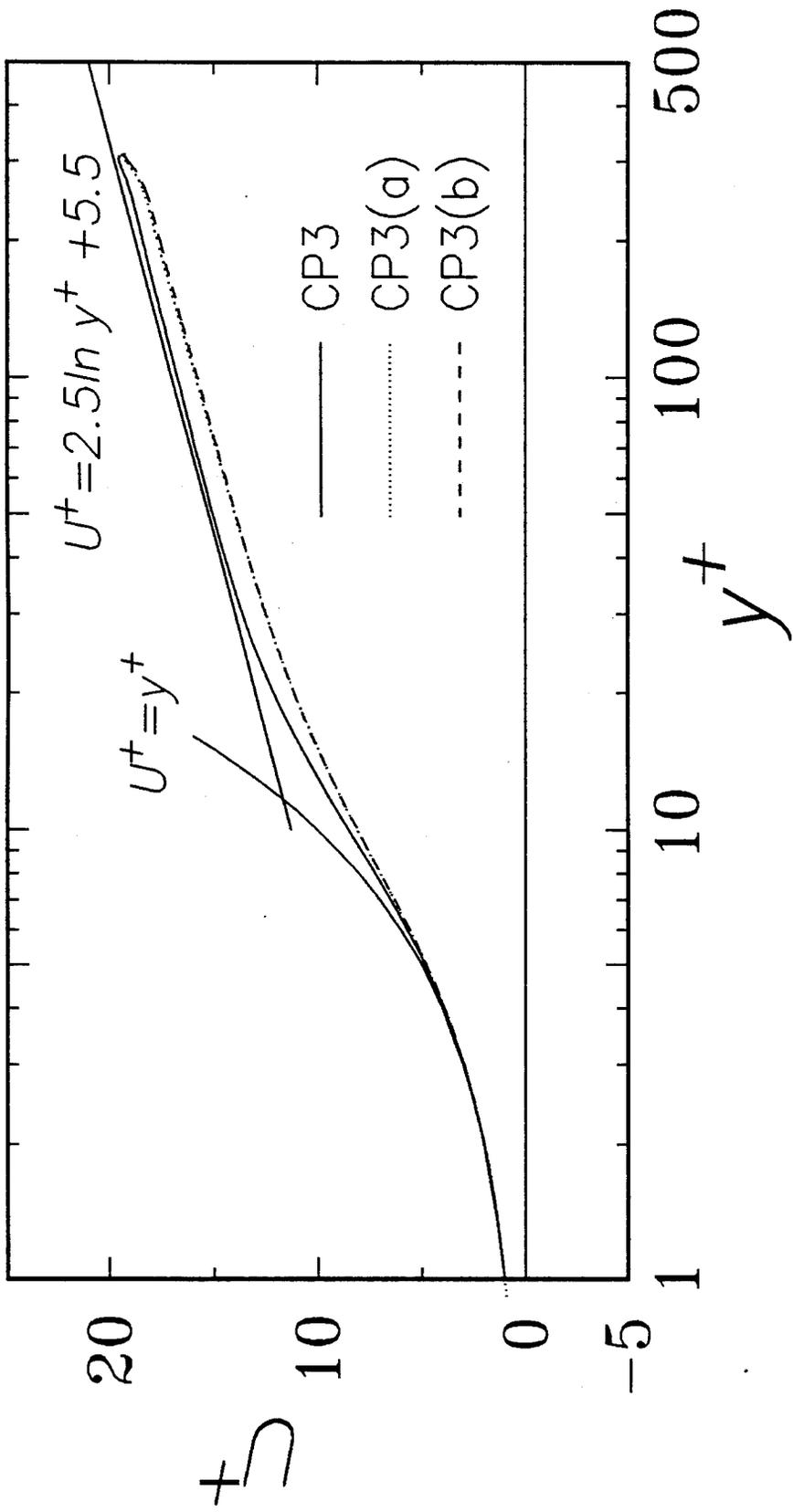


図 2. 3. 3 4 平均速度に対する計算領域、解像度の影響

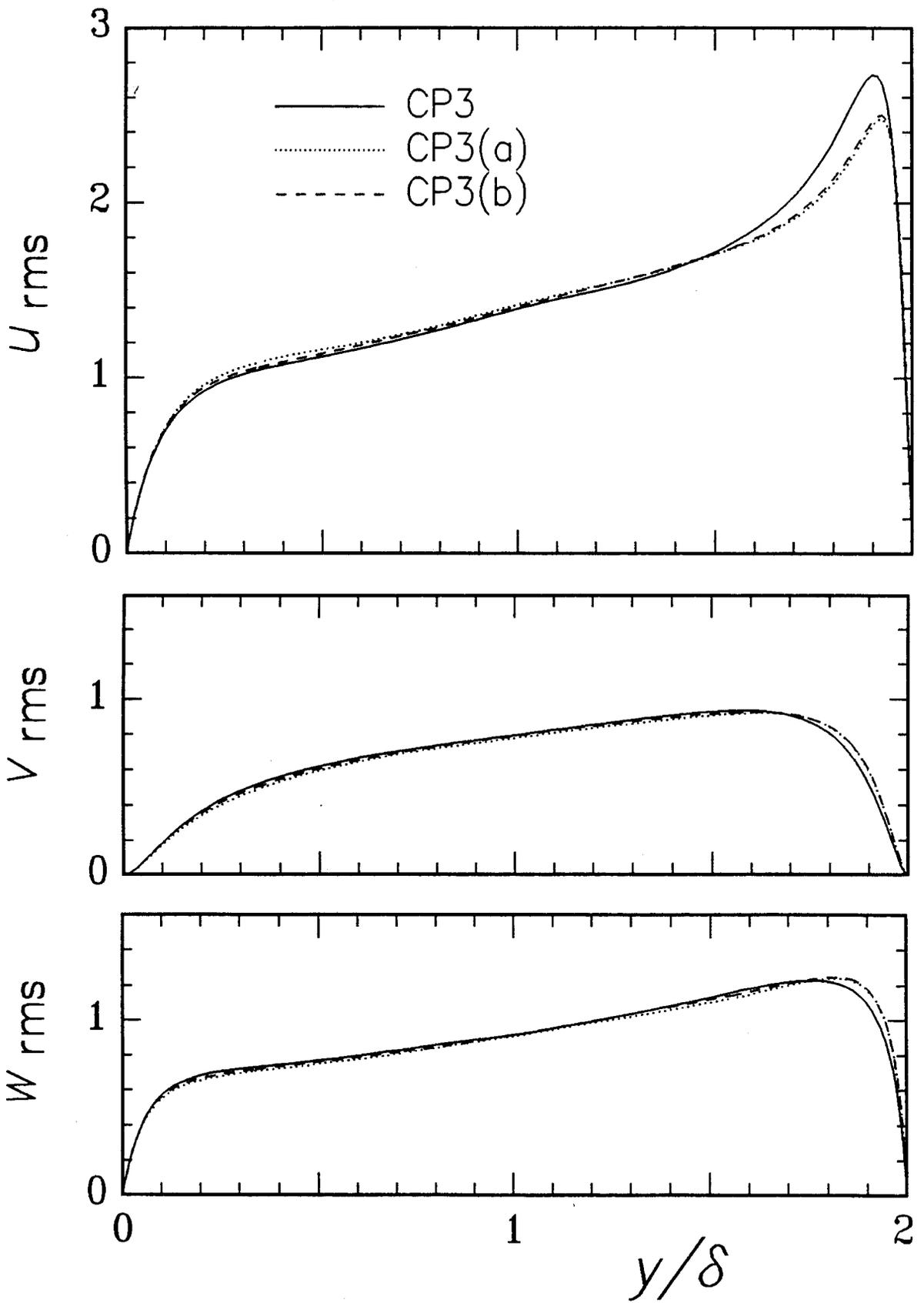


図 2. 3. 3 5 速度変動の RMS 値に対する計算領域、解像度の影響

第 3 章

2 次元ポアズイユ乱流の 統計的特性

§ 3. 1 序

本章では、過去の実験あるいはDNSの結果が存在する2次元ポアズイユ乱流（十分に発達した2次元チャンネル内乱流）について、本研究の結果を過去のデータと比較し、計算コードの健全性を確認する。

さらに、レイノルズ数の異なる4種のDNSデータベース（ $Re_z = 100$ 、 150 （以上、本著者によるもの）、 180 （Kim et al. 1987）、 395 （kim 1990））の比較においてみられる乱流統計量のレイノルズ数依存性について報告する。

2次元チャンネル乱流は、乱流研究における基礎的な流れの代表の一つとして古くから多くの測定がなされている。レイノルズ数依存性に着目した研究としては、Laufer(1950)、Comte-Bellot(1965)、Clark(1968)、Hussain and Reynolds(1975)、Wei and Willmarth(1989)が挙げられる。しかしながら、これらの結果には相互に不一致がみられ、特に遷移領域より壁近傍に関しては、 u_{rms} のような基本的な量に関してもレイノルズ数の依存性が明かとはされていない。その要因として、壁面近傍でのセンサ長さの効果

（Johansson and Alfredsson 1983）、プロング効果、壁面への熱損失あるいは実験系の相違（縦横比、助走区間長さ）などの誤差要因が考えられる。

一方、Kim et al.(1987)は、彼らのDNSの結果を従来の実験結果と比較しているが、定量的には必ずしも良い一致を示しているとはいえない。近年、Nishino and Kasagi(1989)は、彼らの開発した3次元画像処理流速計を用いて2次元ポアズイユ乱流（ $Re_z = 205$ ）の測定を行い、その結果がKim et al. ($Re_z = 180$)の結果ときわめてよく一致することを報告している。この結果はDNSの結果の定量的信頼性に対する検証として有力なものと考えられるが、詳細な比較においては、例えばNishino and Kasagiの

$u^+_{r_{ms}}$ がKim et al.の結果に対して高目の値をとるなどの差異がみられる。本章では、DNSの結果を近年行われた信頼性の高い実験結果と比較しているが、その際乱流統計量のレイノルズ数効果を考慮に入れて両者の一致性について検討を加えている。

§ 3. 2 平均速度場

本研究で行った2次元ポアズイユ流 ($Re_z = 150$ 及び 100 、 $Re_z = 100$ の計算条件については、APPENDIX (C) を参照のこと) の計算によって得られた流れ場の諸元を表 3. 2. 1、表 3. 2. 2 に示す。それぞれの流れに対して得られた摩擦係数 $C_f = \tau_w / (\frac{1}{2} \rho U_m^2)$ は、 $C_{f100} = 9.58 \times 10^{-3}$ ($Re_z = 100$)、 $C_{f150} = 8.64 \times 10^{-3}$ ($Re_z = 150$) であり、Deanによる相関式(1978)、

$$C_f = 0.073 Re_m^{-0.25} \quad (3.2.1)$$

によって得られる値、 $C_{f100} = 9.96 \times 10^{-3}$ 、 $C_{f150} = 8.88 \times 10^{-3}$ に対して相対差 - 4% の範囲で一致している。図 3. 2. 1 に Kim et al. (1987)、Kim (1990) による計算結果を含めて DNS によって得られる C_f のバルクレイノルズ数による変化を Dean の相関式とともに示す。DNS によって得られる値は

Dean の相関式による予測値を下回る結果となっているが、その差は Dean が相関式を構築する際に用いた多くの実験値のばら付きの範囲内に十分に納まる程度のものである。

図 3. 2. 2 に平均速度分布を壁座標表示で示す。対数法則、

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C \quad (3.2.2)$$

の付加定数 C の値は、レイノルズ数の増加とともに減少する傾向がみられるが、この傾向は従来の実験結果の比較 (図 3. 2. 3) においても同様に観察される。遷移レイノルズ数において付加定数 C が大きい値をとる傾向は、Patel and Head (1969) によって報告されており、ここで得られた結果と定性

的に一致している。さらに、 $Re_c = 2680$ 、 3300 のDNSの結果は $Re_c = 3250$ (Niederschulte et al. 1990)、 3755 (Nishino and Kasagi 1989)の実験結果と、また $Re_c = 7880$ のDNSの結果は $Re_c = 13800$ (Hussain and Reynolds 1975)の実験結果と、それぞれ定量的にもかなりの一致が得られていることが分かる。

平均速度分布を外層パラメータ δ 、 U_c で整理した場合を図3.2.4に示す。今回比較を行ったレイノルズ数範囲内では $y/\delta > 0.4$ で U/U_c はレイノルズ数に依らない値となっている。また、壁近傍においてレイノルズ数の増加とともに平均速度が壁近傍で高い値をとる傾向がDNS及び実験結果を通じて系統的に再現されている。

図3.2.5に速度欠損分布を示す。ここでも壁近傍領域におけるレイノルズ数依存性は、実験結果を含めて系統的に現われている。図3.2.6は図3.2.5のコア領域を拡大して示したものである。ここでは速度欠損則、

$$\frac{U_c - U}{u\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln(y/\delta) - C \quad (3.2.3)$$

$$\kappa = 0.4$$

を示すラインが同時に示してある。付加定数 C の値はDNSの結果に対して $Re_c \leq 3300$ では $C = 0.3$ 、 $Re_c = 7880$ では $C = 0$ とすることによって計算結果をよく補間でき、レイノルズ数による依存性が観察されるが、図に示された実験結果の傾向と一致している。また、この速度欠損則が成立する領域はレイノルズ数の増大とともに広がっている。なお、Nishino and Kasagiの実験結果(1989)とDNSの結果に定量的な差が認められるが、Nishino and Kasagiの中心流速(78.0 mm/sec)は直接測定したも

のではなく、チャンネル中央部の速度分布を外挿して求めたものであり、この点で不確かさが見込まれる値となっている。この値を例えば1%高く見積ることによって、両者の定量的な一致性は大きく改善される。

§ 3. 3 乱流強度

図 3. 3. 1 に壁座標表示で速度変動 3 成分の R M S 値を示す。ここで、図中に示された Nishino & Kasagi (1989) のデータは参考文献中に示されたデータを文献中に示された方法によってノイズ補正されたものである。D N S の結果は速度変動 3 成分ともにレイノルズ数に大きく依存することを示している。2 次元チャネル乱流において u^+_{rms} 、 v^+_{rms} がレイノルズ数の増加とともに増加する実験結果は、Wei and Willmarth (1989) によって報告されている。また、Spalart (1988) による乱流境界層の D N S の結果にも本結果と同様のレイノルズ数依存性が示されており、壁面パラメータ (u_τ 、 ν) によって整理した場合に、壁面のごく近傍からより強くレイノルズ数効果が現われることが指摘されている。 u^+_{rms} の極大値はレイノルズ数の増加とともに大きくなる傾向を示すが、その位置は $y^+ \approx 12$ であり、レイノルズ数による依存性はほとんどないといえる。熱線流速計を用いた過去の実験データ (Laufer 1950、Comte-Bellot 1965) には、この極大値がレイノルズ数の増加とともに減少し、またその位置が壁面から離れる傾向がみられるが、これはレイノルズ数の増大とともに粘性パラメータ (u_τ 、 ν) で評価した熱線の長さが相対的に長くなり、高波数の変動が空間的に平均化されることによる効果であることが Johansson and Alfredsson (1983) によって指摘されている (Blackwelder and Haritonidis 1983、Suzuki and Kasagi 1990 も参照)。

Nishino and Kasagi の実験結果は、 u^+_{rms} 、 v^+_{rms} 、 w^+_{rms} ともに Kim et al. の結果に対して若干高目の値を示しており、上述のレイノルズ数依存性と整合性の良い結果となっている。一方、Niederschulte et al. (1990) による実験は、Kim et al. の計算結果の実験的検証を目的として行われたもの

であり、両者のレイノルズ数はほぼ一致しているにもかかわらず、 $u^+_{r.m.s}$ の値に有意な差がみられる。彼らは、Lyons et al. (1989)のDNSによる $u^+_{r.m.s}$ の値が、流れ方向の格子解像度に強く依存する（解像度の増加とともに増加する）という結果を踏まえて、ここにみられる差がDNSの解像度不足に起因するものと指摘している。この点を明らかにするためには、さらに高解像度のDNSが望まれるが、計算機能力の制限による理由から現時点では行われていない。一方、Niederschute et al. による $u^+_{r.m.s}$ が、 $20 < y^+ < 50$ でNishino and Kasagiの結果に対して大きい値を示す（これは前述のレイノルズ数依存性とは逆の傾向である）など、実験値相互にも不整合とみられる点が存在する事から、さらに多くの実験的実証例が望まれる。

図3. 3. 2に流速変動のRMS値を局所の平均流速で無次元化した場合の分布を示す。これらの値の平方は、単位質量当たりの平均流の持つエネルギーに対する速度変動エネルギーの比に相当する。また、 $u_{r.m.s}/U$ 、 $w_{r.m.s}/U$ の壁面漸近値はそれぞれスパン方向、流れ方向の渦度変動の壁面值に相当し、物理的に重要な量である。ここで速度変動、平均速度ともに壁面では0となる量であり、例えば熱線流速計では壁面熱伝導の影響、光学的測定では壁面による反射の影響、さらにのS/N比の低下などによる誤差が無視し得ないものとなる（笠木と西野、1990）ことから、これらの値を実験的に正確に求めることは非常に困難なものとなっている。これらの影響は、壁面上で0となるべき $v_{r.m.s}/U$ が有限値に漸近する点に陽に現われている。図に示したNishino and Kasagi(1989)のデータはオリジナルのデータにみられる $v_{r.m.s}^2$ の壁面值をランダムエラーとして各垂直応力成分から差し引くことによって補正されたものである（Nishino and Kasagi 1989）。レイノルズ数の近い、 $Re_c = 2680$ 、 3300 のDNSの結果及びNishino and

Kasagiによる結果は、 $y^+ < 5$ で、 u_{rms}/U 実験値が高い値をとる点を除いてきわめてよく一致している。また、DNSの相互の結果では、レイノルズ数の増大とともに増加する依存性が3成分ともに顕著に現われている。

図3.3.3は u^+_{rms} 、 v^+_{rms} 、 w^+_{rms} を y/δ に対してプロットしたものである。この整理を行った場合のコア領域におけるレイノルズ依存性は図3.3.1にみられる変化と比べて相対的に小さいものとなっている。

図3.3.4は速度変動のRMS値をチャンネル中央流速 U_c で無次元化し、 y/δ に対してプロットしたものである。コア領域における v_{rms}/U_c 、 w_{rms}/U_c は、レイノルズ数に対する依存性が弱く、またこれらの変動が等方化している様子が確認できる。一方、 u_{rms}/U_c はレイノルズ数の増加とともに減少し、高レイノルズ数になるにしたがってチャンネル中央部でレイノルズ応力場が3次元的に等方化する傾向が示されている。

§ 3. 4 レイノルズ応力の壁面漸近挙動

レイノルズ応力の壁面漸近挙動は、乱流モデルの構築の点から興味深い研究の対象となっている (Patel et al. 1985)。特に、熱抵抗が壁面の近傍に集中する高プラントル数流体の伝熱予測においては、壁面近傍の流れ場の挙動を正確にモデル化することが予測精度向上の鍵となる (Myong et al. 1989)。Chapman and Kuhn (1986) は、緩和領域において縦渦的構造を仮定して粘性底層外縁での流れをモデル化し、これを境界条件として与えることによって粘性底層の数値シミュレーションを行い、乱れの壁面漸近挙動に対する詳細な考察を行っている。また、Kim et al. (1987) は、DNS の結果においても Chapman and Kuhn の結果と整合性の良い漸近挙動が得られることを報告している。しかし、いずれも壁面漸近値のレイノルズ数に対する依存性については触れられていない。

レイノルズ応力の漸近挙動を図 3. 4. 1 に示す。これらの壁面漸近挙動は壁面での滑りなし条件、及び連続の式から、

$$u^+_{rms} = a_1 y^+ + a_2 y^{+2} + \dots \quad (3.4.1)$$

$$v^+_{rms} = b_2 y^{+2} + b_3 y^{+3} + \dots \quad (3.4.2)$$

$$w^+_{rms} = c_1 y^+ + c_2 y^{+2} + \dots \quad (3.4.3)$$

$$-\overline{u^+ v^+} = d_3 y^{+3} + d_4 y^{+4} + \dots \quad (3.4.4)$$

と表わせるが、図 3. 4. 1 はこれらのそれぞれの第 1 項が 0 ではない有限値であることを示している。また、これらの係数は今回、比較を行ったレイノルズ数の範囲内で顕著に変化することが分かる。また、ここでも Nishino and Kasagi (1989) の測定値は比較的レイノルズ数の近い DNS の結果と壁のごく近傍で u^+_{rms}/y^+ 、 $-\overline{u^+ v^+}/y^{+3}$ の実験値が高い値を示す点を除いてよく一致している。

図 3. 4. 2 に示したのは図 3. 4. 1 に示した壁面漸近値（壁から第 1 点目の格子上での値）をレイノルズ数に対してプロットしたものである。ここで比較を行った最も高いレイノルズ数（ $Re_0 = 7880$ ）と次に高いレイノルズ数（ $Re_0 = 3300$ ）の間には相対的に大きな隔たりがあり、その中間でのレイノルズ数依存性は明らかではないが、ここでの結果を単純に外挿する限り、レイノルズ数の増加に伴う壁面漸近値の増加の傾向は、さらに高いレイノルズ数においても観察される可能性があるといえる。その内でも $-\overline{u^+v^+}/y^{+3}$ の相対的变化は最も顕著に現われている。

図 3. 4. 3 に示したのは、 $Re_0 = 2680$ の場合について (3.4.1) ~ (3.4.4) を各式の右辺第 1 項で除したものであり、各物理量を漸近的に展開した際の第 1 項が壁からどの程度の距離にわたって支配的であるかを示す指標となる。 $u^+_{rms}/a_1 y^+$ は、粘性低層でほぼ一定であり、この範囲において u^+_{rms} がほぼ線形に変化することを示している。しかしながら、他の物理量については高次項の影響が壁のごく近傍にまでおよんでいる。実験的にレイノルズ応力の壁面漸近挙動を調べる試みがいくつか報告されているが、今回の結果はこれらの漸近挙動を実験的に確認することの困難さを物語っている。

§ 3. 5 乱流エネルギーの生成率

図 3. 5. 1 に乱流エネルギーの生成率の比較を示す。また、乱流エネルギー生成率の最大値をレイノルズ数の関数として図 3. 5. 2 に示す。ここにおいてもレイノルズ数による変化が顕著に現われている。この結果は、Spalart(1988)が、乱流境界層の場合に、 $0 < y^+ < 80$ で粘性スケールできわめてよく整理できるとした結果とは異なるものである。また、レイノルズ数によるこの変化は図 3. 5. 2 に示されるようにレイノルズ数の増大とともに弱まる傾向にある。比較的レイノルズ数の低い十分に発達した内部流において、乱流エネルギーの生成率に対して、この様なレイノルズ数依存性が現われることは以下のように説明できる。十分に発達した 2 次元チャネル乱流では、流れ方向のレイノルズ方程式を積分することによって、平均剪断応力に対する次の関係式が成立する。

$$1 - \frac{y^+}{\delta^+} = -\frac{u^+ v^+}{\delta^+} + \frac{dU^+}{dy^+} \quad (3.5.1)$$

ここで、 δ^+ は、 u_z とチャネル半幅 δ で定義されるレイノルズ数 Re_z に相当する。また、左辺第 2 項は平均圧力勾配項 dP/dx に起因して生ずる項である。この様に、圧力勾配によって駆動される 2 次元チャネル流では、全剪断応力は壁面から離れるにしたがって直線的に降下する分布となる。流れが十分に高レイノルズ数の (δ^+ が十分に大きい) 場合には y^+ が小さい範囲において (3.5.1) 式の左辺第 2 項は無視し得、壁近傍で一定剪断応力層の近似が成り立つが、 δ^+ が小さい低レイノルズ数の場合には壁面近傍における全剪断応力の値に対するレイノルズ数の影響が顕著に現われることになる。図 3. 5. 3 に示されるように、ここで比較を行った流れ場の全剪断応力の分布には上述の傾向が顕著に現われている。また、この全剪断応力の必然的

な分布形によってレイノルズ剪断応力に対してもレイノルズ数の効果が強く現われる (図 3. 5. 4)。このように、(3.5.1)式の左辺の2項の積によって定義される乱流エネルギーの生成率がレイノルズ数依存性を示すことは必然であるといえる。剪断応力一定層の仮定が成立する高レイノルズ数流れの場合には、乱流エネルギー生成率は、(3.5.1)式の左辺の2項 (レイノルズ剪断応力と粘性剪断応力) が、等しい値 0. 5 となる位置においてとる値 0. 25 である。乱流エネルギーの生成率が最大となる位置を $y^+ = 11$ 、さらにこの位置において $-\overline{u^+v^+} = \partial U^+ / \partial y^+$ が成立することを仮定すると、(3. 5. 1) 式から

$$\left(-\overline{u^+v^+} \frac{\partial U^+}{\partial y^+}\right)_{\max} = 0. 25 (1 - 11 / \delta^+)^2 \quad (3.5.2)$$

を導くことができる。この式を導出する際の仮定は、DNSの結果において近似的に成立しているものである。例えば、(3. 5. 2) 式を用いると乱流エネルギーの最大値が剪断応力一定層の場合 (0. 25) の 99% (0. 2475) となるレイノルズ数は $\delta^+ \approx 2200$ と概算できる。さらに、Deanの相関式 (3. 2. 1) から直接導かれる関係式、

$$Re_n = 14. 6 \delta^{+(2/1.75)} \quad (3.5.3)$$

を用いると、 $\delta^+ = 2200$ に対応するバルクレイノルズ数は約 125000 であると見積ることができる。

§ 3. 6 速度変動の歪度・平坦度

速度変動成分の歪度及び平坦度を図 3. 6. 1、図 3. 6. 3 では y/δ に対して、図 3. 6. 2、図 3. 6. 4 では y^+ に対して、それぞれ示す。 $S(v)$ は流れの対称性より 0 となるべき量であり、統計量を求める際のサンプリング数の目安として考えることができる。ここでもレイノルズ数に対する依存性がみられるが y^+ に対してプロットした場合、壁近傍において流れ方向速度変動の歪度、平坦度の変化は他の成分のそれらに対して相対的に小さなものとなっている。また、平坦度はいずれの速度変動成分についてもレイノルズ数の増加とともに減少する傾向を示しているが、これはレイノルズ数の増加とともに高波数の小スケールな乱れが増加する効果によると考えられる。

これら高次のモーメントに対しても DNS の結果は 2 次元チャネルの実験値と概ね良い一致を示しているといえる。特に、Nishino and Kasagi (1989) のデータは DNS の示すレイノルズ数依存性とも整合性のよい結果となっている。壁近傍において、Niderschulte et al. (1990) 及び Karlsson and Johansson (1986、乱流境界層) の $S(v)$ 、 $F(v)$ の結果にバラ付きがみられ、DNS や Nishino and Kasagi の結果との間に大きな差がみられるが、これは図 3. 3. 2 にみられるように v の変動に対するノイズの影響が大きいためであると考えられる。

表 3. 2. 1 平均流れ場に関する諸元 ($Re_z = 150$)

U_c	$= 17.5$	Cf_m	$= 8.64 \times 10^{-3}$
U_m	$= 15.2$	Cf_c	$= 6.28 \times 10^{-3}$
Re_c	$= 2680$	δ^*/δ	$= 0.174$ <i>0.147</i>
Re_m	$= 4560$	θ/δ	$= 0.0874$
U_c/U_m	$= 1.17$	δ^*/θ	$= 1.68$ <i>1.68</i>

表 3. 2. 2 平均流れ場に関する諸元 ($Re_z = 100$)

U_c	$= 17.4$	Cf_m	$= 9.58 \times 10^{-3}$
U_m	$= 14.5$	Cf_c	$= 6.61 \times 10^{-3}$
Re_c	$= 1740$	δ^*/δ	$= 0.169$
Re_m	$= 2890$	θ/δ	$= 0.0904$
U_c/U_m	$= 1.2$	δ^*/θ	$= 1.87$

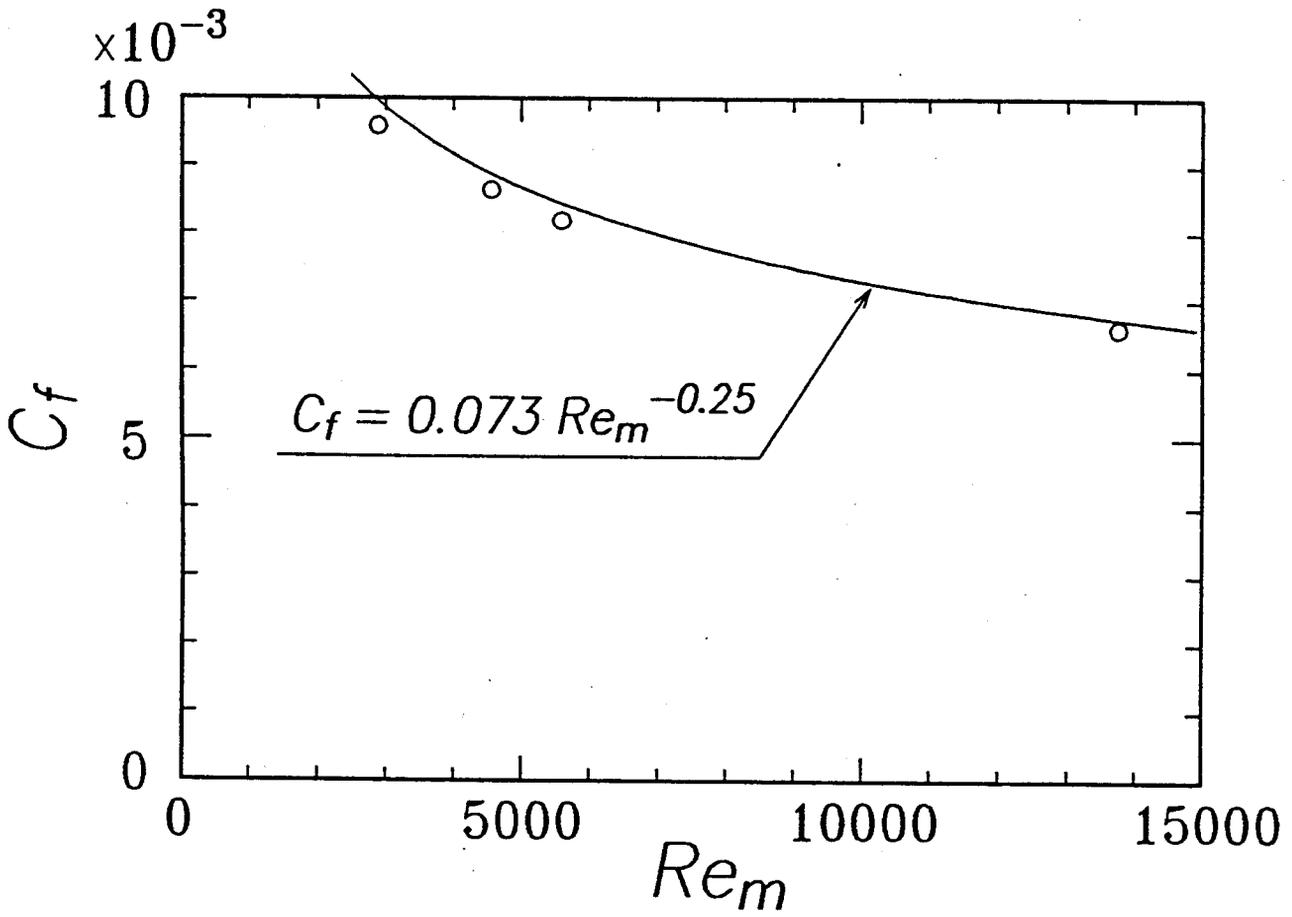


图 3. 2. 1 壁面摩擦系数

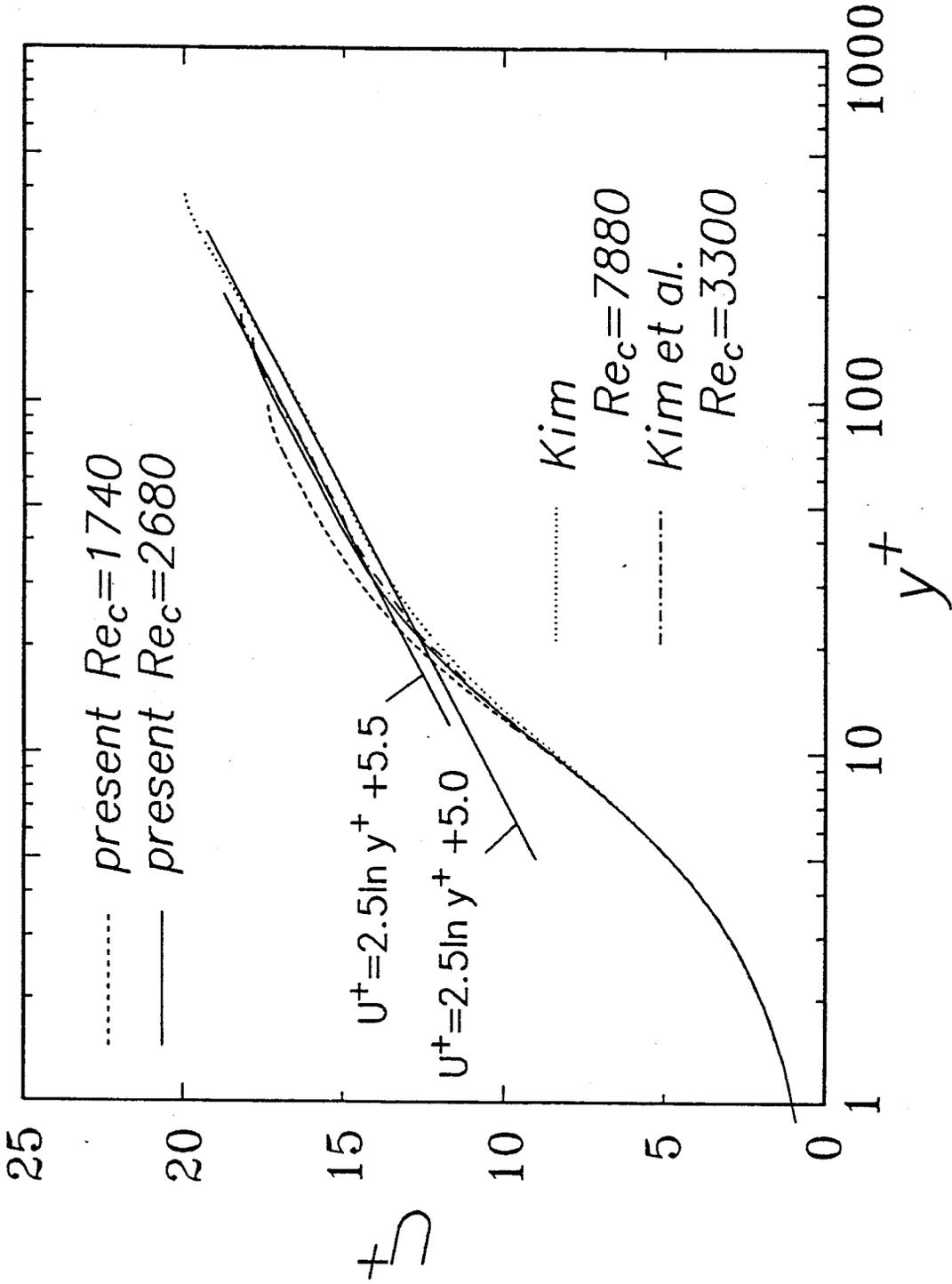


图 3. 2. 2 对数速度分布 (DNS)

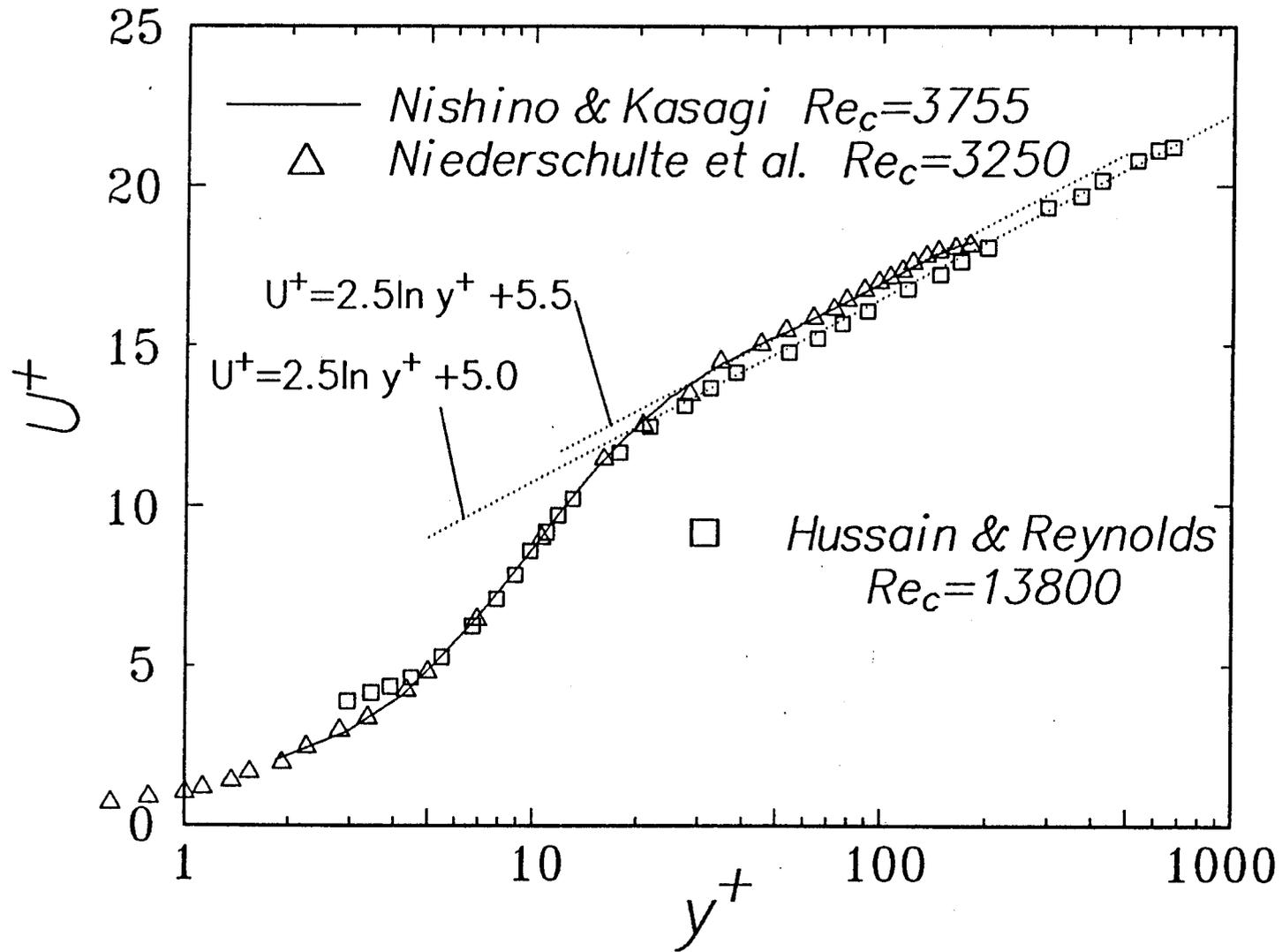


图 3. 2. 3 对数速度分布 (实验)

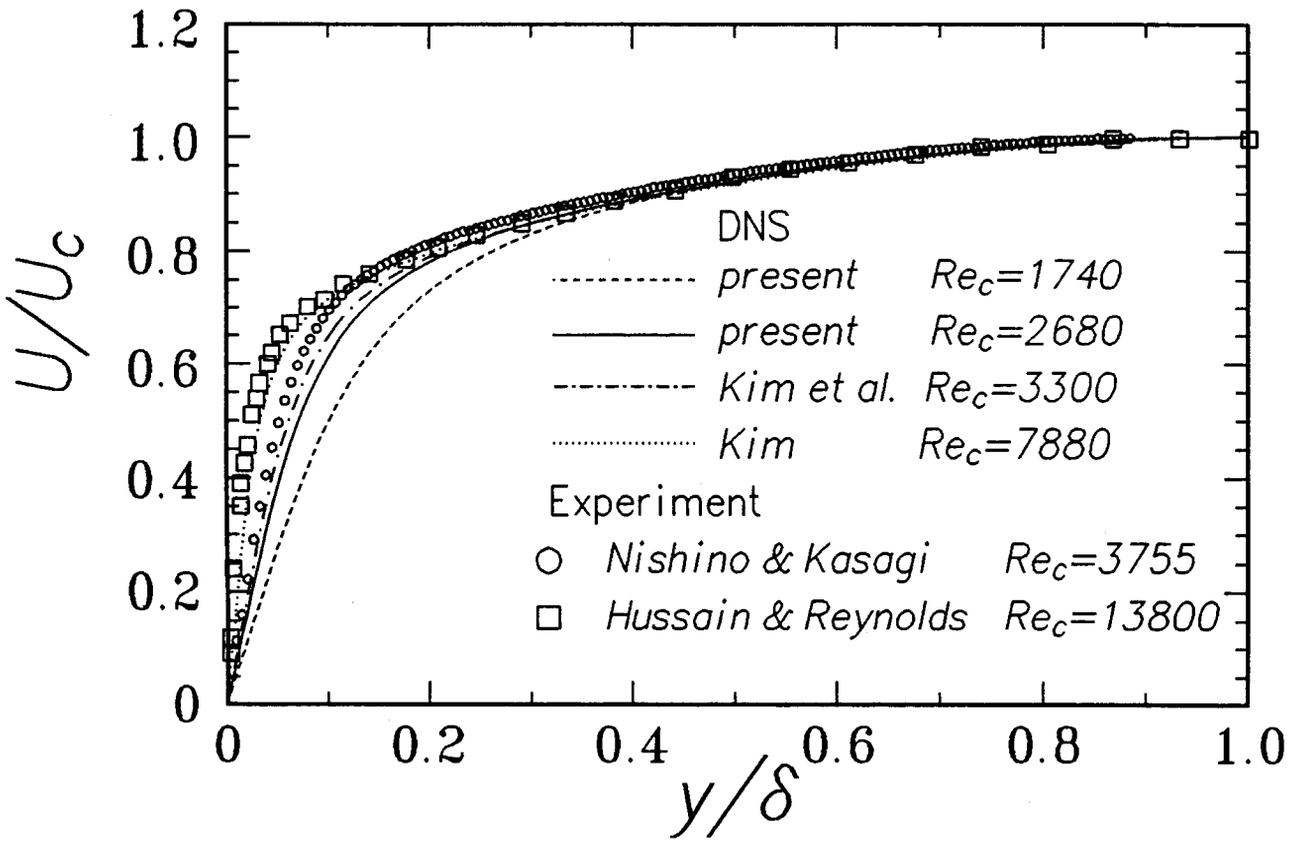


図 3. 2. 4 平均速度の外層表示

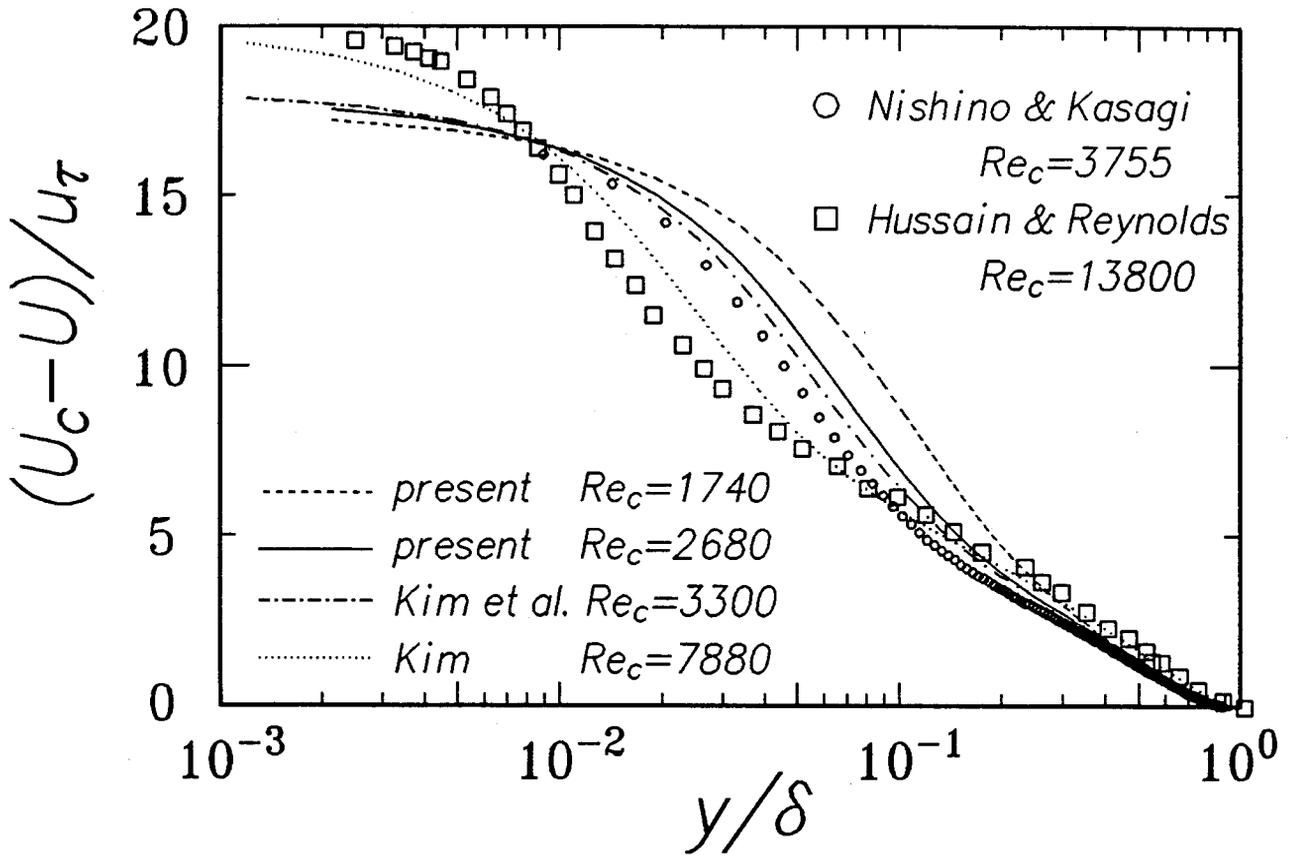


图 3. 2. 5 速度欠损分布

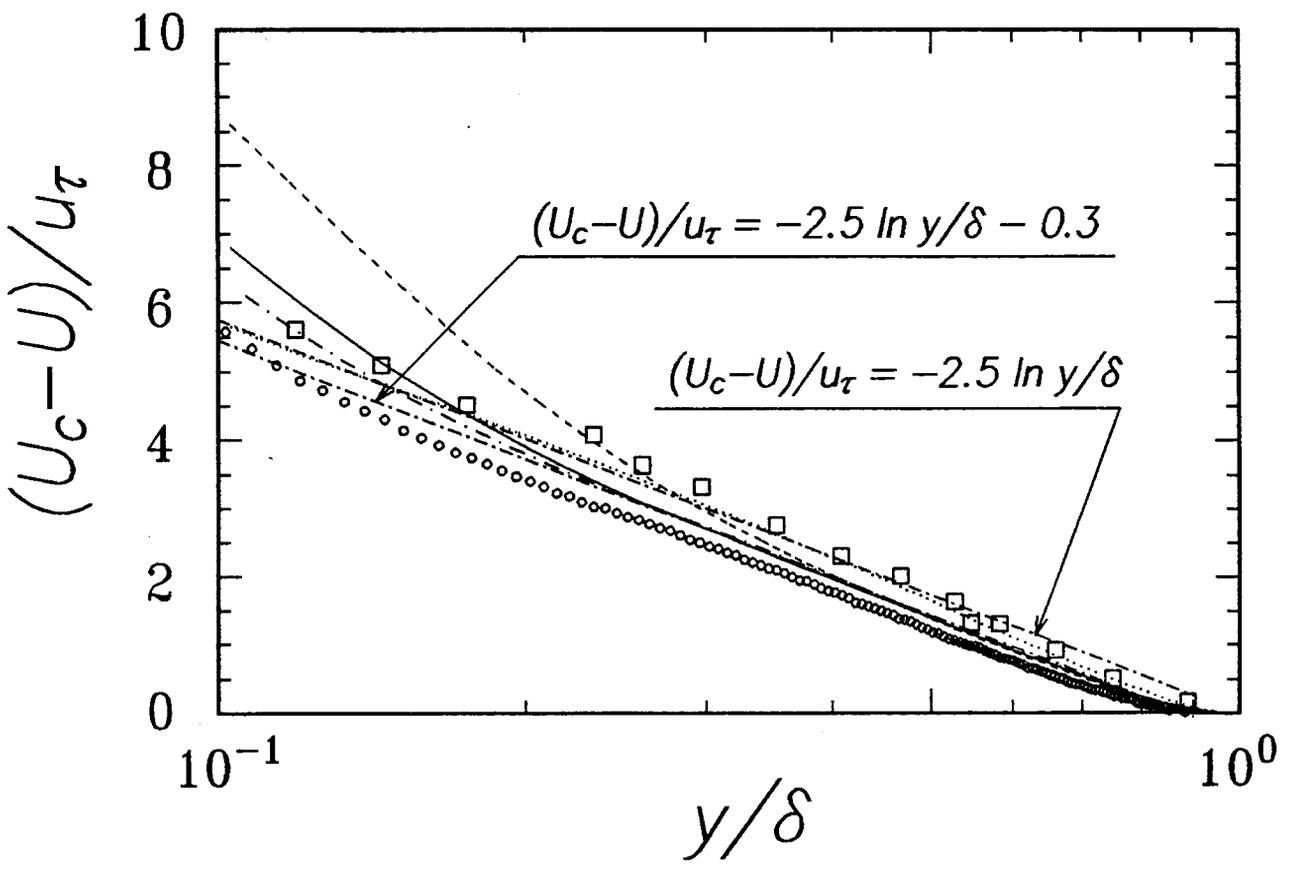


图 3. 2. 6 速度欠损分布

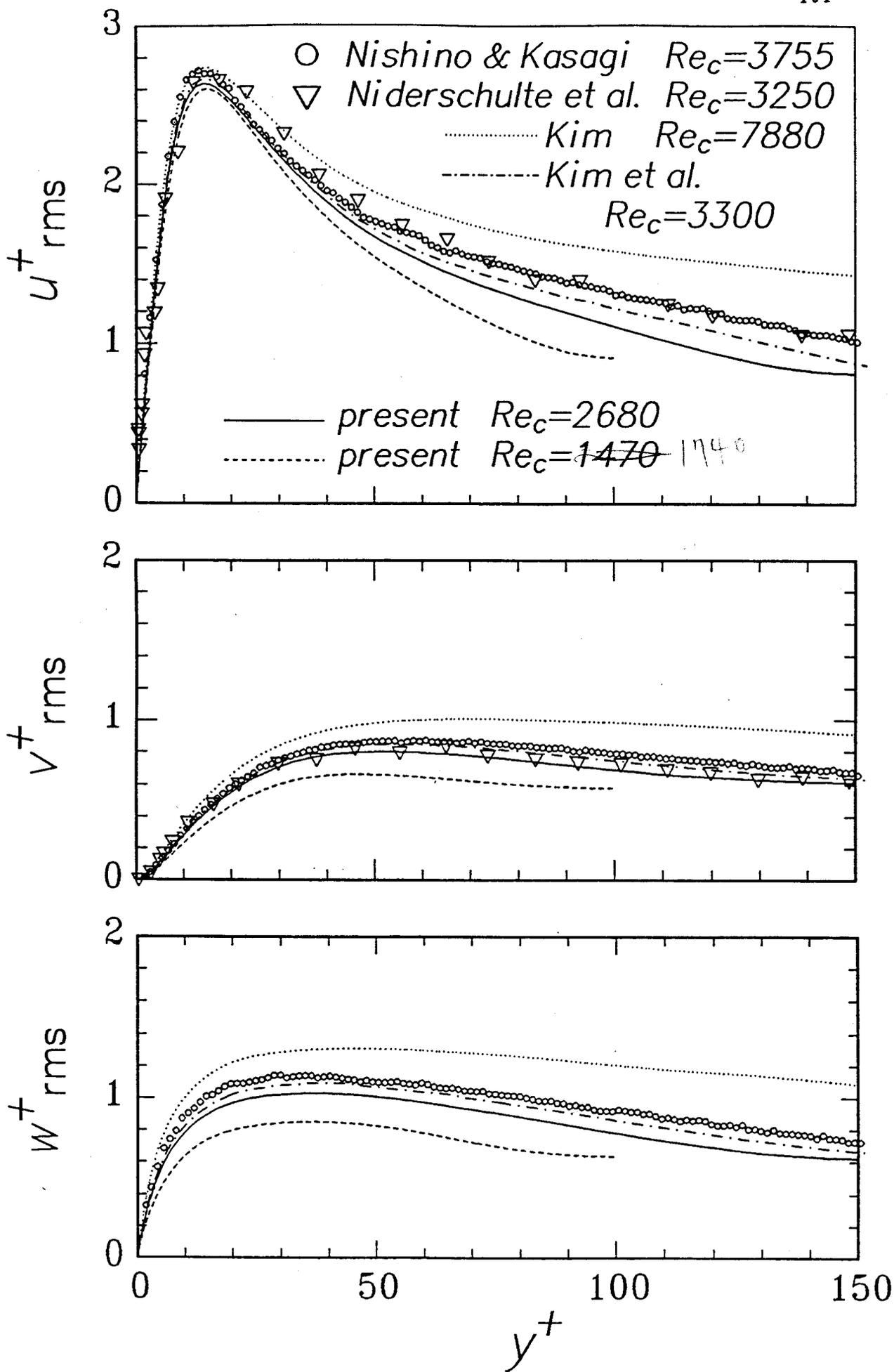


図 3. 3. 1 速度変動の RMS 値 (壁座標表示)

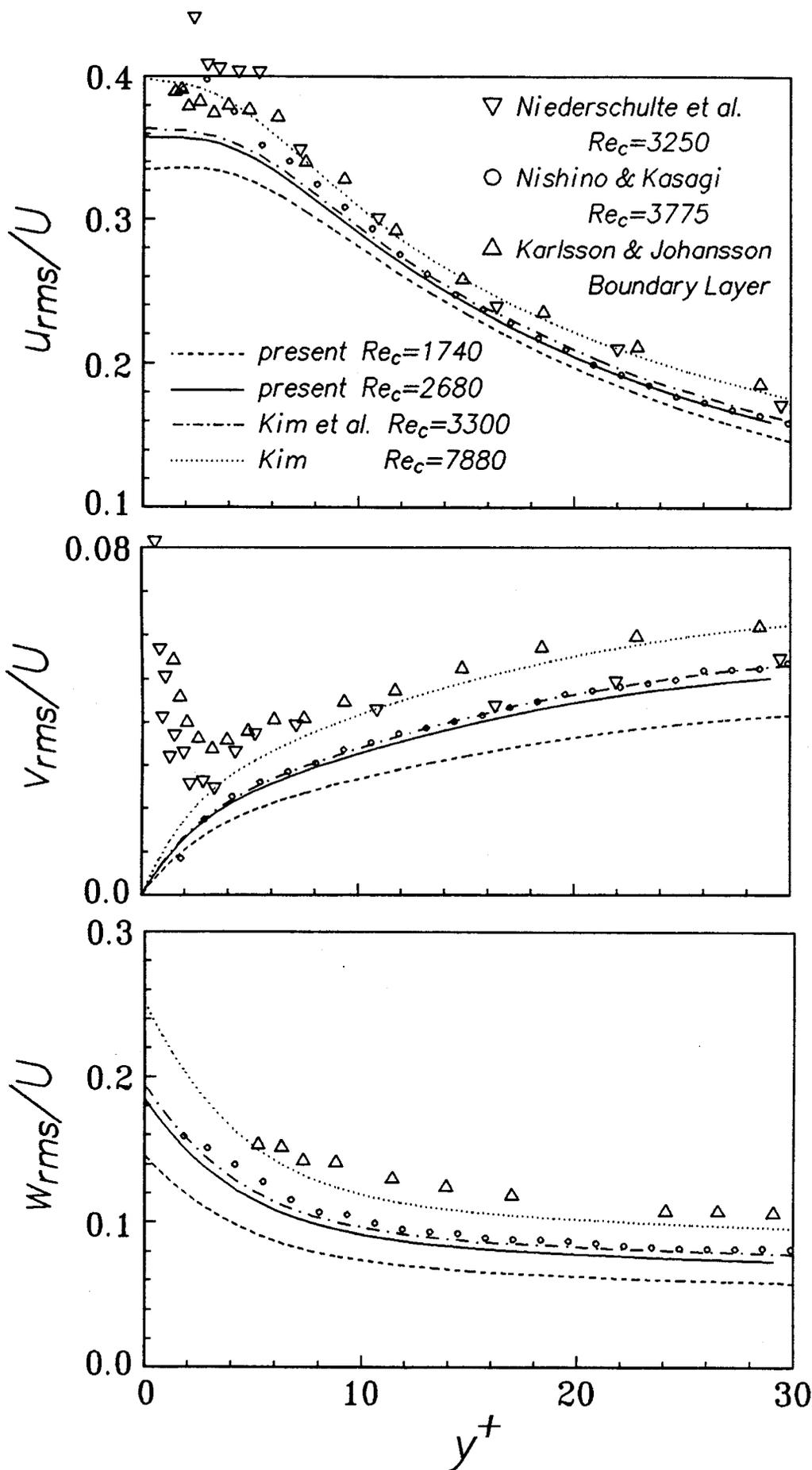


図 3. 3. 2 平均速度に対する速度変動の R M S 値

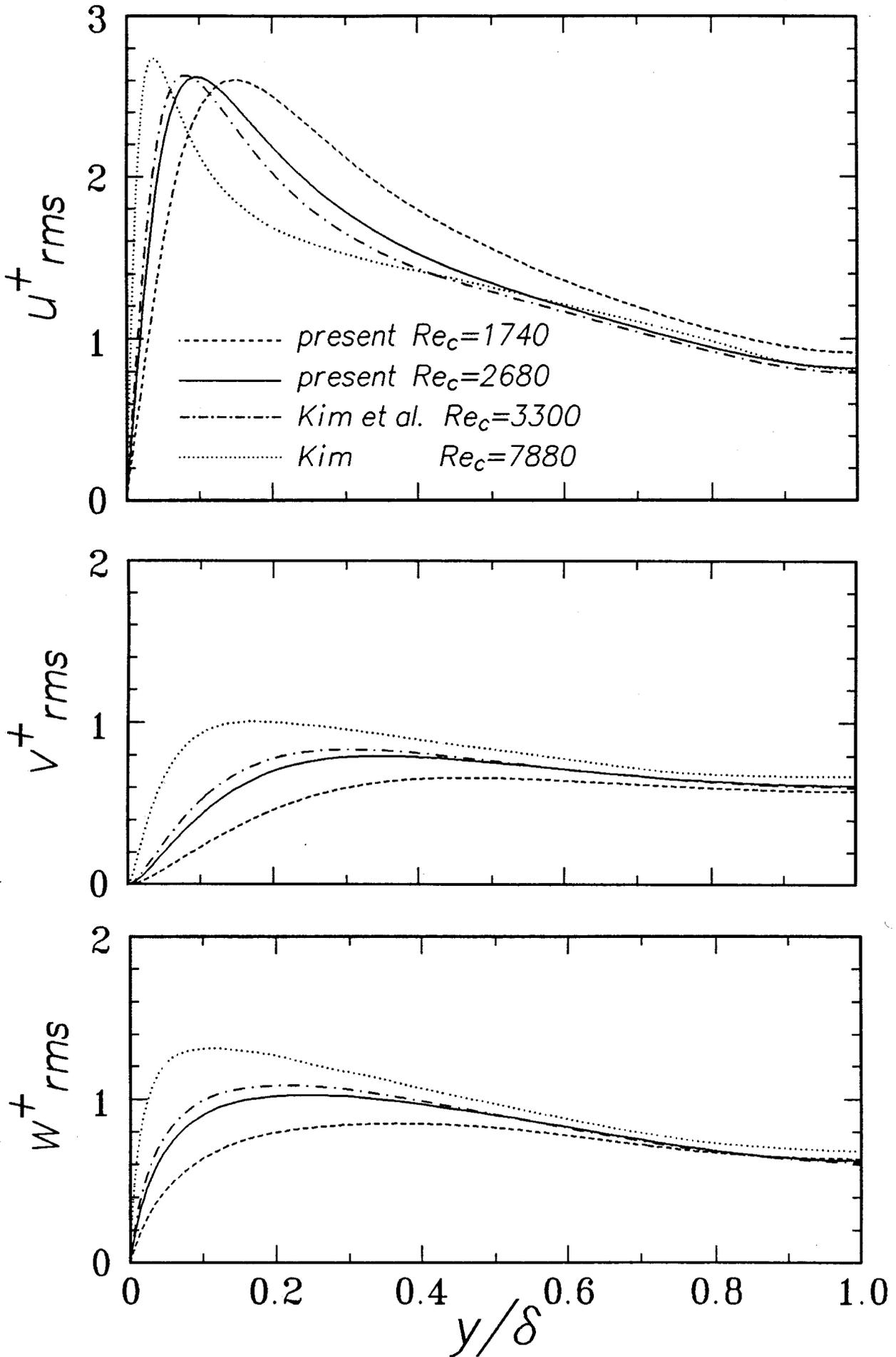


図 3. 3. 3 速度変動の RMS 値

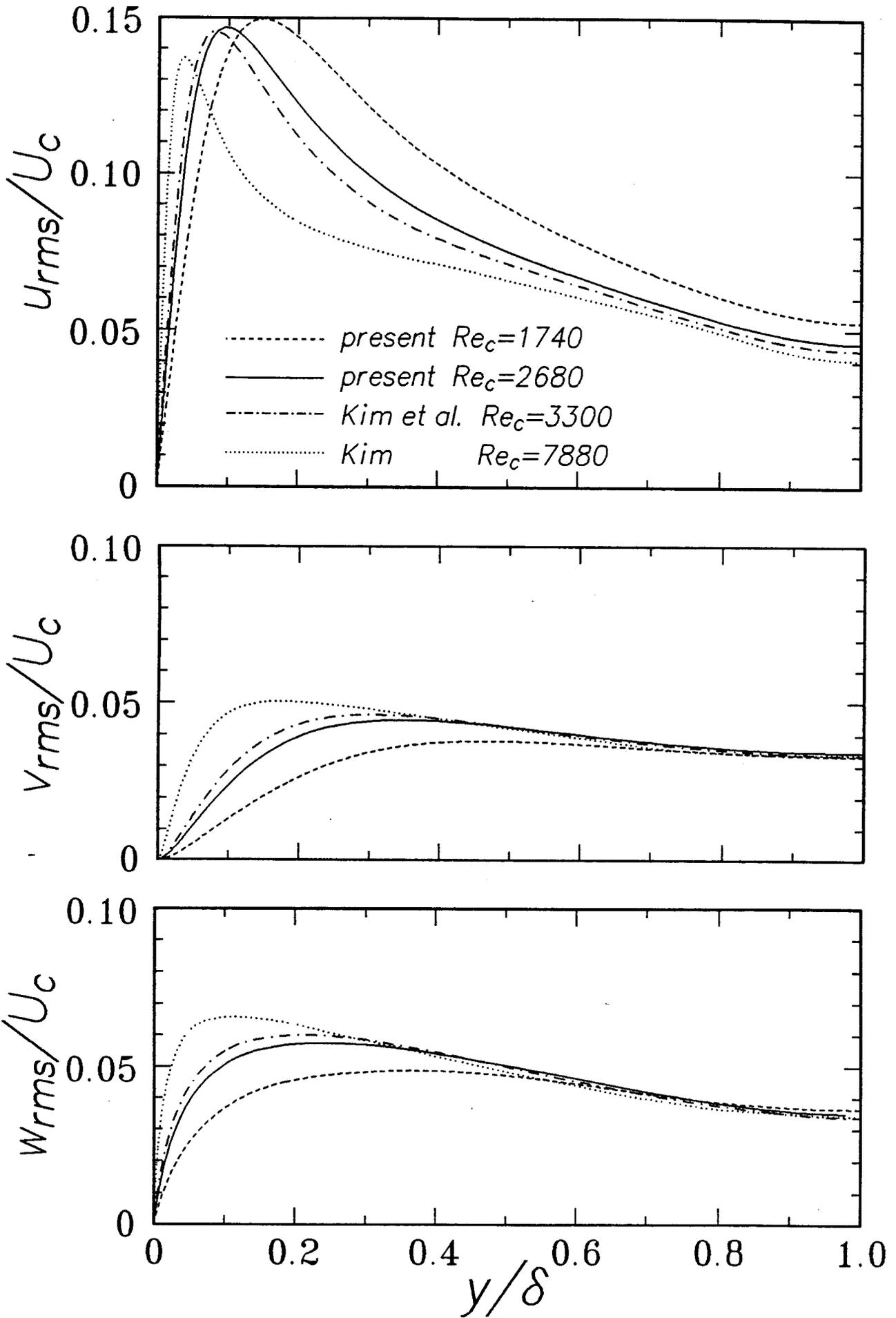


図 3. 3. 4 速度変動の R M S 値

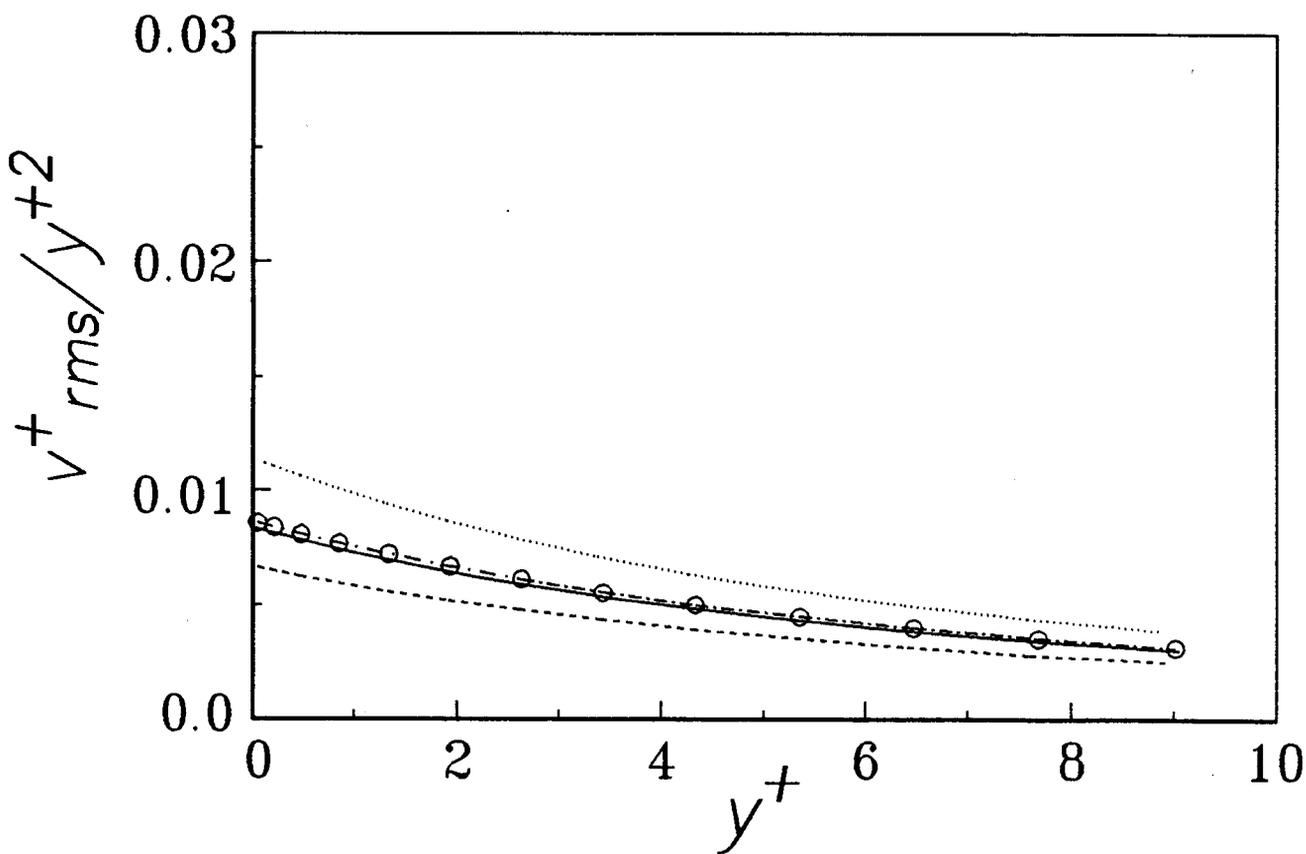
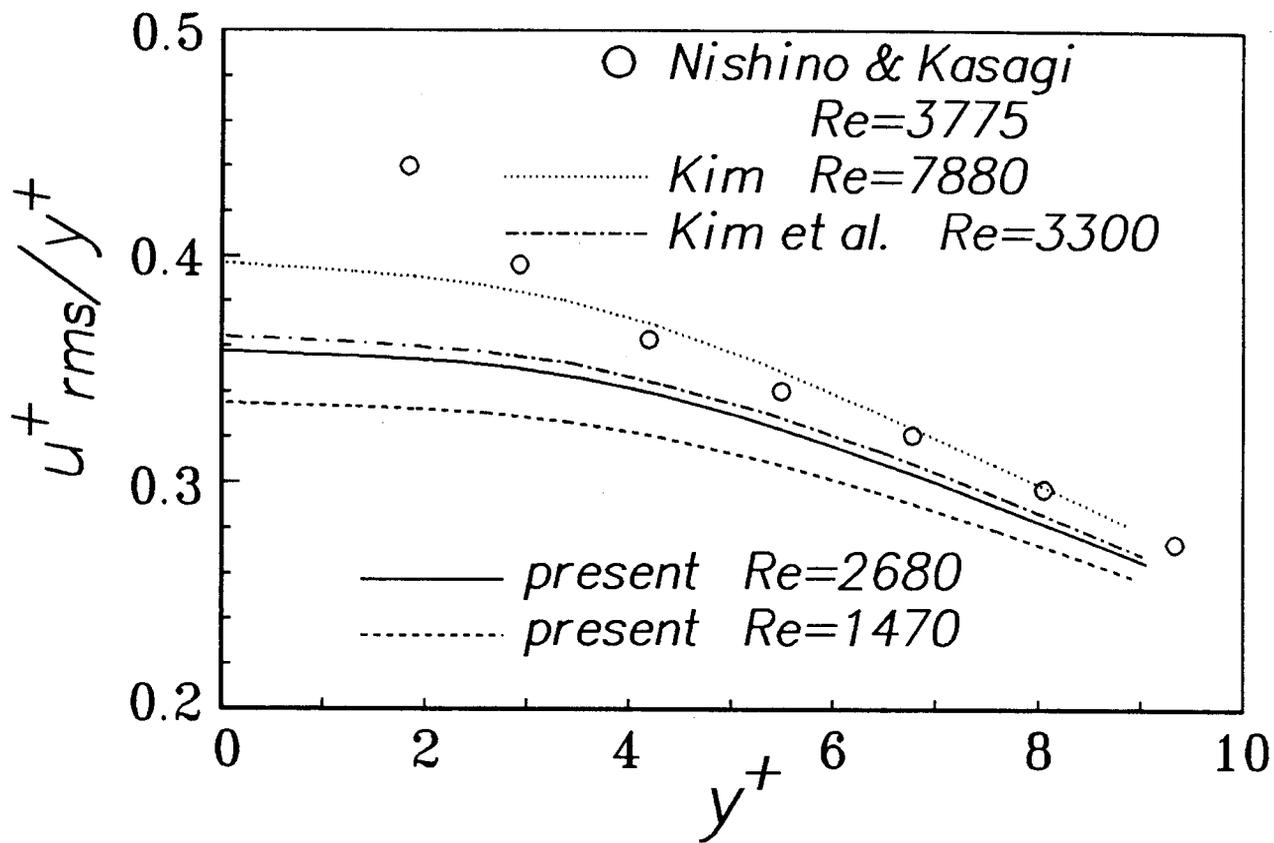


図 3. 4. 1 レイノルズ応力の壁面漸近挙動

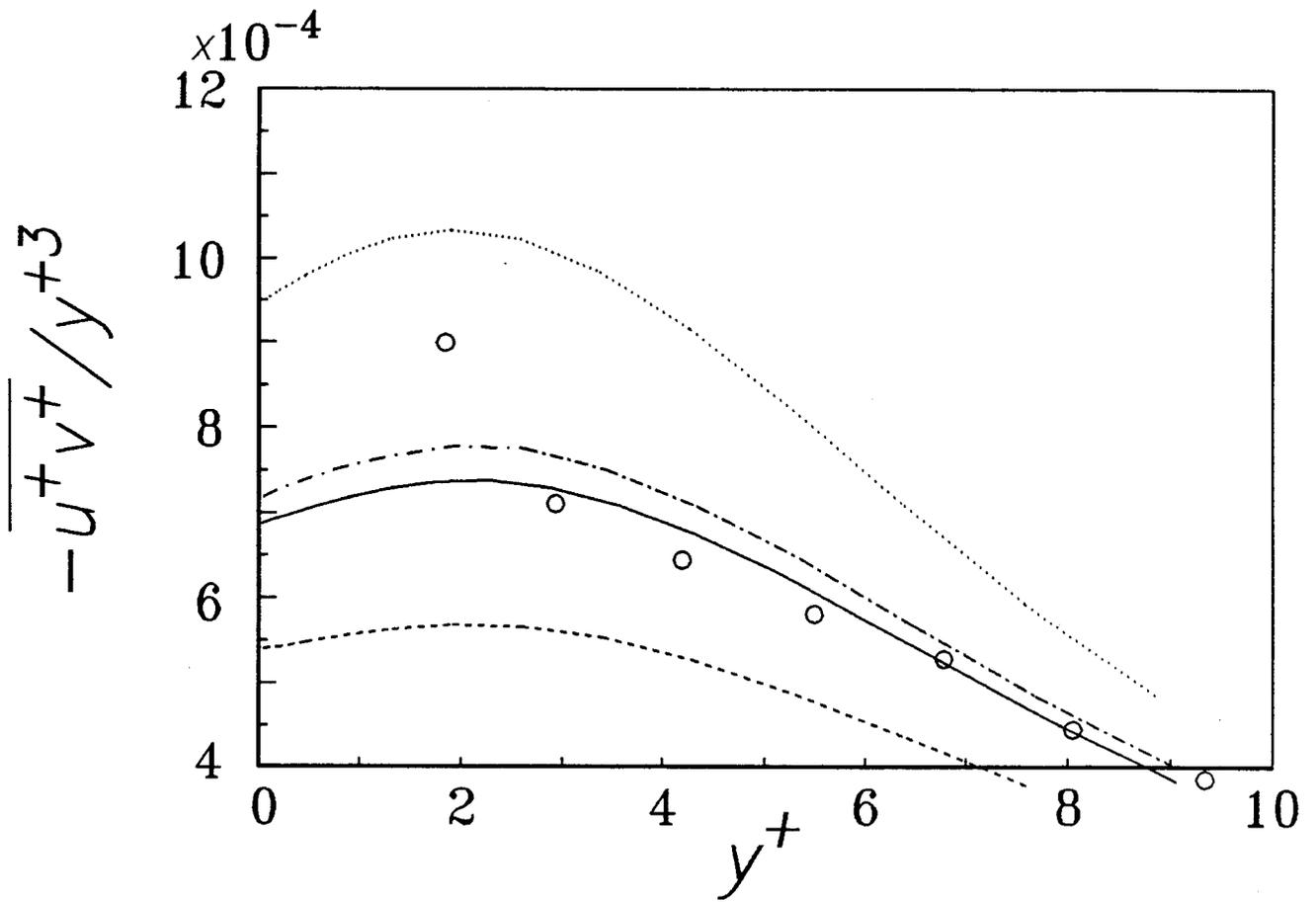
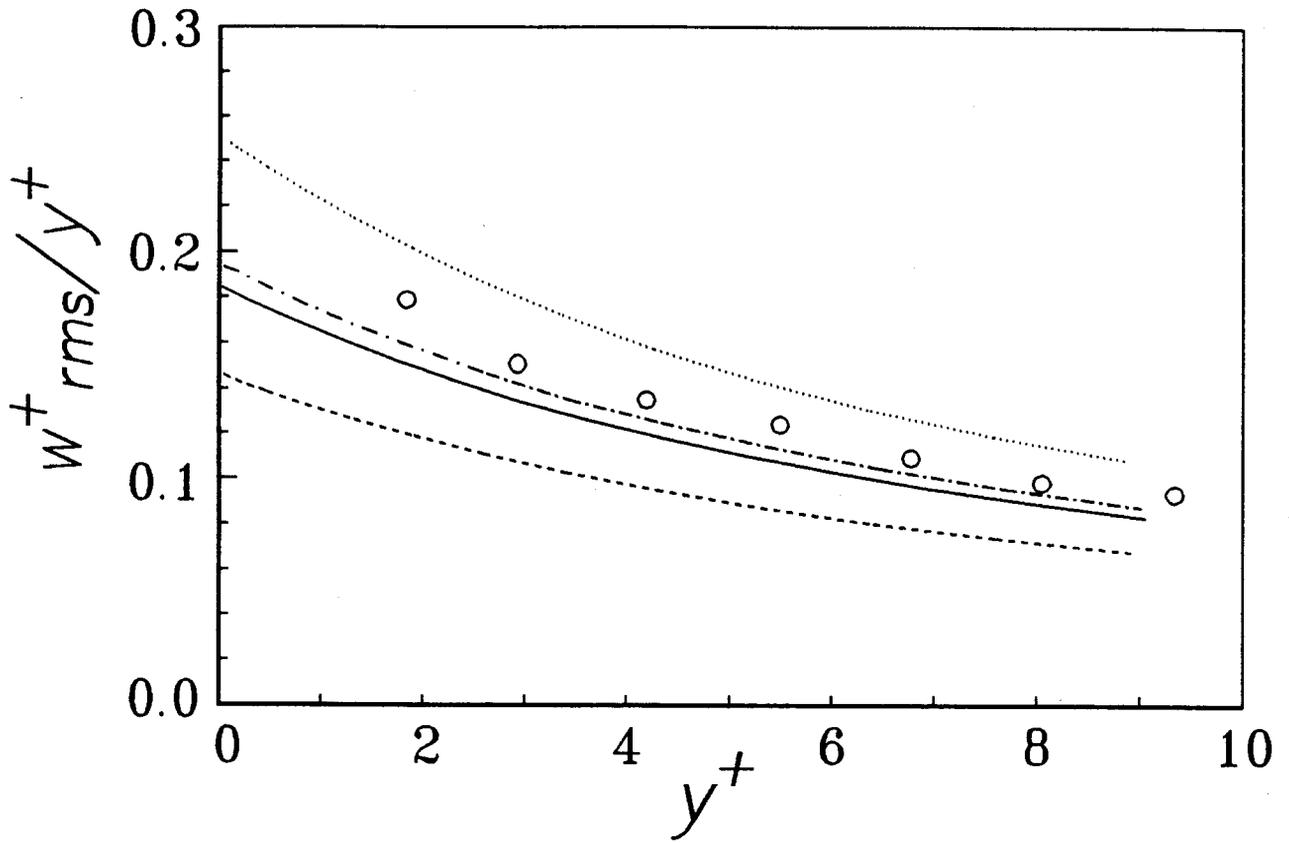


図 3. 4. 1 レイノルズ応力の壁面漸近挙動 (前頁の続き)

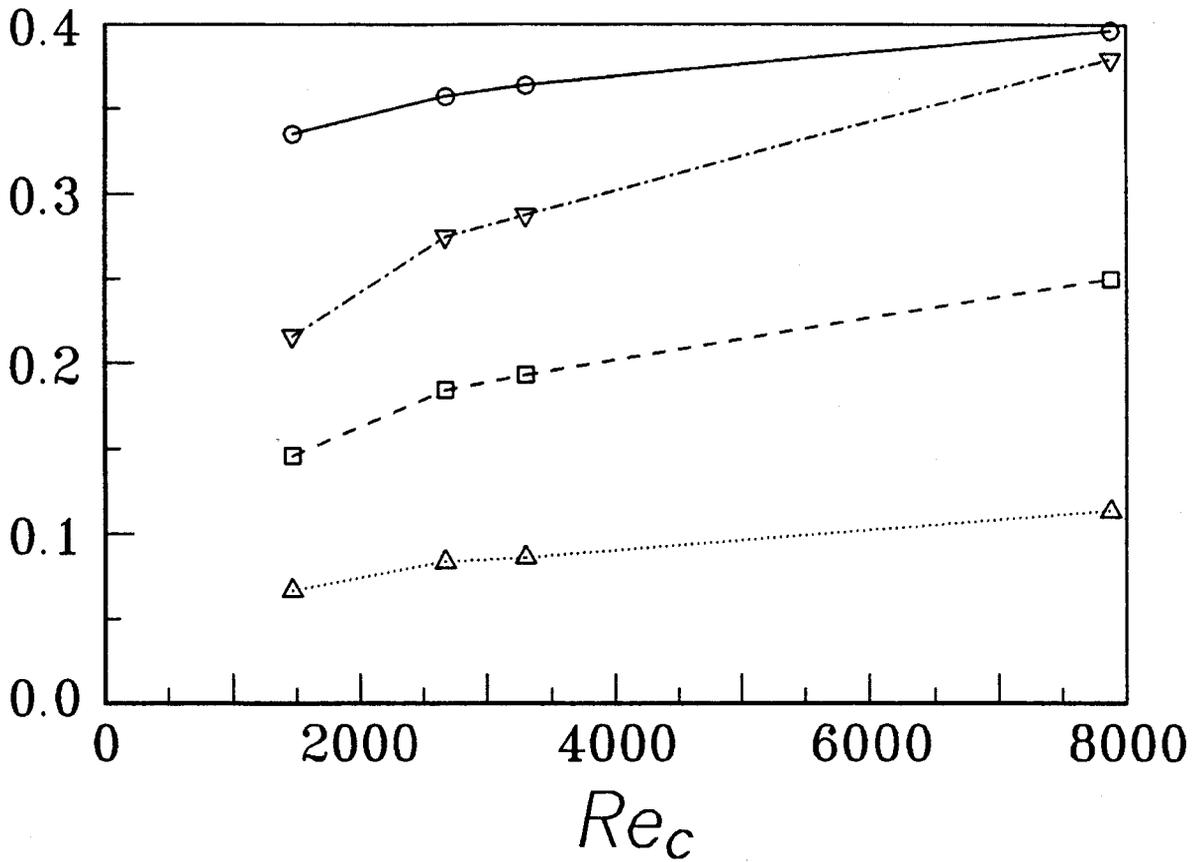


図 3. 4. 2 壁面漸近値のレイノルズ数依存性

○ ; u^+_{rms}/y^+ 、△ ; $v^+_{rms}/y^{+2} \times 10$
 □ ; w^+_{rms}/y^+ 、▽ ; $-\frac{u^+v^+}{y^{+3}} \times 400$

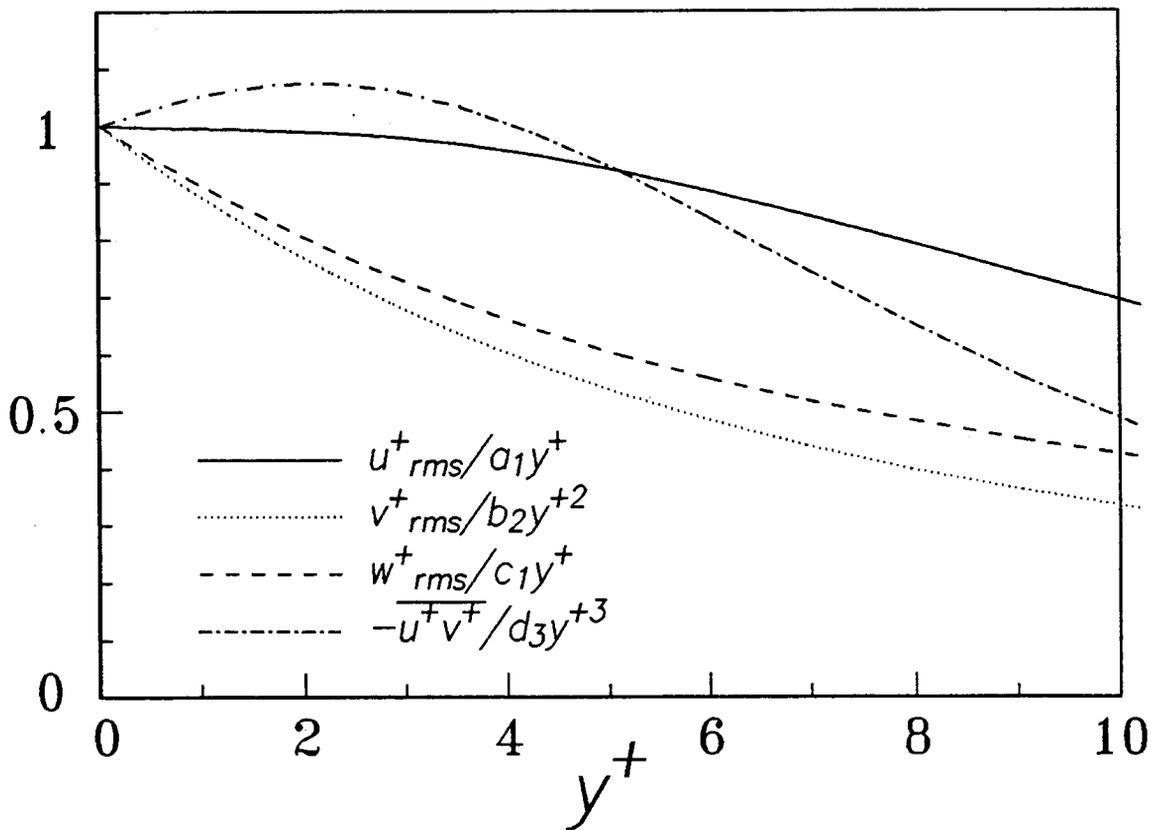


図 3. 4. 3 壁面漸近挙動 ($Re_c = 2680$)

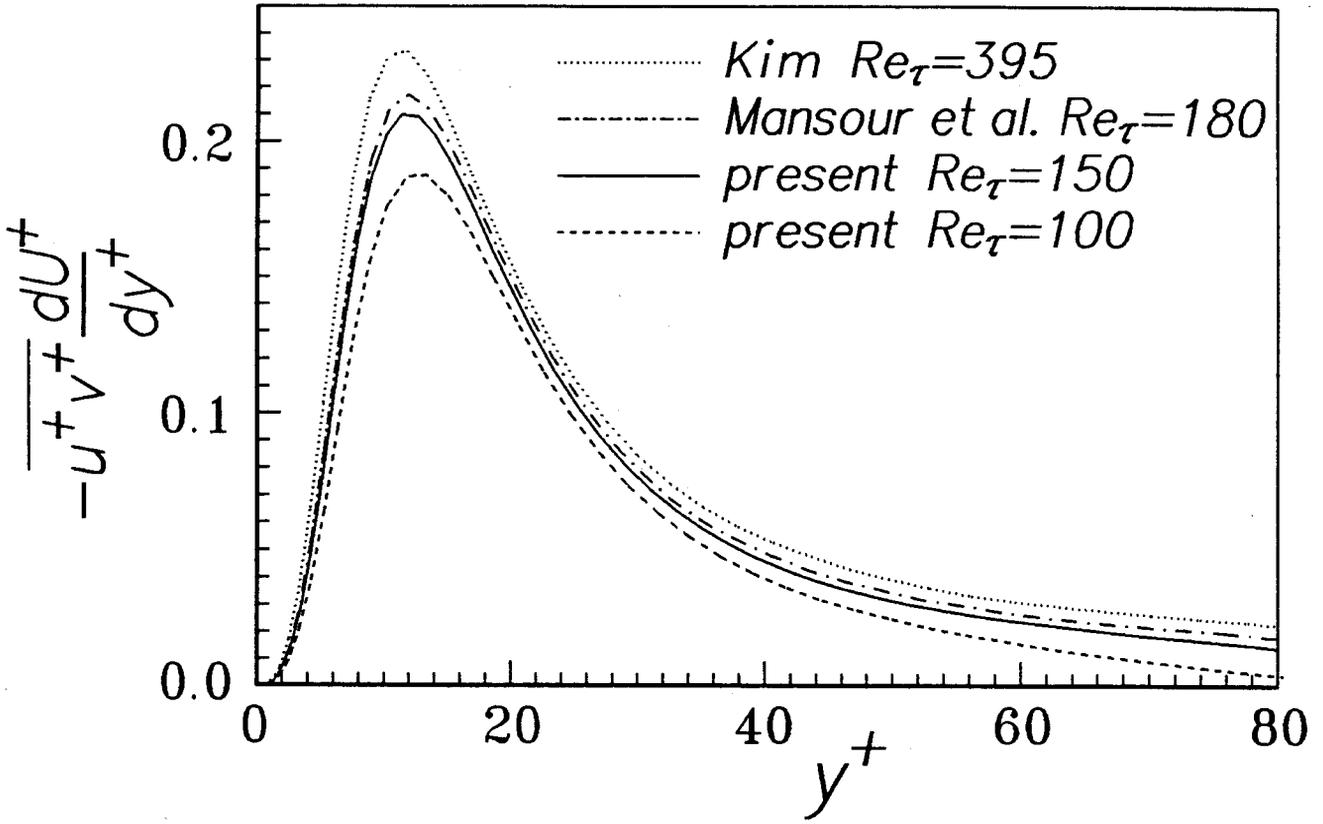


図 3. 5. 1 乱流エネルギーの生成率

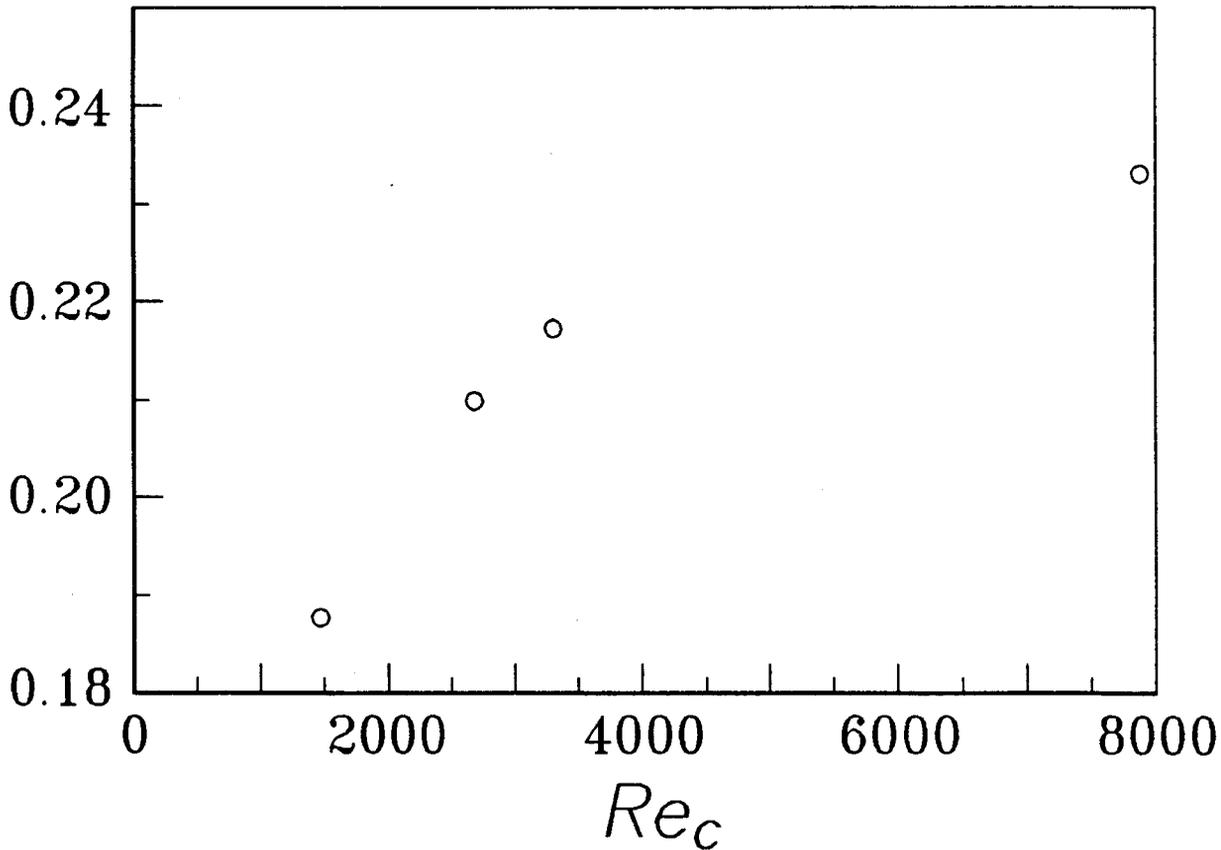


図 3. 5. 2 乱流エネルギー生成率の最大値

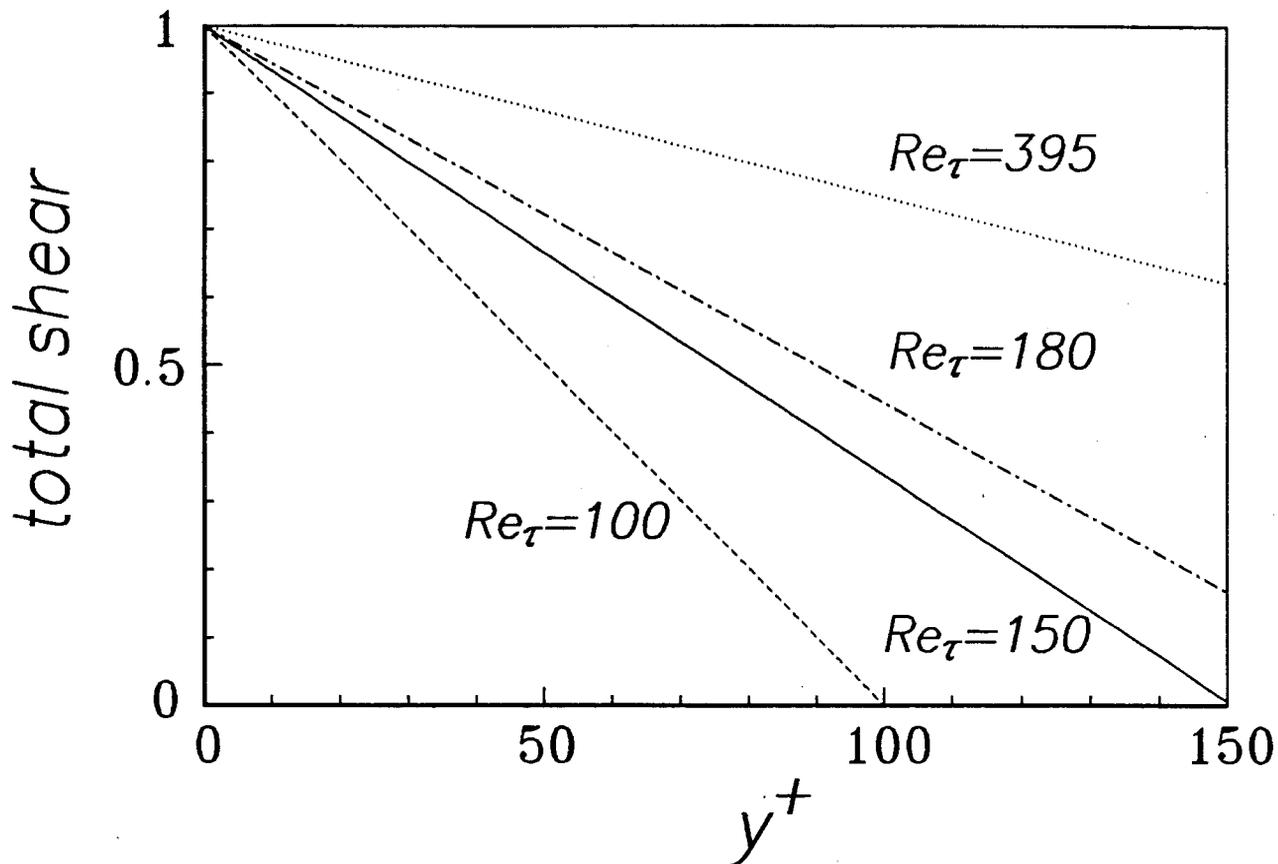


図 3. 5. 3 全剪断応力分布

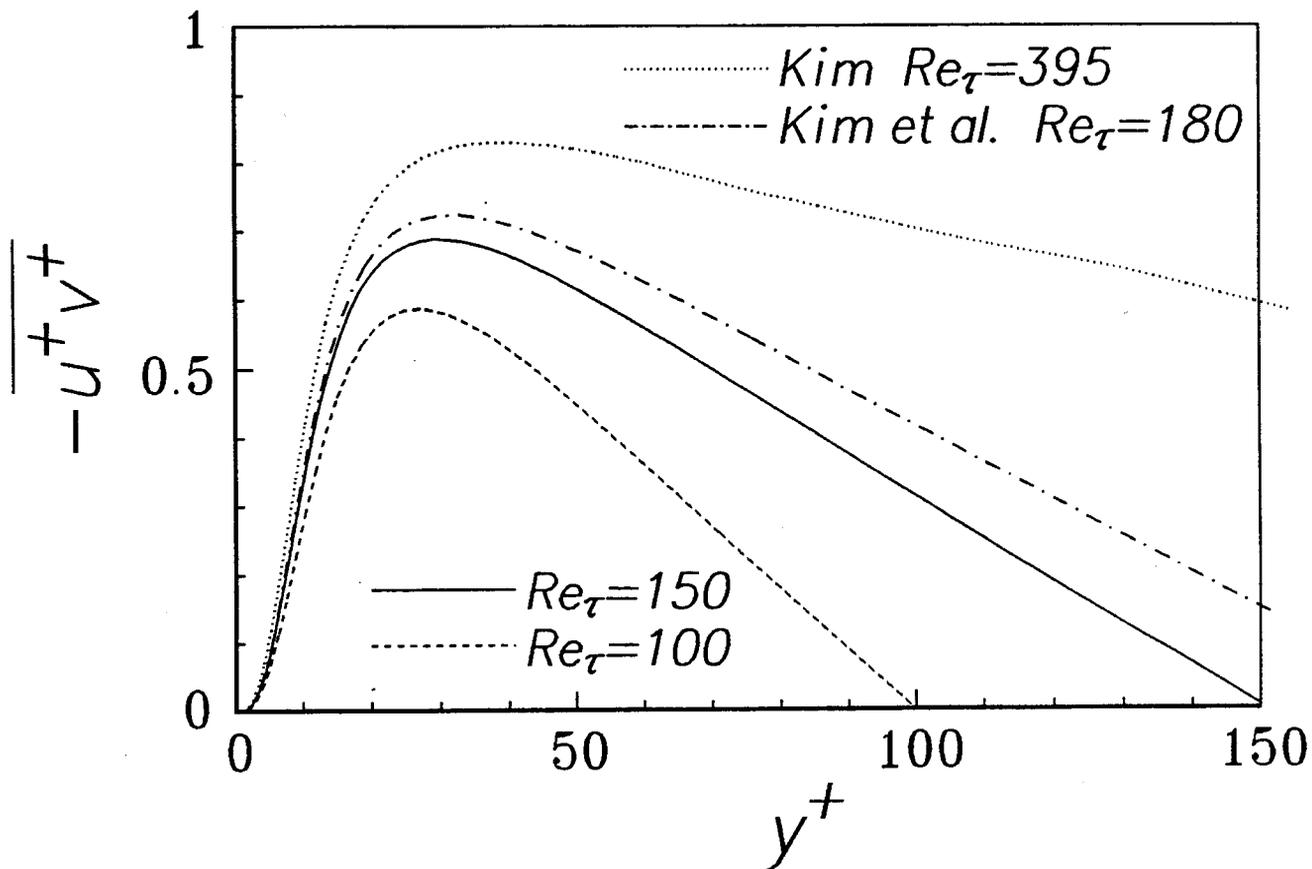


図 3. 5. 4 レイノルズ剪断応力分布

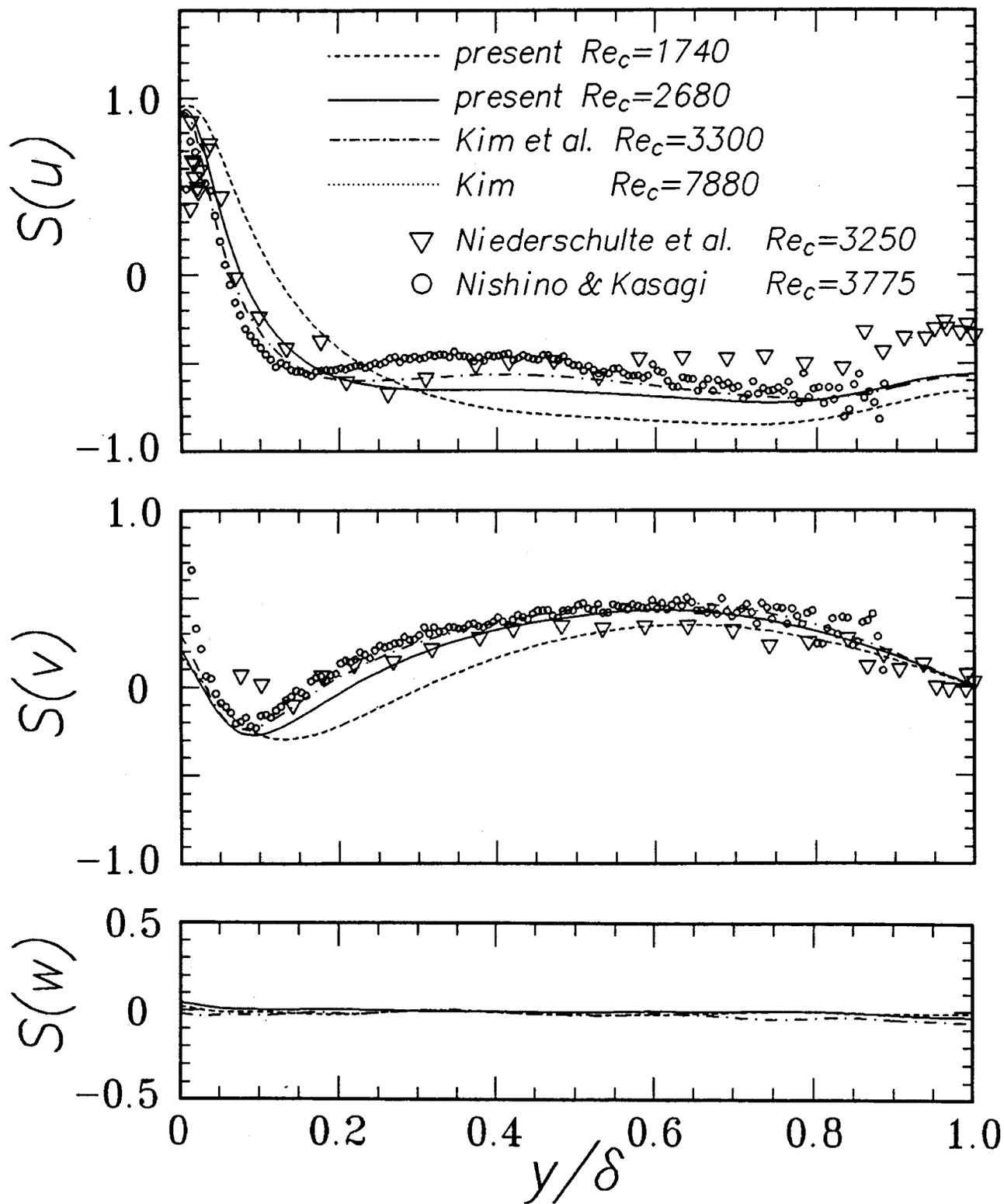


図 3. 6. 1 速度変動の歪度

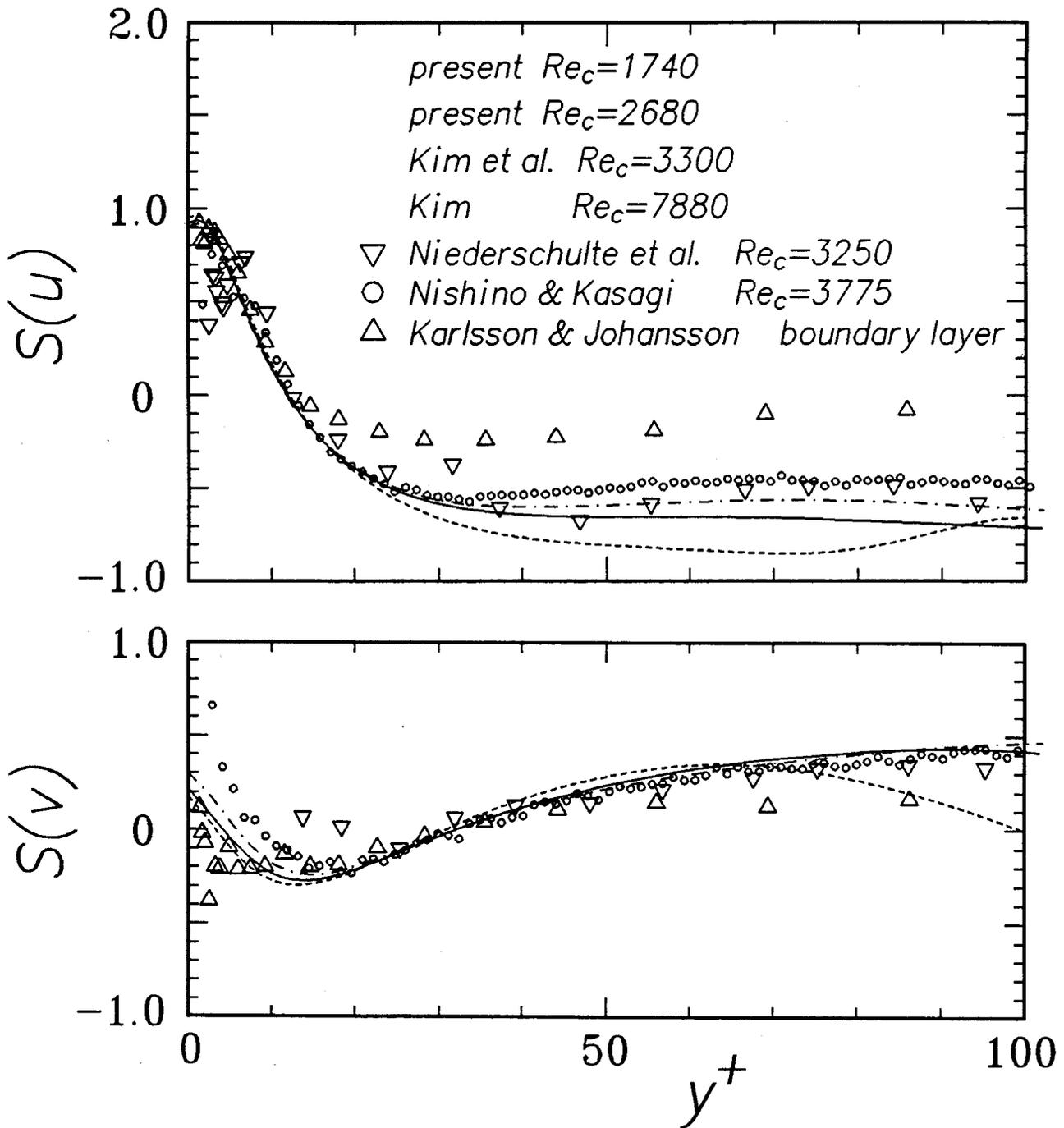


図 3. 6. 2 速度変動の歪度 (内層表示)

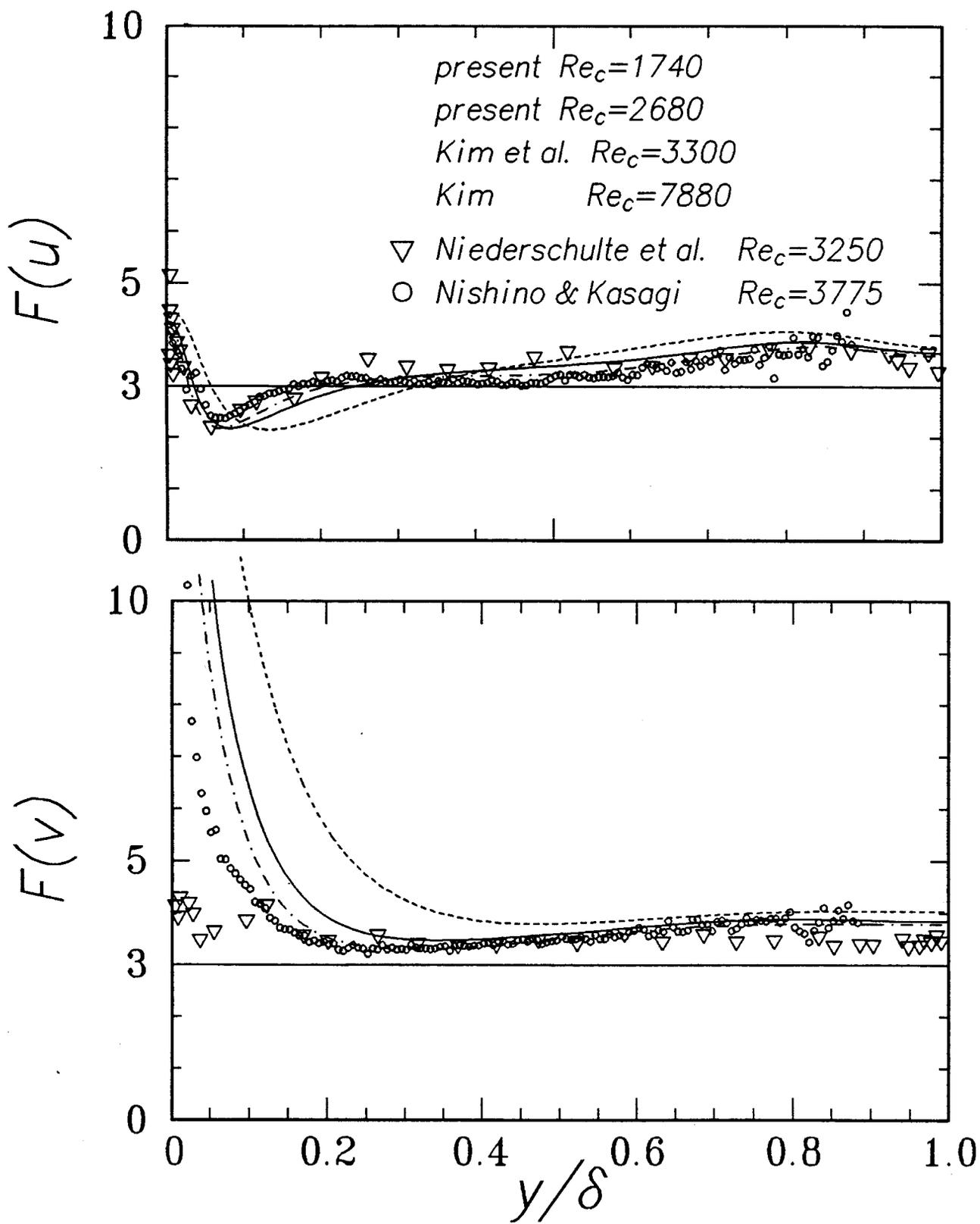


図 3. 6. 3 速度変動の平坦度

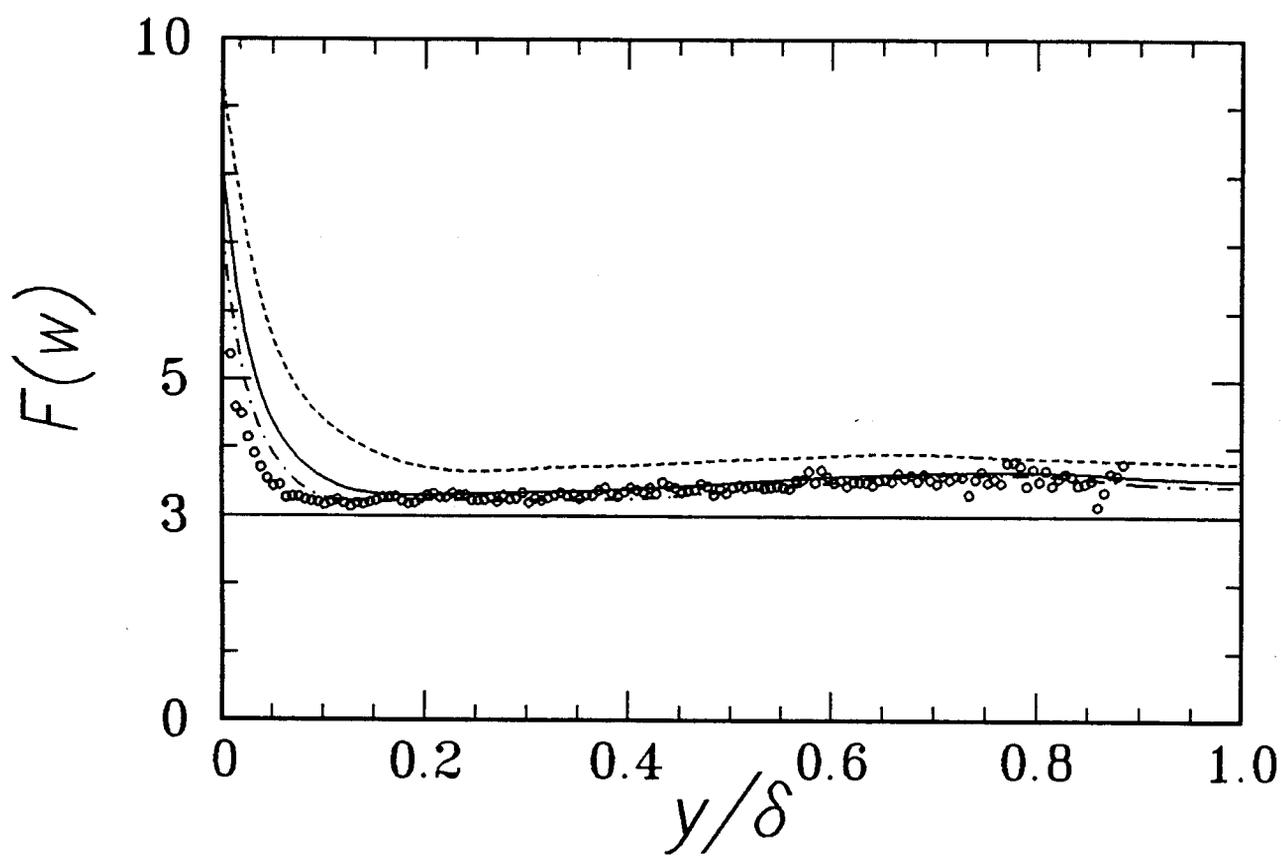


図 3. 6. 3 速度変動の平坦度 (前頁からの続き)

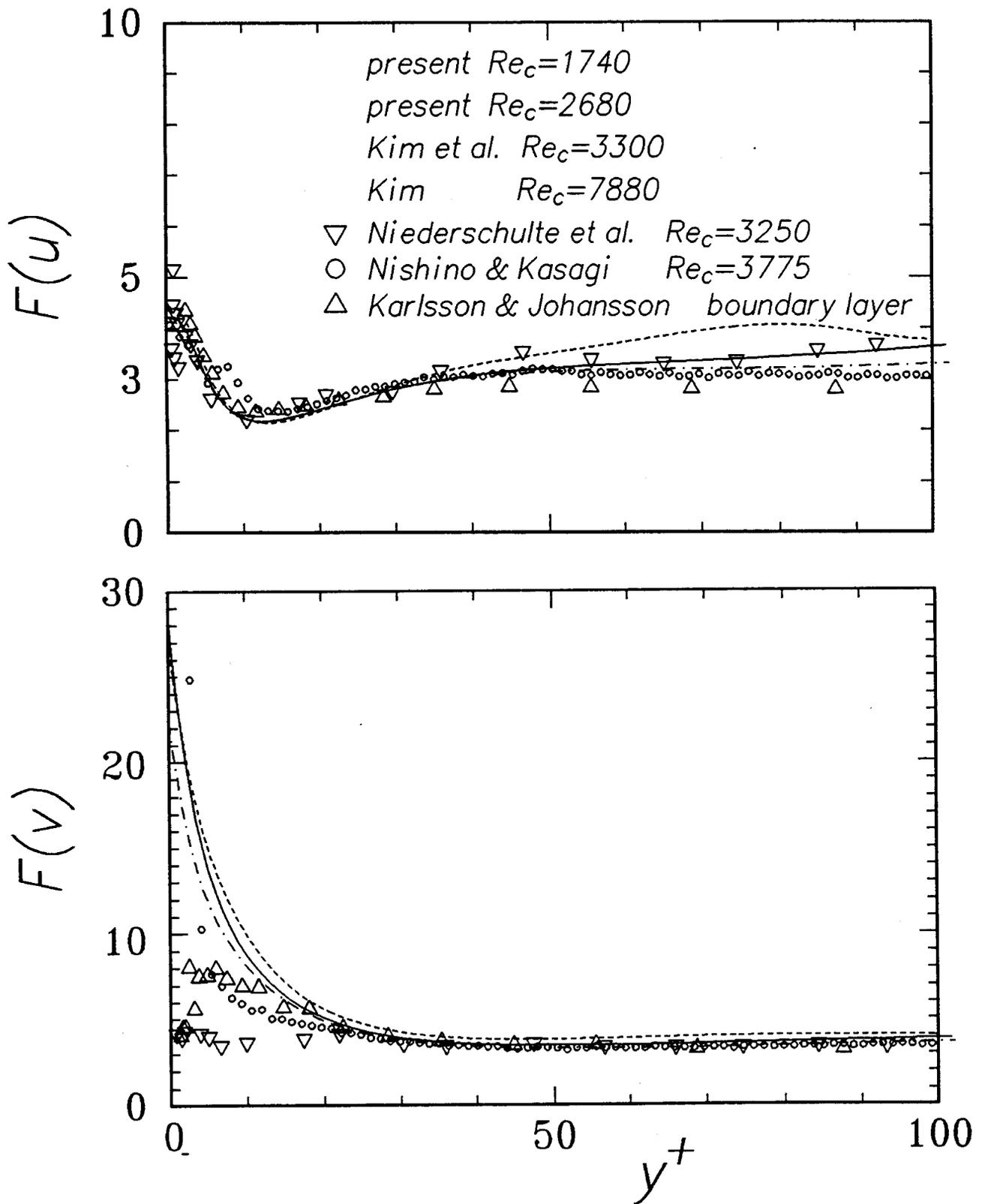


図 3. 6. 4 速度変動の平坦度 (内層表示)

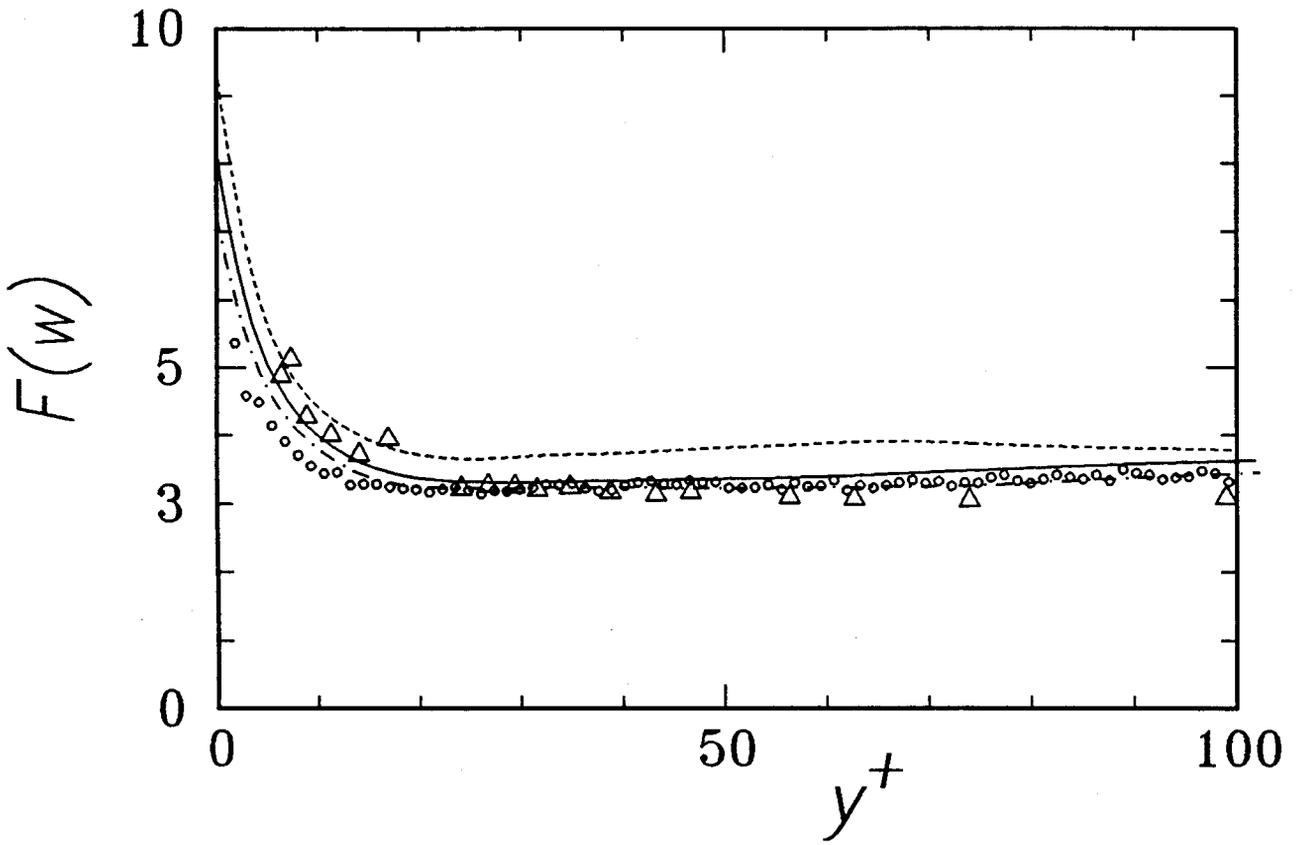


図 3. 6. 4 速度変動の平坦度 (前頁からの続き)

第 4 章

壁面近傍乱流場に対する
平均速度勾配の効果

§ 4. 1 序

本章では、第2章で計算を行ったポアズイユ乱流及び2壁面における平均速度勾配比の異なる3種のクエット・ポアズイユ乱流のシミュレーション結果を報告する。

§ 4. 2では、得られた流れ場の平均速度分布を示し、壁面剪断の大小の観点からその特徴付けを行う。

§ 4. 3～§ 4. 5では、乱流強度、レイノルズ応力の非等方度、速度変動の歪度、平坦度、乱流エネルギー及びレイノルズ応力の輸送方程式中の各項のバランスの観察を通じて、壁面剪断の異なるそれぞれの流れについて壁面近傍乱流場の特性を明らかにする。壁面剪断流の壁近傍乱流場は、古くから多くの研究がなされているが、剝離点や再付着点の近傍など工学的に興味深い流れにおいてみられる剪断自由な壁面近傍での乱流特性に関する基礎的研究は、測定の困難さなどから不足しているといえる。このような背景から本章に示した詳細なデータは、壁面剪断応力の小さい流れ場の基本的理解、あるいは乱流モデルの検証に有効かつ貴重なものであると考えられる。

§ 4. 6では、流れの可視化によって、剪断自由な壁面近傍ではストリーク構造が存在しないことを直接確認する。さらに、剪断自由な壁面近傍にみられる特徴的な流れのパターンを条件付き抽出法によって抽出し、その空間的構造を明らかにする。

§ 4. 2 平均速度場

計算によって得られた下壁 ($y/\delta = 0$) の摩擦速度とチャンネル半幅で定義したレイノルズ数 Re_{zb} 、上壁 ($y/\delta = 2$) の摩擦速度とチャンネル半幅で定義したレイノルズ数 Re_{zt} 、及び下壁と上壁の平均速度勾配の比 $f = (\partial U / \partial y)_b / (\partial U / \partial y)_t$ を表 4. 2. 1 に示す。ここで示したレイノルズ数は粘性長さスケール ν / u_{τ} で表わしたチャンネル半幅である。 Re_{zb} 、 Re_{zt} と f との間には $|f| = (Re_{zt} / Re_{zb})^2$ の関係があり、 $f = -1$ の場合がポアズイユ流れ、 $f = 1$ の場合がクエット流れ、また $f = 0$ は、下壁で速度勾配が 0 となる状態に対応する。上壁の粘性長さスケールで無次元化したチャンネル幅 ($2 Re_{zt}$) は各ケースを通じてほぼ一定値 (300 程度) に保たれている。このことは、これらの計算が上壁における速度勾配を一定に保つように流れ方向の圧力勾配と 2 平板の相対速度を調節した一連の実験に対応していることを表わす。上壁におけるこれらの速度勾配を基準とした場合、下壁における平均速度勾配は、ケース P、CP1、CP2、CP3 の順に小さくなっており、ケース 3 では下壁における平均速度勾配が極めて小さい状態であることが示されている。

平均速度分布をリニアプロットで図 4. 2. 1 に示す。速度は上壁 ($y/\delta = 2$) の壁面摩擦速度で無次元化されている。上壁近傍の線形領域では、4 ケースの分布がよく一致しているが、これは Re_{zt} がほぼ同じであるという事情によっている。流体中で平均速度勾配が 0 となる位置は、ケース P ではチャンネル中央であり、下壁での平均速度勾配が弱まるにつれて下壁近傍に移動する。これらの位置を表 4. 2. 2 に示す。

平均速度を上壁の壁座標表示で整理した場合を図 4. 2. 2 に示す。いずれのケースの場合も対数領域が確認できるが、ケース P、CP1、CP2、

CP3の順にこの対数領域は長くなり、ケースCP3では上壁からの対数領域が下壁の近傍までおよんでいることがわかる。また、対数領域中での平均速度の値はケースPに対して他の3ケースがやや小さい値をとっている。低レイノルズ数の場合には対数法則を表わす式中の付加定数の値が大きくなることを前章で確認したが、この意味でCPシリーズはケースPに対して高レイノルズ数的特性を示していると考えられる。

平均速度を下壁の壁座標表示で整理した場合を図4.2.3に示す。ケースCP1では粘性低層外縁付近で、またケースCP2では粘性低層中で通常の普遍速度分布からのずれを生ずる分布となり、対数領域は存在していない。一方、ケースCP3では、対向壁の外層の影響が壁のごく近傍にまでおよんでおり、有効な壁面境界層が存在しない場となっている。

§ 4. 3 レイノルズ応力場

4. 3. 1 乱流強度

図 4. 3. 1 に速度変動の R M S 値チャンネル全体についてを示す。縦軸は上壁の摩擦速度で無次元化されている。ケース P 及びケース C P 1 では、下壁近傍で流れ方向速度変動成分に有意な極大値が現われる。これに対して、速度勾配が弱く、乱流エネルギーの有効な生成が見込めないケース C P 2 とケース C P 3 の下壁近傍では流れ方向の速度変動に極大値が現われず、壁に向かって単調に減衰する分布となる。

速度変動の R M S 値を下壁の粘性パラメータ (u_{τ} , ν) で整理した場合を図 4. 3. 2 に示す。ケース P とケース C P 1 との比較では、流れ方向の速度変動強度がケース C P 1 の場合に極端に小さくなっている。一方、スパン方向、壁垂直方向の速度変動強度は、両ケースでよく一致した結果が得られているが、第 3 章で示したようにこれらの量にはレイノルズ数効果が顕著に現われ、粘性パラメータによる整理が普遍性を有さないことから、ここで得られた一致性に関してその必然的な理由が見あたらない。ここでは単に、ケース C P 1 では、流れ方向の垂直応力成分に有意な生成が認められるものの相対的に乱れが等方化していることが指摘できる。これは、局所の平均速度勾配によって生成される非等方性の強い渦と、外層から侵入する相対的に非等方性の弱い渦の影響が重畳した効果と考えられる。一方、壁面剪断の小さいケース C P 2、C P 3 ではこれらの速度変動が定性的に異なるだけでなく、壁面摩擦速度によるスケージングは、定量的なオーダーの評価においても全く不適切であり、乱流場の特性値がもはや平均速度場のパラメータの

みによっては表わせないことが示唆される。

図4. 3. 3. に壁面での散逸率で定義されるコルモゴロフの長さスケール $\eta = (\varepsilon_w / \nu^3)^{-1/4}$ 及び速度スケール $v = (\varepsilon_w \nu)^{1/4}$ を用いて整理した場合を示す。粘性パラメータで整理した場合と比べて定量的に大きな改善が得られている。しかしながら、定性的挙動の異なるこれらの分布を壁面上の単一の代表値で整理することは困難であるといえる。

図4. 3. 4に圧力変動のRMS値を示す。縦軸は、上壁の壁面速度で無次元化を行っている。圧力は、大域的な影響を受け易い量であり (Kim 1989)、その局所での挙動が、速度場の局所的な特性を必ずしも反映しているとはいえないが、ここでは、図3. 3. 1において速度変動に大きな極大値がみられるケースPでは、その極大位置よりもやや壁から離れた位置において圧力変動に極大値がみられるのに対して、その他のケースでは速度変動の減衰にともなって圧力変動も減衰するが壁面の存在により速度変動が急激に減衰する $y/\delta < 0.1$ で圧力変動はほぼ一定値となることが指摘できる。

4. 3. 2 非等方テンソル

ここでは、レイノルズ応力の強度の情報を省いた非等方度に着目して、各ケースの壁近傍の特性を調べる。

レイノルズ応力の非等方テンソル b_{ij} は、

$$b_{ij} = \overline{u_i u_j} / \overline{u_k u_k} - (1/3) \delta_{ij}$$

で定義され、レイノルズ応力場の等方場からのずれを表わすものである。この定義より、

$$-\frac{1}{3} \leq b_{ij} \leq \frac{2}{3}$$

$$b_{ii} = 0$$

の性質をもつ。

また、非等方テンソルの特性方程式は、

$$\lambda^3 - I\lambda^2 + II\lambda - III = 0$$

であり、3つの不変量は、

$$I = b_{ii} = 0$$

$$II = -(1/2) b_{ij} b_{ij}$$

$$III = (1/3) b_{ij} b_{jk} b_{ki}$$

と表わされる。第一の不変量は連続条件より0となる。これらの不変量を用いることによって、レイノルズ応力場の状態を座標系に依存しないものとして表現することができる。横軸を $-II$ 、縦軸に III をとした非等方マップでは、レイノルズ応力場の状態は、図4. 3. 5に示したように縮流的軸対称流、拡張流的軸対称流および二次元状態を表わす境界によって囲まれる領域中の点で表わされる(Lee and Reynolds 1985)。

非等方テンソル b_{ij} の分布を図4. 3. 6(a, b, c, d)に、またレイノルズ応力のテンソル不変量マップ及びレイノルズ応力テンソルの最大応力方向を示す主軸角を図4. 3. 7(a, b, c, d)に示す。

ケースCP1、CP2、CP3の場合に b_{ij} の各成分がほぼ一定となる領域が存在し、またこの領域が $CP1 < CP2 < CP3$ の順に広がっていることが観察できる。これらの領域は図4. 2. 2に示した上壁からの対数領域に対応している。ケースPの場合にこの傾向が顕著に現われないのは低レイノルズ数のため対数領域が十分に発達しないためと考えられる。

図4. 3. 6(a)あるいは図4. 3. 7(a)にみられるようにケースPのチャンネル中央では、応力場が3次元等方化する傾向を示す。この3次元等方化の傾向は、平均速度勾配が0となるケースCP1の $y/\delta = 0.52$ 、

ケース CP 2 の $y/\delta = 0.34$ 付近においても観察される。

一方、壁面の近傍ではいずれのケースにおいても b_{22} が専ら減衰を受けることによって場が 2 次元的となるが、同時に b_{33} が急激に増加し、壁面水平方向成分が等方化する傾向をみせる。ここでは、壁面垂直方向の垂直応力が壁水平方向の垂直応力へ、その非等方度に応じて選択的に変換される機構の存在が示唆されるが、これに対応するエネルギーの再分配項の挙動については § 4. 5 で報告する。

以上の観察からレイノルズ応力場の等方化の要因として、

平均速度勾配が 0 となることによる効果 (3 次元等方化)

固体壁が存在することによる効果 (2 次元等方化)

を指摘することができる。

§ 4. 4 速度変動の歪み度・平坦度

速度変動の歪み度 $S(u) = \overline{u^3} / u_{rms}^3$ 、平坦度 $F(u) = \overline{u^4} / u_{rms}^4$ の分布を図 4. 4. 1、図 4. 4. 2 に示す。w の歪み度は場の対称性より、0 となるべきものであり、統計量を求める際のサンプリング数の目安となる。

u、v、w の平坦度は計算を行った全てのケースについて壁面上で最大となり、速度勾配の有無あるいは強弱にかかわらず、壁面近傍では極めて間欠性の高い現象が起こっていることが示唆される。u の歪み度はいずれのケースにおいても壁面上で正の値となるが、これは高速流体が間欠的に壁面に到達することを表わしているが、通常の壁面剪断流ではスイープ運動による効果として解釈されている (Johansson and Alfredsson 1986)。v の歪み度は、壁近傍で大きな負値をとるもの (ケース CP2、ケース CP3) と、壁面近傍で負値から正転するもの (ケース P、ケース CP1) の 2 つのグループに分けることができる。負値をとる場合に関しては、対向壁側からの強い乱れが間欠的に壁面上に到達しているためであると解釈できる。剪断自由な界面近傍での速度変動の歪み度、平坦度に関する実験報告は著者の知る限り佐田と笠木 (1990) のもののみである。彼らは、近年開発された画像処理流速計 (西野 (1990)) を用いて、剪断自由な固液界面での乱流計測を行っている。彼らの歪み度のデータはバラつきが大きいですが、壁垂直方向の速度変動は負の値をもつ傾向をみせている。また、その平坦度は壁近傍で極めて大きな値を持つことが示されている。

v の歪み度が壁面上で正となるケース P およびケース CP1 の歪み度、平坦度を、壁からの距離を壁面パラメータで無次元化した場合についてそれぞれ図 4. 4. 3、図 4. 4. 4 に比較して示す。S(u) には $y^+ = 12$ で符号を変える点を含めて定量的にもよい一致がみられる。また F(u) では、いわゆる

緩和層に対応する領域で $F(u) < 3$ となる点において定性的一致がみられる。これらの量の挙動は、前章で示したように、乱流境界層 (Karlsson and Johansson 1986)、二次元チャネル乱流 (Nishino and Kasagi 1989、Niederschulte et al. 1990) の測定結果にも同様にみられ、 $y^+ < 12$ では、高速流体が壁面に流れ込む運動 (スweep) が、 $y^+ > 12$ では低速流体の放出運動 (イジェクション) が、それぞれ支配的であることとかわっている (Johansson and Alfredsson 1986、Kim et al. 1987)。但し、 $S(v)$ が壁面で正となる点については未だ物理的な説明がなされていない。図 4. 4. 3、図 4. 4. 4 にみられる両ケースの場合の類似性は対数領域を有さないケース CP1 の場合にも、通常の壁面剪断流に特徴的にみられるこれらの流体運動が存在していることを示唆している。

§ 4. 5 乱流エネルギー及びレイノルズ応力の収支

レイノルズ応力の輸送方程式は、ナビエ・ストークス方程式からレイノルズ方程式を差し引いて得られた x_i 成分の方程式に速度変動 u_j を乗じ、変動応力の方程式を導いたのち、これに平均操作（アンサンブル平均）を施すことによって得られる（Bradshaw 1976）。代表速度 u_r と動粘性係数 ν で無次元化した非圧縮の応力輸送方程式は次のように表わされる。

$$\overline{\frac{D}{Dt} u_i u_j} = P_{ij} + J t_{ij} + J v_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (3.5.1)$$

ここで、

$$\overline{D/Dt} = \partial/\partial t + U_k \partial/\partial x_k$$

$$P_{ij} = - [\overline{u_i u_k U_{i,k}} + \overline{u_j u_k U_{i,k}}] \quad \text{生成項}$$

$$J t_{ij} = - \overline{(u_i u_j u_k)_{,k}} \quad \text{乱流輸送項}$$

$$J v_{ij} = \overline{(u_i u_j)_{,kk}} \quad \text{粘性拡散項}$$

$$\Pi_{ij} = - (\overline{u_i p_{,j}} + \overline{u_j p_{,i}}) \quad \text{速度・圧力勾配相関項}$$

$$\varepsilon_{ij} = 2 \overline{u_{i,k} u_{j,k}} \quad \text{散逸項}$$

である。

平行平板間の十分に発達した二次元流の場合には、場のスパン方向への対称性から、

$$\overline{u_1 u_3} = \overline{u_2 u_3} = 0$$

であり、残る独立な4つの応力成分に対する輸送方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 0 &= -\overline{2 u_1 u_2} U_{1,2} - \overline{(u_1^2 u_2)}_{,2} + \overline{(u_1^2)}_{,22} - 2 \overline{u_1 p}_{,1} - 2 \overline{(u_{1,k} u_{1,k})} \\
 0 &= 0 - \overline{(u_2^2 u_2)}_{,2} + \overline{(u_2^2)}_{,22} - 2 \overline{u_2 p}_{,2} - 2 \overline{(u_{2,k} u_{2,k})} \\
 0 &= 0 - \overline{(u_3^2 u_2)}_{,2} + \overline{(u_3^2)}_{,22} - 2 \overline{u_3 p}_{,3} - 2 \overline{(u_{3,k} u_{3,k})} \\
 0 &= -\overline{u_2^2} U_{1,2} - \overline{(u_1 u_2 u_2)}_{,2} + \overline{(u_1 u_2)}_{,22} - \overline{u_1 p}_{,2} - \overline{u_2 p}_{,1} \\
 &\quad - 2 \overline{(u_{1,k} u_{2,k})} \tag{3.5.2}
 \end{aligned}$$

また、乱流エネルギー $(1/2) \overline{u_i u_i}$ の輸送方程式は、レイノルズ応力テンソル方程式の対角成分を足し合わせ、1/2を乗じることによって次のように得られる。

$$\frac{\overline{D}}{\overline{D t}} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) = P_k + J t_k + J v_k + J p_k - \varepsilon_k \tag{3.5.3}$$

ここで、

- $P_k = - \overline{u_i u_j} S_{ij}$ 生成項
- $J t_k = - \frac{1}{2} \overline{(u_i u_i u_j)}_{,j}$ 乱流輸送項
- $J v_k = \frac{1}{2} \overline{(u_i u_i)}_{,jj}$ 粘性拡散項
- $J p_k = - \overline{(u_j p)}_{,j}$ 圧力拡散項
- $\varepsilon_k = \overline{u_{i,j} u_{i,j}}$ 散逸項

平行平板間の十分に発達した2次元流の場合には、

$$0 = \overline{-u_1 u_2 U_{1,2}} - (1/2) \overline{(u_i u_i u_2)_{,2}} + (1/2) \overline{(u_i u_i)_{,22}} \\ - \overline{(u_2 p)_{,2}} - \overline{u_{1,j} u_{1,j}} \quad (3.5.4)$$

4. 5. 1 乱流エネルギーの収支

乱流エネルギーの収支を図4. 5. 1 (a, b, c, d)に示す。ケースP、CP1 (図4. 5. 1 (a, b)) については各項の大きさ、及び壁からの距離は下壁での摩擦速度と動粘性係数を用いて無次元化を行っている。一方、ケースCP2、CP3 (図4. 5. 1 (c, d)) については壁面での速度勾配に基づく摩擦速度は適当なスケールパラメータとはならないため、ここでは各項の大きさは下壁での散逸率 $(\varepsilon_k)_w$ を用いて無次元化を行っている。

ケースPとケースCP1の壁近傍 ($y^+ < 20$) における各項の挙動の相似性はきわめてよく、注目に値する。特に、生成項、散逸項が極大となる位置は対数領域を持たないケースCP1の場合においても、 y^+ で適当にスケールリングされていることが分かる。ケースPに対して、ケースCP1では圧力拡散項がやや大きな値となっている。圧力は大域的な影響を受け易い量であるが、ケースCP1の外層に強い乱れが存在し、これが内層の圧力変動に影響を及ぼしていると考えられる。この点を明らかにするために壁面圧力変動と流体中の速度変動との相互相関係数 $R_{pu} = \overline{p(0)u(y)} / \overline{p_{rms}(0)u_{rms}(y)}$ を図4. 5. 2に示す。ケースCP1では壁面における圧力変動が平均速度勾配が0となる $y/\delta = 0.52$ を越えた遠方の速度変動と強い相関を持っていることが分かる。壁から離れるにしたがって両ケースの差が顕著となるが、これはケースCP1の場合に $y^+ = 40$ で平均速度勾配が符号を変えることに

よっている。ケース P では $y^+ > 30$ で生成項と散逸項が卓越するのに対して、ケース CP1 では $y^+ = 40$ 付近で乱流拡散と散逸項が卓越する。この状態は生成項が 0 となるケース P チャンネル中央での状態と類似している。なお僅かではあるが $y^+ = 35 \sim 40$ で生成項が負の値となっている。

両ケースにおける各項の定量的な相違については、図 4. 2. 3 にみられるようにケース CP1 の場合、外層において対数領域のような平均的な高速領域が存在しないため、乱れによる運動量交換が相対的に効率よく行われなためと考えられる。しかしながら、ここで得られた両ケースの相似性は、前節で考察した歪度、平坦度の結果とあわせて、ケース CP1 のように対数領域が存在しない場合においても、壁近傍における乱れの生成、散逸に関して通常の壁面剪断流と同様の機構が存在することを示唆している。

ケース CP2、CP3 (図 4. 5. 1 (a, b)) の場合においては壁近傍での各項のバランスは壁面剪断流の場合と大きく異なっている。ケース CP3 に対して相対的に大きな壁面速度勾配を有するケース CP2 の場合においても生成項の寄与は無視し得るほど小さく、むしろ $y/\delta = 0.1 \sim 0.34$ の広い範囲において負の値をとっている。これは対向壁側から $\overline{u'v'} > 0$ 相関を持つ強い渦が平均速度勾配が 0 となる境界 ($y/\delta = 0.34$) を越えて下壁近傍にまで到達することによると考えられる。有意な乱れの生成がみられないこれらの場合には外層で生成された乱れが乱流拡散、圧力拡散を通じて壁近傍に輸送され、壁面上で大きな散逸を示すことが特徴的である。このような特徴を示す流れ場を適切に予測するためには壁近傍における圧力拡散項、乱流拡散項のモデル化の妥当性が重要な因子として考えられる。笠木ら(1989)はこの点に着目し、 $k-\varepsilon$ モデルにおける乱流拡散項のダンピング関数を修正し、壁面漸近挙動を満足させることによって、予測精度が向上することを報告して

いる。

4. 5. 2 レイノルズ応力の収支

レイノルズ応力輸送方程式の各項のバランスをケース P、CP1 について図 4. 5. 3 ~ 図 4. 5. 6 に示す。ここでも壁面近傍 ($y^+ < 20$) における両ケースの類似性が確認できる。

壁面剪断乱流中で成立するレイノルズ応力の収支に関して、以下の特徴が指摘できる。

$\overline{u u}$ の収支 (図 4. 5. 3) では、 $y^+ \approx 12$ で最大となる生成項が支配的である。遷移層で生成された $\overline{u u}$ は、その約半分が散逸によって局所的に消費され、残りの $\overline{u u}$ は乱流拡散によって壁側及びチャンネル中央側へ輸送され、粘性拡散によってさらに壁面近傍へ運ばれる。粘性拡散によって壁面近傍に輸送された $\overline{u u}$ は壁面上で最大となる散逸によって消費される。また、 $\overline{u u}$ の一部は壁のごく近傍を除いて負の値を持つ速度・圧力勾配相関項によって消費されるが、ここでは速度・圧力勾配相関項は圧力・歪相関項と等しく、他の垂直応力成分へエネルギーを再分配していることを意味している。この速度・圧力勾配相関項は対数領域において散逸とほぼ等しい値を持つ。

$\overline{v v}$ の収支 (図 4. 5. 4) での各項の値は、他の応力成分のそれらに対して最も小さい値を持つ。主要な取得項は $y^+ \approx 35$ で最大となる速度・圧力勾配相関項である。この特徴はケース CP1 においてはみられないが、 $y^+ = 40$ で平均速度勾配が 0 となる事情によると思われる (ここにみられる乱流拡散項が取得項として卓越し、散逸項と釣り合うバランス関係は、図には示されていないが、平均速度勾配が 0 となるケース P のチャンネル中央において成立している)。

$\overline{w w}$ の収支 (図 4. 5. 5) では、壁面のごく近傍で粘性拡散が大きい値を持つ点を除くとほぼ全域にわたって速度・圧力歪相関項 (圧力・歪相関項に等しい) と散逸項が支配的であり、乱流拡散はほとんど無視できる。

$\overline{u v}$ の収支 (図 4. 5. 6) では、生成項と速度・圧力勾配相関項が支配的であり粘性による効果 (散逸、粘性拡散) は、壁面のごく近傍を除いて無視し得る程度の大きさである。

ケース CP 2、CP 3 の場合についてレイノルズ応力の収支を図 4. 5. 7 ~ 図 4. 5. 10 に示す。ここでも各項は乱流エネルギーの収支の場合と同様に各ケースの壁面における散逸率 $(\varepsilon_k)_w$ で無次元化されている。

$\overline{u u}$ の収支 (図 4. 5. 7) の状況は、剪断を有する場合 (ケース P、CP 1) と大きく異なり、乱流拡散による対向壁側からの輸送と速度・圧力勾配相関項 (圧力・歪相関項) による寄与が主要な取得となっている。また、速度・圧力勾配相関項によって取得された $\overline{u u}$ の一部が粘性拡散によって壁面近傍へ輸送され、壁面で大きく散逸されている。これらの挙動を $\overline{w w}$ の収支 (図 4. 5. 9) と比較すると、 $\overline{w w}$ の収支では乱流拡散による寄与が相対的に小さいことが分かる。ここにみられるような乱流拡散項の寄与の差は、局所的に速度勾配 $\partial U / \partial y$ が存在することによる効果の他に、外層において非等方性の強い乱流場が存在していることによると考えられる。理想的に 2 次元等方化された乱流場では $\overline{u u}$ と $\overline{w w}$ の収支は全く同じものとなる。

$\overline{v v}$ の収支 (図 4. 5. 8) では、乱流拡散が主要な取得の項であること、また速度・圧力勾配相関項が消散項となっていることが通常の壁面剪断流 (ケース P、図 4. 5. 4) と比べて対照的である。

図 4. 6. 10 に $\overline{u v}$ の収支を示す。ケース CP 2 では、 $y / \delta = 0. 1 \sim 0. 34$ で $-\overline{u v} (\partial U / \partial y)$ が負となることは乱流エネルギーの収支の

節で既に報告し、これが外層から侵入する $u v > 0$ の渦の効果であるとの推論を起てた。この領域では $\overline{u v}$ に正の寄与をする乱流拡散項が生成項 $-\overline{v^2} \partial U / \partial y$ (この項は $\partial U / \partial y$ によって符号が一意的に定まる) より卓越しておりこの推論を裏付けている。ケース CP2、CP3ともに乱流拡散項の寄与が卓越するという点でケース P (図4. 5. 6) と異なるが、理想的な2次元等方乱流場の場合には、 $\overline{u v}$ の収支式に現われる項は全て0となるべきものである。

4. 5. 3 圧力・速度歪相関項

壁近傍のレイノルズ応力の収支において速度・圧力勾配相関項が、壁面近傍で流れ方向のレイノルズ応力に有意な生成がみられる場合には、 $\overline{w w}$ に対して、また、速度勾配が小さく生成がほとんどない場合には $\overline{u u}$ と $\overline{w w}$ に対して、主要な取得の項となっていることが分かった。本節では圧力項が担う応力の再分配の効果についてさらに検討を加える。

速度・圧力勾配相関項は次のように圧力・速度歪項と圧力拡散項に分離することができる。

$$\Pi_{ij} = \phi_{ij} + J_{pij} \quad (4.5.5)$$

$$\phi_{ij} = \overline{2 p s_{ij}}$$

$$J_{pij} = - \overline{(p (u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik}))}, k$$

右辺第1項 (ϕ_{ij}) は乱流エネルギーの再分配項とも呼ばれ、垂直応力間での乱流エネルギーの交換を担っている (Hinze 1975)。十分に発達した2次元チャンネル乱流の場合には流れ方向及びスパン方向への一様性によって、

Π_{11} 、 Π_{33} が再分配項 ϕ_{11} 、 ϕ_{33} とそれぞれ同値となる。図4. 5. 11に

ϕ_{22} と J_{p22} の分布を、また図4. 5. 12に ϕ_{12} と J_{p12} の分布を示す。各項の無次元化は、ケースP、CP1の場合には下壁での粘性パラメータによって、またケースCP2、CP3の場合には下壁での乱流エネルギーの散逸率 $(\varepsilon_k)_w$ によって行っている。いずれのケースにおいてもこれらの項は壁近傍で大きな値をとるが、圧力・歪相関項と圧力拡散項が互いに相殺する関係にあることが分かる。

図4. 5. 13に垂直応力の再分配項の分布を示す。ケースPではチャンネルの広い領域にわたって、 ϕ_{11} の値は負であり、最も変動の大きい流れ方向の速度変動成分から他の成分への再分配が行われていることを示している。壁の近傍においては ϕ_{22} の値が負となり、壁面に垂直な速度変動成分から壁面に水平な成分への再分配が行われていることが示されている。Moin and Kim(1982)は、この現象が壁に垂直な運動が壁面によるブロッキングによって壁面水平方向の運動に変換されることによって生ずるものであることをLESの結果を用いて観察し、これを'スプラッティング効果'と名付けた。速度勾配の弱いケースCP1、CP2、CP3において、この現象はより顕著に観察される。

再分配項は、連続の式を用いてさらに次のように分解することが可能である。

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= (1/3)(\phi_{11} - \phi_{22}) + (1/3)(\phi_{11} - \phi_{33}) \\ \phi_{22} &= (1/3)(\phi_{22} - \phi_{33}) + (1/3)(\phi_{22} - \phi_{11}) \\ \phi_{33} &= (1/3)(\phi_{33} - \phi_{11}) + (1/3)(\phi_{33} - \phi_{22})\end{aligned}\quad (4.5.6)$$

例えば、 ϕ_{11} 式の右辺第一項は、 ϕ_{22} 式の右辺第二項に符号を変えて現われることから、右辺の各項は対応する垂直応力2成分間での平均的なエネルギーの再分配を表わすと考えることができる。図4. 5. 14にこれらの分布

を示す。

式(4.5.6)の分解を施すことによってケースPにおいて壁近傍で $\overline{v v}$ から $\overline{u u}$ へのエネルギー供給が行われていることが明確にみてとれる(図4.5.14(a))。また、 $\overline{v v}$ から他の成分へのエネルギー再分配は、 $\overline{w w}$ に対してより多く行われている。壁の近傍では壁面に水平な応力成分が等方化する傾向がみられる(図4.3.4(a))が、スプラッティング効果がこの等方化の一端を担っていることが示唆される。ケースCP1では、ケースPと比べてスプラッティング効果が壁面からより離れた位置にまでおよんでいる。また、 $(\phi_{11} - \phi_{22})/3$ が $y^+ \sim 10$ で一旦減衰するが、流れ方向垂直応力の生成率が極大値をとり(図4.5.3)、同時に流れ方向垂直応力自身も極大となる効果によるものと思われる。

壁面剪断の弱いケースCP2、CP3では、 $\overline{v v}$ から $\overline{u u}$ 及び $\overline{w w}$ へのエネルギー再分配がより等方的に行われており、 $\overline{u u}$ 、 $\overline{w w}$ 間のエネルギー再分配に卓越する効果として現われている。なお、ケースCP2においては、壁垂直方向成分から、水平方向2成分への再分配が行われている点については他のケースと同様であるが、 $\overline{w w}$ よりも $\overline{u u}$ に対してより多くの再分配が行われており、また $\overline{w w}$ から $\overline{u u}$ へも平均的にエネルギーの再分配が行われる特異な挙動を示している。これらの再分配項の挙動は、壁面に近づくにつれて、流れ方向垂直応力の非等方度が増加する(図4.3.6(c))傾向と符合している。ケースCP2では、 $y/\delta = 0.1 \sim 0.34$ で $u u$ に負の生成がみられ、この損失を補う形でエネルギー再分配が行われているとも考えられるが、現時点ではこれらの関連についての十分な証拠は得られていない。

§ 4. 6 壁面近傍の乱流構造

図 4. 6. 1 ~ 図 4. 6. 4 に各ケースの壁面近傍における壁面に平行な断面内での流れ方向速度変動の等値線図、及び速度変動ベクトル線図を示す。ケース P 及びケース CP 1 では、ストリーク構造が観察される。このことは、ストリーク構造が対数領域の存在とは独立に存在することを示している。しかしながら、ケース CP 1 では外層から進入する渦の影響が強く現われ、ケース P と比べてストリークが寸断化される傾向がみられる。これに対して、壁面剪断がさらに弱いケース CP 2、CP 3 ではもはやストリーク構造は観察されない。Lee et al. (1990) は、乱流の時間スケール $\overline{u_i u_i} / \varepsilon$ と平均場の変形が進行する時間スケール $1 / (\partial U / \partial y)$ の比として定義される無次元シェアパラメータ $S^* = (\partial U / \partial y) \overline{u_i u_i} / \varepsilon$ が十分に大きい ($S^* > 30$) 場合に固体壁の存在しない一様剪断流においてストリーク構造が観察されることを DNS によって確認し、壁面乱流におけるストリーク構造の主要な生成要因が滑りなし条件によって引き起こされる強い速度勾配であることを指摘している。各ケースの S^* の分布を図 4. 6. 5 に示す。ストリーク構造が観察されるケース P、CP 1 では下壁近傍で S^* が大きな極大値を持ち、Lee et al. の指摘を支持する結果となっている。

ストリーク構造が存在しないケース CP 2、CP 3 の壁面近傍においては、図 4. 6. 3 (b)、図 4. 6. 4 (b) にみられるように壁面に水平な速度ベクトル成分が発散するパターンが随所にみられる。これらの発散パターンの中央部では、壁面に向かう強い流体運動が存在しており、前節で確認した壁面垂直応力成分から水平方向成分へのエネルギーの再分配は、このような間欠的な現象にともなって生じていることが示唆される。さらに、このような現象が空間的にどのような構造を有しているかを調べるためにケース CP 3 に

ついて壁面垂直方向の強い運動を検出することによって得られる平均的な流れ場を抽出した。その手法を以下に示す。

壁面に向かう流体運動を検出する場合

$y_d = 0.05$ の断面において、

$$v(x, y_d, z; t) < -2 v_{rms}(y_d)$$

かつ

$$v(x, y_d, z; t) = \min \{ v(x', y_d, z'; t); \\ x - 0.74\delta < x' < x + 0.74\delta, \\ z - 0.74\delta < z' < z + 0.74\delta \} \quad (4.6.1)$$

の場合に、空間的に独立なイベントが発生したと判断して、このイベントを j という番号を与える。このイベントにかかわる平均的な速度場 $\langle u_i(x, y, z) \rangle$ 、圧力場 $\langle p(x, y, z) \rangle$ は、

$$\langle u_i(x, y, z) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_i(x - x_j, y, z - z_j) \quad (4.6.2)$$

によって定義している。ここで N は、検出された全イベント数である。(4.6.2)では、検出位置を平均流れ場の中心とする操作が行われている。同様の抽出を壁面から離れる流体運動即ち、 $v(x, y_d, z; t) > 2 v_{rms}(y_d)$ を満たす場合についても行った。いずれの場合も検出位置は $|\phi_{22}|$ が最大となる $y_d = 0.05$ とした。抽出は連続する 8000 ステップ ($\approx 4(k/\varepsilon)_{max}$) の計算中、20 ステップ毎に行った。その結果、検出された全イベント数は、

$v < -2 v_{rms}$ のイベントに対して $N = 9833$

$v > 2 v_{rms}$ のイベントに対して $N = 8093$

であった。これらは1瞬間場における平均的なイベント数がそれぞれ $N = 25$ 、 20 に対応する。図4.6.4(b)にみられる発散パターンの頻度と比較して、空間的にはほぼ独立したイベントが捉えられたと考えられる。以下では、本手法で捉えられた壁面に向かう運動をインワードイベント、壁面から離れる運動をアウトワードイベントと呼ぶこととする。

図4.6.6(a,b,c)に検出点を含む $x-z$ 、 $z-y$ 、 $x-y$ の各断面におけるインワードイベントの速度変動ベクトル線図を示す。ここで、変動とは条件付き平均化によって得られた値から局所の長時間平均値を差し引いたものであることを意味する。また、図中に示した基準ベクトルは上壁における摩擦速度の2倍を表わす。図4.6.6(a)には図4.6.4(b)にみられる典型的な発散パターンが再現されている。この発散パターンは、スパン方向には対称であるが流れ方向については上流側により強く発散するという非対称性を有している。図4.6.6(b)からこの発散パターンが、チャンネル半幅に相当する遠方からの流体の進入運動に伴うものであることが分かる。また、この流体の進入運動は壁面近傍で壁面水平方向の運動に変換される様子が明瞭に観察される。さらに、この変換に伴い壁面近傍では強い変形 ($\partial w / \partial y$ 、 $\partial u / \partial y$) が生じており、これが壁面近傍での大きな散逸に結びついていると考えられる。図4.6.6(c)の観察からは下壁に向かう流体運動が平均的に流れ方向に負の変動をともなっていることが分かるが、これは平均速度が相対的に遅い領域(上壁側)から、速い領域(下壁側)に流体が移動することによると考えられる。図4.6.6(a)にみられる非対称性はこのような事情によるものである。しかしながら、検出点より下流側

では壁面に近づくとつれて急激に変動が正転しており、流れ方向に速度変動場が対称化される傾向がみられる。

図4.6.7(a,b,c)に検出点を含む $x-z$ 、 $z-y$ 、 $x-y$ の各断面におけるアウトワードイベントの速度変動ベクトル線図を示す。図4.6.7(a)では、検出点(図の中央)近傍にアウトワードイベントに伴い、流体が吸収されるパターンがみられるが、その上流にインワードイベントの存在を示めず発散パターンが現われている。これは、アウトワードイベントがインワードイベントに付随して生ずるものであることを意味している。このことは、 $x-y$ 断面の速度変動ベクトル線図(図4.6.7(c))において、アウトワードイベントの上流においてインワードイベントが観察されることから確認できる。平均剪断の全く存在しない理想的な状況下では、平均化された流れ場は図4.6.6(b)のように、検出点を中心として対称となるべきものである。図4.6.6(c)、4.6.7(c)にみられるように、アウトワードイベントはインワードイベントが生じた際、上流側にスプラットした流体運動が流れ方向の平均流(図の右方から左方に向かう流れ)によって押戻される様に生じているが、このパターンは、壁面に向かう流体が単純にスプラットする効果と平均流が存在する効果が重畳して得られるものであると推察される。

図4.6.8(a,b)にインワードイベントに伴う検出点を含んだ $z-y$ 断面の $\langle v \rangle$ 及び $\langle p \rangle$ の等値線を示す。チャンネルの中央領域から $y/\delta \approx 0.3$ にかけて壁面に向かう流体運動が空間的に加速し、さらに壁近傍では急激に減速 ($\partial v / \partial y < 0$) しているが、よどみ点近傍では局所的に高圧 ($p > 0$) となり、ここに示したインワードイベントが壁近傍で $\phi_{22} < 0$ となる挙動に貢献していることが確認できる。

表 4. 2. 1 摩擦速度、チャンネル半幅によるレイノルズ数
及び上壁、下壁における速度勾配の比

Case	$\frac{u_{z_t} \delta}{\nu}$	$\frac{u_{z_b} \delta}{\nu}$	f
P	150	150	-1.0
CP 1	148	79.0	-0.29
CP 2	152	49.0	-0.10
CP 3	154	17.7	-0.013

表 4. 2. 2 平均速度勾配が 0 となる位置

Case	y / δ	y^*_t	y^*_b
P	1.0	150	150
CP 1	0.52	220	40
CP 2	0.34	253	16
CP 3	0.03	303	0.5

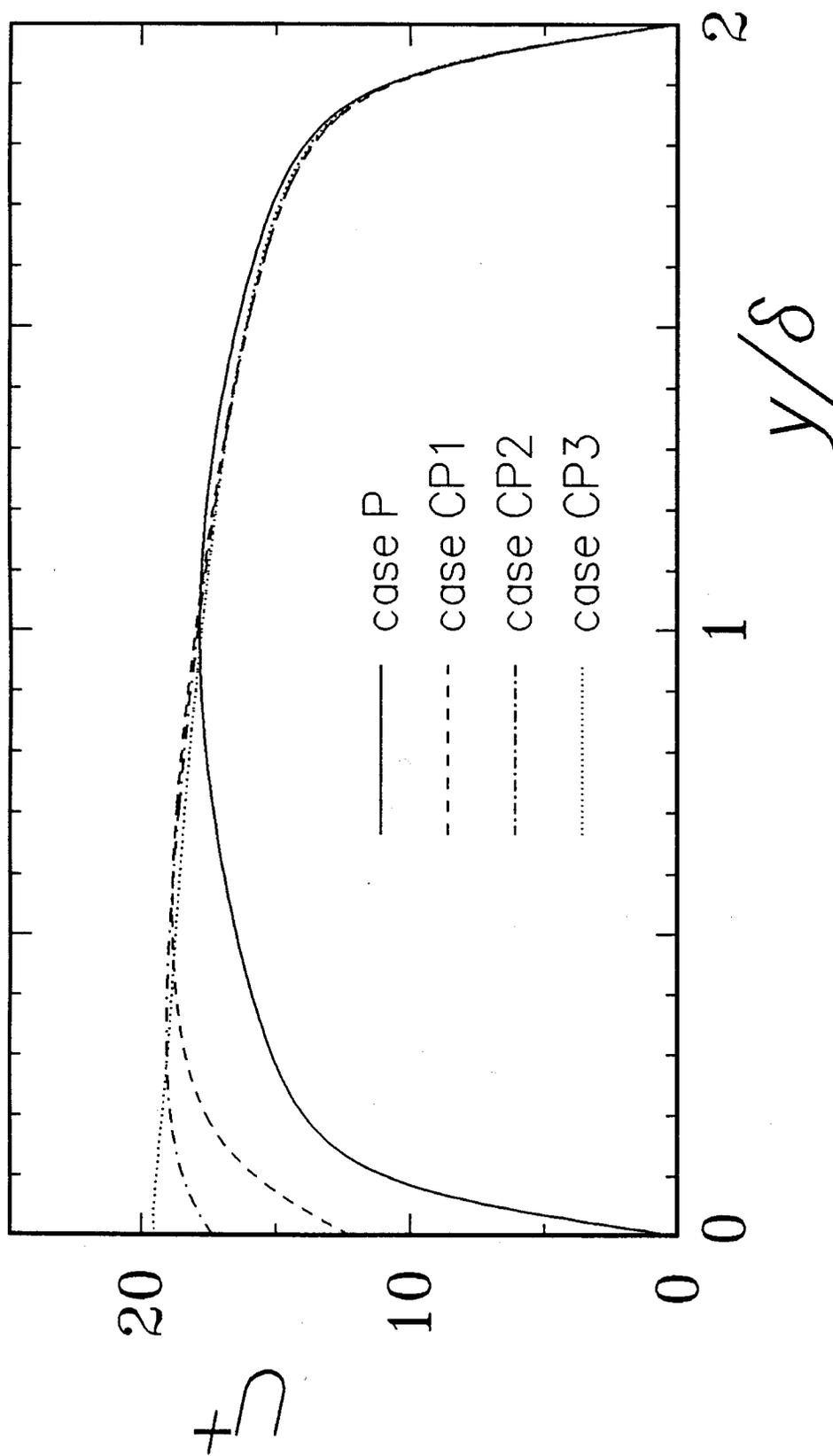


図 4. 2. 1 平均速度分布 (無次元化は上壁の u_z による)

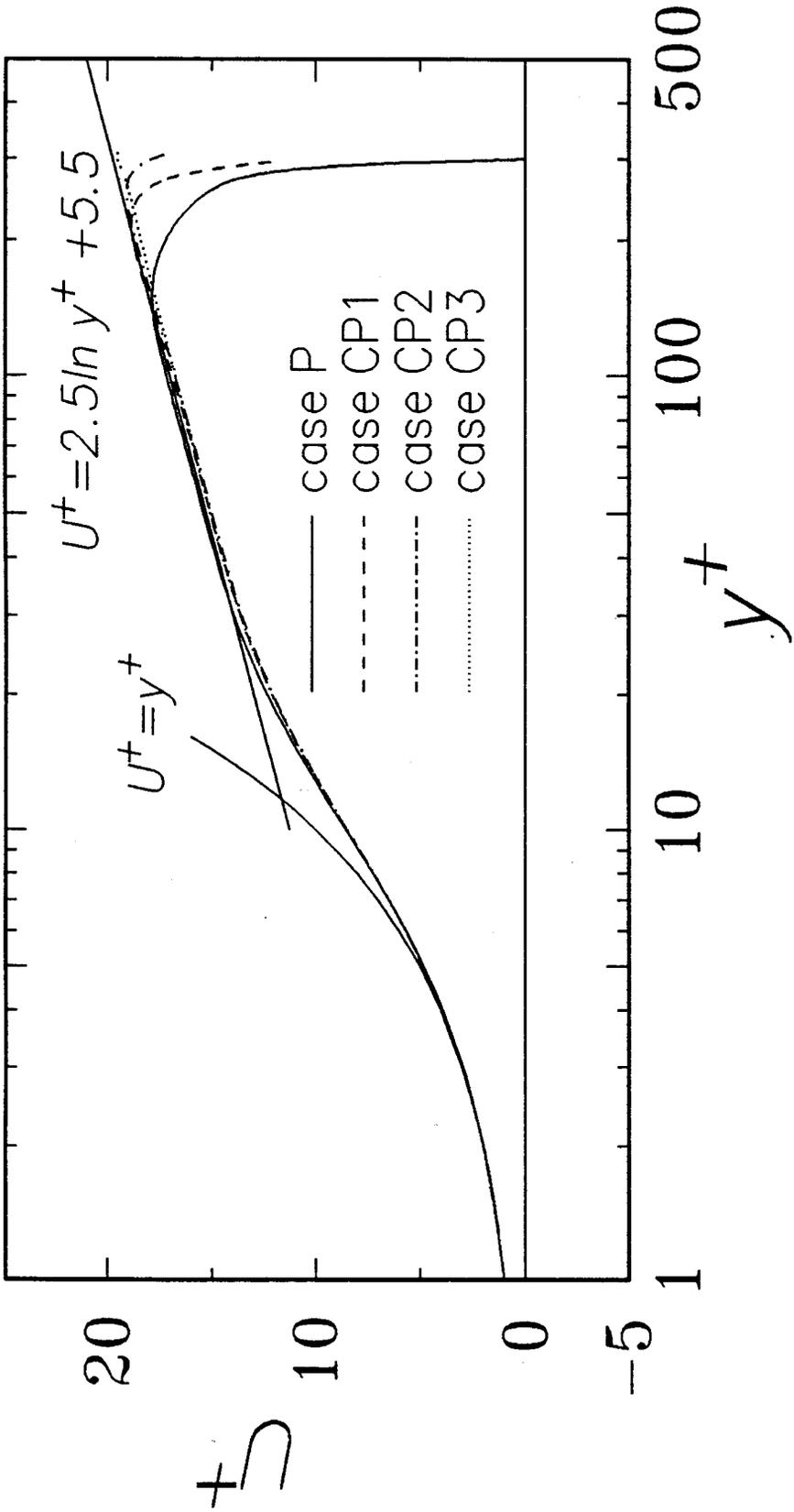


图 4. 2. 2 平均速度分布 (上壁の壁座標表示)

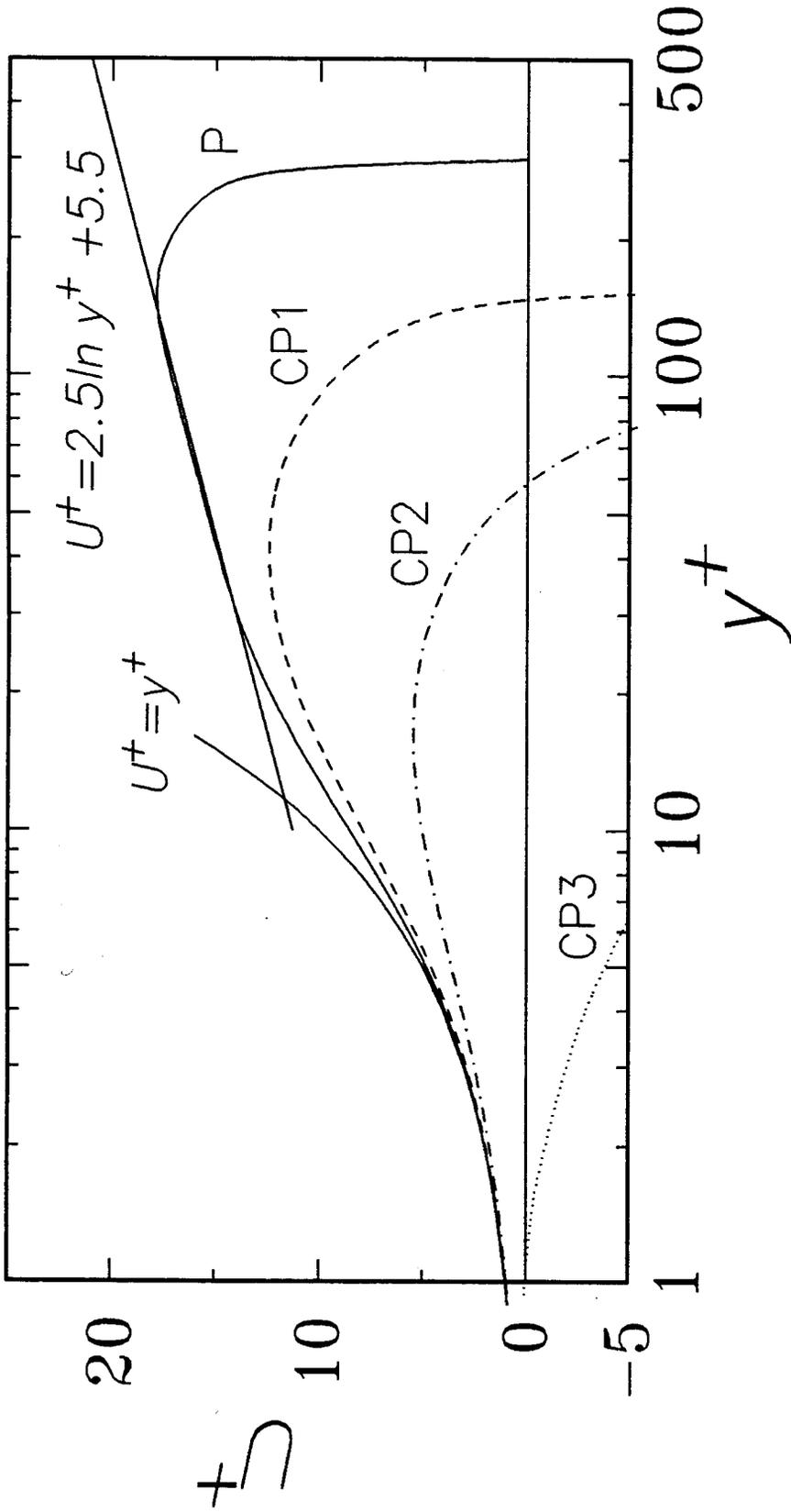


図 4. 2. 3 平均速度分布 (下壁の壁座標表示)

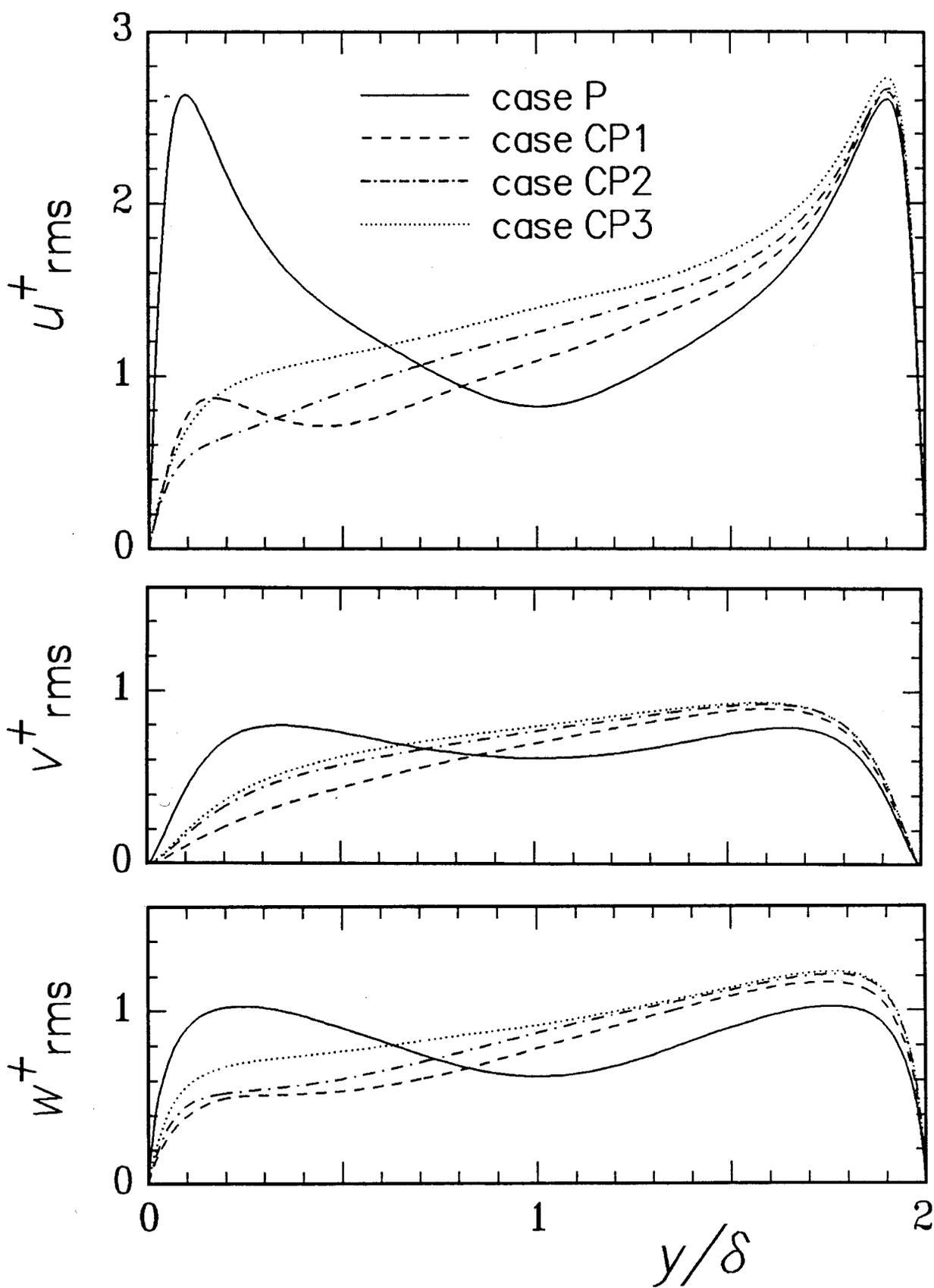


図 4. 3. 1 速度変動の RMS 値 (無次元化は上壁の u_τ による)

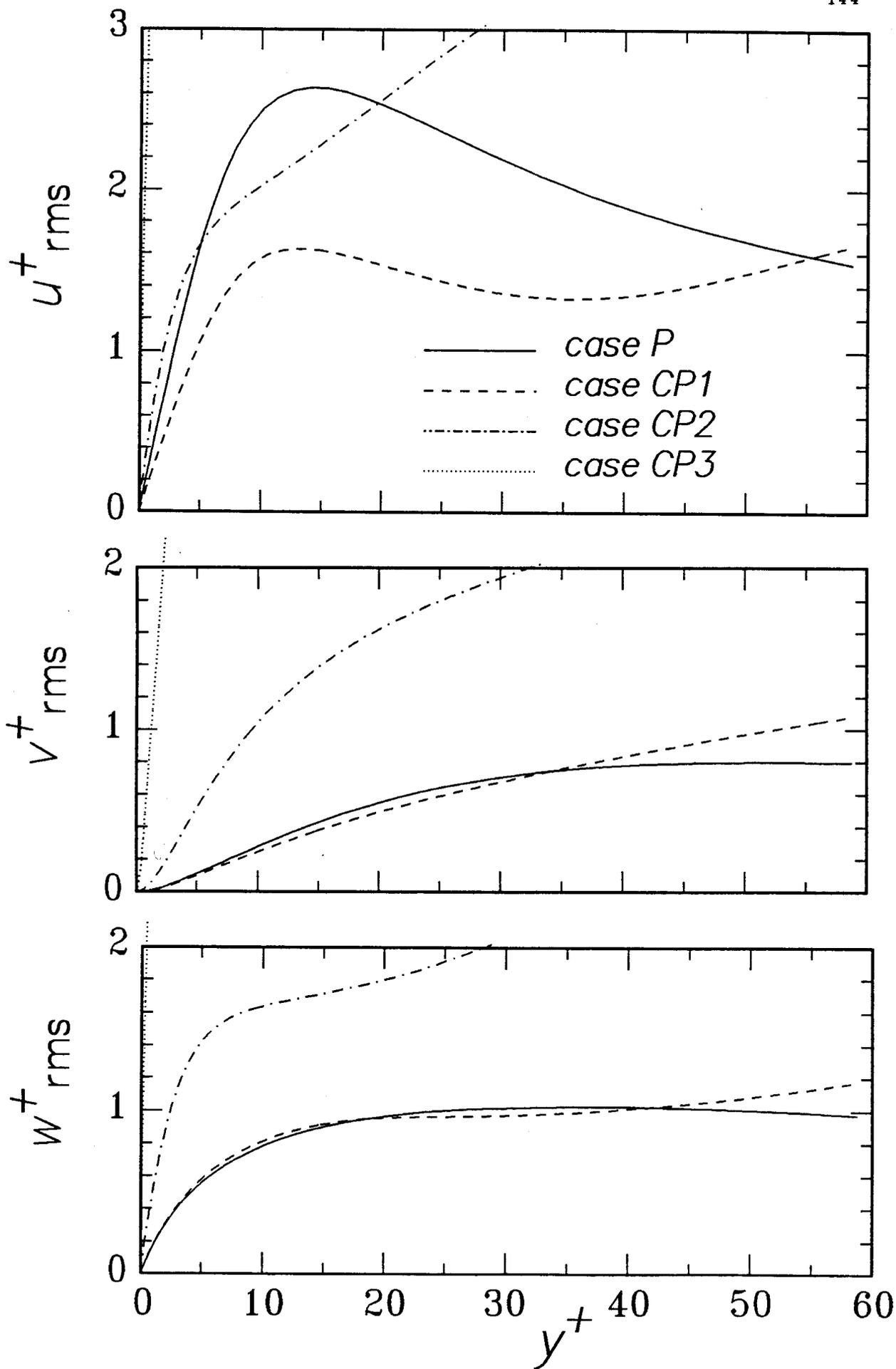


図 4. 3. 2 速度変動の RMS 値 (下壁の壁座標表示)

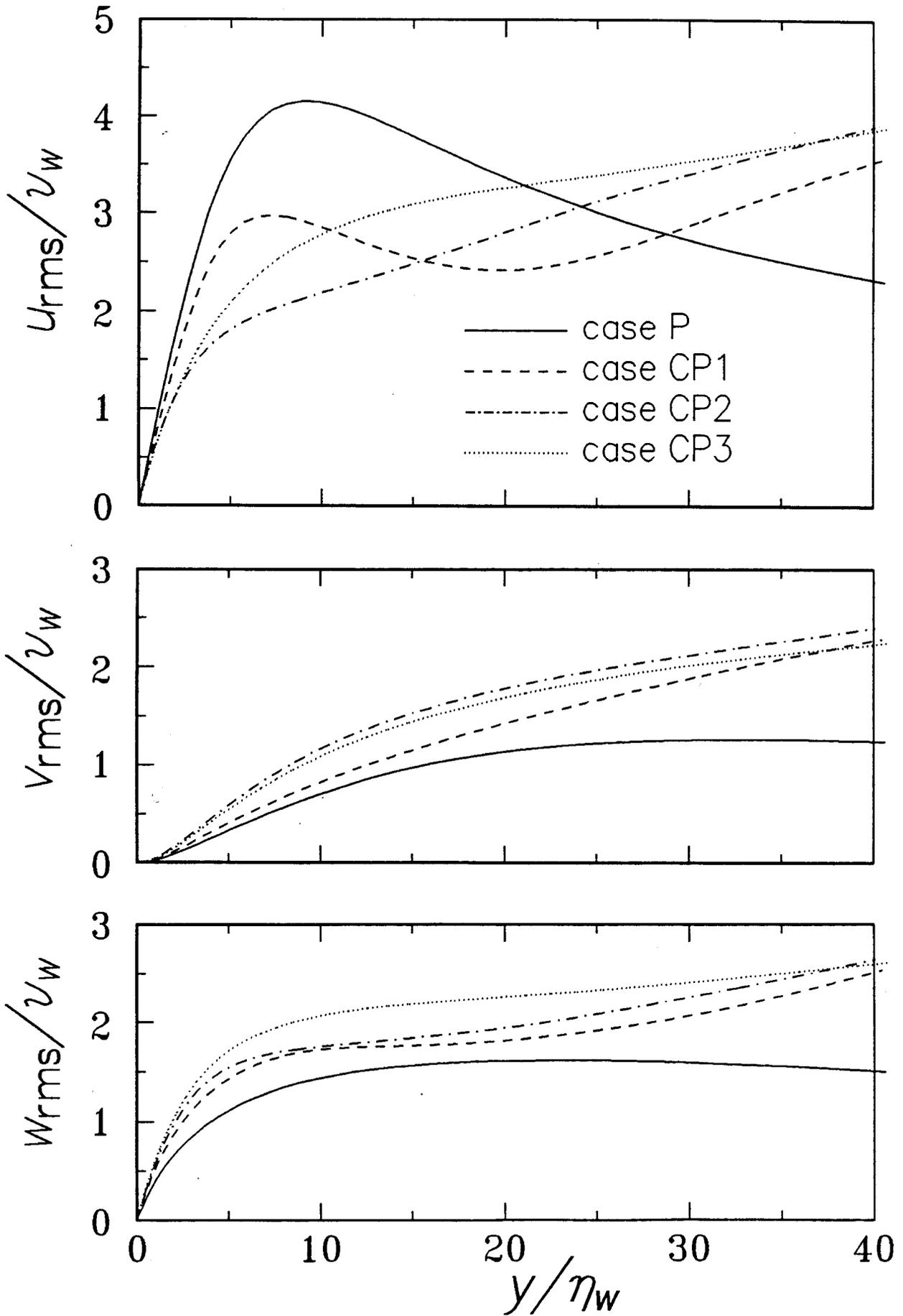


図 4. 3. 3 速度変動の RMS 値 (壁面コルモゴロフスケールによる無次元化)

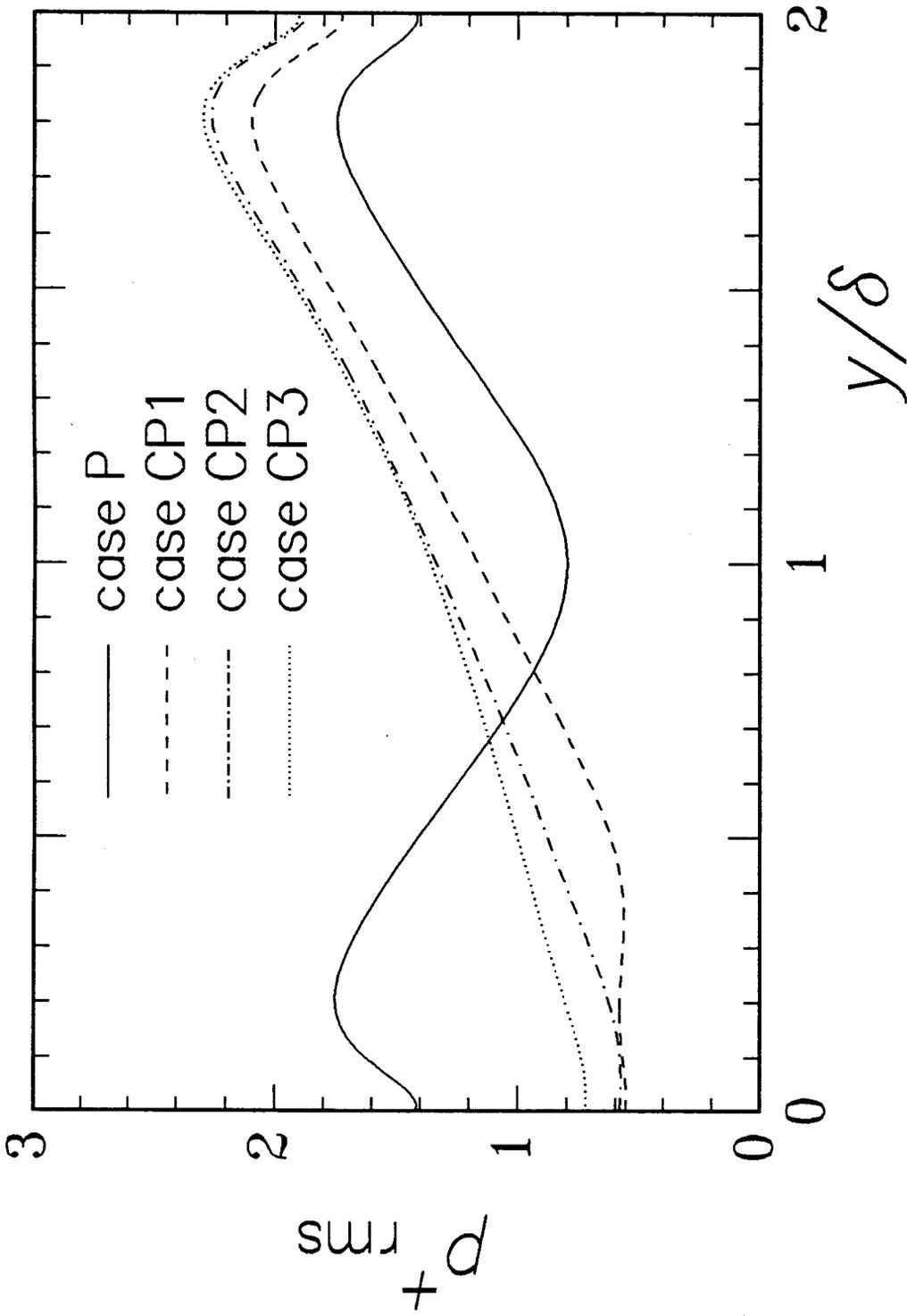


図4.3.4 圧力変動のRMS値（無次元化は上壁の u_z による）

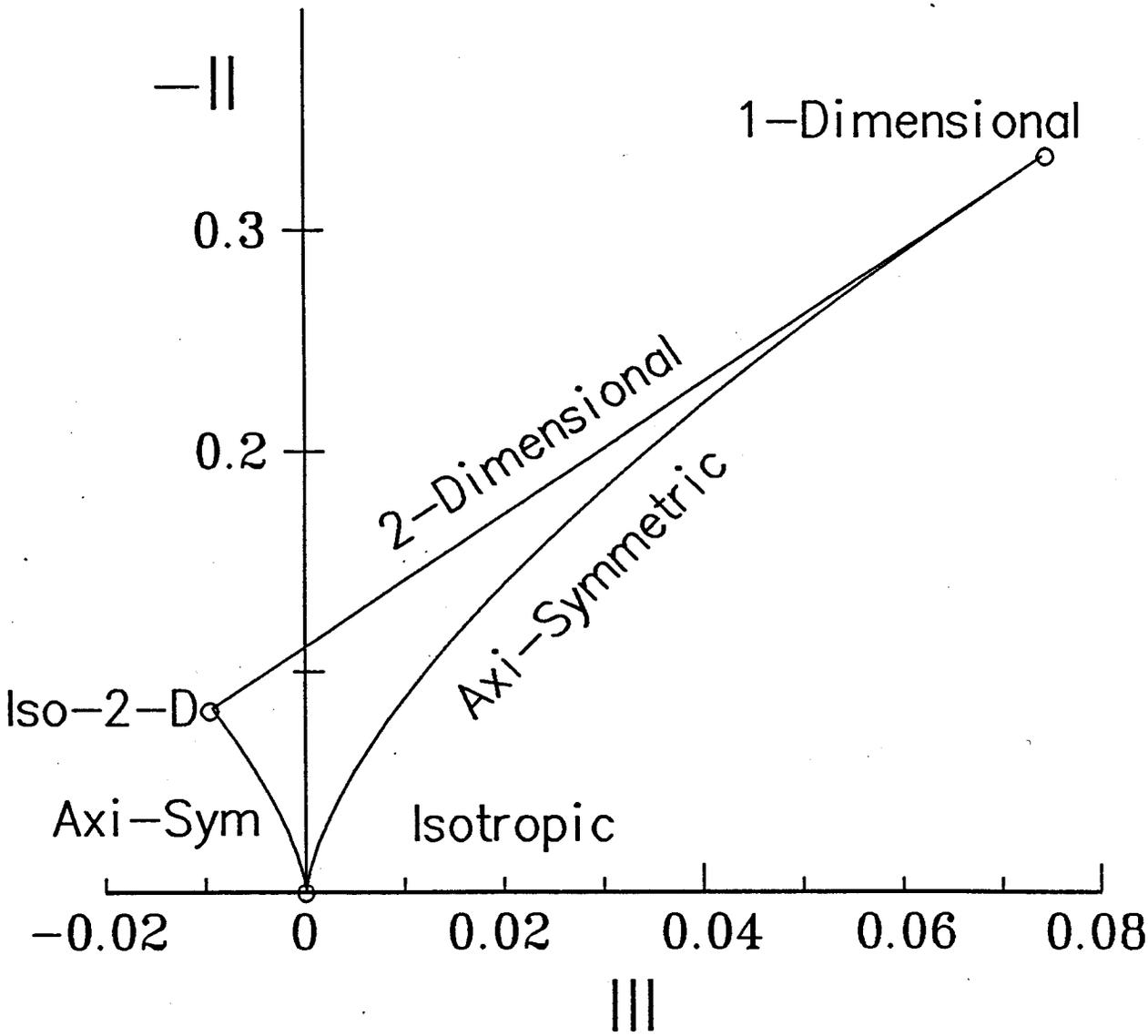


図 4. 3. 5 レイノルズ応力の非等方テンソル不変量マップ

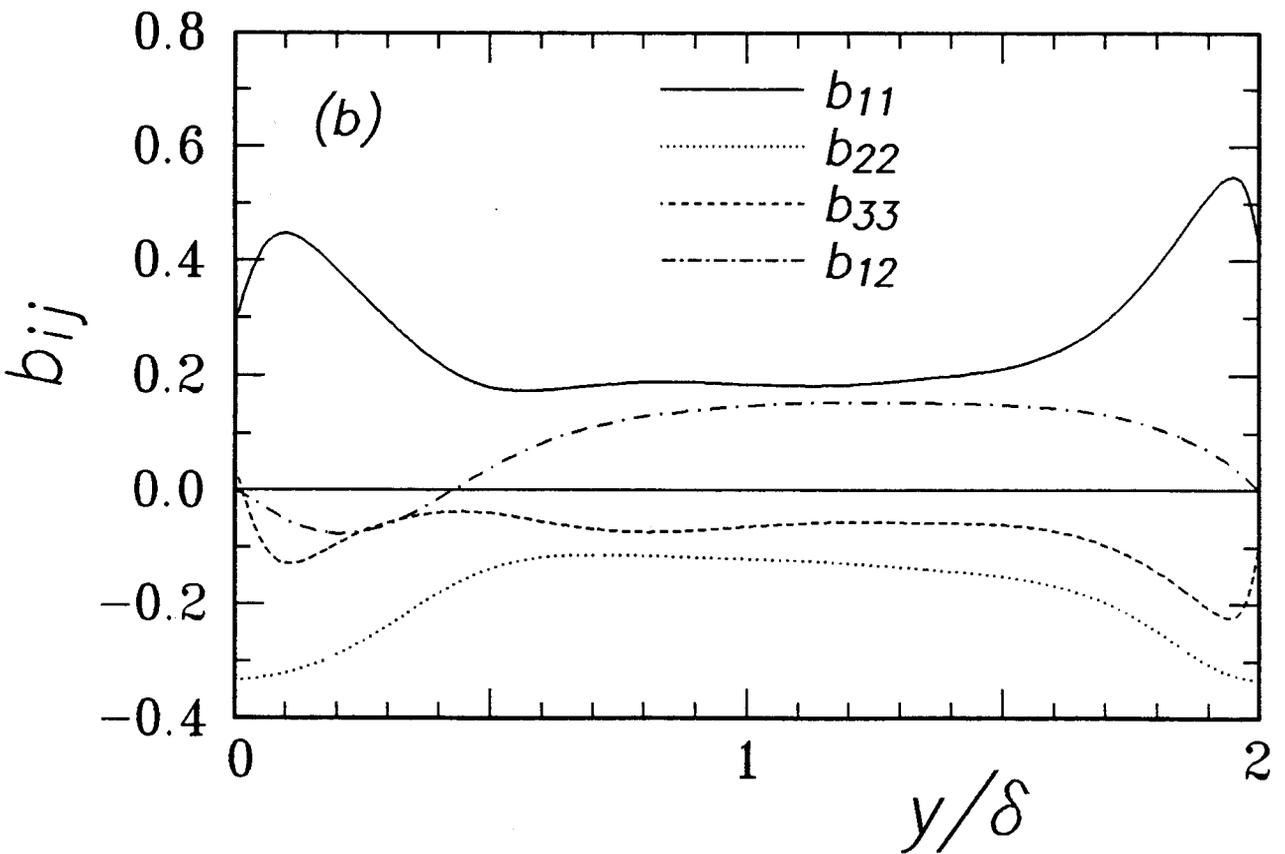
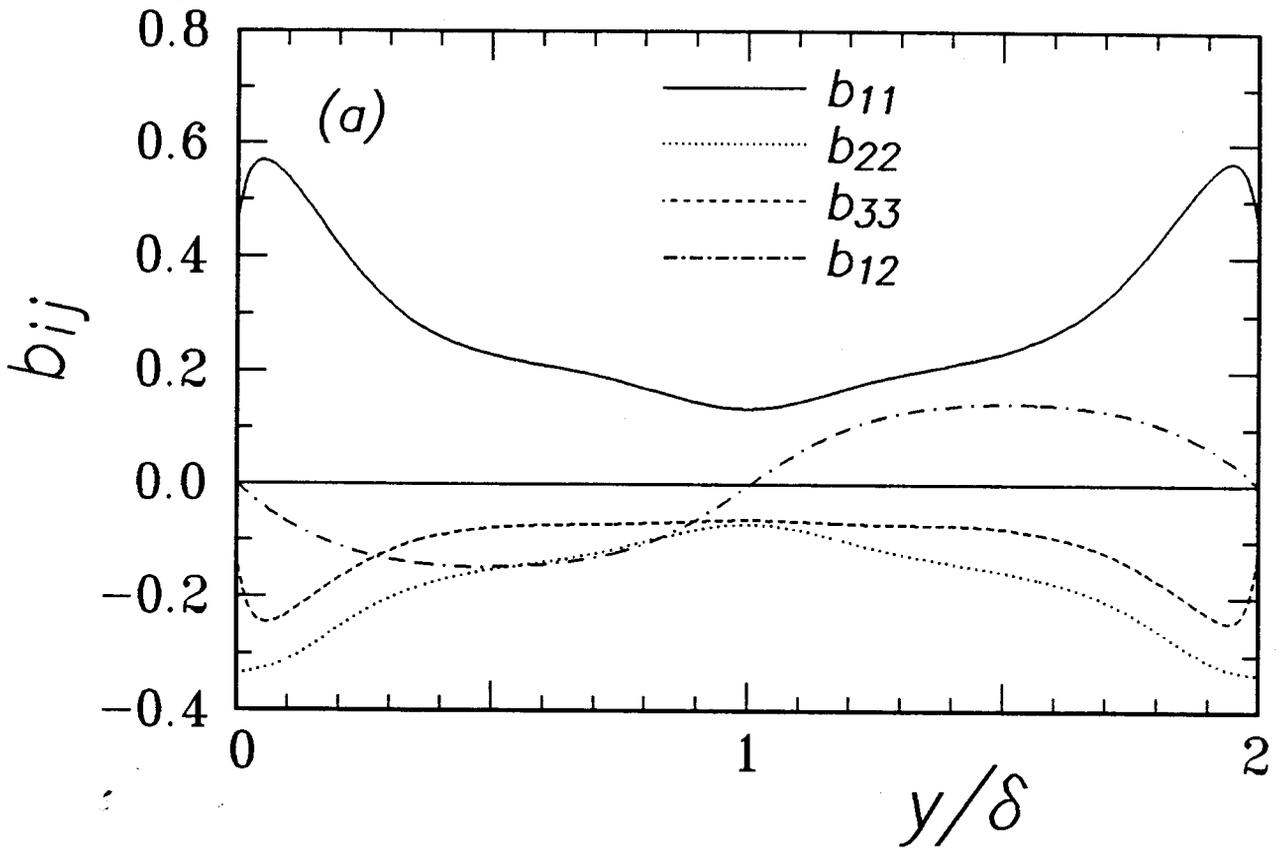


図 4. 3. 6 レイノルズ応力の非等方度
(a) ケース P、(b) ケース CP1

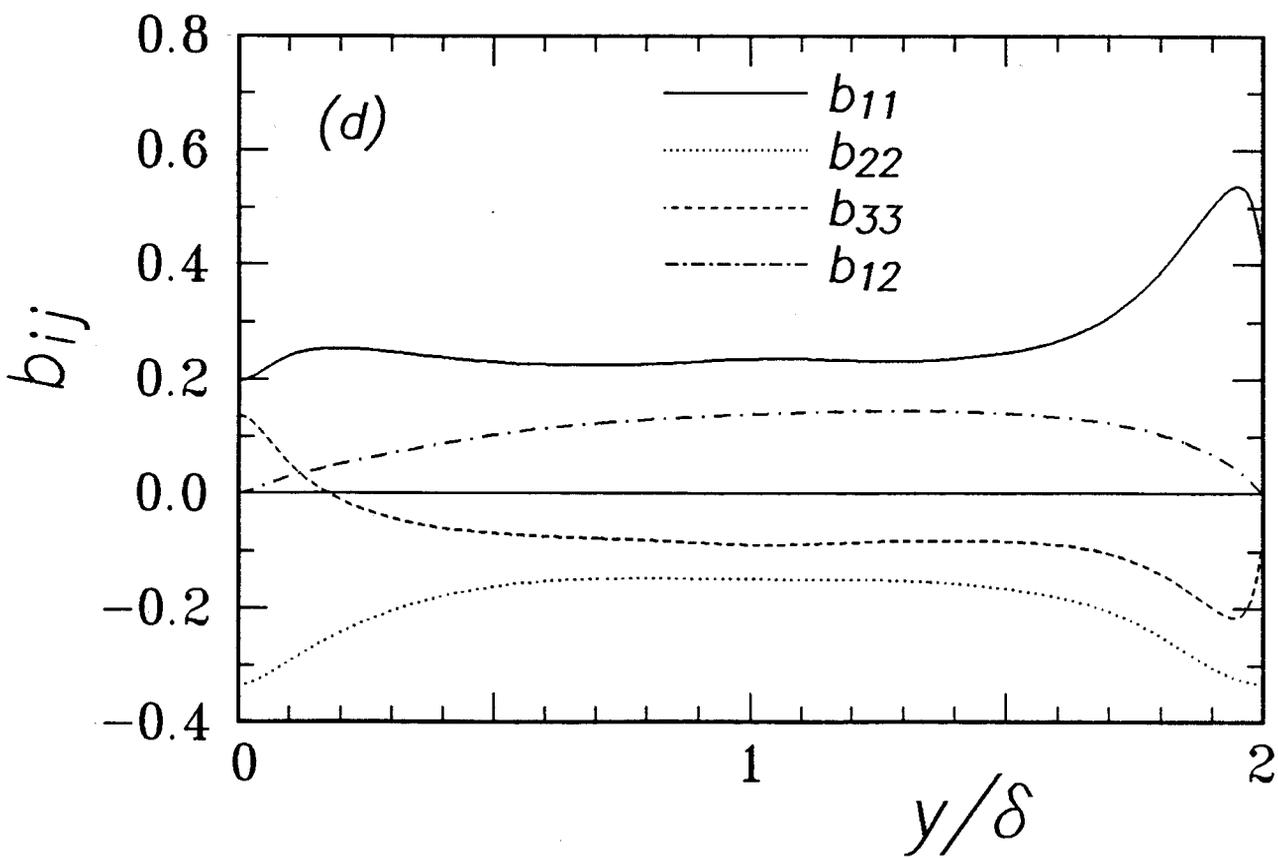
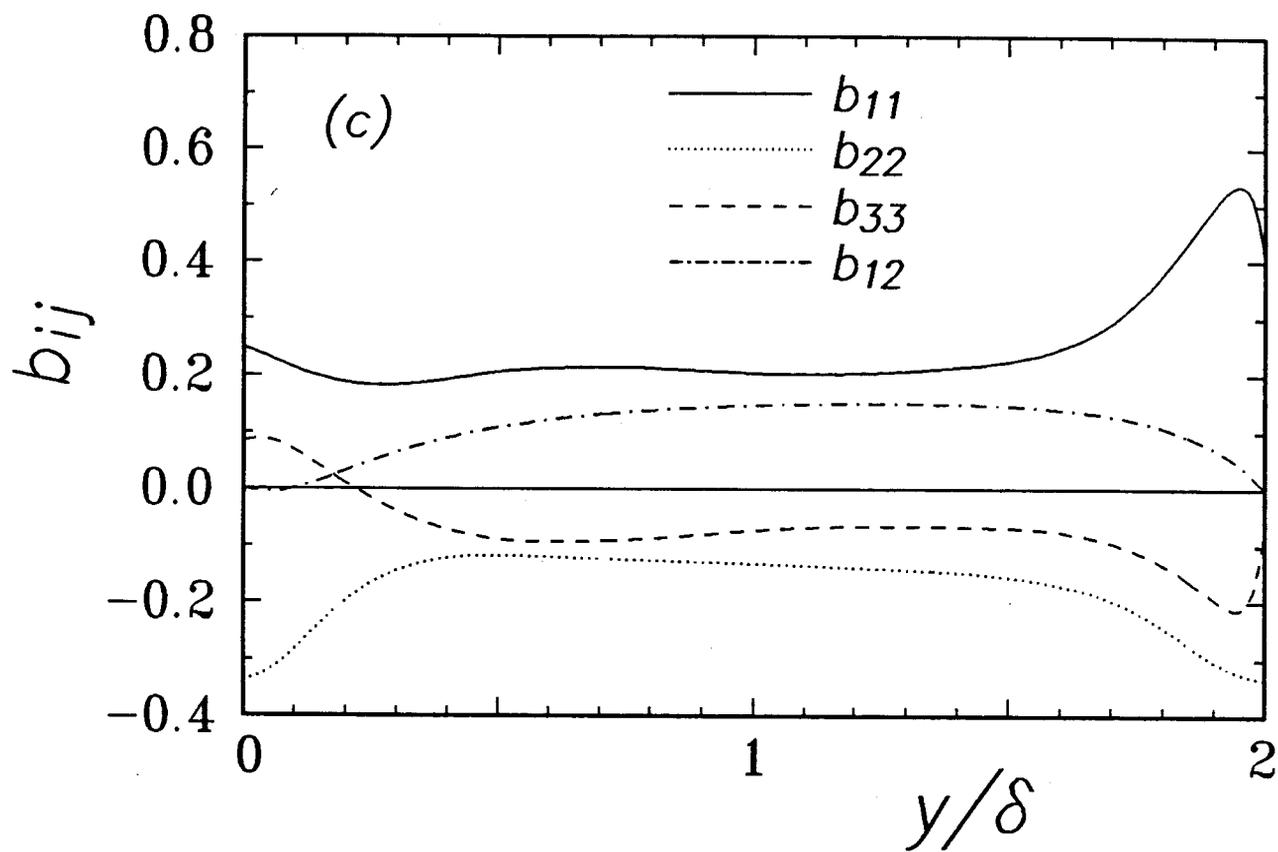


図 4. 3. 6 レイノルズ応力の非等方向度 (前頁の続き)
(c) ケース CP2、(d) ケース CP3

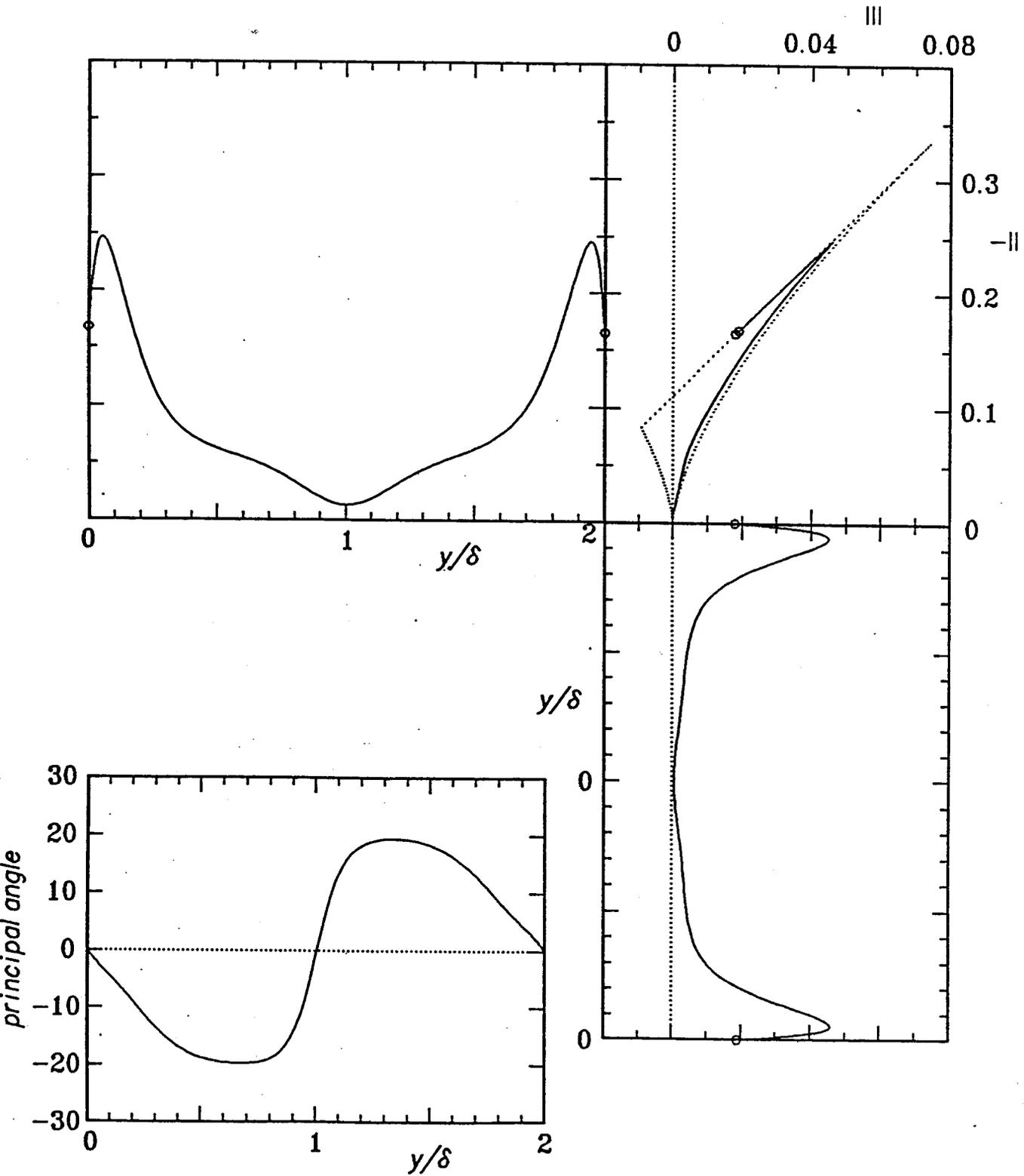


図 4. 3. 7 (a) 非等方テンソルの不変量マップと主軸角度
ケース P

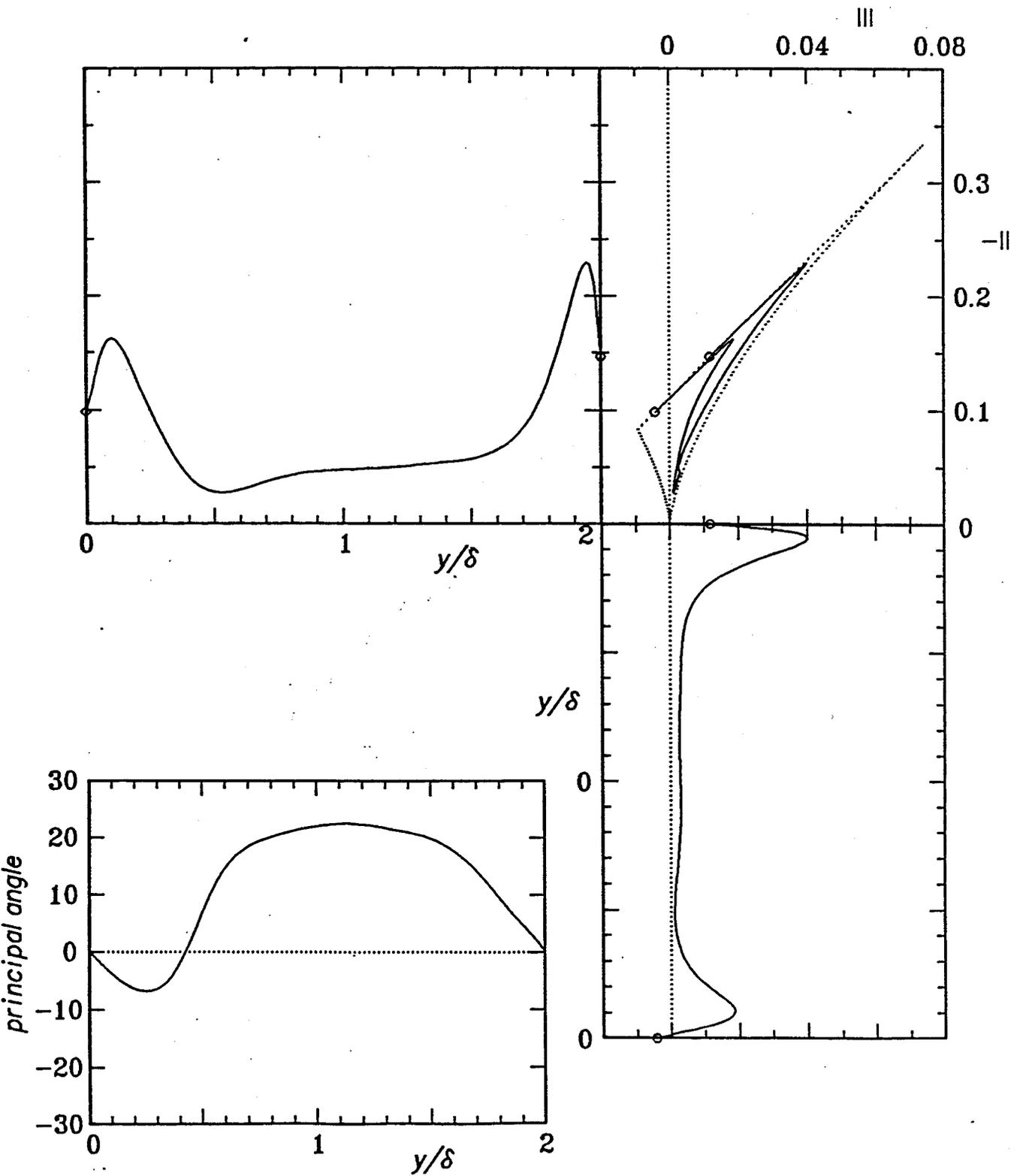


図 4. 3, 7 (b) 非等方テンソルの不変量マップと主軸角度
ケース CP 1

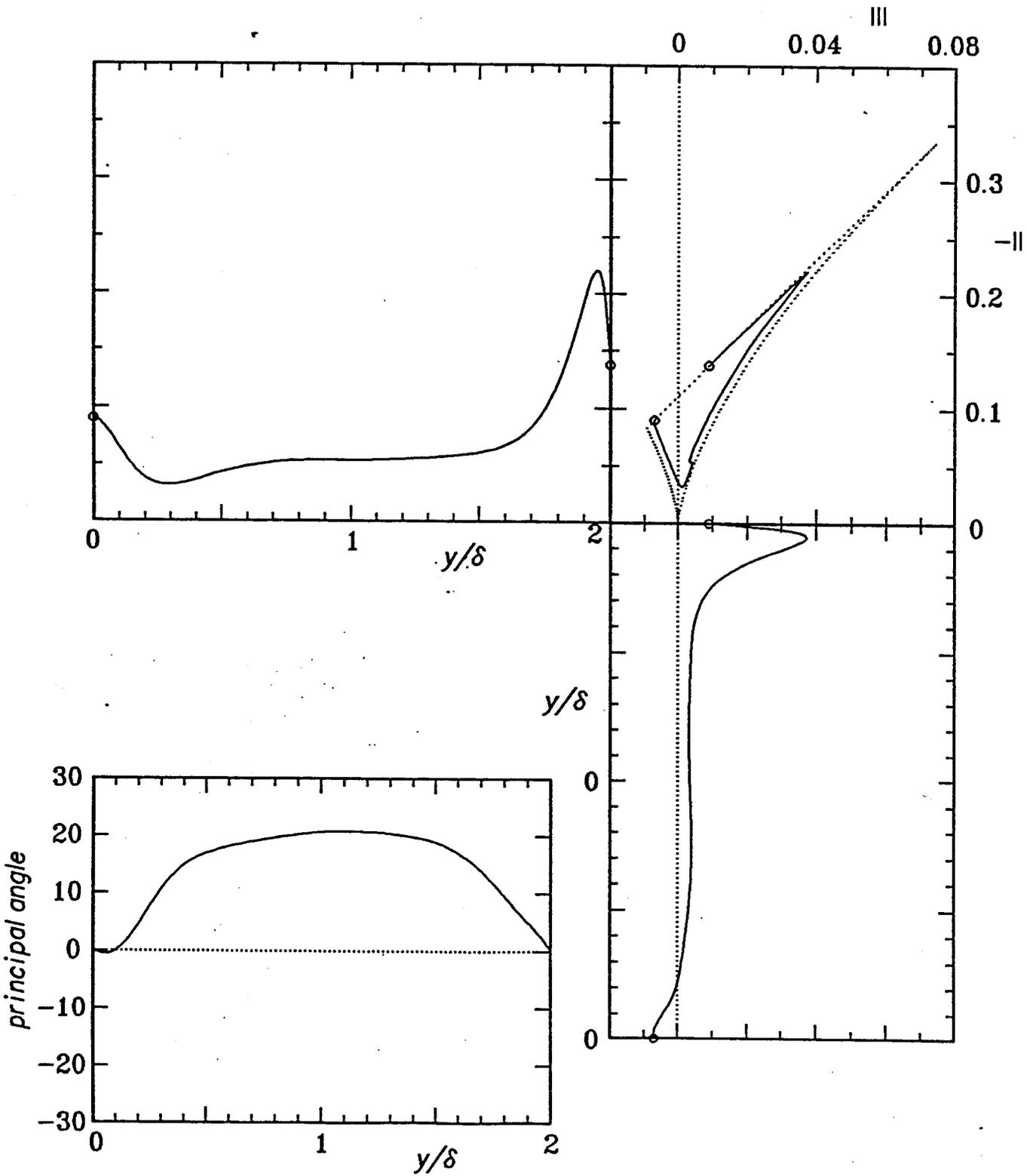


図 4. 3. 7 (c) 非等方テンソルの不変量マップと主軸角度
ケース CP 2

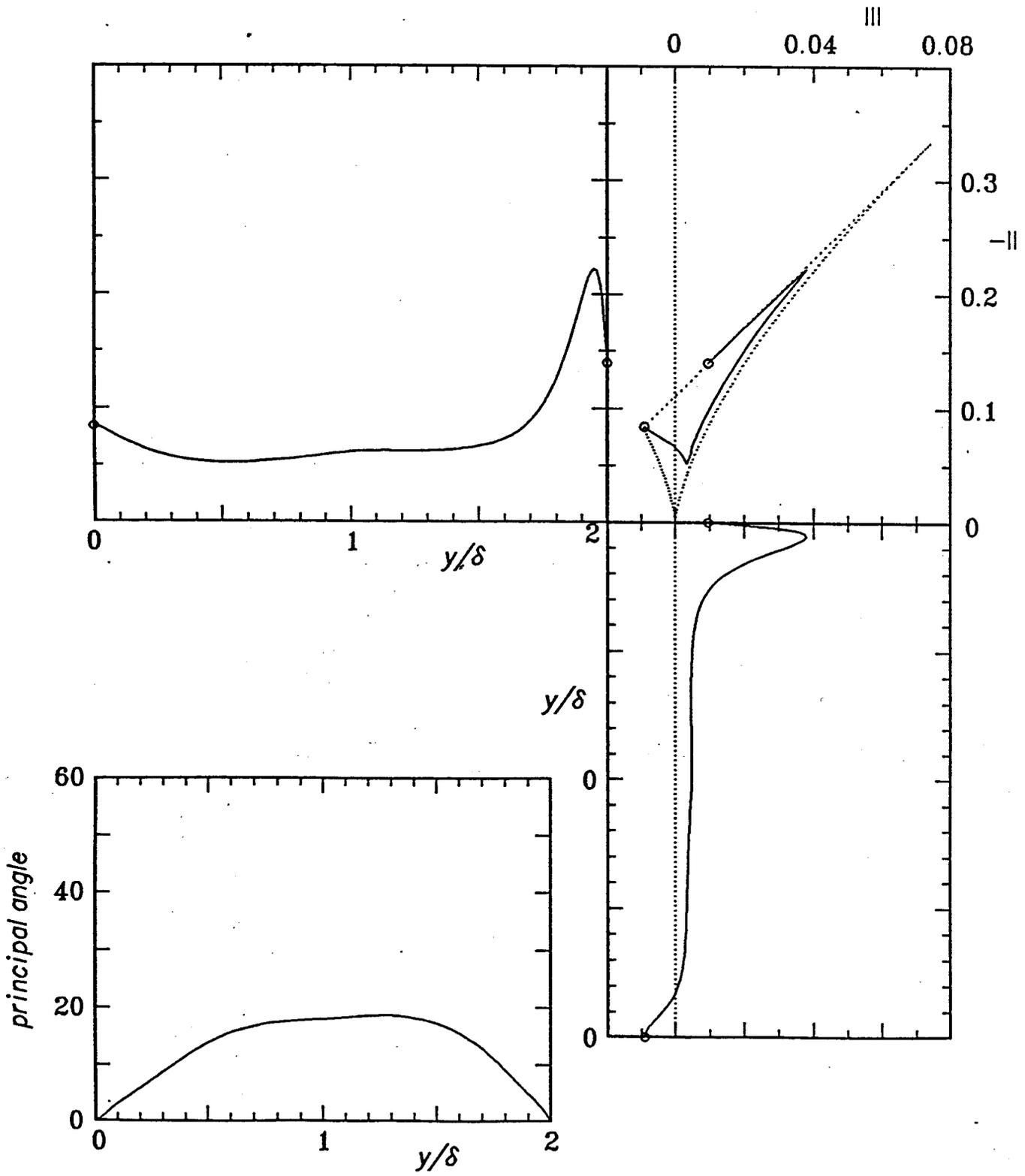


図 4. 3. 7 (d) 非等方テンソルの不変量マップと主軸角度
ケース CP 3

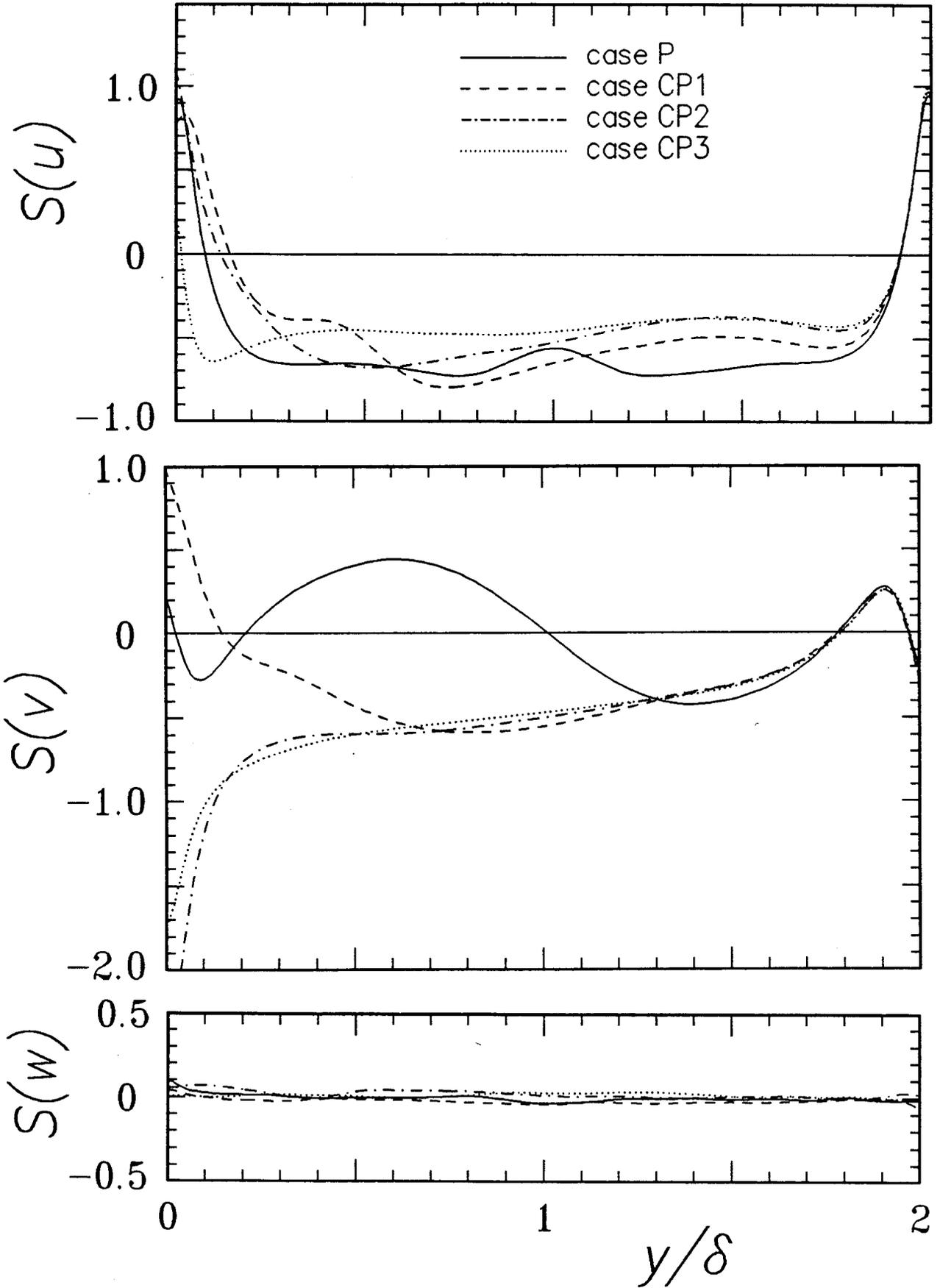


図 4. 4. 1 速度変動の歪度

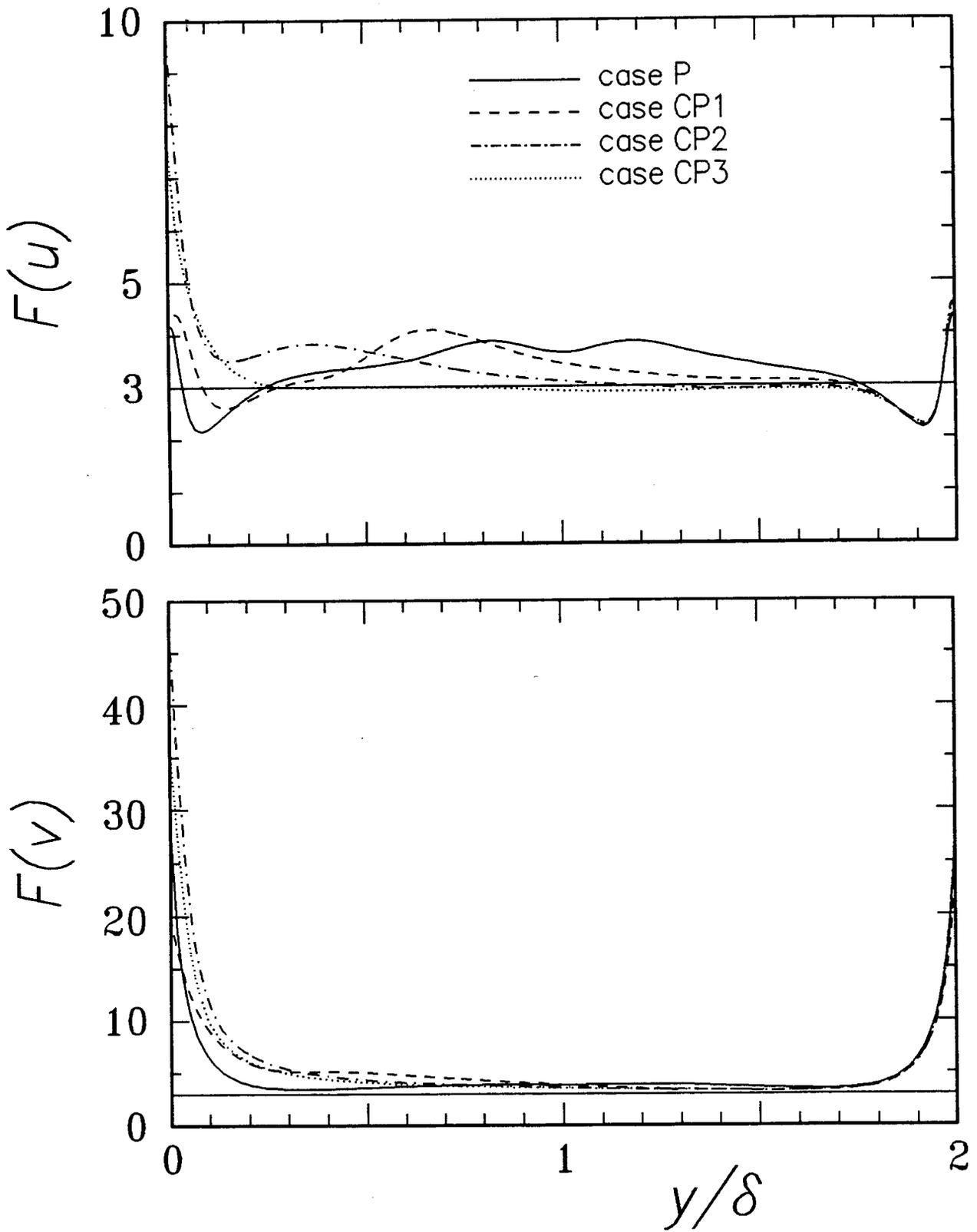


図 4. 4. 2 速度変動の平坦度

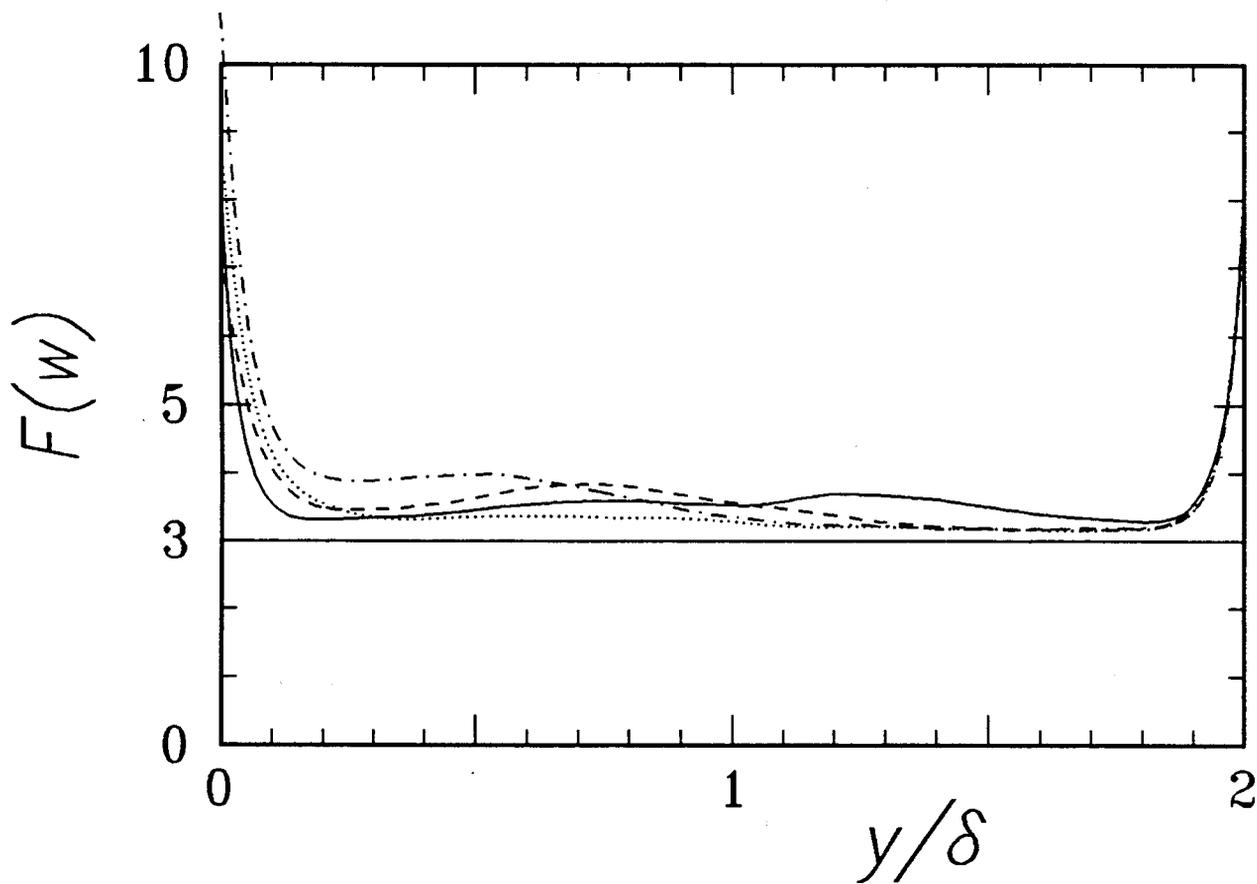


図 4. 4. 2 速度変動の平坦度 (前頁の続き)

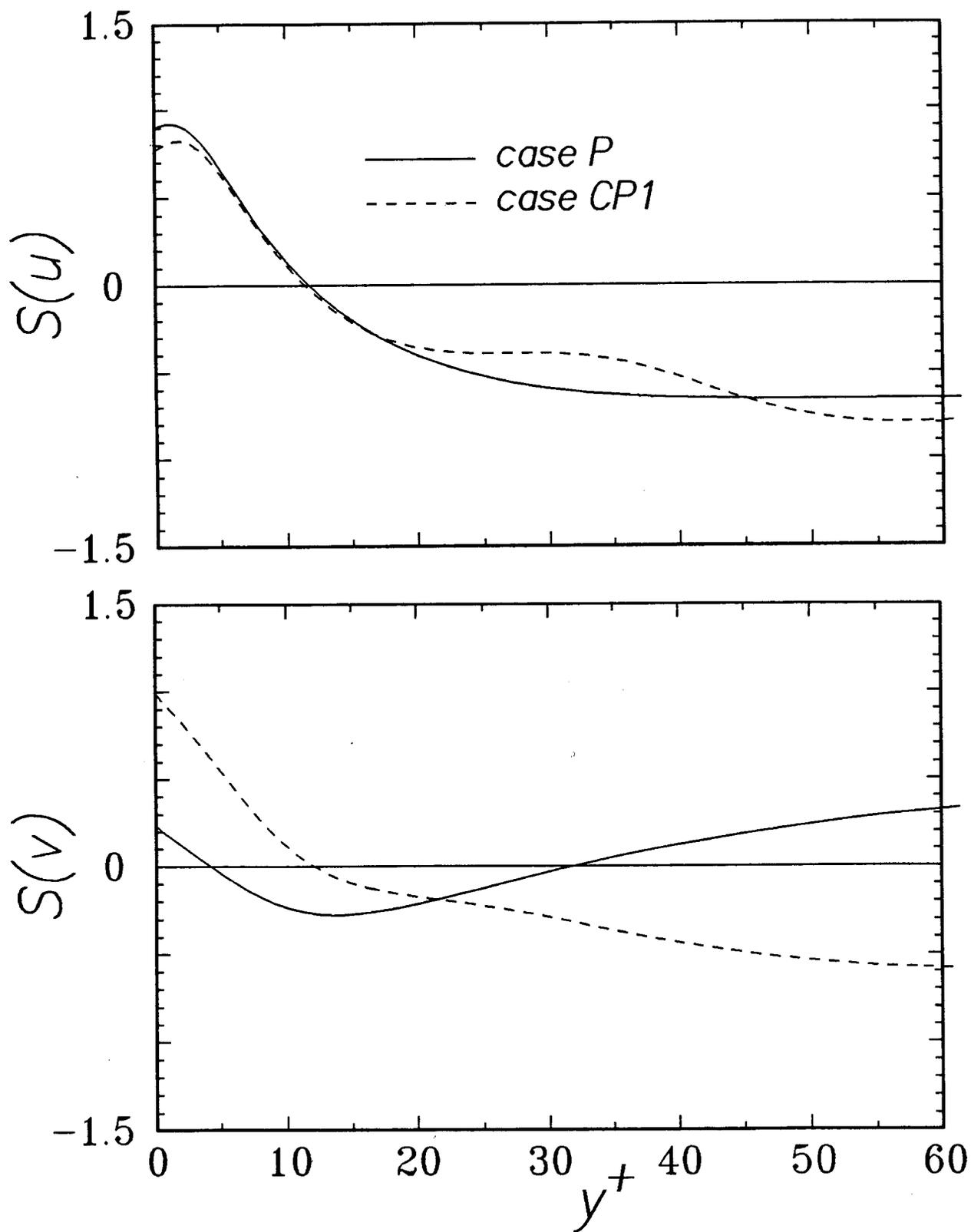


図 4. 4. 3 速度変動の歪度 (壁座標表示)

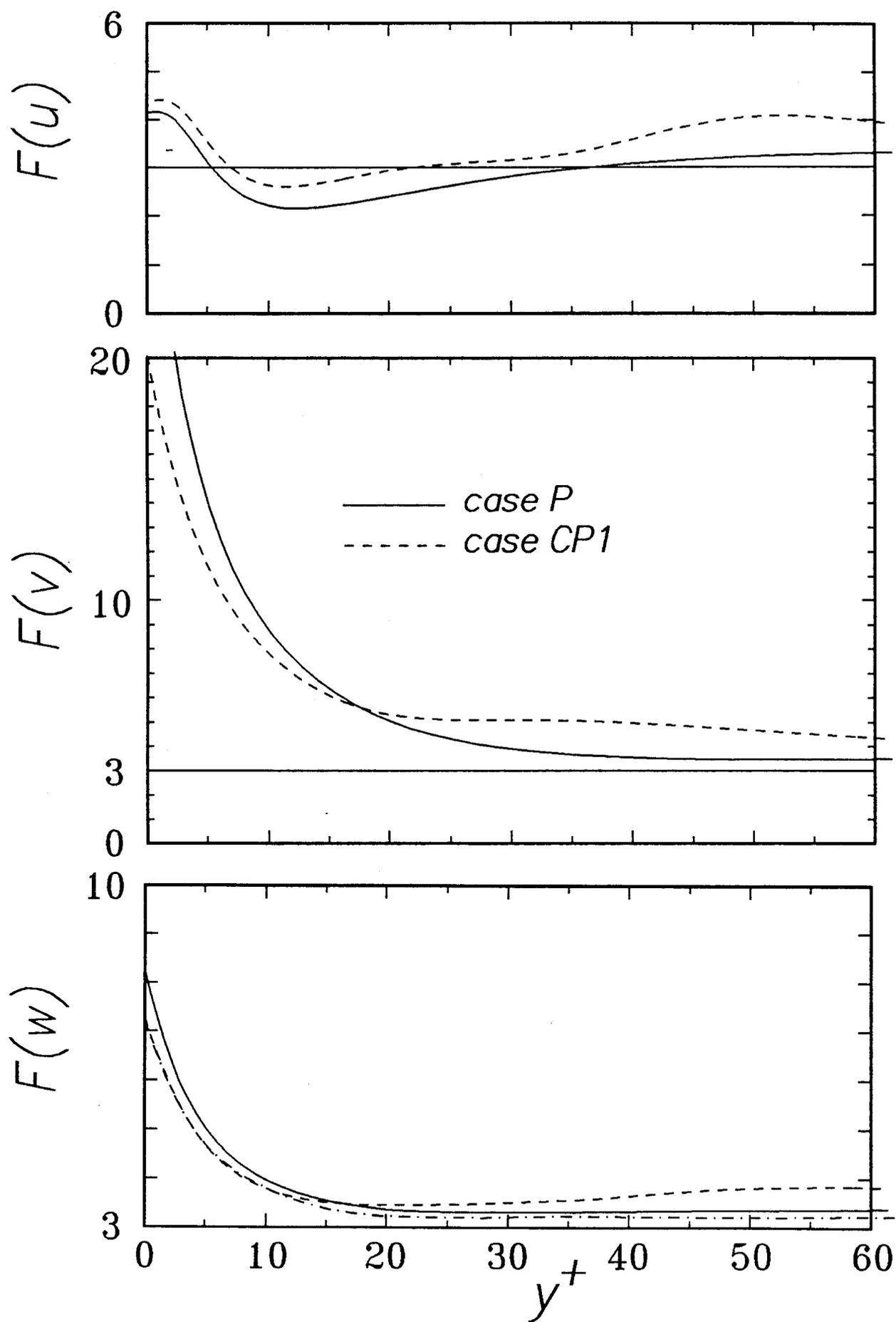


図 4. 4. 4 速度変動の平坦度 (壁座標表示)

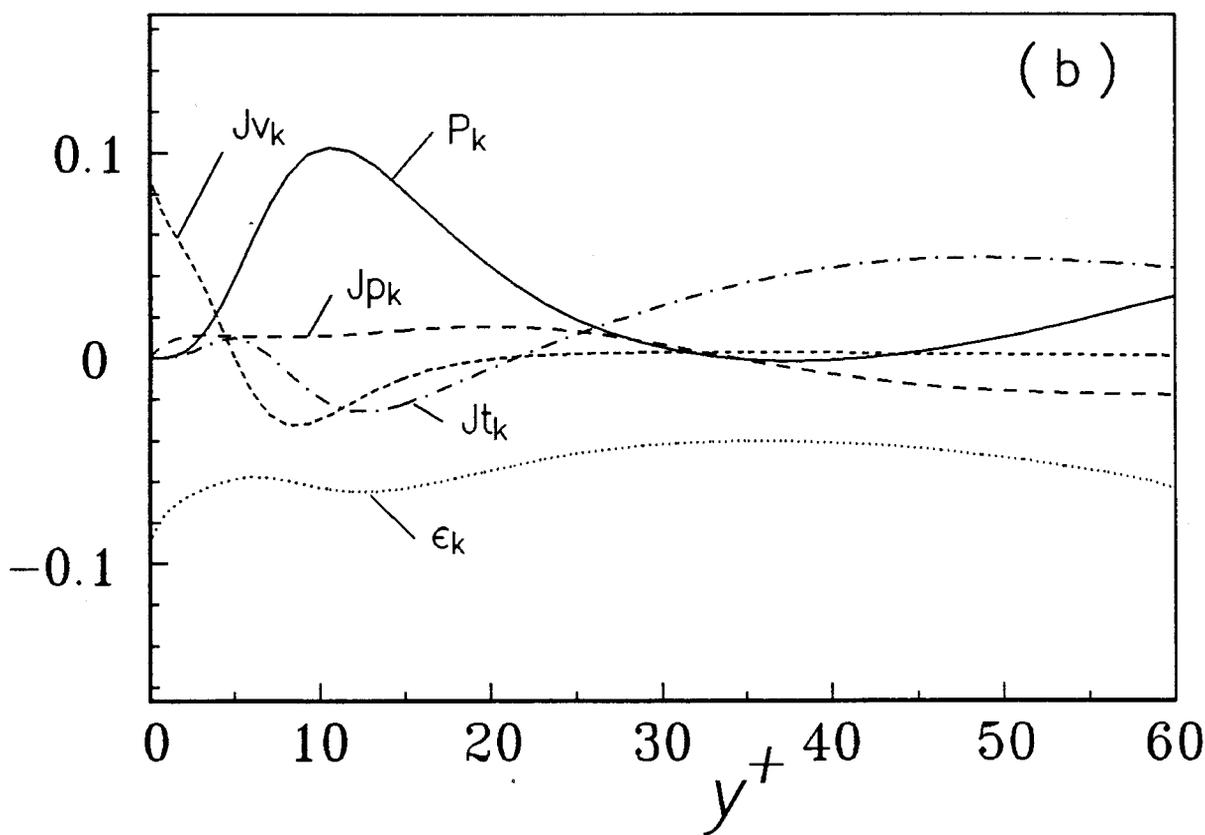
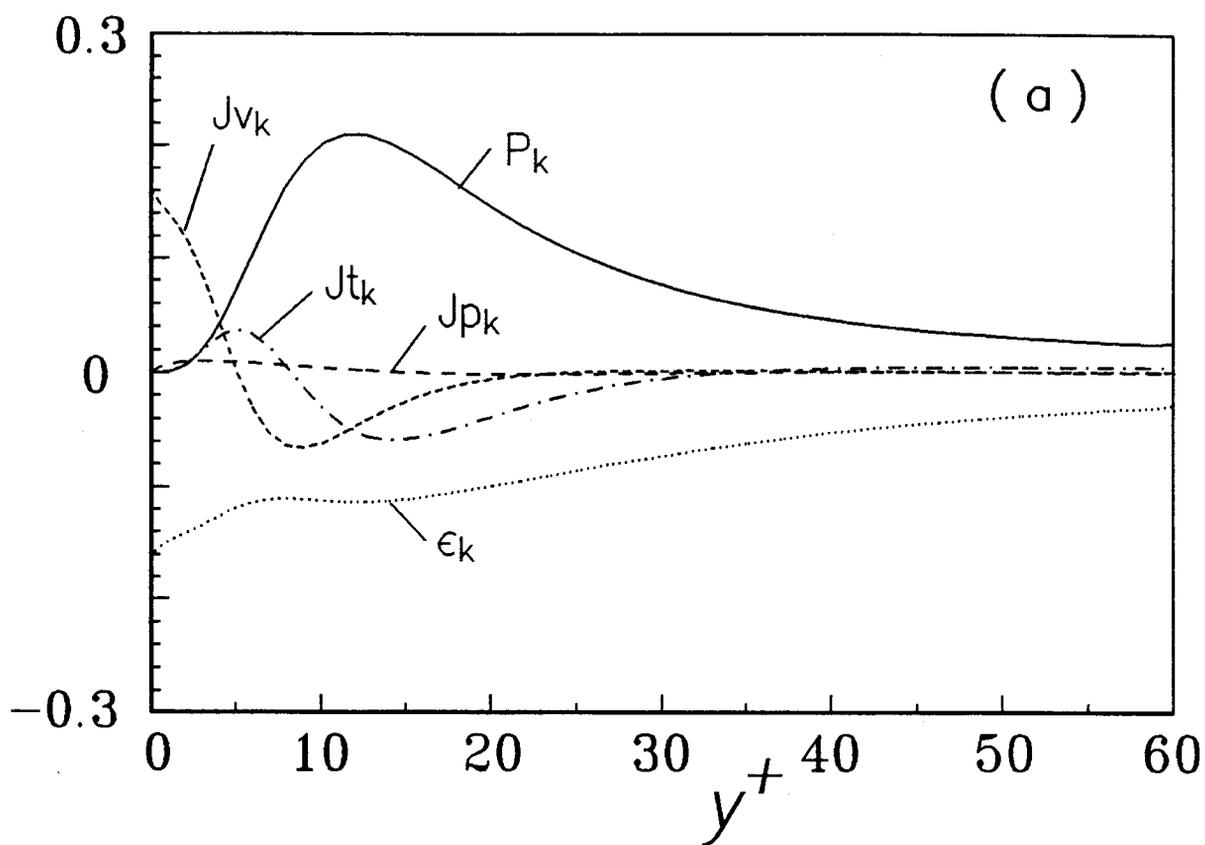


図 4. 5. 1 乱流エネルギーの収支
 (a) ケースP、(b) ケースCP1

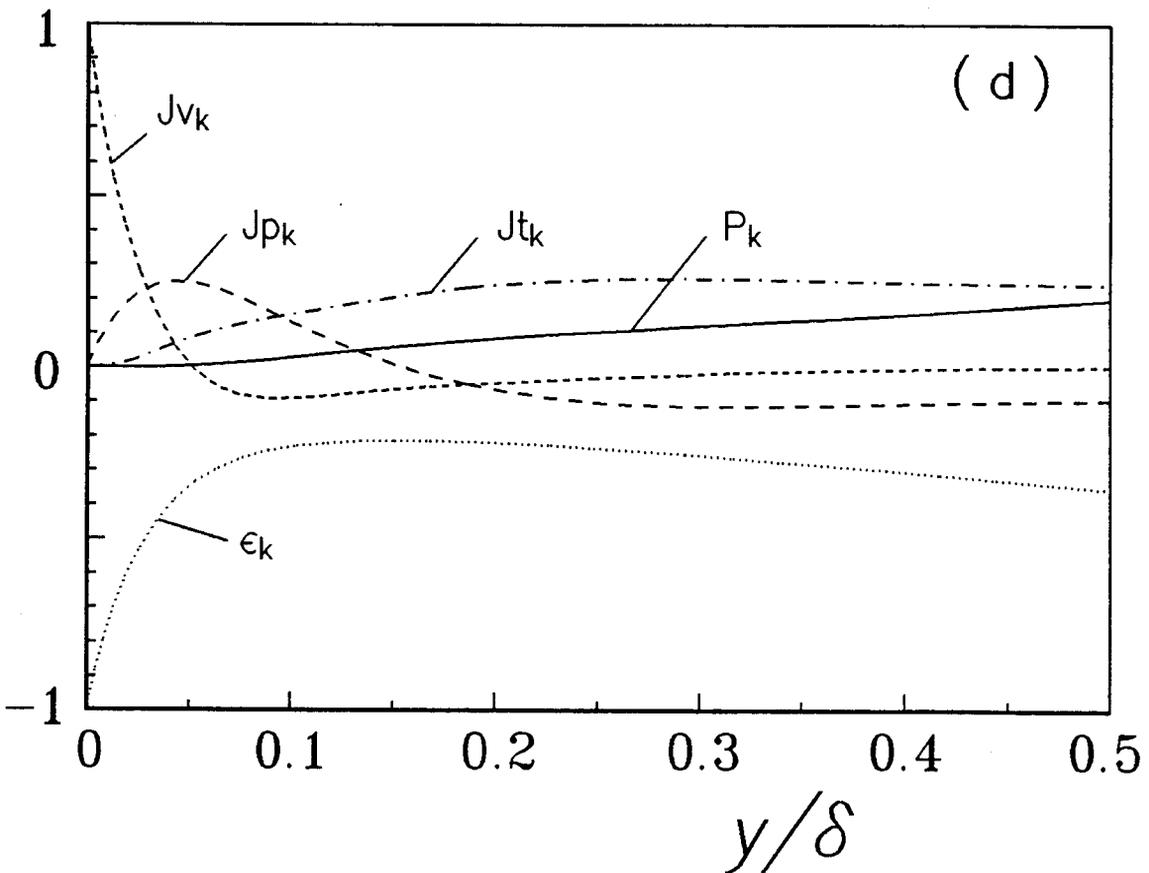
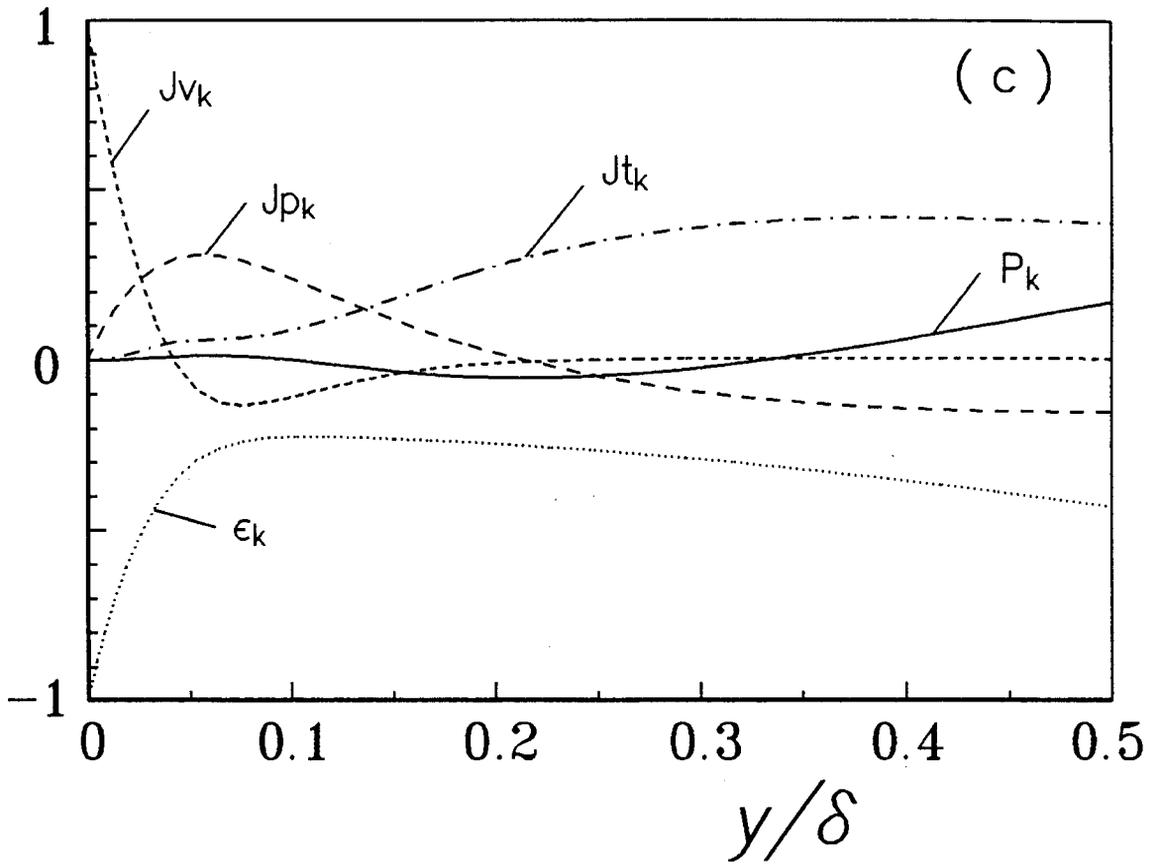


図 4. 5. 1 乱流エネルギーの収支 (前頁の続き)

(c) ケース P、(d) ケース CP1

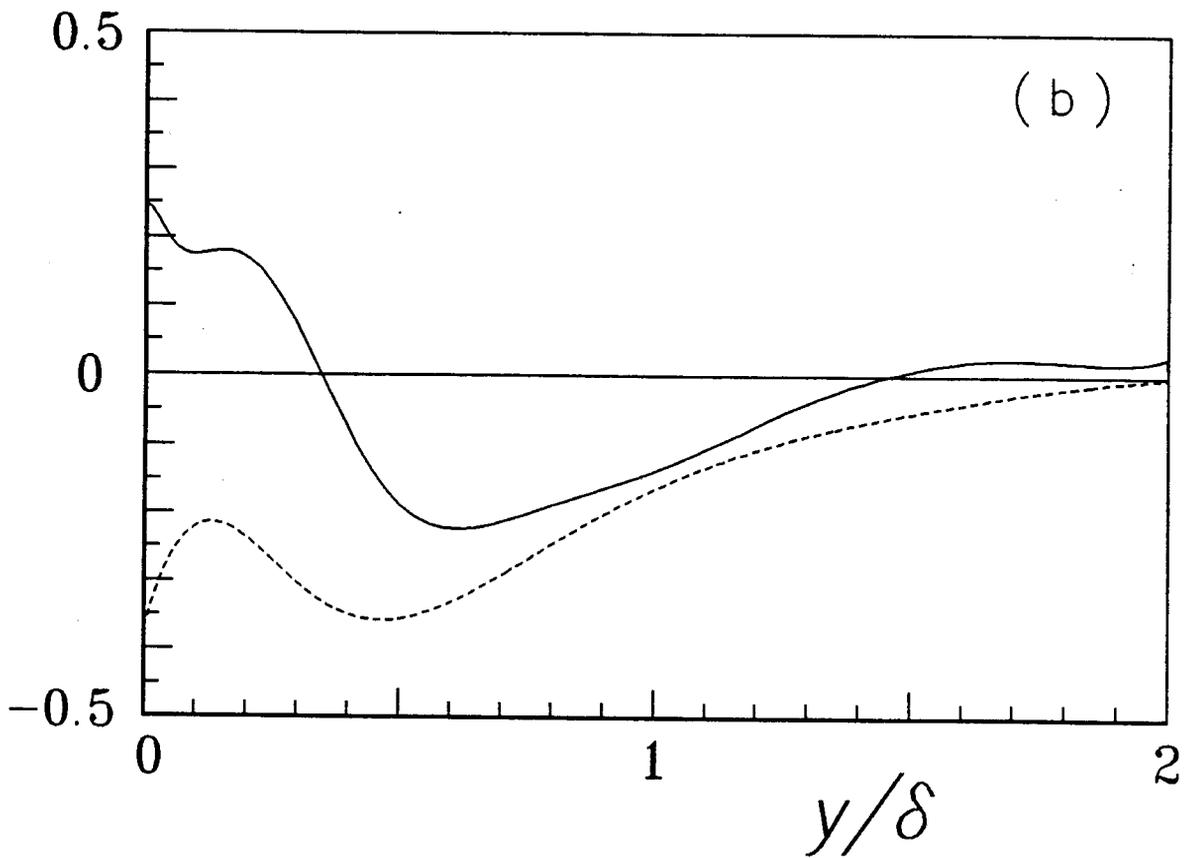
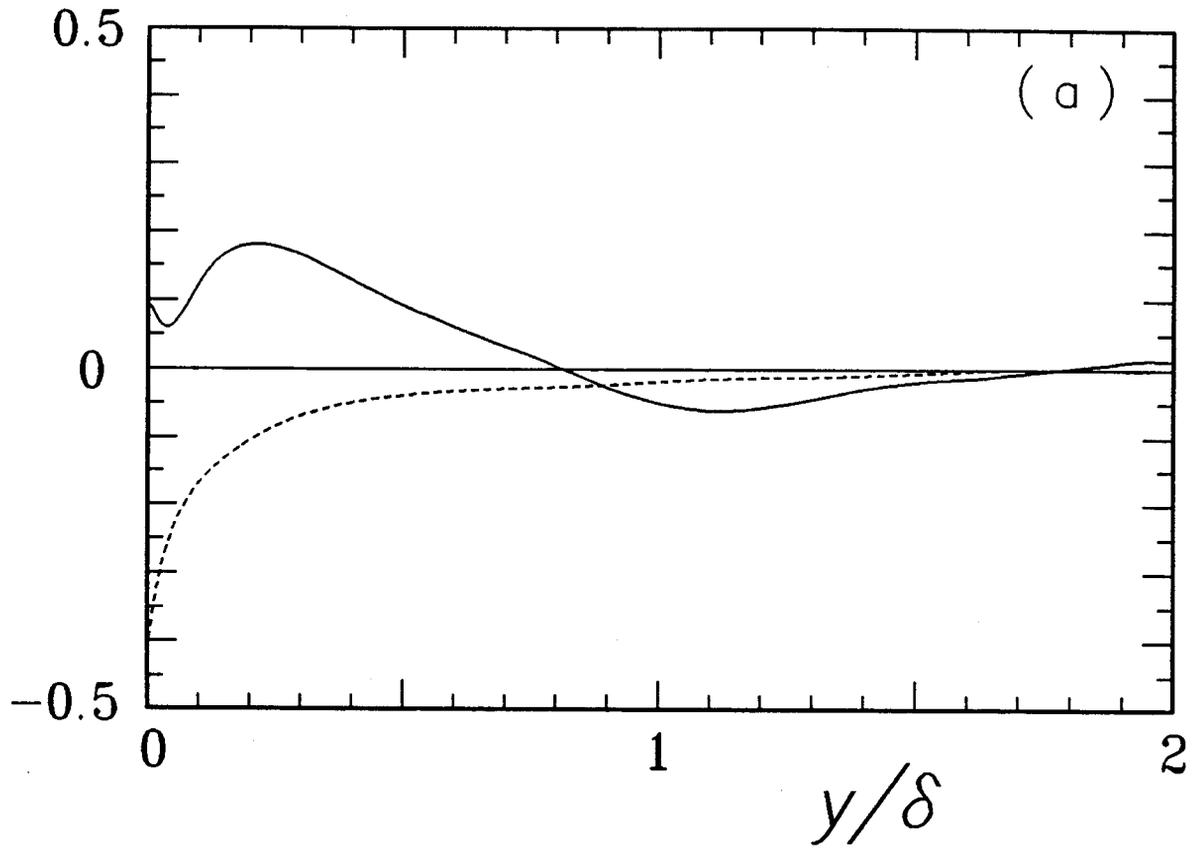


図 4. 5. 2 下壁面圧力変動と流体内部速度変動の相互相関係数

(a) ケース P、(b) ケース CP1

— ; $\frac{\overline{p(0)u(y)}}{p_{rms}(0)u_{rms}(y)}$

---- ; $\frac{\overline{p(0)v(y)}}{p_{rms}(0)v_{rms}(y)}$

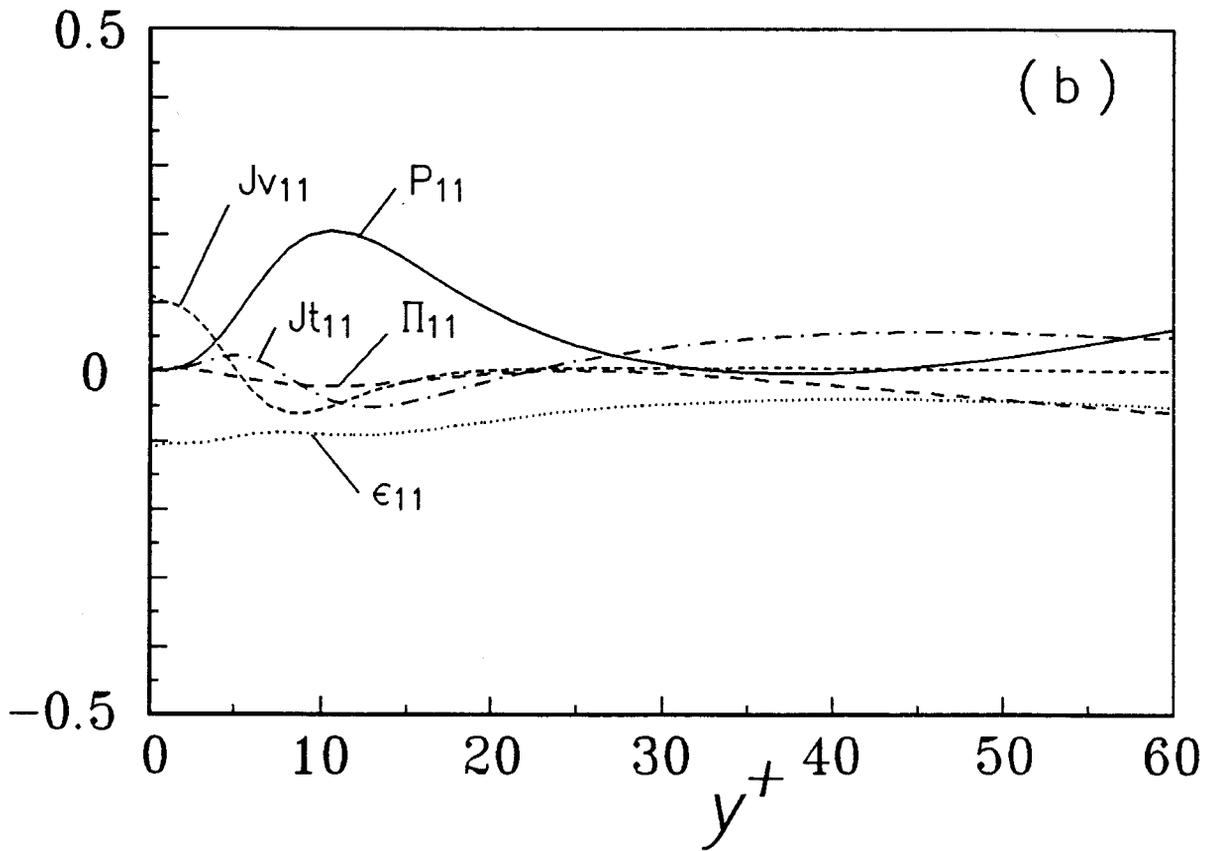
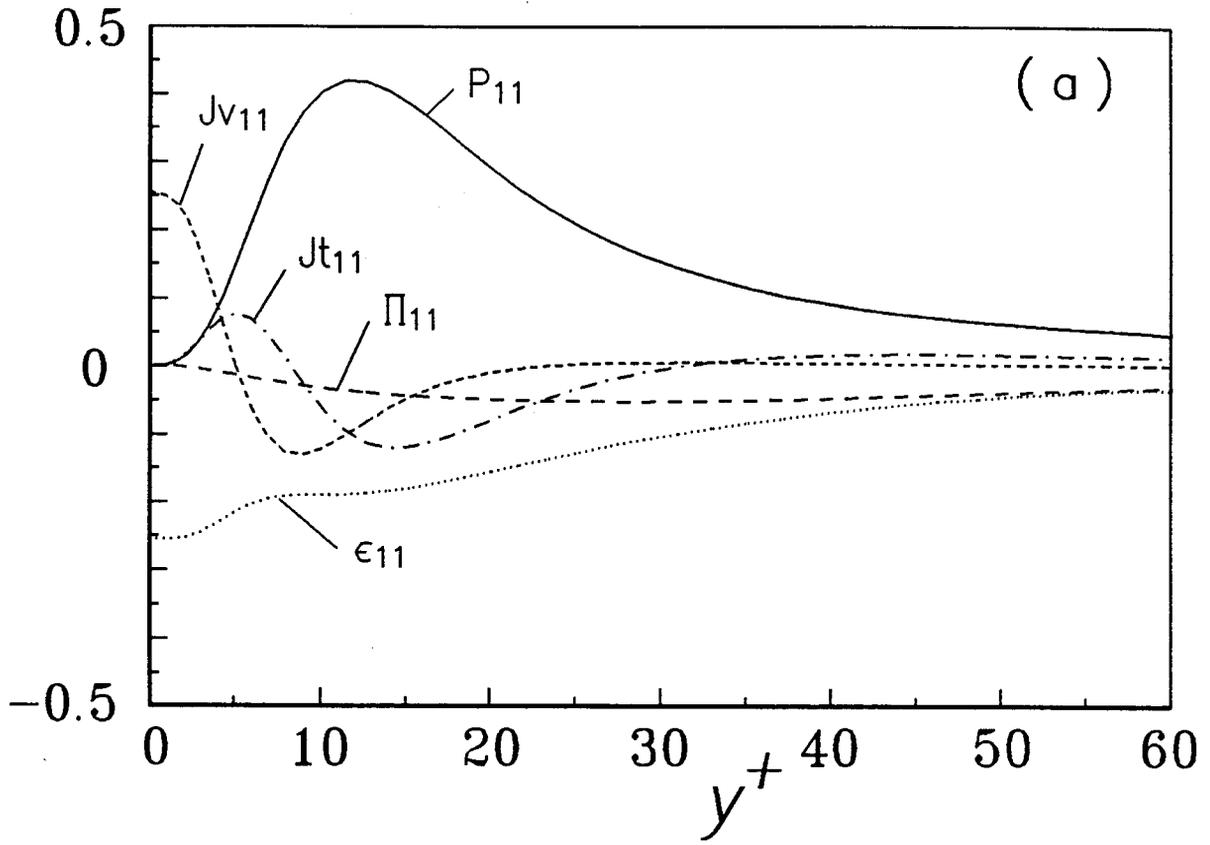


図 4. 5. 3 $\overline{u u}$ の収支

(a) ケース P、(b) ケース CP1

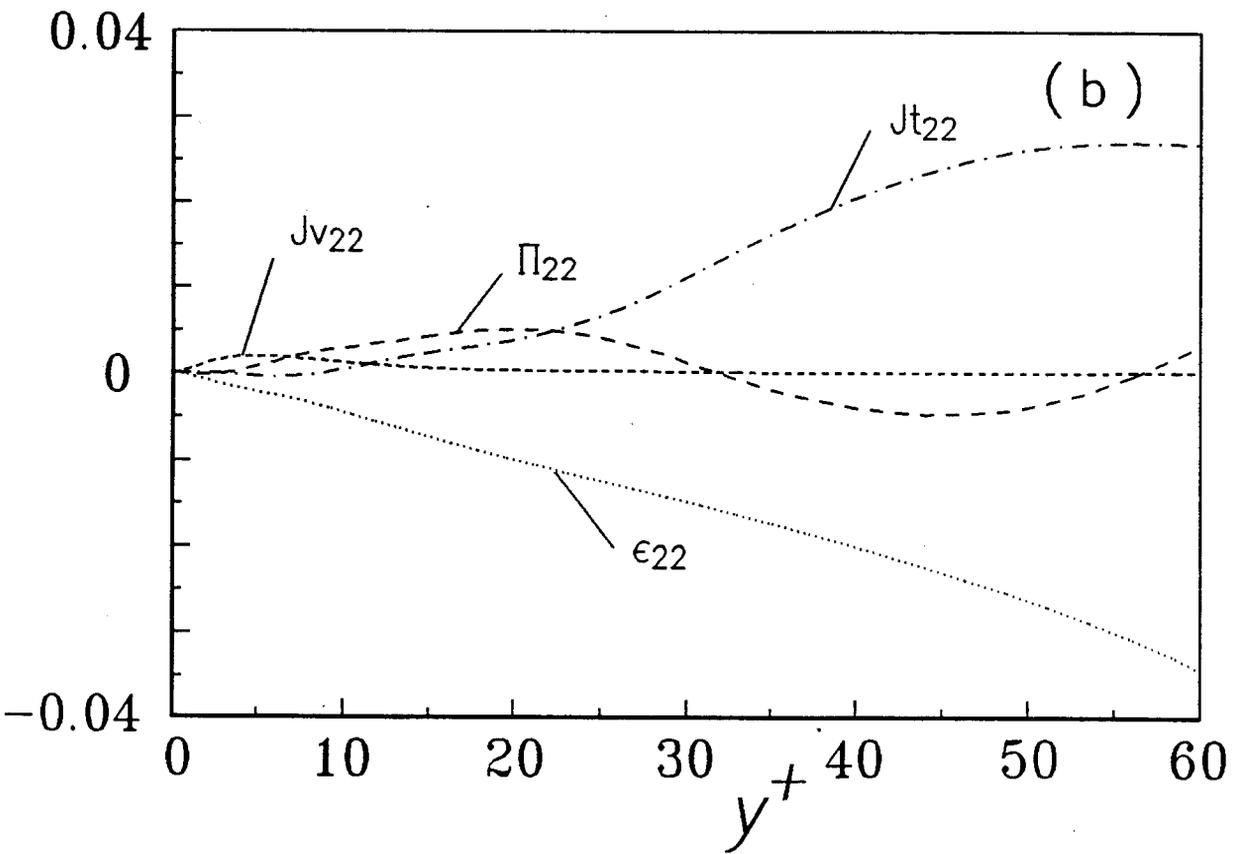
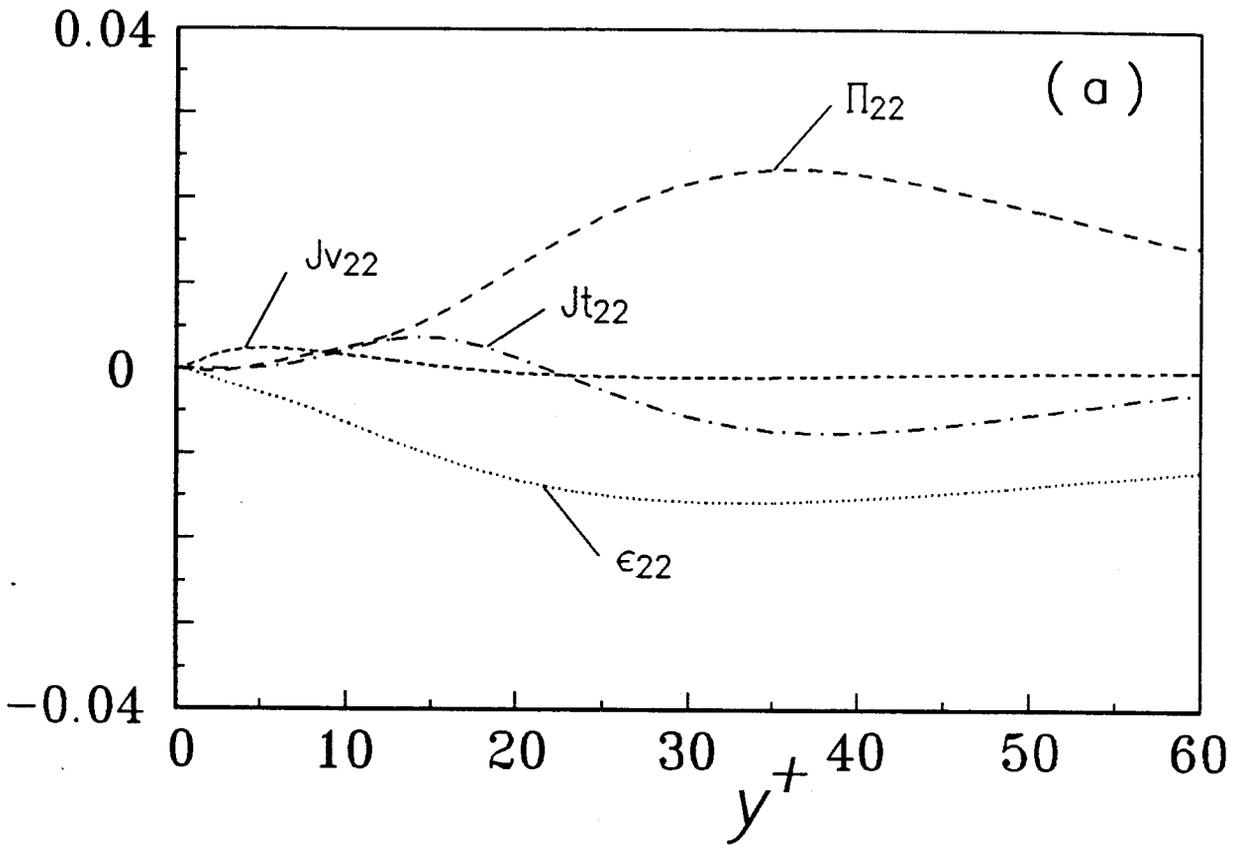


図 4. 5. 4 $\overline{v'v'}$ の収支

(a) ケース P、(b) ケース CPI

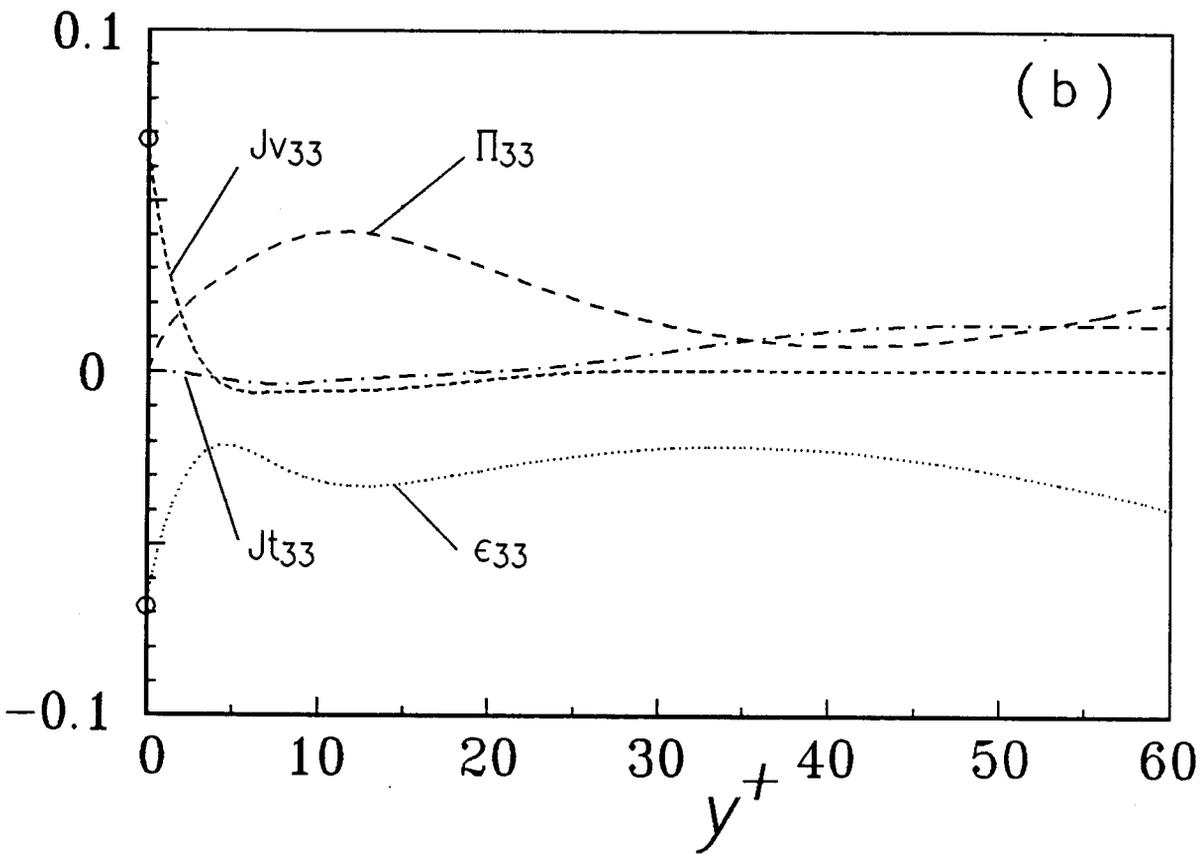
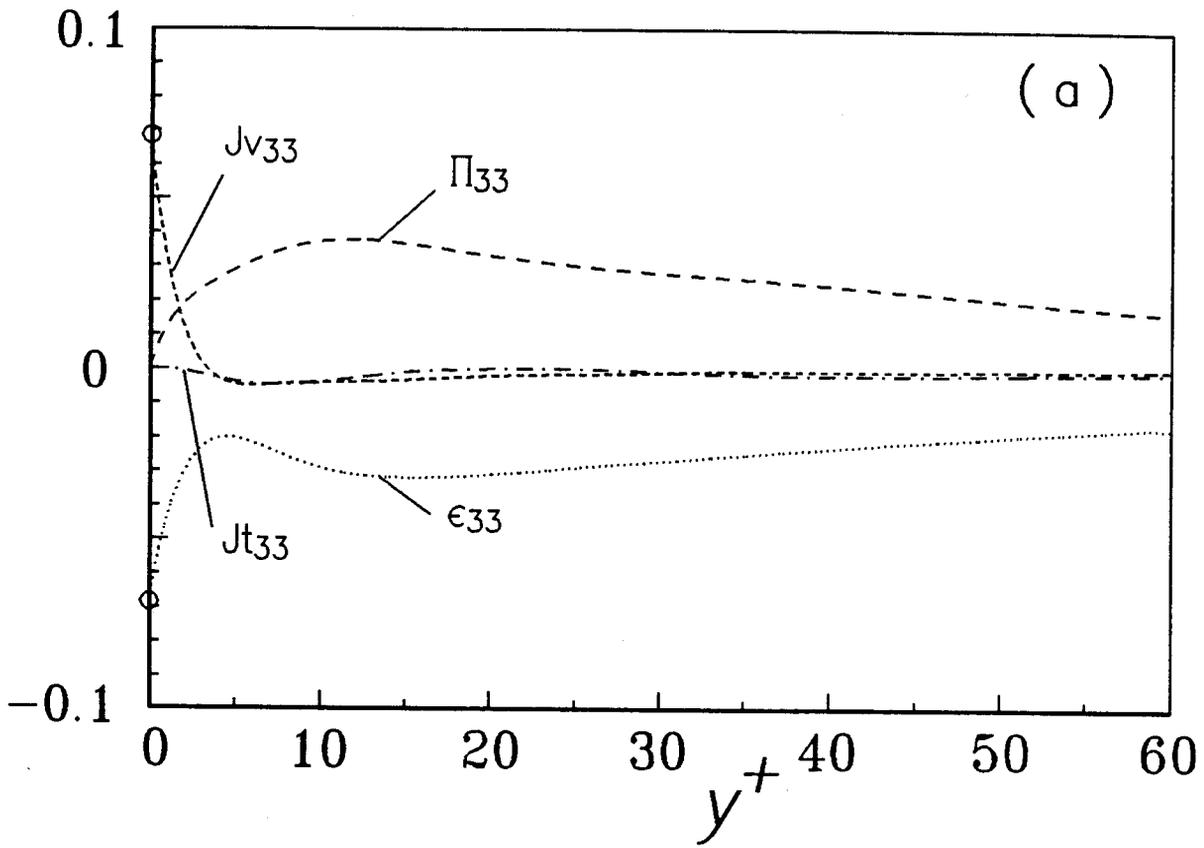


図 4. 5. 5 $\overline{w w}$ の収支

(a) ケース P、(b) ケース CP1

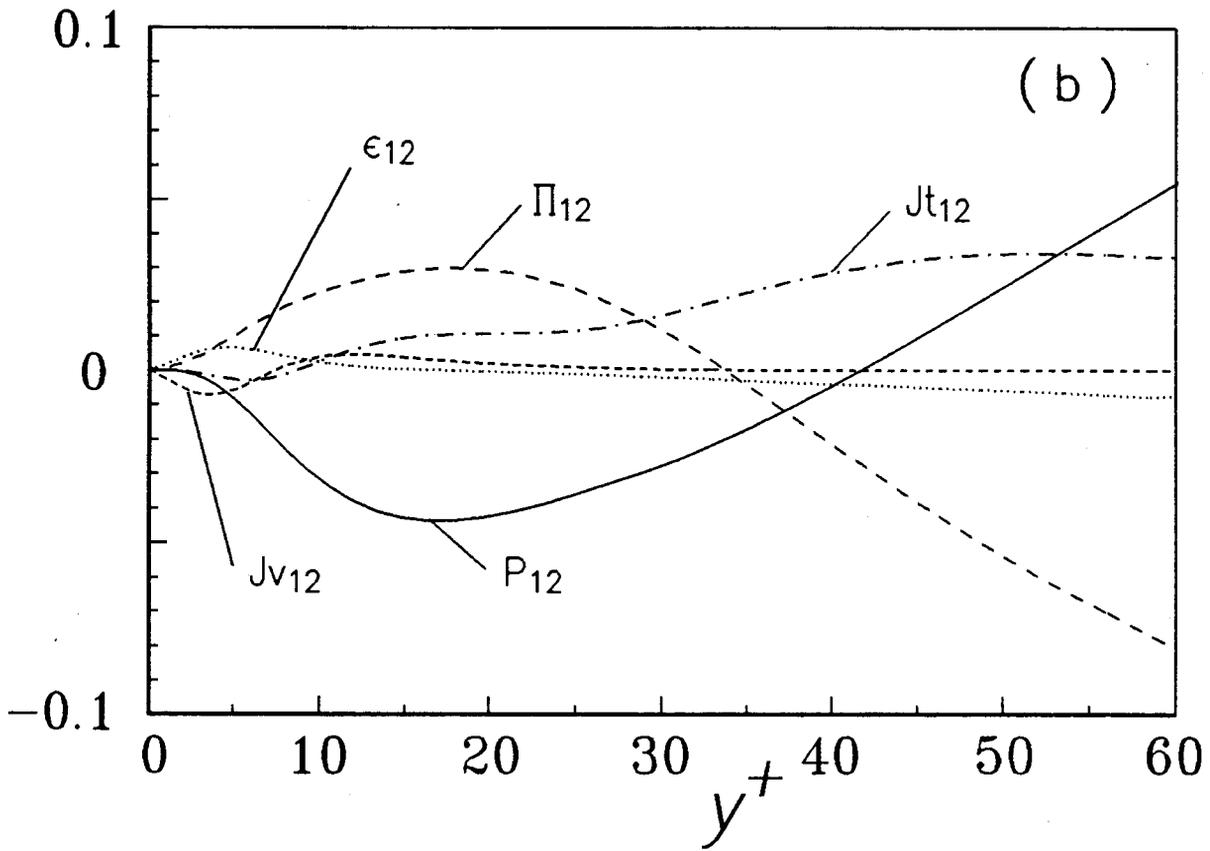
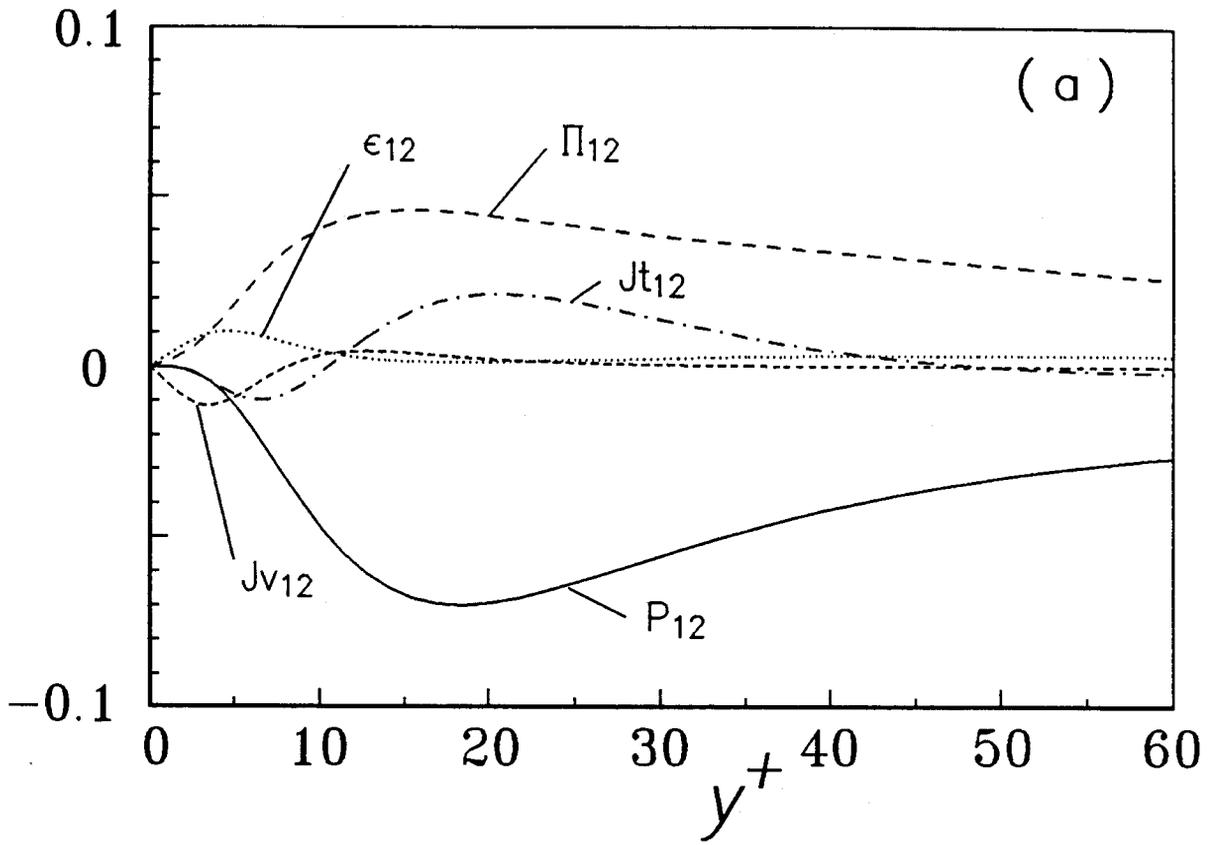


図 4. 5. 6 $\overline{u'v'}$ の収支
(a) ケース P、(b) ケース CP1

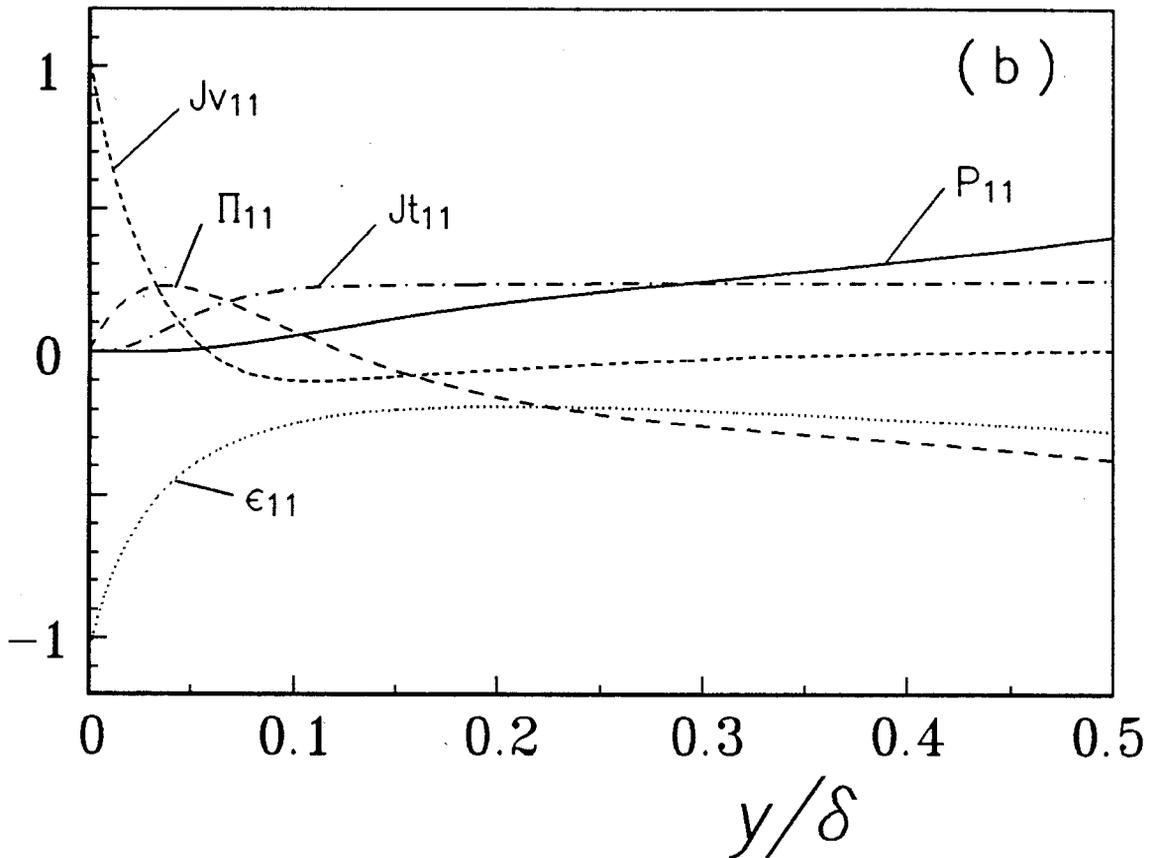
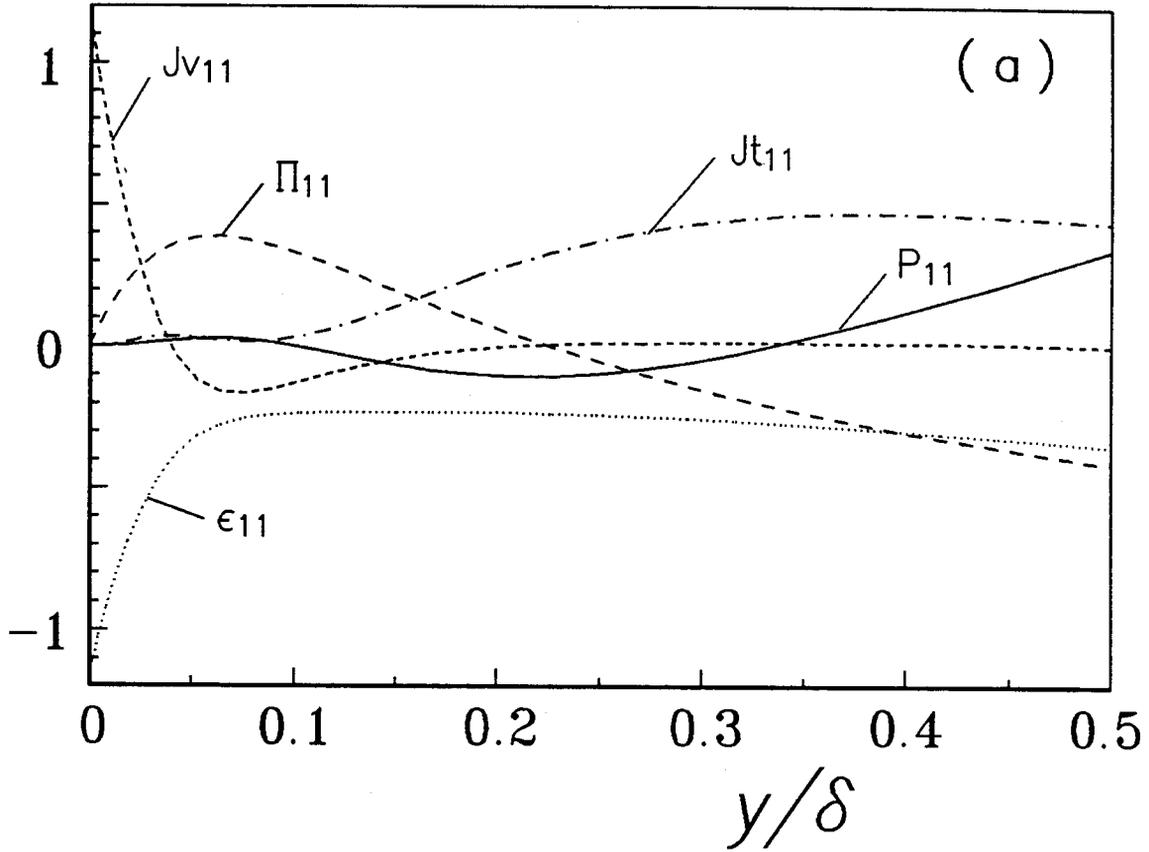


図 4. 5. 7 $\overline{u u}$ の収支

(a) ケース CP2、(b) ケース CP3

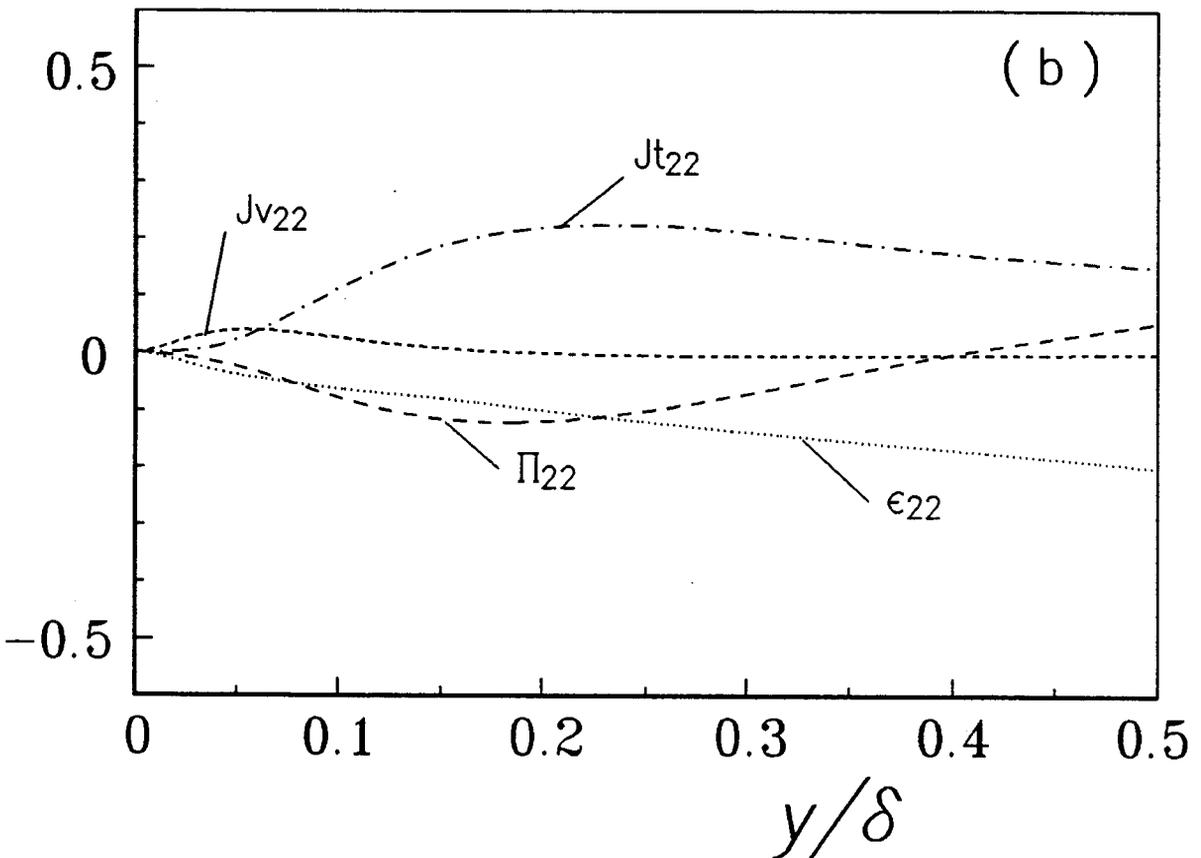
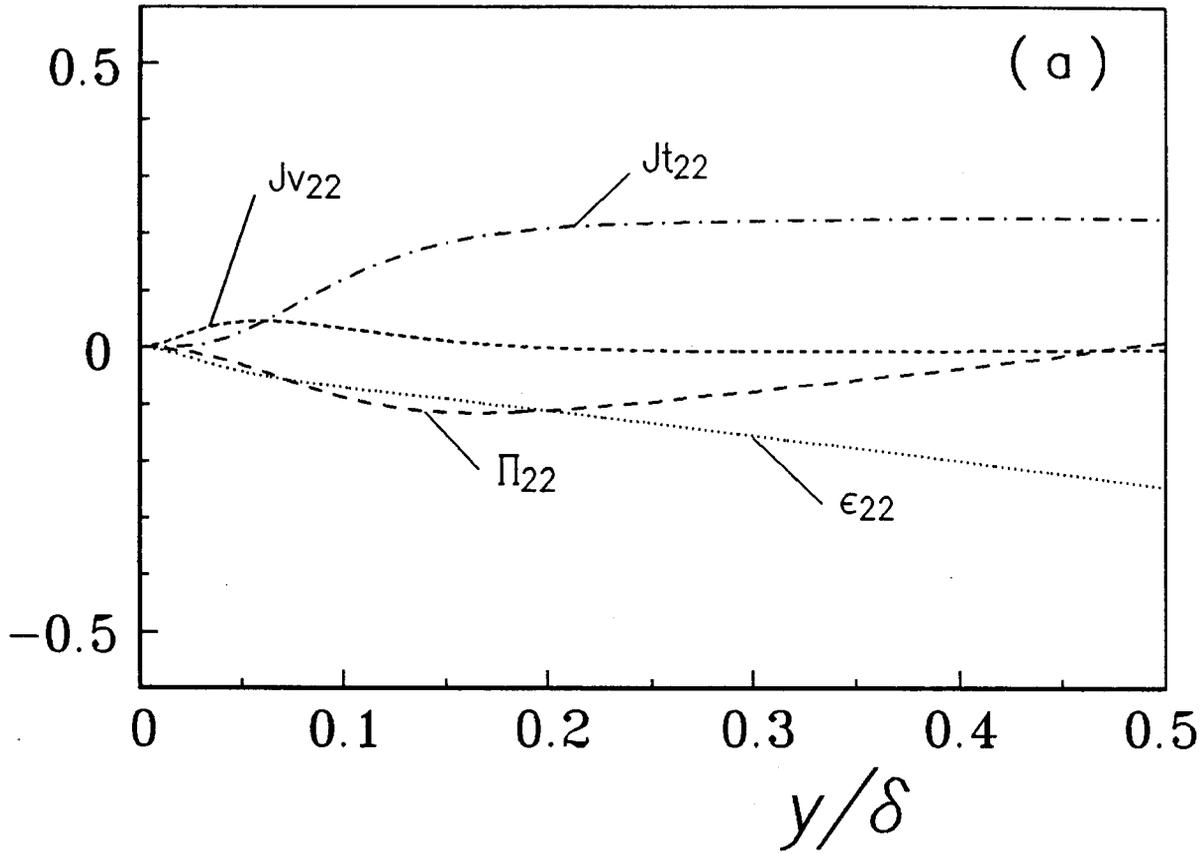


図 4. 5. 8 $\overline{v v}$ の収支

(a) ケース CP2、(b) ケース CP3

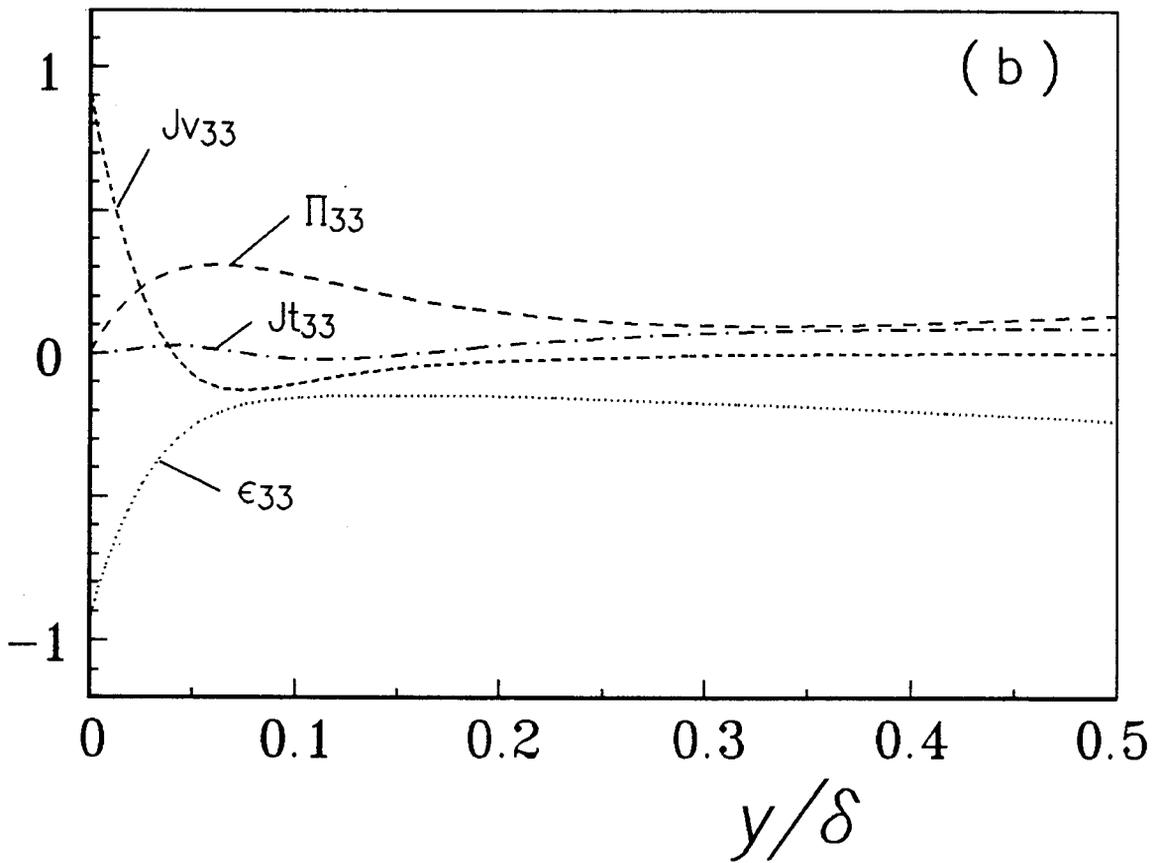
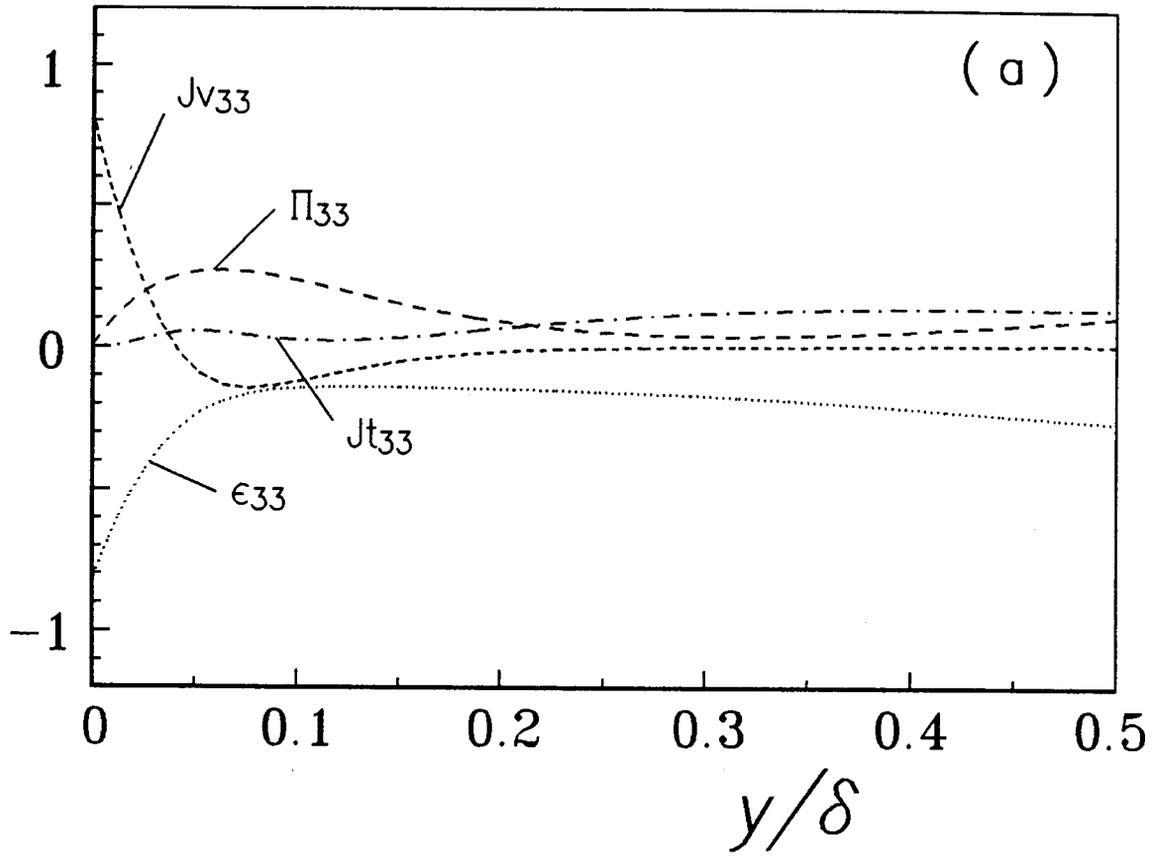


図 4. 5. 9 $\overline{w w}$ の収支

(a) ケース CP 2、(b) ケース CP 3

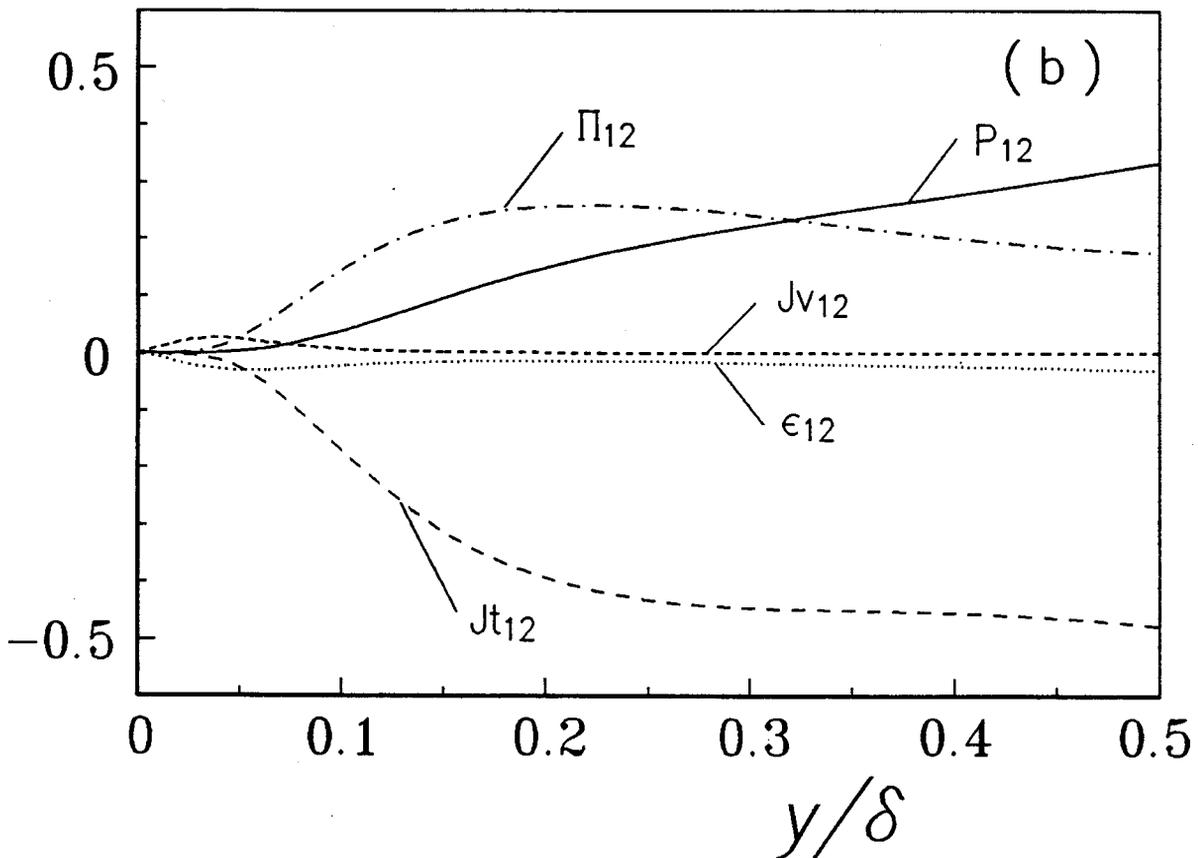
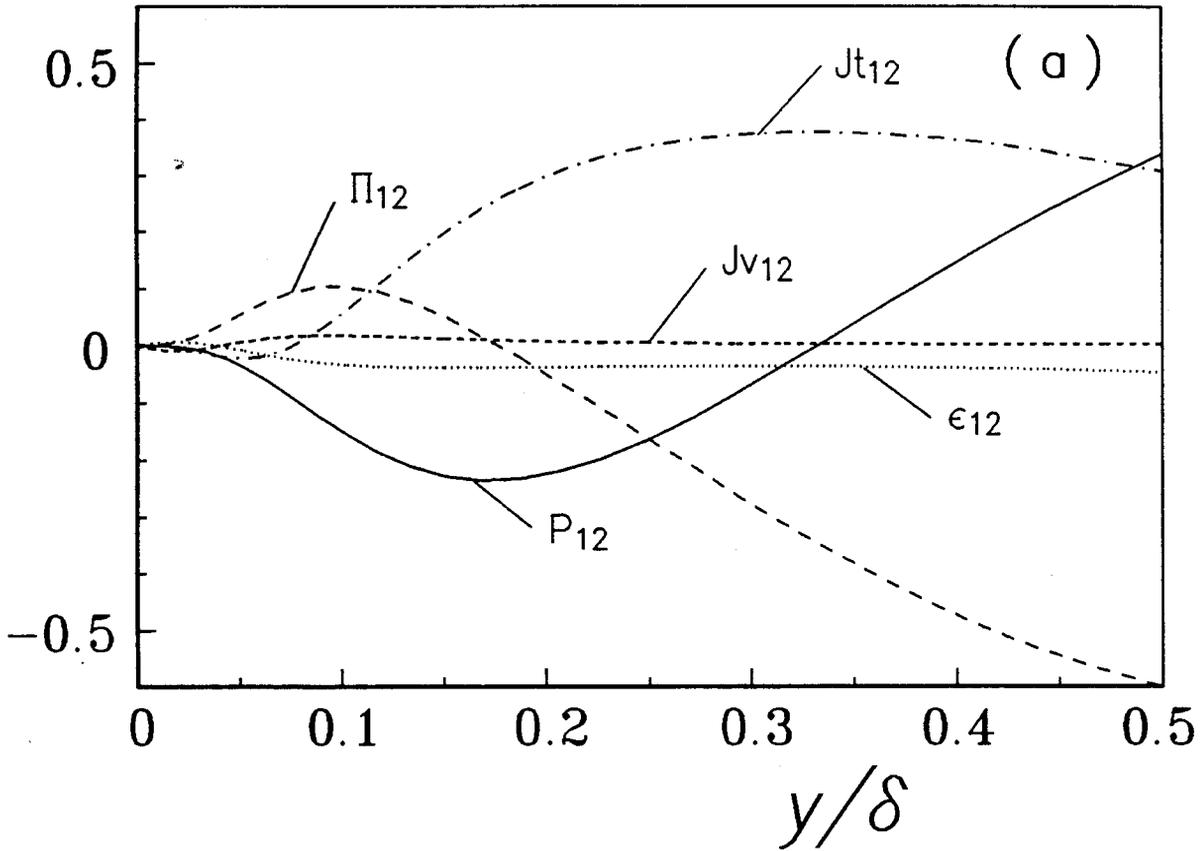


図 4. 5. 10 $\overline{u'v'}$ の収支

(a) ケース CP2、(b) ケース CP3

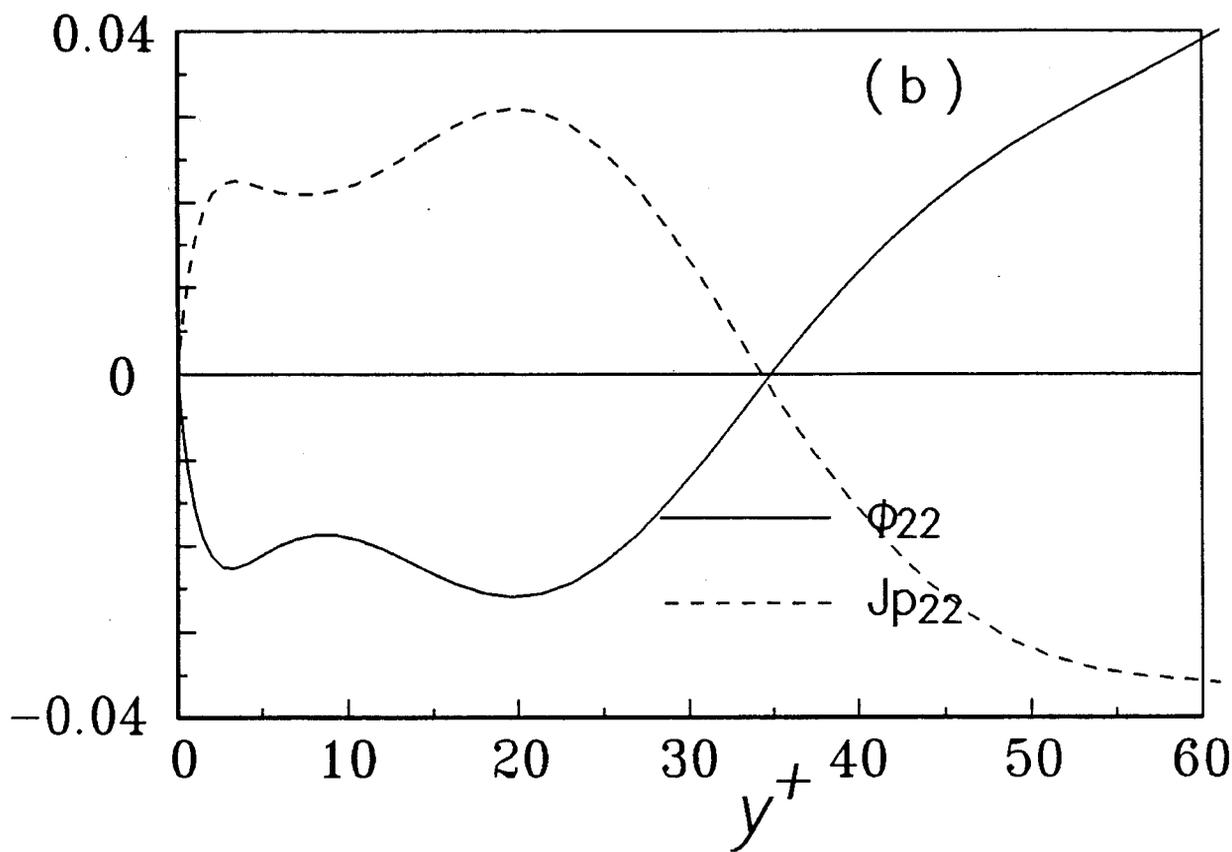
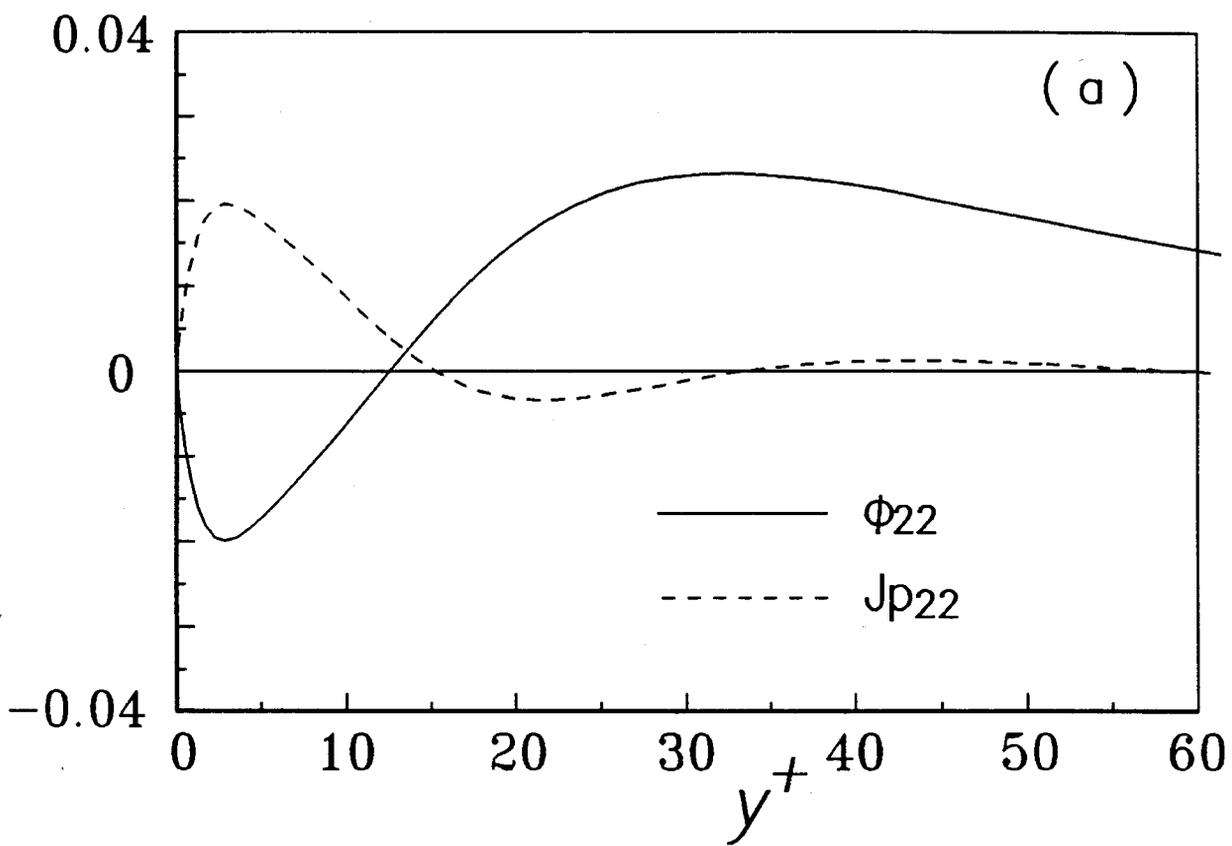


図 4. 5. 11 $\overline{v v}$ 方程式中の圧力・歪相関項と圧力拡散項
(a) ケース P、(b) ケース CP1

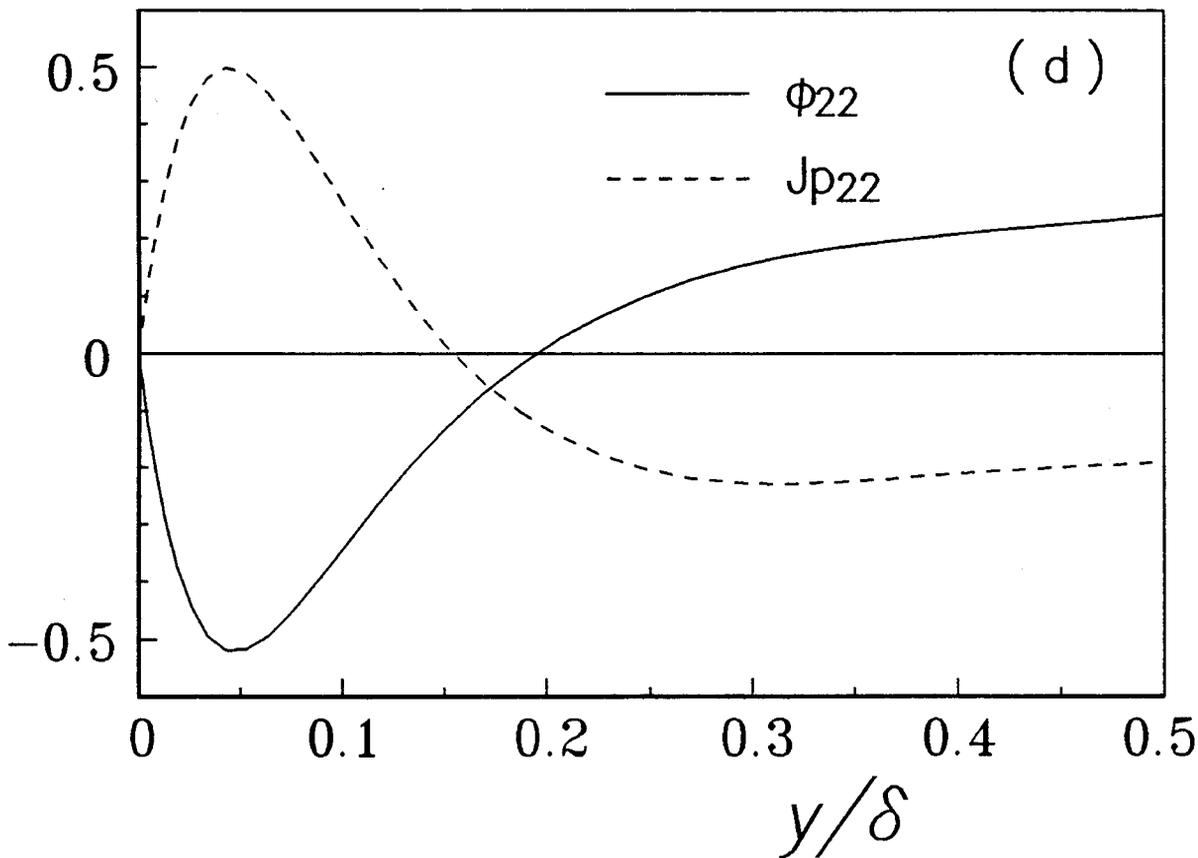
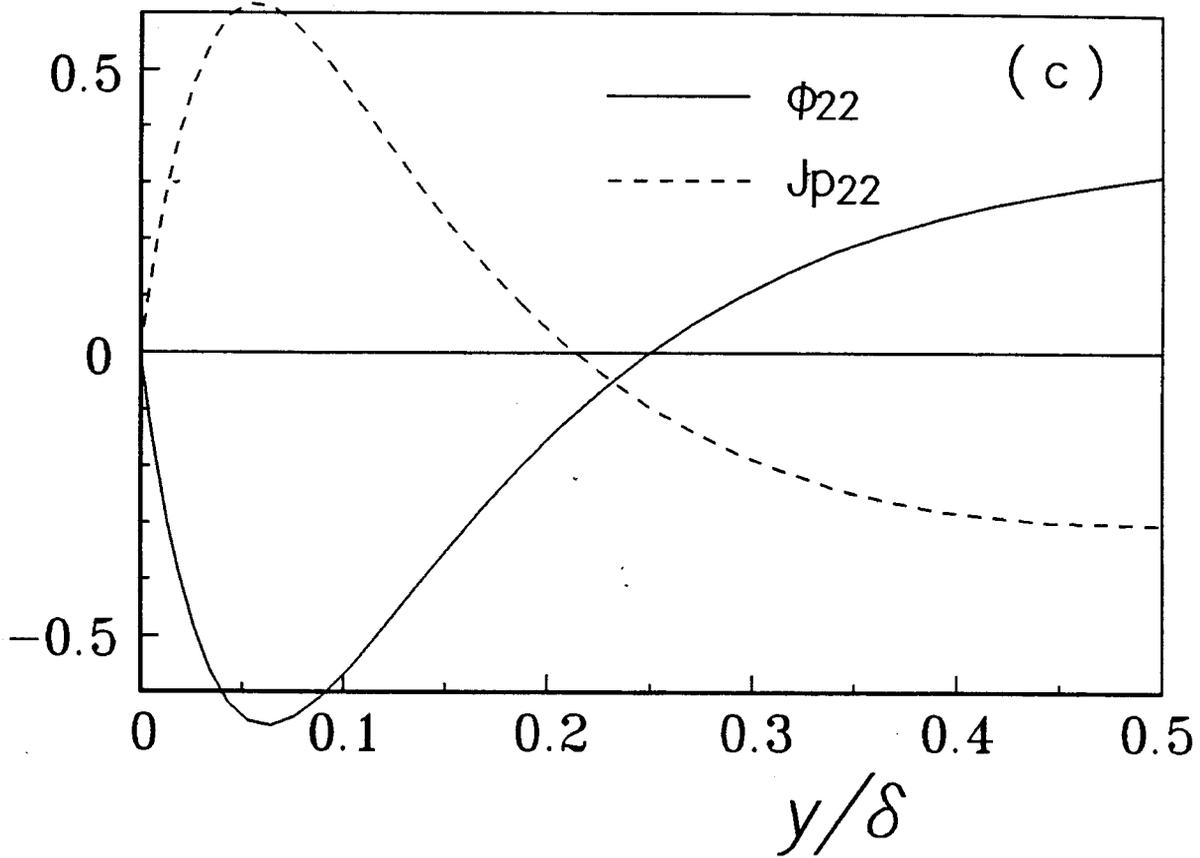


図4. 5. 11 $\overline{v v}$ 方程式中の圧力・歪相関項と圧力拡散項 (前頁の続き)
(c) ケースCP2、(d) ケースCP3

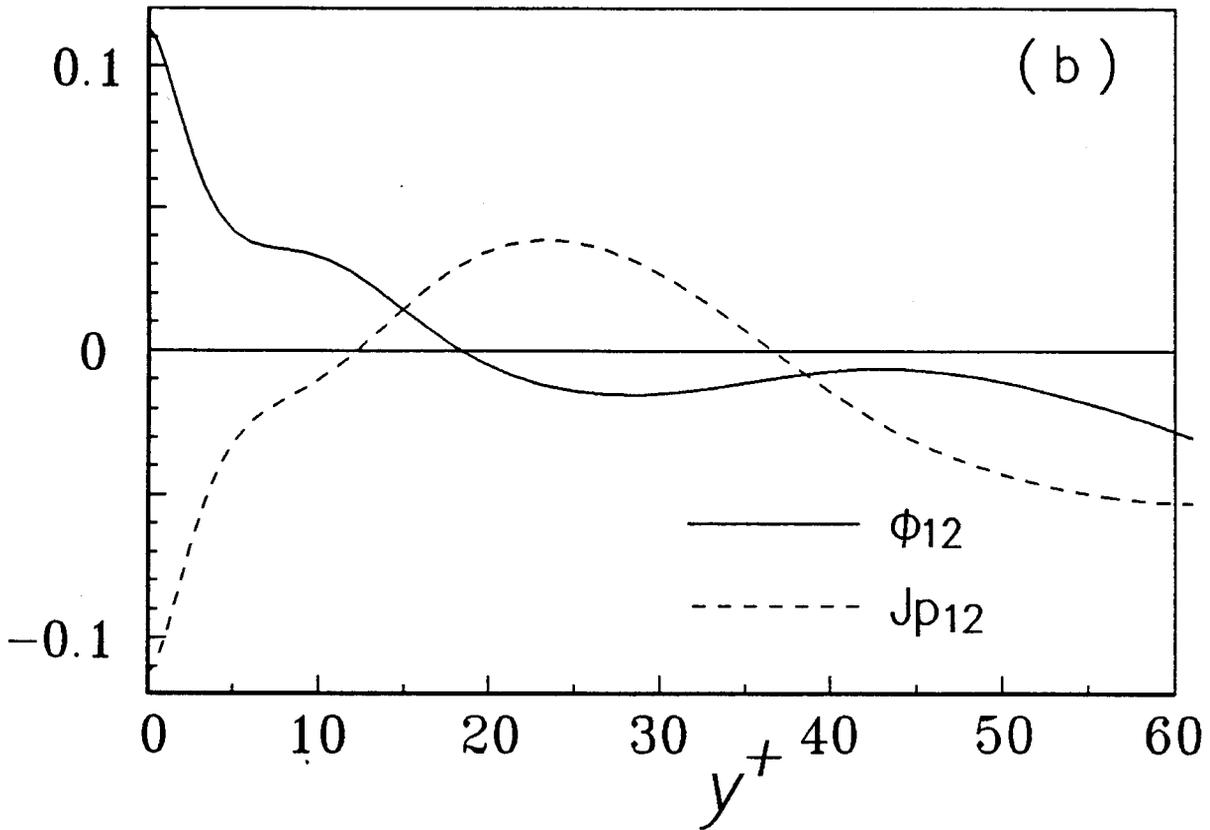
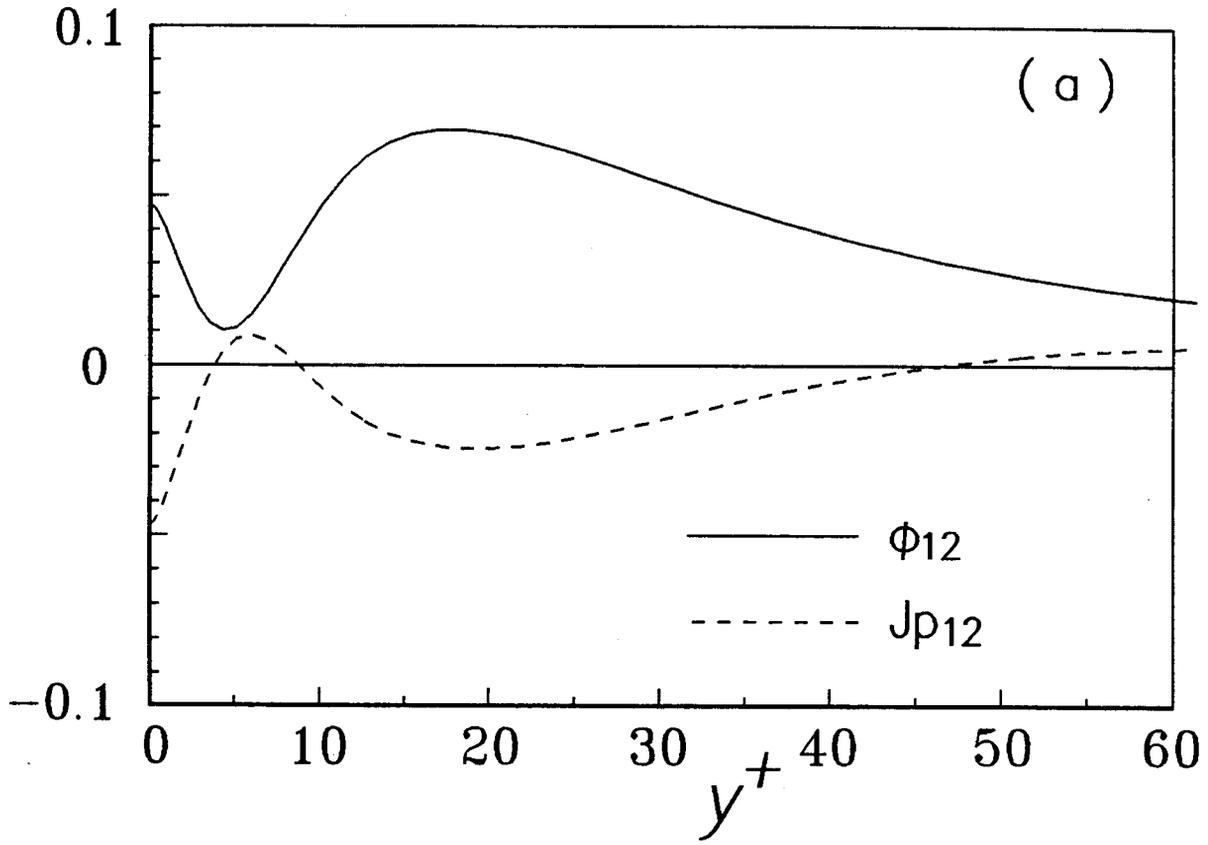


図 4. 5. 12 $\overline{u v}$ 方程式中の圧力・歪相関項と圧力拡散項
(a) ケース P、(b) ケース CP1

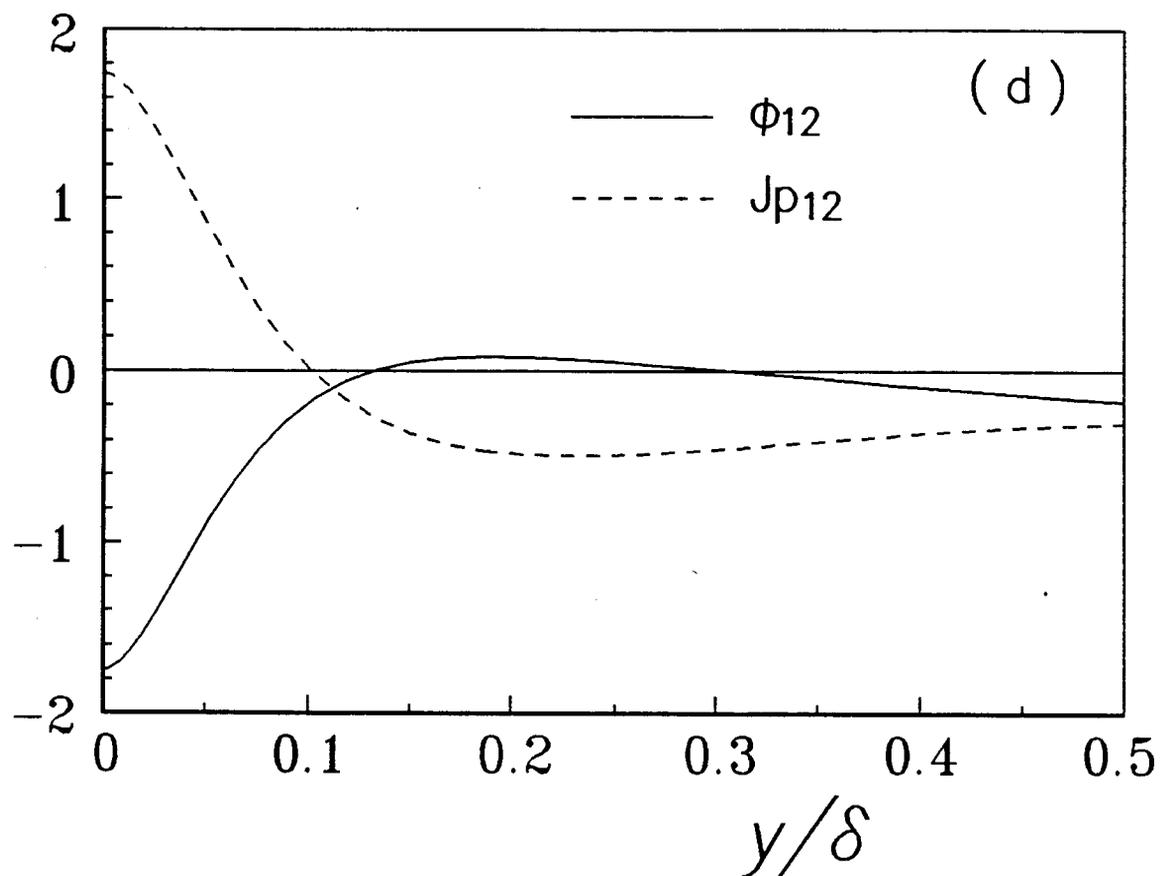
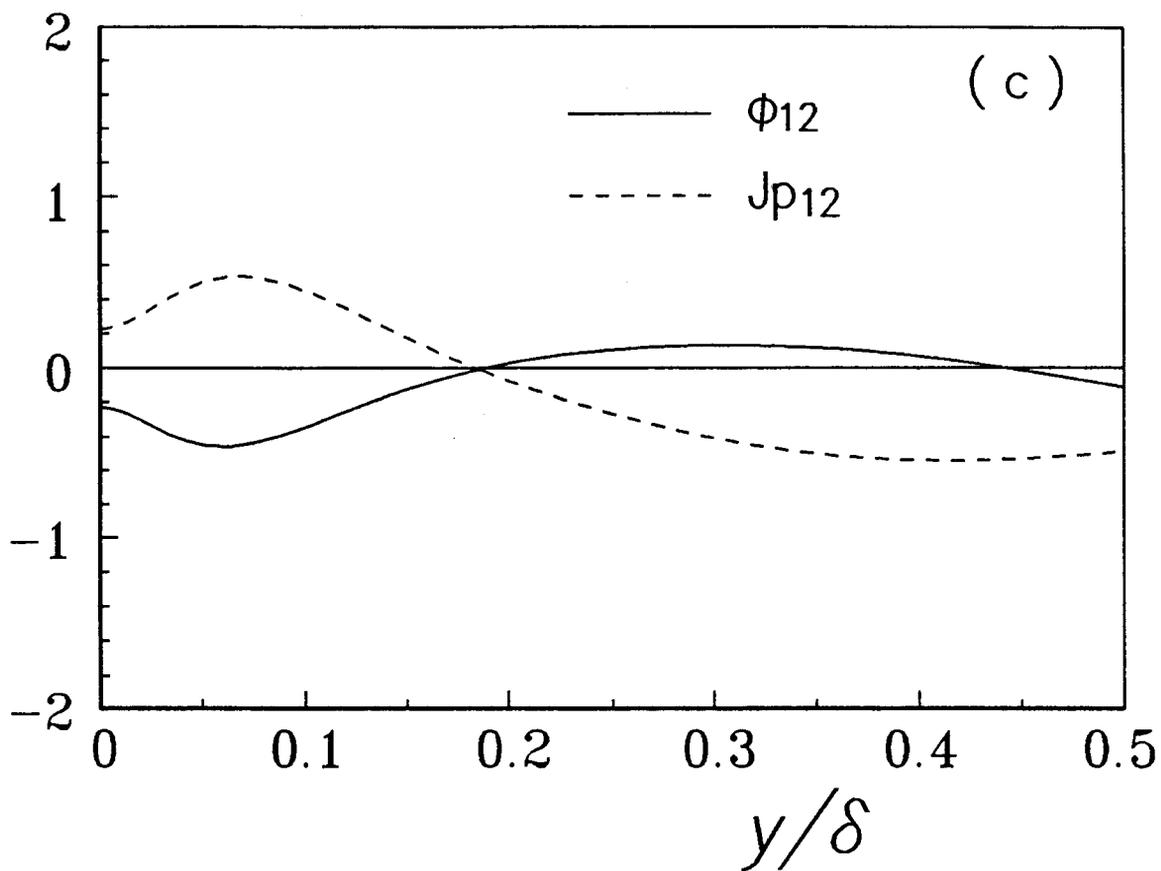


図4. 5. 12 $\overline{u'v'}$ 方程式中の圧力・歪相関項と圧力拡散項 (前頁の続き)
 (c) ケースCP2、(d) ケースCP3

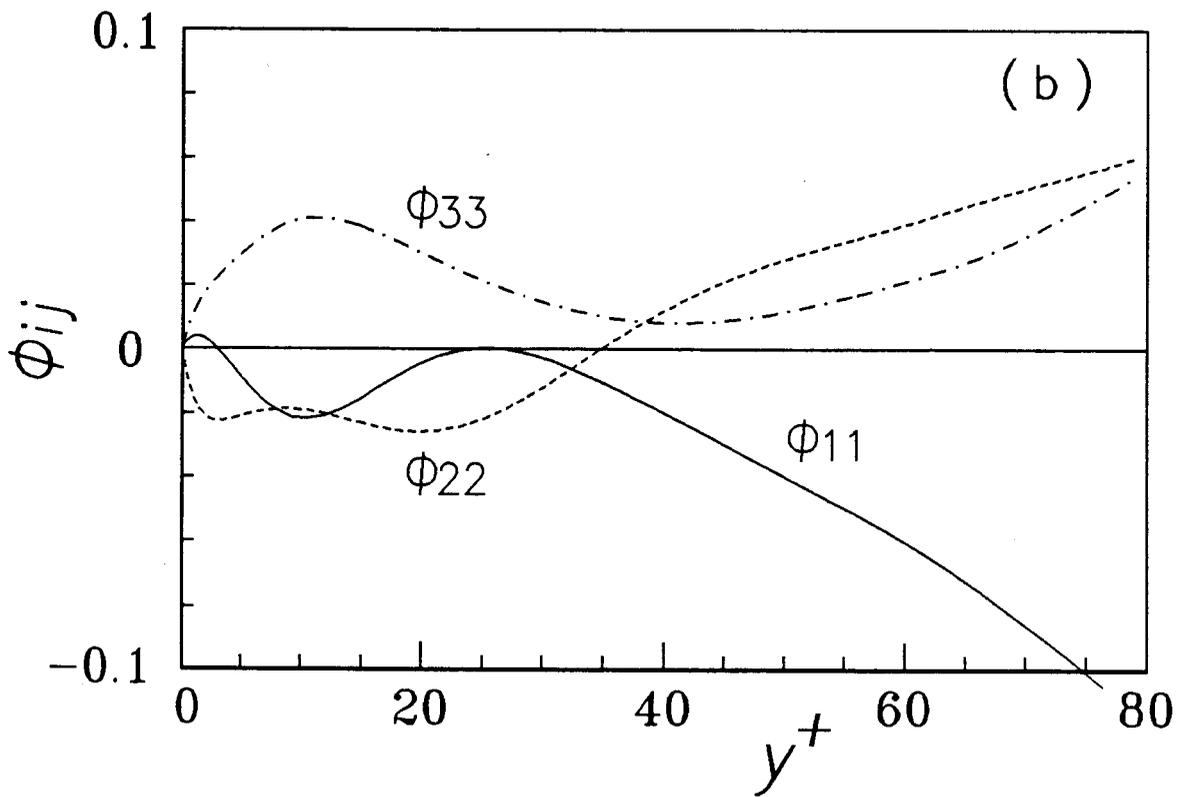
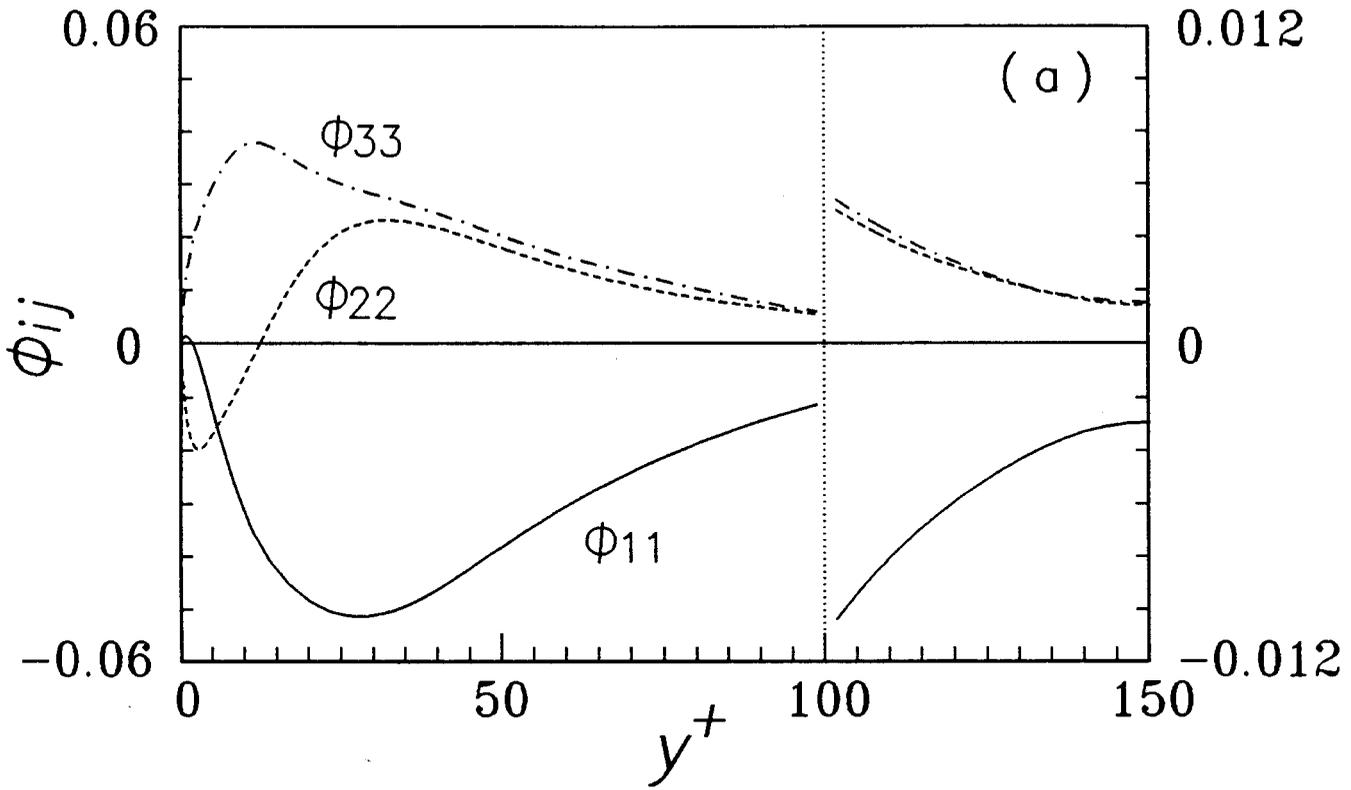


図4. 5. 13 圧力・速度歪相関項の分布
(a) ケースP、(b) ケースCP1

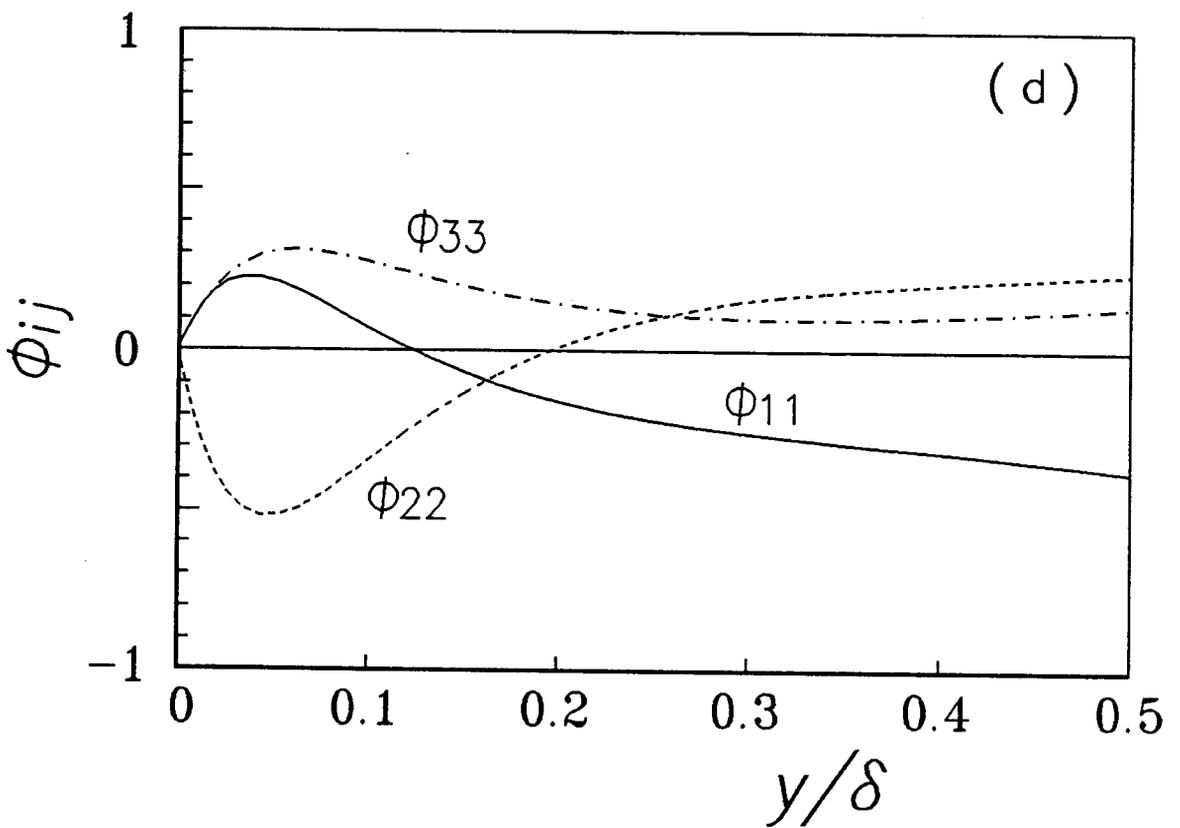
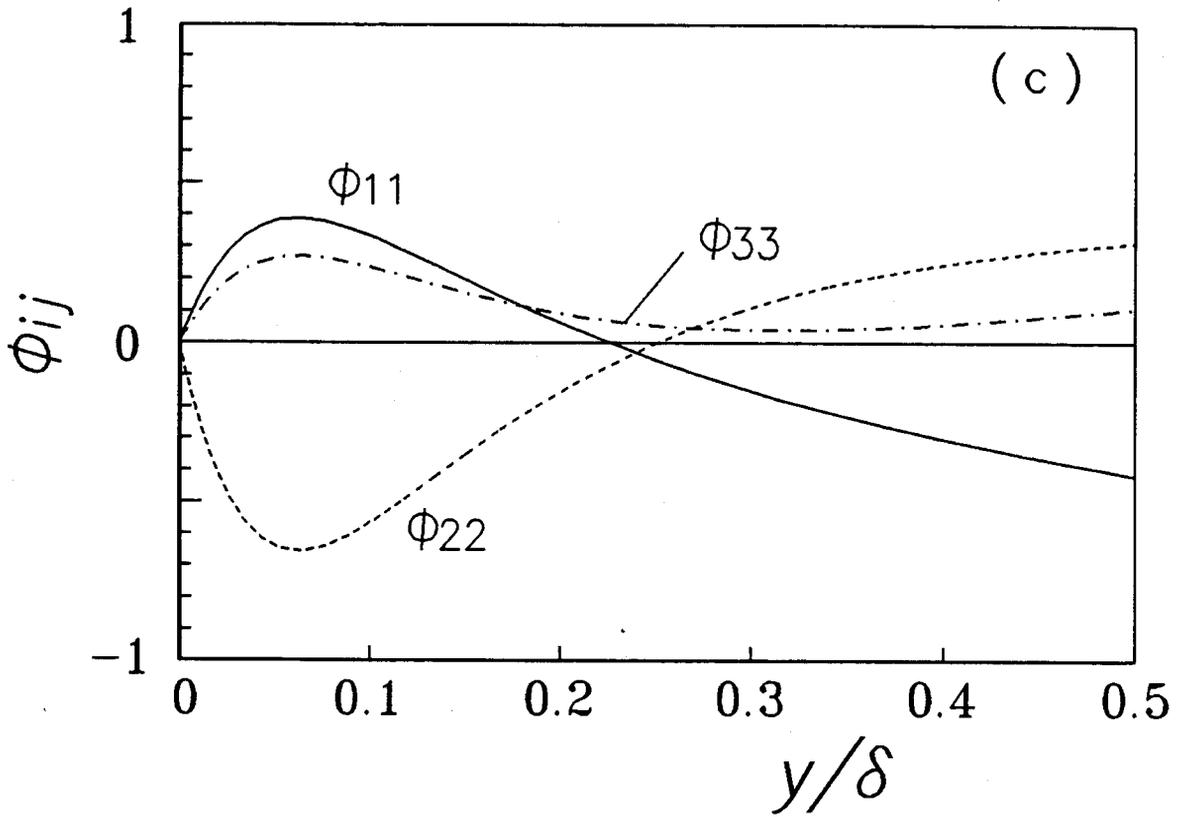


図4. 5. 13 圧力・速度歪相関項の分布 (前頁の続き)
(c) ケースCP2、(d) ケースCP3

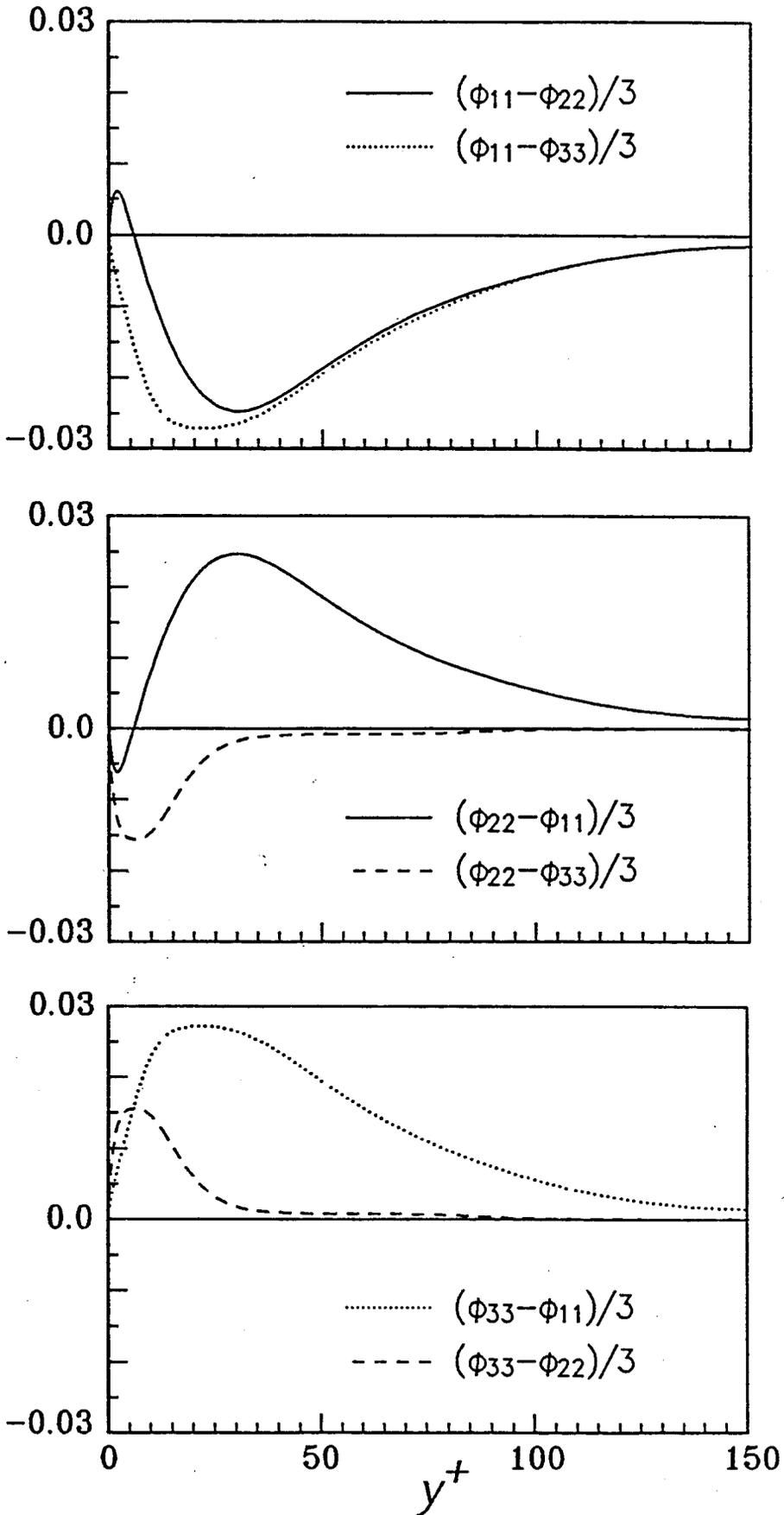


図4. 5. 14 (a) 垂直応力各成分間でのエネルギー交換
ケース P

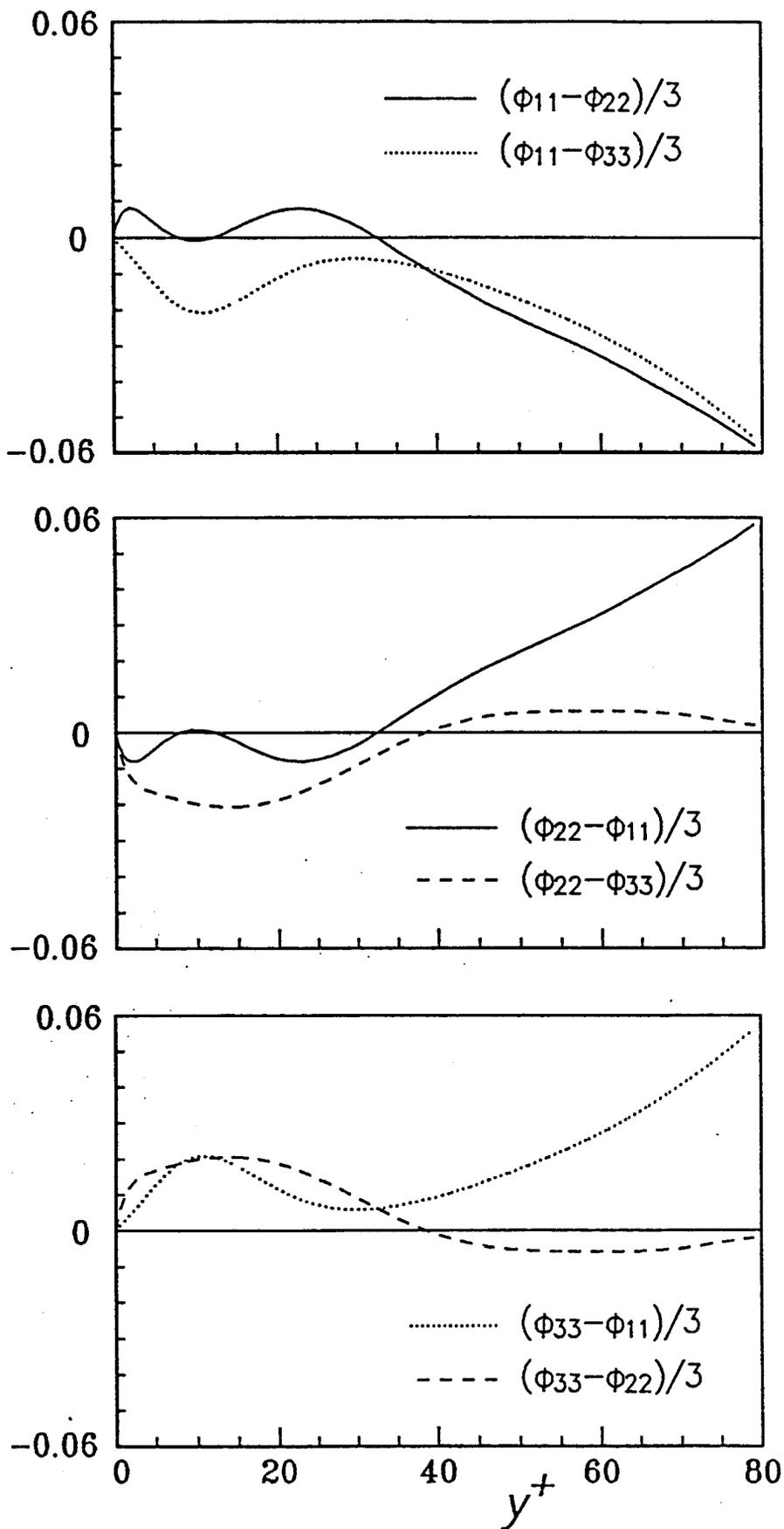


図 4. 5. 14 (b) 垂直応力各成分間でのエネルギー交換
ケース C P 1

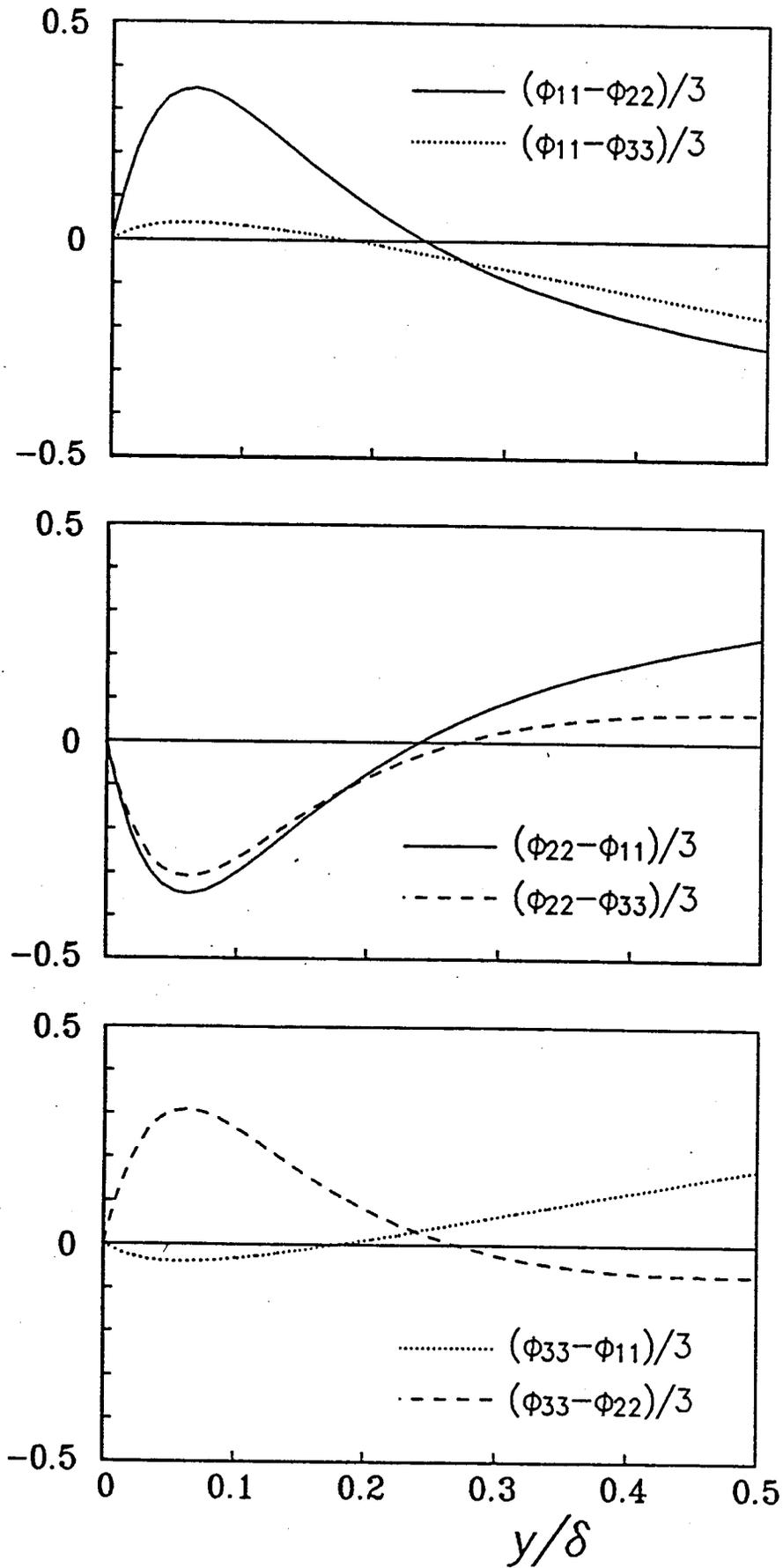


図4. 5. 14 (c) 垂直応力各成分間でのエネルギー交換
ケースCP2

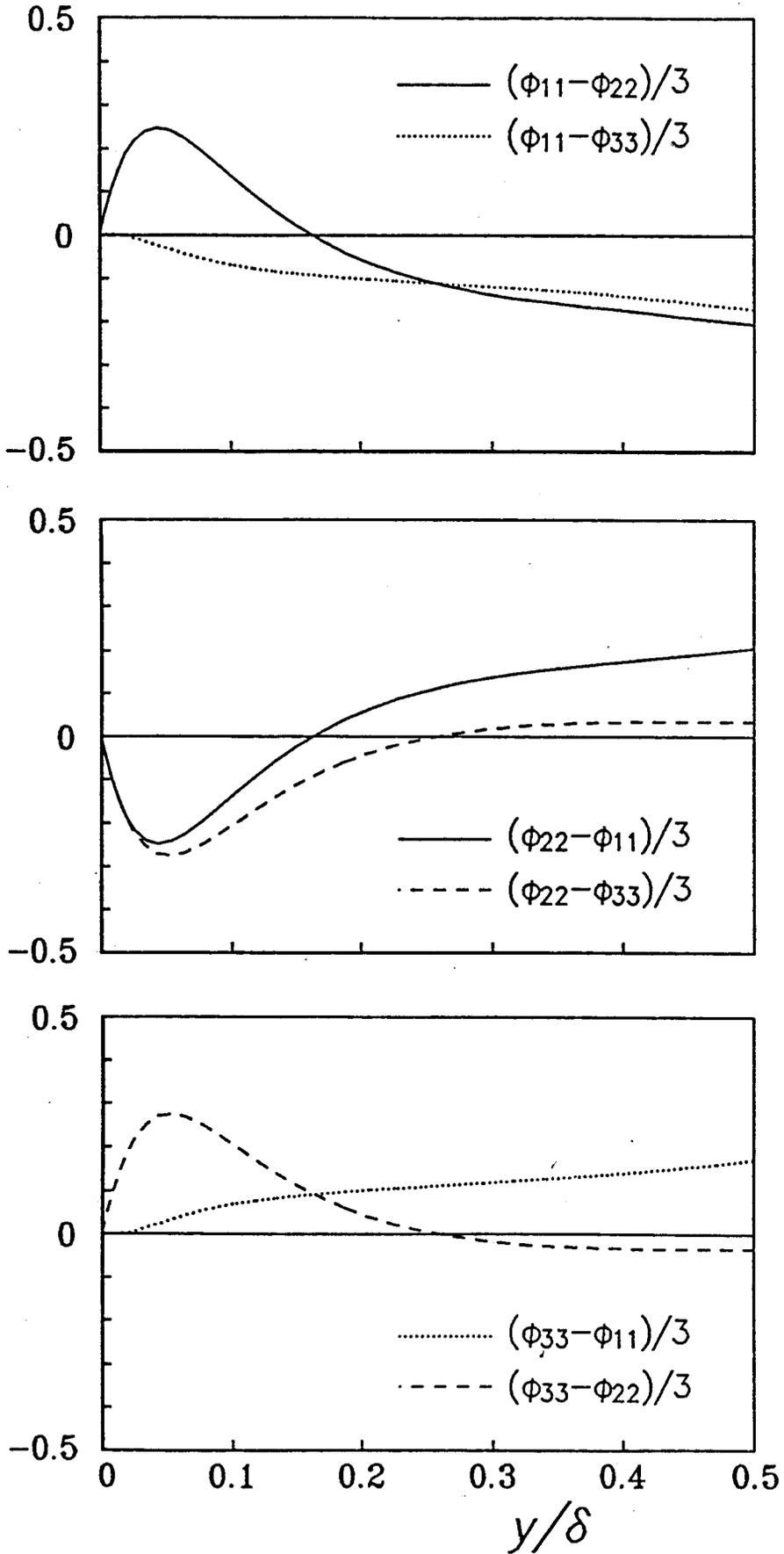


図4. 5. 14 (d) 垂直応力各成分間でのエネルギー交換
ケースCP3

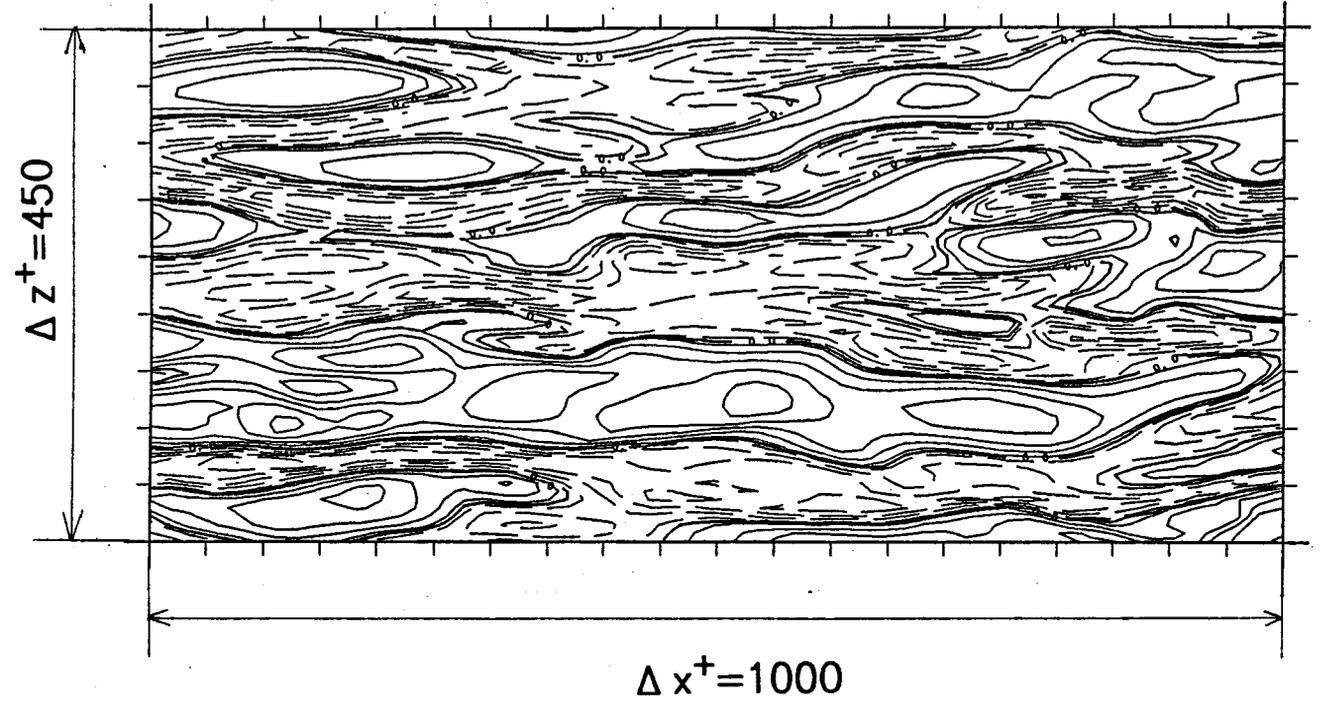


図 4. 6. 1 (a) 流れ方向速度変動の等値線 (ケース P、 $x-z$ 断面)
 $y^+ = 13.4$ 、実線部: $u \geq 0$ 、破線部: $u < 0$

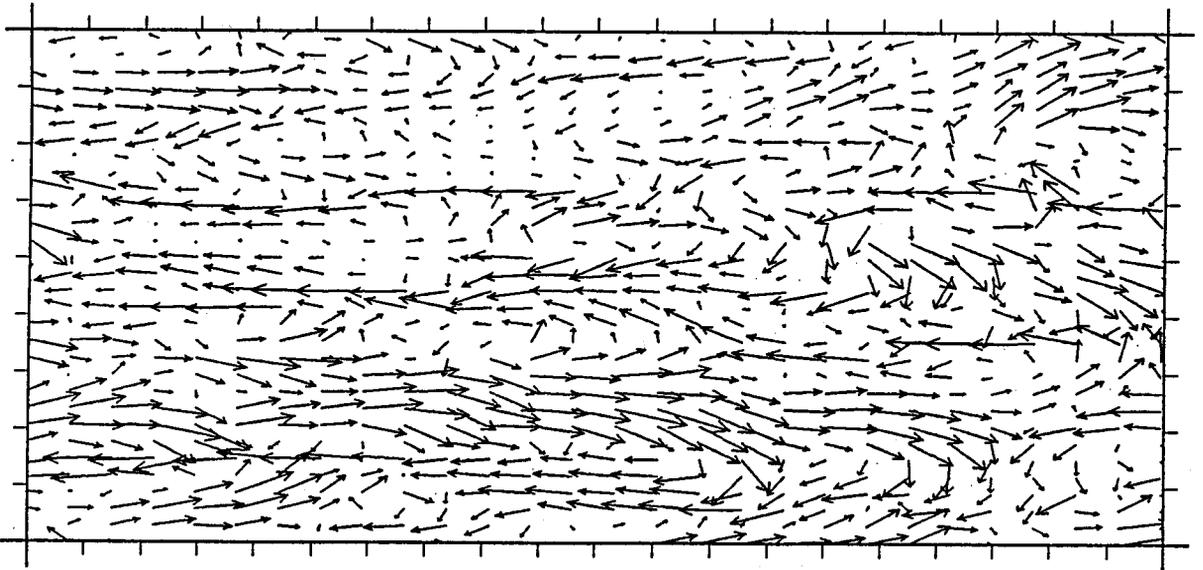


図 4. 6. 1 (b) 速度変動ベクトル (ケース P、 $x-z$ 断面)
 $y^+ = 13.4$

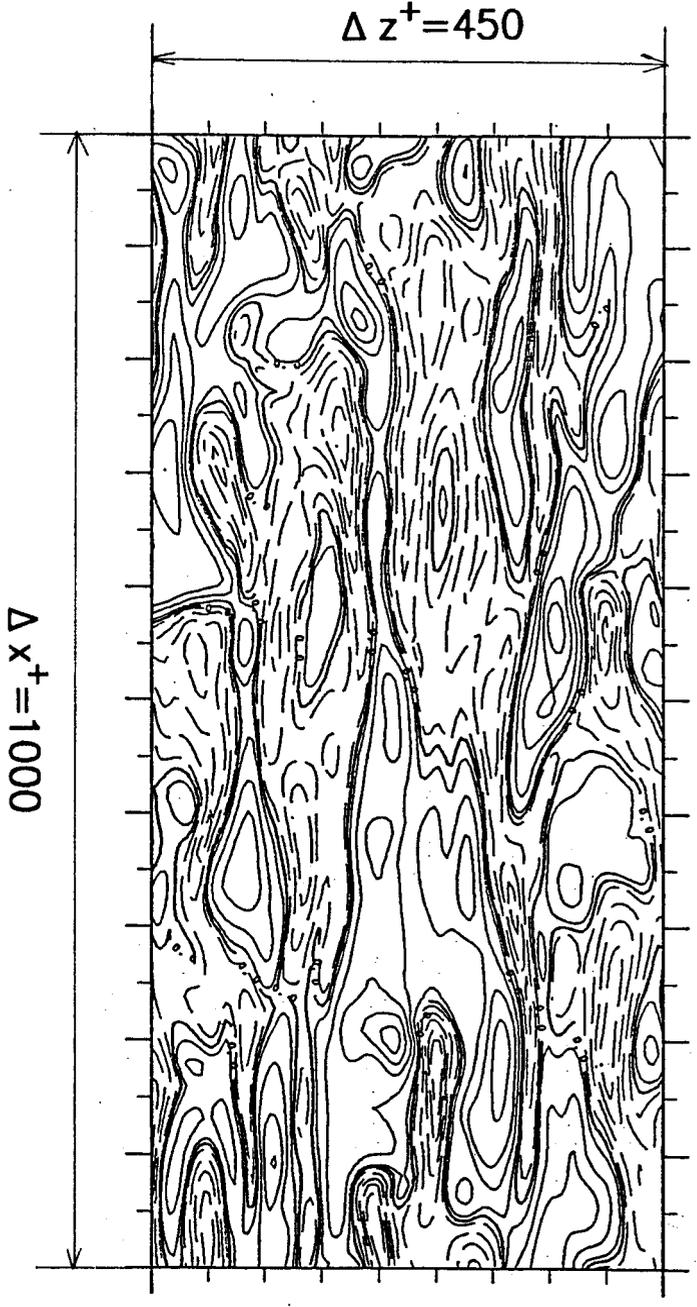


図 4. 6. 2 (a) 流れ方向速度変動の等値線 (ケース C P 1、x - z 断面)
 $y^+ = 13.3$ 、実線部： $u \geq 0$ 、破線部： $u < 0$

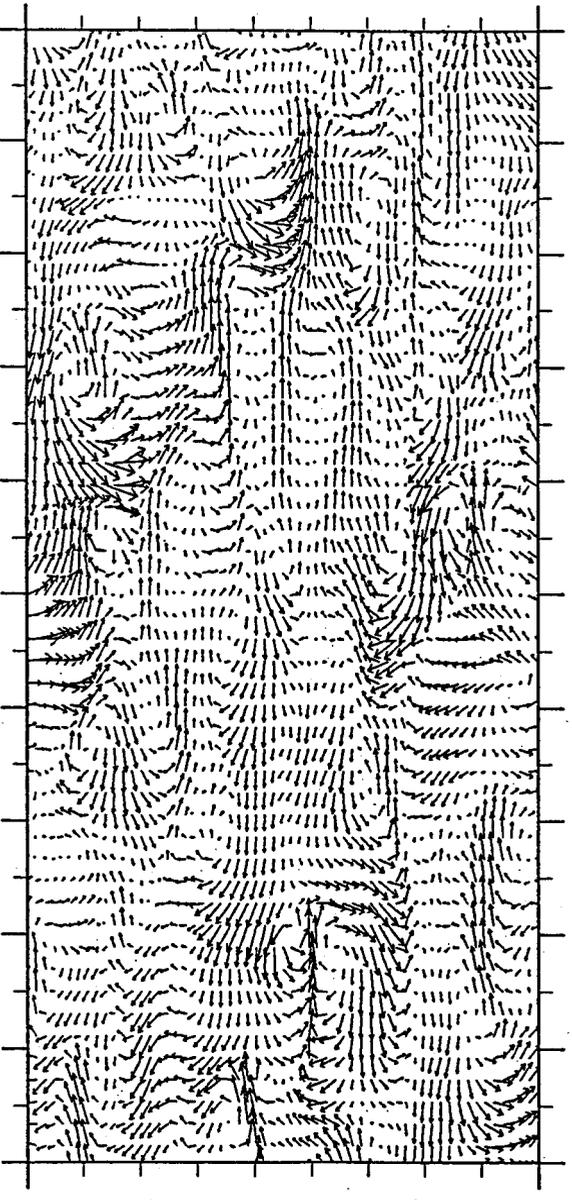


図 4. 6. 2 (b) 速度変動ベクトル (ケース C P 1、x - z 断面)
 $y^+ = 13.3$

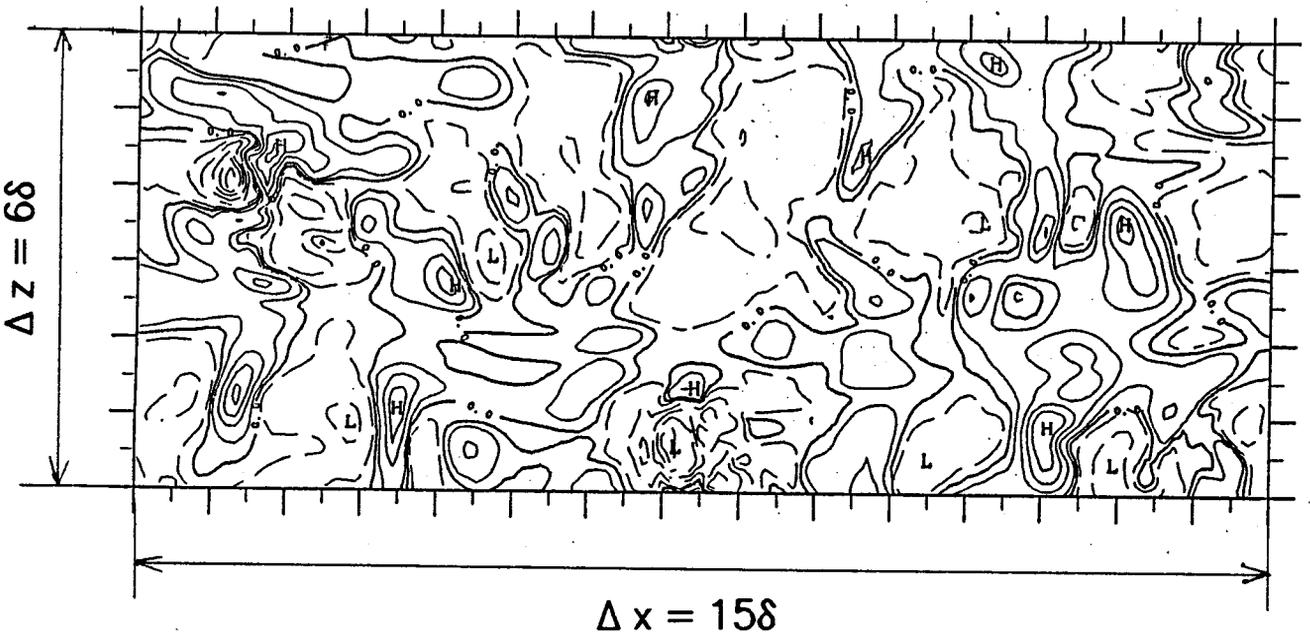


図4. 6. 3 (a) 流れ方向速度変動の等値線 (ケースCP2、 $x-z$ 断面)
 $y/\delta = 0.054$ 、実線部: $u \geq 0$ 、破線部: $u < 0$

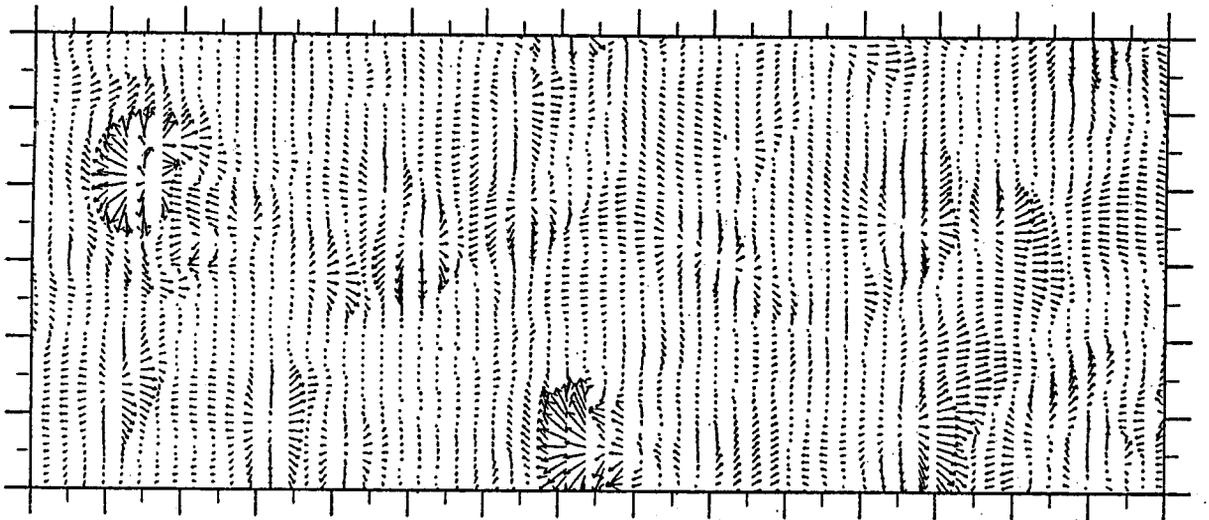


図4. 6. 3 (b) 速度変動ベクトル (ケースCP2、 $x-z$ 断面)
 $y/\delta = 0.054$

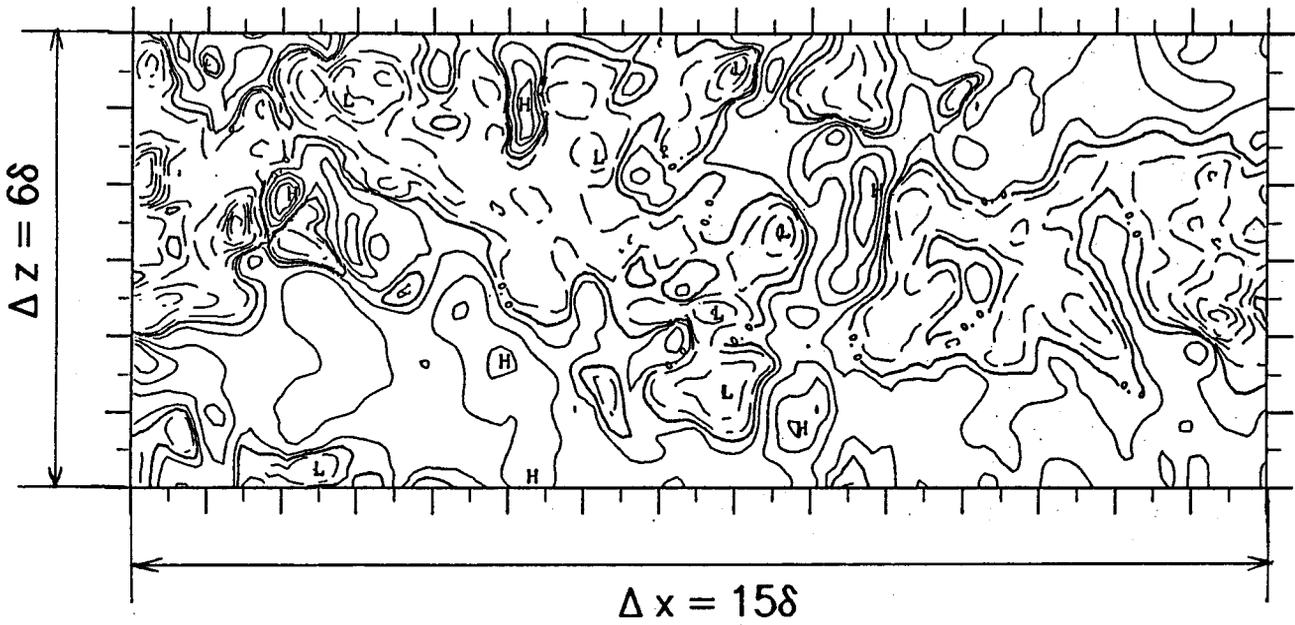


図4. 6. 4(a) 流れ方向速度変動の等値線 (ケースCP3、x-z断面)
 $y/\delta = 0.054$ 、実線部: $u \geq 0$ 、破線部: $u < 0$

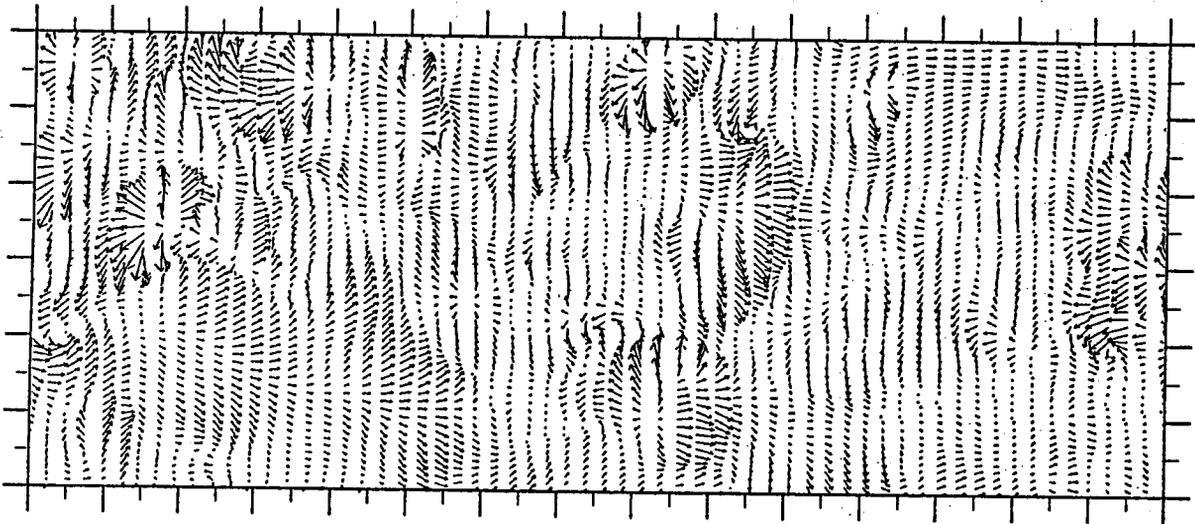


図4. 6. 4(b) 速度変動ベクトル (ケースCP3、x-z断面)
 $y/\delta = 0.054$

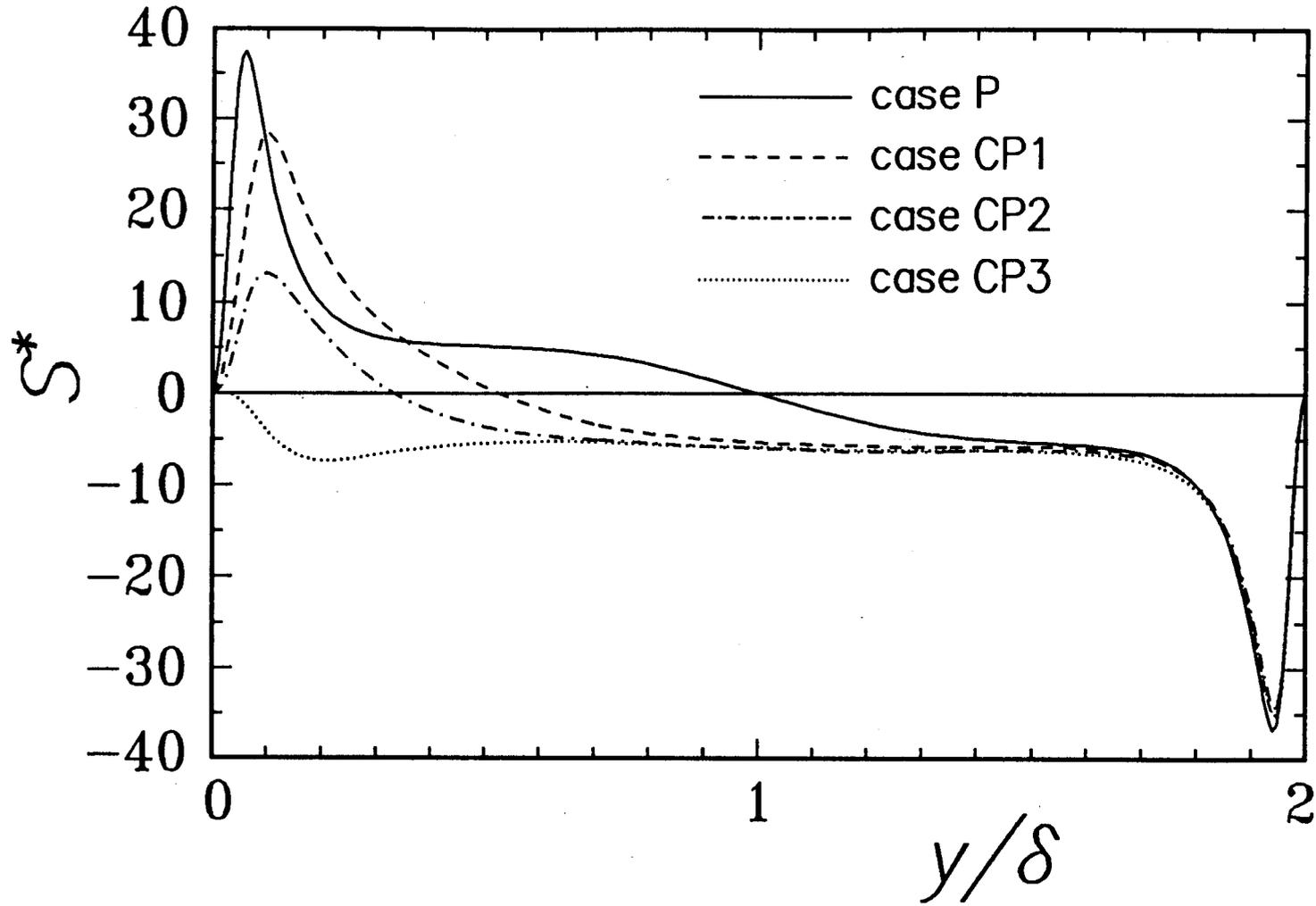
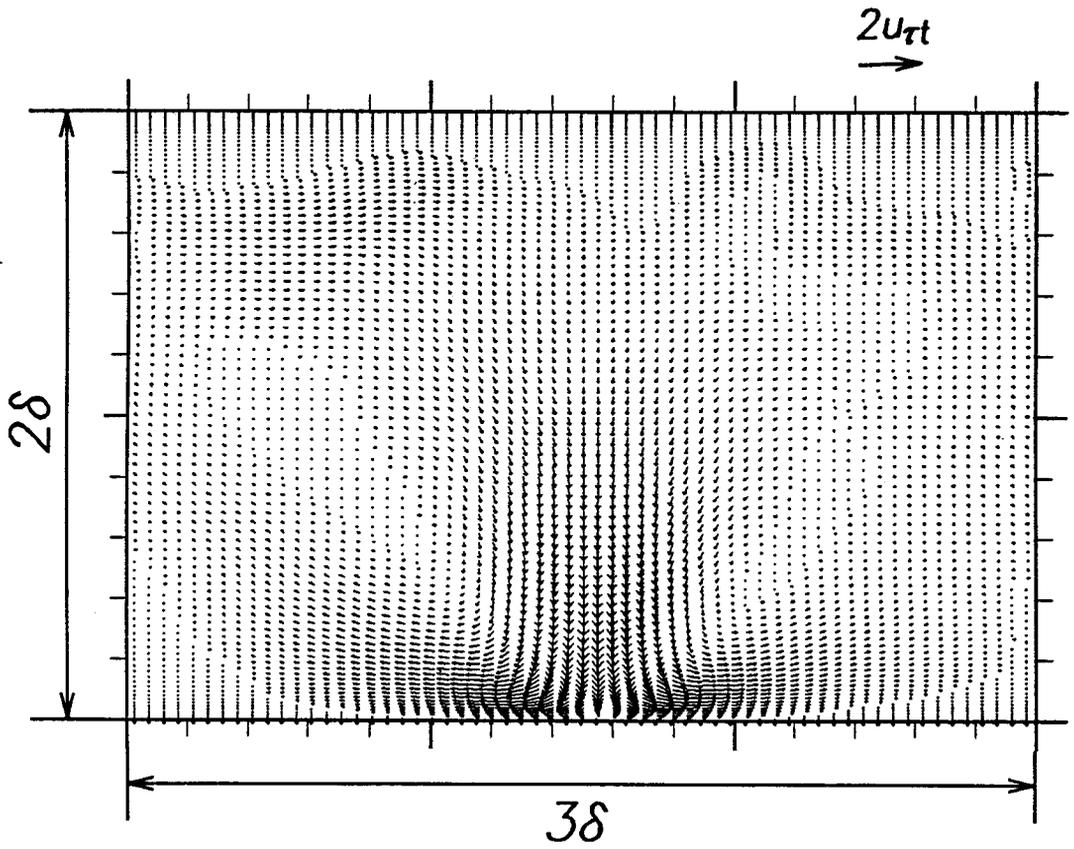
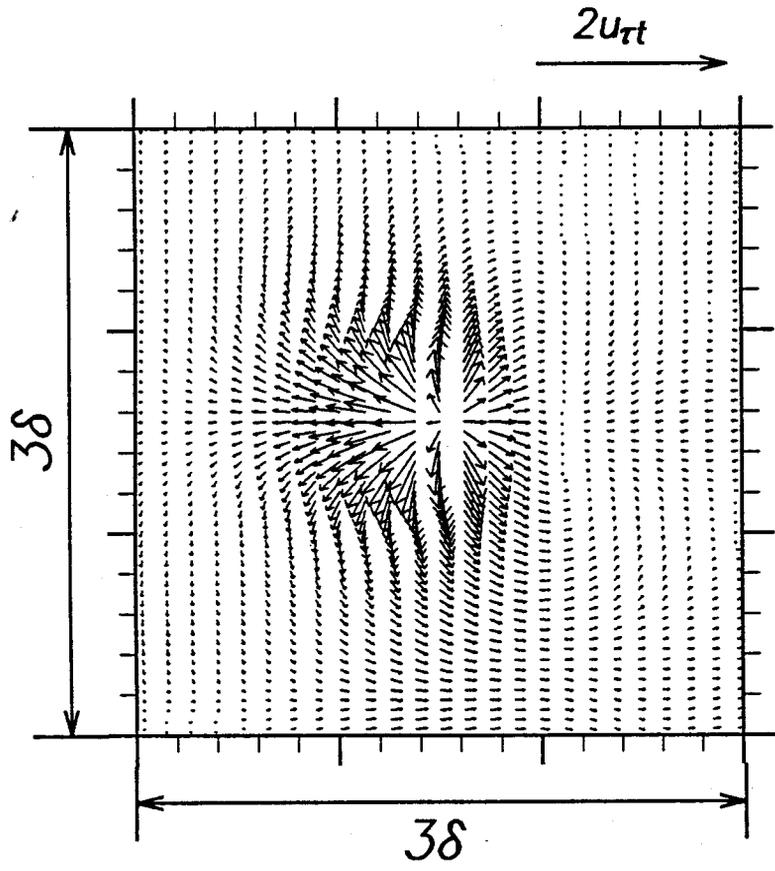


図 4. 6. 5 無次元シェアパラメータの分布



⊠ 4 . 6 . 6

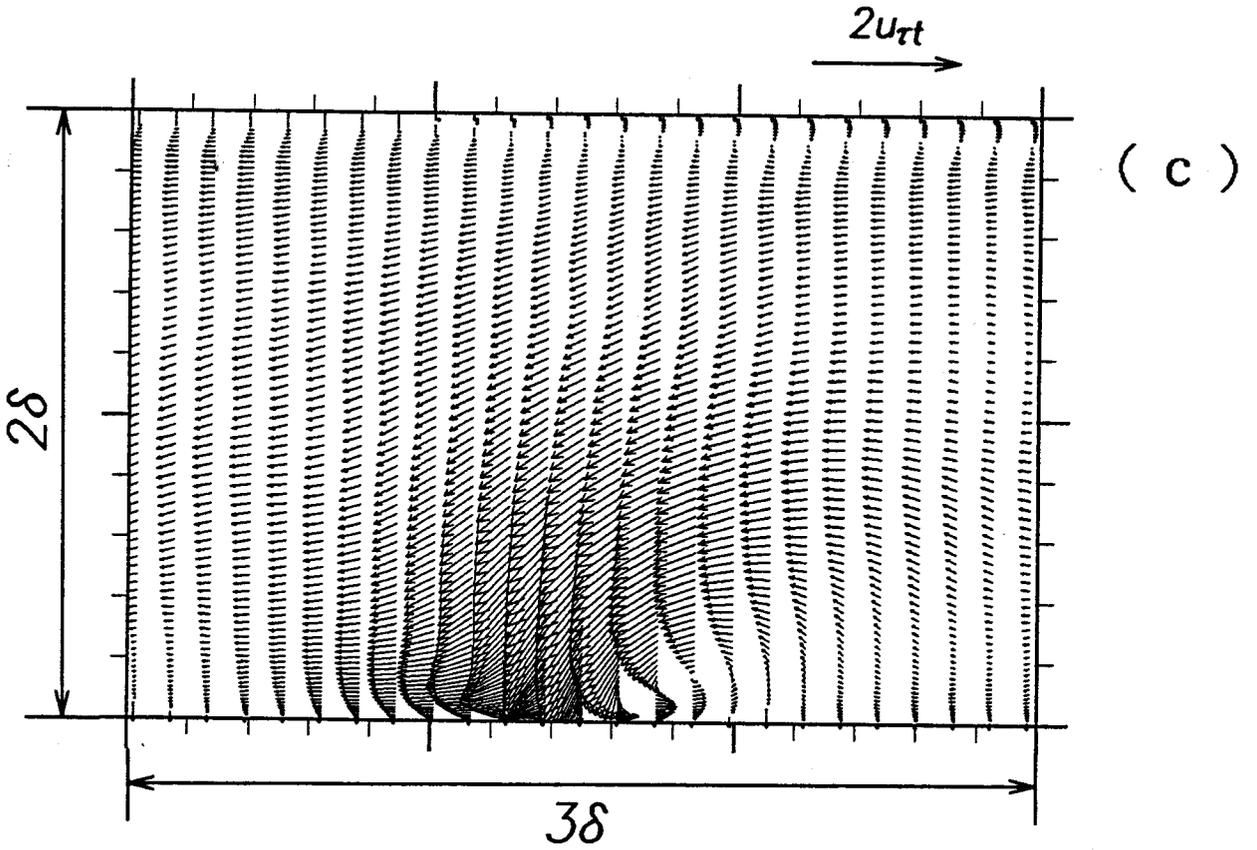
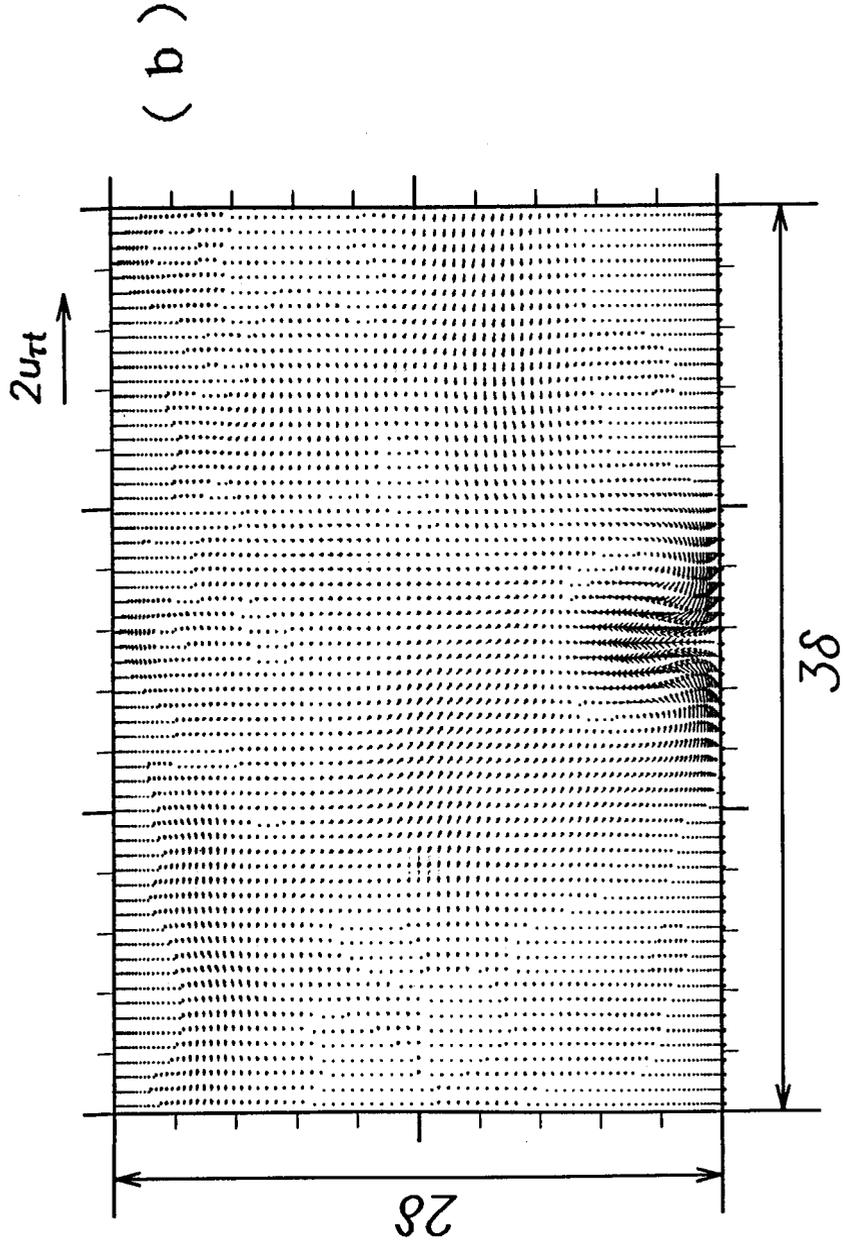
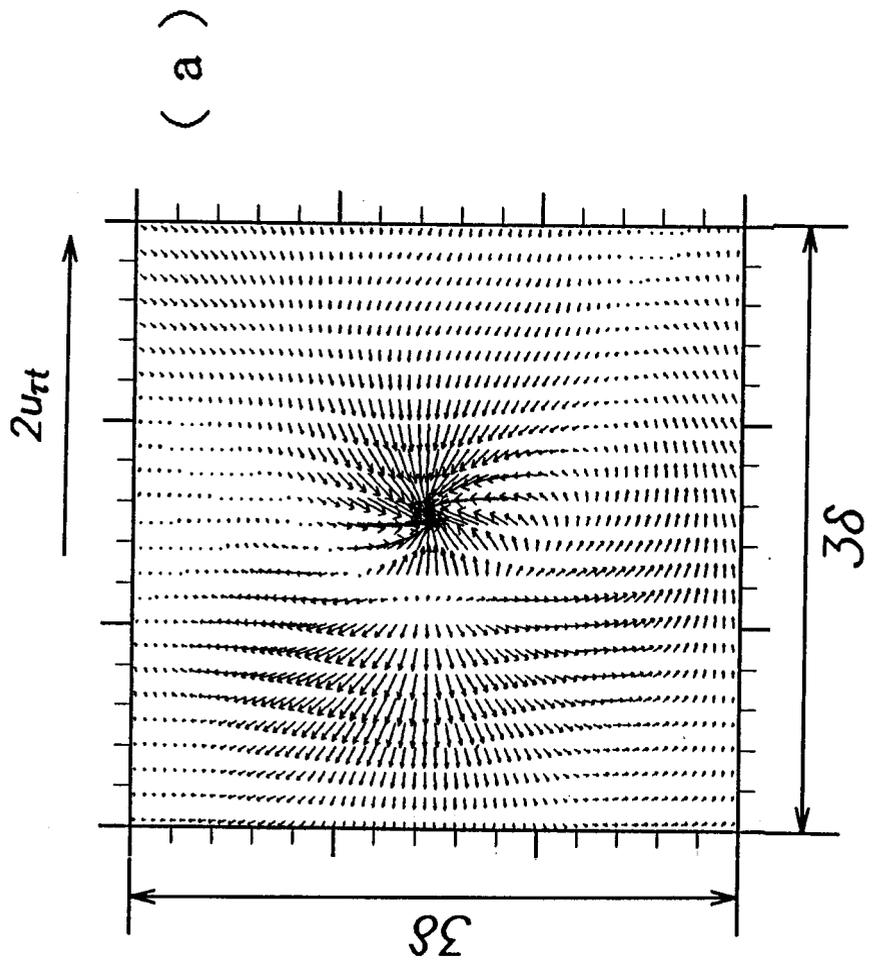


図4.6.6 インワードイベントの速度ベクトル線図
(a) x-z断面、 $y/\delta = 0.054$
(b) z-y断面
(c) x-y断面



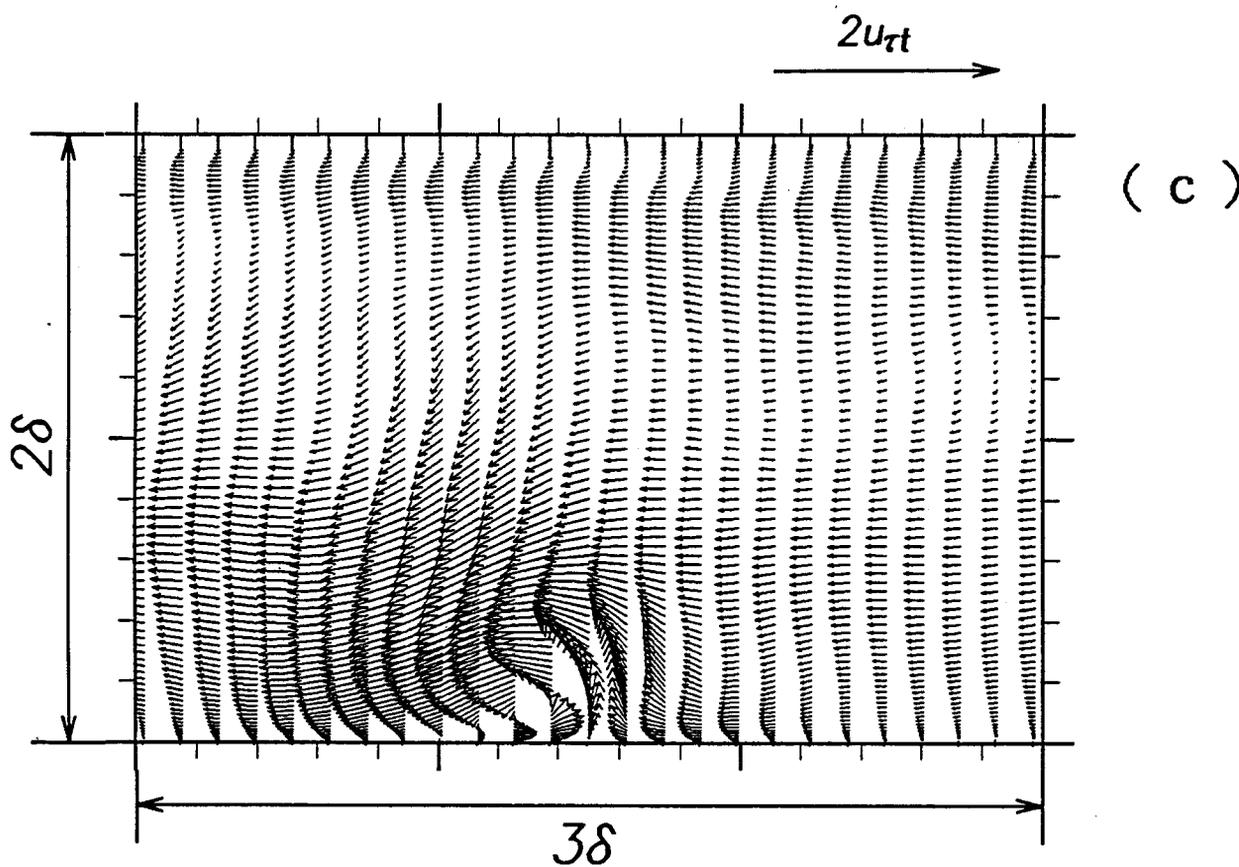
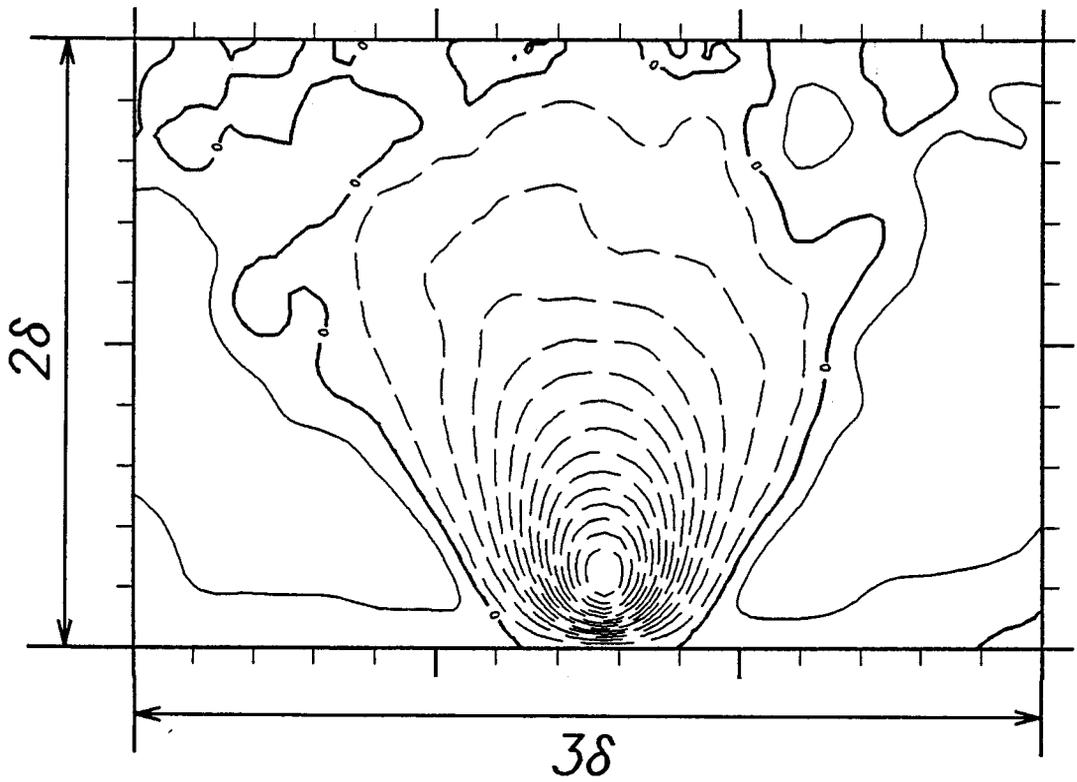
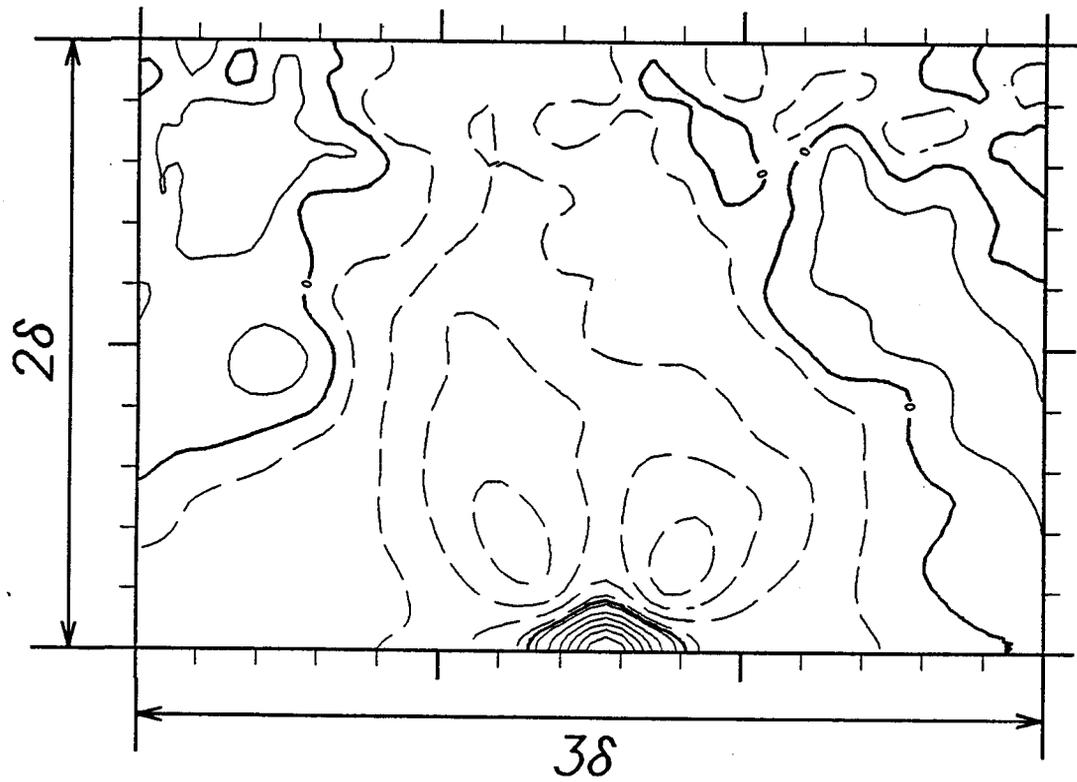


図 4. 6. 7 アウトワードイベントの速度ベクトル線図
(a) $x-z$ 断面、 $y/\delta = 0.054$
(b) $z-y$ 断面
(c) $x-y$ 断面



(a)



(b)

図 4. 6. 8 $z-y$ 断面における (a) $\langle v \rangle$ 、及び (b) $\langle p \rangle$ の等値線
インワードイベント、実線部：正值、破線部：負値

第 5 章

結 論

本論文は、壁面近傍乱流場に対する平均速度勾配の影響を明らかにすることを目的として、直接数値シミュレーションのデータベースを構築し、それを利用して行った研究をまとめたものである。

第2章「クエット・ポアズイユ乱流の直接シミュレーション」では、無限に広がる平行2平面間の十分に発達した乱流場を記述する基礎方程式をKim et al. (1987)の方法によって導入し、これをスペクトル法を用いて離散化する手法について詳述した。また、流体をはさむ2壁面上における平均速度勾配の比が異なる4種の流れの計算を実行し、計算結果によって得られるパワースペクトル、散逸スペクトル、チェビシェフ係数の高波数領域における減衰の状況から、設定した格子解像度が妥当なものであることを確認した。計算領域の設定では、2平面が相対運動する場合に、速度変動の2点相関係数が計算の半領域中で十分に減衰しないという問題が生じた。これに対して、流れ方向、スパン方向の格子解像度を半減することによって計算負荷を減らした上で計算領域を変化させた補助計算を行い、1点で定義される統計量に対して、計算領域が変化することによる影響が小さいことを確認した。

第3章「2次元ポアズイユ乱流の統計的特性」では、2次元ポアズイユ乱流の計算結果と既存の実験やDNSの結果との比較を行うことによって、本研究で開発したシミュレーションコードの健全性を確認した。さらに、比較を行った4種の異なるレイノルズ数のDNS ($Re_c = 1740, 2680$ (以上、本研究で行ったもの)、 3300 (Kim et al. 1987)、 7880 (Kim 1990))の結果(平均速度、乱流強度、乱流エネルギーの生成率、速度変動の歪度・平坦度)にみられるレイノルズ数依存性について調査、報告を行った。また、Nishino and Kasagi(1989) ($Re_c = 3755$)の平均速度分布、

乱流強度、速度変動の歪度及び平坦度の測定値がDNSの示すレイノルズ数依存性と非常に整合性のよい結果であることを確認した。

以下に、乱流統計量のレイノルズ数依存性について本章で得られた具体的な知見を列挙する。

- (1) 対数領域における平均速度 U/u_{τ} の値はレイノルズ数の増加とともに減少する。比較を行った最大のレイノルズ数 ($Re_{\tau} = 7880$) の場合の対数域は、 $U^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.0$ でよく近似できる。
- (2) 速度欠損則 $(U_{\tau} - U)/u_{\tau} = -(1/\kappa) \ln(y/\delta) + C$ が成立する領域はレイノルズ数の増加とともに広がる。 $Re_{\tau} \leq 3300$ では $\kappa = 0.4$ 、 $C = 0$ 、 $Re_{\tau} = 7880$ では $\kappa = 0.4$ 、 $C = -0.3$ とすることによってよい近似が得られる。
- (3) 速度変動はレイノルズ数の増加とともに相対的に等方化する。
- (4) 壁面パラメータ (u_{τ} 、 ν) による整理を行った場合、 u_{rms} 、 v_{rms} 、 w_{rms} 、 $-\overline{uv}$ は、壁面近傍の漸近挙動を含めてチャンネル全領域においてレイノルズ数の増加とともに増大する。遷移層における u_{rms} の極大値もレイノルズ数の増加とともに大きい値をとるが、その位置は $y \approx 12$ でほぼ一定である。
- (5) 壁面パラメータで整理した乱流エネルギーの生成率は、レイノルズ数の増加とともに大きい値をとる。
- (6) 速度変動の歪度、平坦度にも系統的なレイノルズ数依存性が観察されるが、 y^+ に対してプロットした場合、壁近傍での流れ方向速度変動成分の歪度、平坦度のレイノルズ数依存性は弱い。

第4章「壁面近傍乱流場に対する平均速度勾配の効果」では、ポアズイユ乱流及び3種のクエット・ポアズイユ乱流について、これらの片側の壁面近傍に実現する異なる壁面剪断下での乱流場の特性を調べた。また、条件付き抽出法を用いて漸近的に剪断自由となる壁面近傍にみられる特徴的な流れのパターンの平均的空間構造を示した。

本研究では、上記の流れについてのDNSデータベースを構築し、その特性を明らかにすることを目的としたが、ここで得られた知見及びデータベースを壁面乱流のモデリングに役立てることが今後の課題となる。

以下に、本章で得られた具体的な知見を列挙する。

(1) 漸近的に剪断自由となる壁面近傍では、

- I、壁面近傍のレイノルズ応力場は2次元等方的となる。
- II、乱流エネルギーの収支の状況は通常の壁面剪断乱流とは著しく異なり、乱流拡散項、圧力拡散項がエネルギー供給項として卓越する。
- III、レイノルズ応力の収支においては圧力・速度歪相関項を通じた各成分間でのエネルギー交換、特に壁垂直方向応力から壁水平方向応力へのエネルギー変換が支配的となる。
- IV、壁面近傍においてストリーク構造はみられず、壁面垂直方向に衝突する流体塊が壁面平行方向に発散するパターンが特徴的に観察される。この運動が、壁面垂直方向垂直応力から壁面平行方向垂直応力へのエネルギー再分配を担うと同時に強い速度変形を生じ、壁面上で運動エネルギーが大きく散逸される。

(2) 粘性底層が維持できない弱い壁面剪断を有する壁近傍では、

I、有意な乱流生成は起こらず、剪断自由な壁面としての特徴が顕現する。

(3) 粘性底層は維持できるが対数則が成立しない場合の壁近傍では、

I、通常の壁面剪断流と比べ、レイノルズ応力場が2次元等方場に近づく傾向がみられる。

II、乱流エネルギーの収支、レイノルズ応力の収支において、通常の壁面乱流と相似の分布形がみられる。

III、ストリーク構造が存在するが、流れ方向に寸断化される傾向がみられる。

謝 辭

本論文は、著者が東京大学大学院工学系研究科博士課程在籍中に行った研究をまとめたものである。その間、東京大学平田賢教授には研究面、生活面において常に暖かい御指導を賜ると共に、最高の研究環境を与えて頂き深く感謝致します。

公私にわたり一方ならぬ御指導ご鞭撻を賜った笠木伸英教授に心より感謝致します。

本研究をまとめるにあたり、東京大学大橋秀雄教授、小林敏夫教授、荒川忠一助教授には、貴重な御助言、御教示頂き感謝致します。

NASA Ames Reseach CenterのJohn Kim博士には、未公開の貴重なデータを使用させて頂き深く感謝致します。

計算の実行に関しましては、東京大学大型計算機センター・(株)日立製作所の共同研究のご好意により、多くの成果を挙げる事ができました。深く感謝致します。

研究室でいろいろとお世話になった宮下秀三助手、亀井秀也助手、そして帝京大学小幡輝夫助教授に感謝致します。

東京大学工学部大学院生一色誠太氏、二宮尚氏、鈴木雄二氏、佐田豊氏、富田康意氏、鹿園直毅氏、また西野耕一博士、明賢国博士には、研究室生活の長きにわたって終始御助言、御協力を頂き心から感謝致します。

学生生活最後の年をともに研究室で過ごした大坪康彦君、飯田雄章君、高村則之君、谷口あづささん、小林兄治君、吉本英夫君、吉田治君、高野二郎君、楽しい思い出ができました、ありがとう。

秘書の中澤薫子さん、機械系事務室、図書室の皆様には陰ながら多くの御協力を頂きました、深く感謝致します。

最後に、この様なすばらしい研究の機会を与えてくれた両親に、心より感謝致します。

参 考 文 献

Adrian, R. J. and Moin, P., 1988. Stochastic Estimation of Organized Turbulent Structure : Homogeneous Shear Flow, J. Fluid Mech., Vol.190, pp.531-559.

Adrian, R. J., 1990. Liking Correlations and Structure : Stochastic Estimation and Conditional Averaging, Near-Wall Turbulence, 1988 Zoran Zoric Memorial Conference, Kline, S. J. and Afgan, N. H. (eds), Hemisphere, pp.420-436.

Blackwelder, R. F. and Haritonidis, J. H., Scaling of the Bursting Frequency in Turbulent Boundary Layers, J. Fluid Mech., Vol.132, pp.87-103.

Boyd, J. P., 1989, Chebyshev & Fourier Spectral Methods, Lecture Notes in Engineering, Vol.49, Springer-Verlag.

Brachet, M. E., Meiron, D. I., Orszag, S. A., Nickel, B. G., Morf, R. H. and Frisch, U, 1983, Small-Scale Structure of the Taylor-Green Vortex, J. Fluid Mech., Vol.130, pp.411-452.

Bradshaw, P. (ed.), 1976, Turbulence, Topics in Applied Physics, Vol.12, Springer-Verlag, Heidelberg.

Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A., 1988, Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New York.

Chapman, D. R. and Kuhn, G. D., 1986, The Limiting Behaviour of Turbulence Near a Wall, J. Fluid Mech., Vol.170, pp.265-292.

Clark, J. A., 1968, A Study of Incompressible Turbulent Boundary Layers in Channel Flow, J. Basic Engng., Trans. ASME, Ser. D. Vol.90, pp.455-468.

Comte-Bellot, G., 1965, Ecoulement Turbulent Entre Deux Parois Paralleles, Publications Scientifiques et Techniques du Ministere de l'Air No.419.

- Dean, R. B., 1978, Reynolds Number Dependence of Skin Friction and Other Bulk Flow Variables in Two-Dimensional Rectangular Duct Flow, J. Fluid Engineering, Vol.100, pp.215-223.
- Deardorff, J. W., 1970, A Numerical Study of Three-Dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Number, J. Fluid Mech., Vol.41, pp.453-480.
- Gottlieb, D. and Orszag, S. A., 1977, Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications, CBMS-BSF, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa.
- Grotzbach, G. and Schumann, U., 1979, Direct Numerical Simulation of Turbulent Velocity-, Pressure-, and Temperature-Fields in Channel Flows, Turbulent Shear Flows 1, pp.370-385.
- Guezennec, Y. G., Piomelli, U. and Kim, J., 1987, Conditionally-Averaged Structures in Wall-Bounded Turbulent Flows, Proc. 1987 Summer Program of Center for Turbulence Research, Report CTR-S87, NASA Ames/Stanford Univ. pp.263-272.
- Hinze, J. O., 1975, Turbulence, 2nd edn. McGraw-Hill.
- Hunt, J. C. R., 1988, Studing Turbulence Using Direct Numerical Simulation : 1987 Center for Turbulence Research NASA Ames/Stanford Summer Programme, J. Fluid Mech., Vol.190, pp.357-392.
- Hussain, A. K. M. F. and Reynolds, W. C., 1975, Measurements in Fully Developed Turbulent Channel Flow, Trans. A.S.M.E., J. Fluid Engng., Vol.97, pp.568-580.
- Johansson, A. V. and Alfredsson, P. H., 1983, Effects of Imperfect Spatial Resolution on Measurements of Wall-Bounded Turbulent Shear Flows, J. Fluid Mech., Vol.137, pp.409-421.
- Johansson, A. V. and Alfredsson, P. H., 1986, Structure of Turbulent Channel Flows, Encyclopedia of Fluid Mechanics, Vol.1, Chap.25, Gulf Pub. Comp., pp.825-869.

Johansson, A. V. and Alfredsson, P. H. and Kim, J., 1990, Velocity and Pressure Fields Associated With Near-Wall Turbulence Structure, Near-Wall Turbulence, 1988 Zoran Zaric Memorial Conference, Kline, S. J. and Afgan, N. H. (eds), Hemisphere, pp.368-380.

Karlsson, R. I. and Johansson, T. G., 1986, LDV Measurements of Higher Order Moments of Velocity Fluctuation in a Turbulent Boundary Layer, Laser Anemometry in Fluid Mechanics III, pp.273-289.

笠木 伸英、鹿園 直毅、稲垣 照美, 1989, 剪断自由な壁乱流の $k-\varepsilon$ 二方程式モデルによる数値予測, 第3回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 東京, pp.327-330.

笠木 伸英、西野 耕一, 1990, 壁近傍の乱流計測に関して, 日本機械学会熱工学スクーリング&ワークショップ、熱・流体の測定限界への挑戦.

Kim, H. T., Kline, S. J. and Reynolds, W. C., 1971, The Production of Turbulence Near a Smooth Wall in a Turbulent Boundary Layer, J. Fluid Mech., Vol.50, Part 1, pp.133-160.

Kim, J., 1983, On the Structure of Wall-Bounded Turbulent Flows, Phys. Fluids, Vol.26, pp.2088-2090.

Kim, J., 1985, Turbulence Structures Associated with the Bursting Event, Phys. Fluids, Vol.28, No.1, pp.52-58.

Kim, J. and Moin, P., 1986, The Structure of the Vorticity Field in Turbulent Channel Flow : Part 2. Study of Ensemble-Averaged Fields, J. Fluid Mech., Vol.162, pp.339-363.

Kim, J., 1987, Evolution of a Vortical Structure Associated with the Bursting Event in a Channel Flow, Turbulent Shear Flows 5, pp.221-223.

Kim, J., Moin, P. and Moser, R., 1987, Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at A Low Reynolds Number, J. Fluid Mech., Vol.177, pp.133-166.

- Kim, J., 1989, On the Structure of Pressure Fluctuations in Simulated Turbulent Channel Flow, J. Fluid Mech., Vol.205, pp.421-451.
- Kim, J., 1990, private communication.
- Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. and Runstadler, P. W., 1967, The Structure of Turbulent Boundary Layers, J. Fluid Mech., Vol.30, pp.741-773.
- Kreplin, H. and Eckelmann, M., 1979, Behavior of the Three Fluctuating Velocity Components in the Wall Region of a Turbulent Channel Flow, Phys. Fluids, Vol. 22, pp.1233-1239.
- Laufer, J., 1950, Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel, NACA Tech. Note TN2123.
- Lee, M. J. and Reynolds, W. C., 1985, Numerical Experiments on the Structure of Homogeneous Turbulence, Stanford Univ. Rept. TF-24.
- Lee, M. J., Kim, J. and Moin, P., 1987, Turbulence Structure at High Shear Rate, Proc. 6th Symp. Turbulent Shear Flows, Toulouse, France, 22-6.
- Lee, M. J., 1989, The Large-Scale Structures in Turbulent Plane Couette Flow, Ann. Research Briefs, C.T.R., pp.231-245.
- Lee, M. J. and Hunt J. C. R., 1989, The Structure of Sheared Turbulence Near a Plane Boundary, Proc. 7th Symp. Turbulent Shear Flows, Stanford, U.S.A., 8-1.
- Lee, M. J., Kim, J. and Moin, P., 1990, Structure of Turbulence at High Shear Rate, J. Fluid Mech., Vol.216, pp.561-583.
- Lu, S. S. and Willmarth, W. W., 1973, Measurements of the Structure of the Reynolds stress in a Turbulent Boundary Layer, J. Fluid Mech., Vol.60, pp.481-551.

- Lumley, J. L., 1970, Stochastic Tools in Turbulence, Academic Press, New York.
- Lyons, S. L., Hanratty, T. J. and MaLaughlin, 1989, Relation Turbulent Production to Eddy Structure in Wall Turbulence, Proc. 7th Symp. Turbulent Shear Flows, Stanford, U.S.A., 2-1.
- Mansour, N. N., Kim, j. and Moin, P., 1988, Reynolds-Stress and Dissipation-Rate Budgets in a Turbulent Channel Flow, J. Fluid Mech., Vol.194, pp.15-44.
- Moin, P., Spalart, P. R., 1989, Contributions of Numerical Simulation Data Bases to the Physics, Modeling, and Measurement of Turbulence, Advances in Turbulence, George, W. R. and Arndt, R. (Eds.), Hemisphere Publishing Corp., pp.11-38.
- Moin, P., Reynolds, W. C. and Ferziger, J. H., 1980, Large-Eddy Simulation of Incompressible Turbulent Channel Flow, Dept. Mech. Engng., Stanford Univ. Rept. TF-12.
- Moin, P. and Kim, J., 1980, On the Numerical Solution of Time-Dependent Viscous Incompressible Fluid Flows Involving Solid Boundaries, J. Comp. Physics, Vol.35, pp.381-392.
- Moin, P. and Kim, J., 1982, Numerical Investigation of Turbulent Channel Flow, J. Fluid Mech., Vol.118, pp.341-377.
- Moin, P., 1984, Probing Turbulence via Large Eddy Simulation, AIAA 22nd Aerospace Science Meeting, Reno.
- Moin, P. and Kim, J., 1985, The Structure of the Vorticity Field in Turbulent Channel Flow : Part 1. Analysis of Instantaneous Fields and Statistical Correlations, J. Fluid Mech., Vol.155, pp.441-464.
- Moin, P. and Moser, R. D. 1989, Characteristic-Eddy Decomposition of Turbulence in a Channel, J. Fluid Mech., Vol.200, pp.471-509.
- 森西 洋平, 1990, LESによる乱流解析の実用化のための基礎研究, 東京大学学位論文.

Moser, R. D., Moin, P. and Leonard, A., 1983, A Spectral Numerical Method for the Navier-Stokes Equations with Applications to Taylor-Couette Flow, J. Comp. Physics, Vol.52, pp.524-544.

Moser, R. D. & Moin, P., 1984, Direct Numerical Simulation of Curved Turbulent Channel Flow, NASA TF-20.

Moser, R. D. and Moin, P., 1987, The Effects of Curvature in Wall-Bounded Turbulent Flows, J. Fluid Mech., Vol.175, pp.479-510.

Moser, R. D., 1990, Statistical Analysis of Near-Wall Structures in Turbulent Channel Flow, Near-Wall Turbulence, 1988 Zoran Zaric Memorial Conference, Kline, S. J. and Afgan, N. H. (eds), Hemisphere, pp.45-62.

Myong, H. K., Kasagi, N. and Hirata, M., 1989, Numerical Prediction of Turbulent Pipe Flow Heat Transfer for Various Prandtl Number Fluids with the Improved $k-\epsilon$ Turbulence Model, JSME International Journal, Series II, Vol.32, No.4, pp.613-622.

Niederschulte, M. A., Adrian, R. J. and Hanratty, T. J., 1990, Measurement of Turbulent Flow in a Channel at Low Reynolds Numbers, Exp. Fluids (to be appeared).

Nishino, K. and Kasagi, N., 1989, Turbulence Statistics Measurement in a Two-Dimensional Channel Flow Using a Three-Dimensional Particle Tracking Velocimeter, Proc. 7th Symp. Turbulent Shear Flows, Stanford Univ., U.S.A., Vol.2, 22.1.1-22.1.6.

西野 耕一, 1990, 三次元画像処理流速計を用いた壁面乱流の準秩序構造に関する研究, 東京大学学位論文.

Offen, G. R. and Kline, S. J., 1974, Combined Dye-Streak and Hydrogen-Bubble Visual Observations of a Turbulent Boundary Layer, J. Fluid Mech., Vol.62, Part 2, pp.223-239.

Orszag, S. A., 1971a, Numerical Simulation of Incompressible Flows Within Simple Boundaries : I. Galerkin (Spectral) Representations, Stud. in Appl. Math., Vol.50, No.4, pp.293-327.

- Orszag, S. A., 1971b, Numerical Simulation of Incompressible Flows Within Simple Boundaries : Accuracy, J. Fluid Mech., Vol.49, Part 1, pp.75-112.
- Orszag, S. A., 1971c, Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation, J. Fluid Mech., Vol.50, part 4, pp.689-703.
- Orszag, S. A., 1972, Comparison of Pseudospectral and Spectral Approximation, Stud. in Appl. Math., Vol.51, pp.253-259.
- Orszag, S. A. and Israeli, M., 1974, Numerical Simulation of Viscous Incompressible Flows, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol.6, pp.281-318.
- Orszag, S. A. and Kells, L. C., 1980, Transition to Turbulence in Plane Poiseuille and Plane Couette Flow, J. Fluid Mech., Vol.96, part 1, pp.159-205.
- ヲナクウ & リフツツ (竹内均 訳), 1970, 流体力学 1, 東京図書株式会社
- Patel, V. C. and Head, M. R., 1969, Some Observations on Skin Friction and Velocity Profiles in Fully Developed Pipe and Channel Flows, J. Fluid Mech., Vol.38, part 1, pp.181-201.
- Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G., 1985, Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows : A Review, AIAA J. Vol.23, No.9, pp.1308-1319.
- Patterson, G. S. Jr. and Orszag, S. A., 1971 Spectral Calculations of Isotropic Turbulence : Efficient Removal of Aliasing Interaction, Phys. Fluids, Vol.14, pp.2538-2541.
- Pelz, R. R., Yakhot, V., Orszag, S. A., Shtilman, L. and Levich, E., 1985, Velocity-Vorticity Patterns in Turbulent Flows, Physical Review Letters, Vol.54, No.23, pp.2505-2509.
- Robinson, S. K., Kline, S. J. and Spalart, P. R., 1990, Quasi-Coherent Structures in the Turbulent Boundary Layer : Part 2. Verification and New Information from a Numerically Simulated Flat-Plate Layer, Near-Wall Turbulence, 1988 Zoran Zaric Memorial

Conference, Kline, S. J. and Afgan, N. H. (eds), Hemisphere, pp.218-247.

Rogallo, R. S. & Moin, P., 1984, Numerical Simulation of Turbulent Flows, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol.16, pp.99-137.

Rogers, M. M., Mansour, N.N. and Reynolds, W. C., 1989, An Algebraic Model for the Turbulent Flux of a Passive Scalar, J. Fluid Mech., Vol.203, pp.77-101.

佐田 豊, 笠木 伸英, 1990, 固液及び気液界面近傍の乱れの統計的性質, 第27回日本伝熱シンポジウム講演論文集, Vol.1, pp.55-57.

Schumann, U., 1975, Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli, J. Comp. Phys., Vol.18, pp.376-404.

Spalart, P. R., 1986, Numerical Simulation of Boundary Layers : Part 1. Weak Formulation and Numerical Method, NASA TM-88222.

Spalart, P. R., 1988, Direct Simulation of a Turbulent Boundary Layer Up to $Re = 1410$, J. Fluid Mech., Vol.187, pp.61-98.

Suzuki, Y. and Kasagi, N., 1990, Evaluation of Hot-Wire Measurements in Turbulent Wall Shear Flows Using a Direct Numerical Simulation Data Base, Engineering Turbulence Modeling and Experiments, Rodi, W. and Ganic, E. N. (eds.), Elsevier.

Swarztrauber, P. N., 1986, Symmetric FFTs, Math. Comput., Vol.47, No.175, pp.323-346.

高木 周, 1990, 熱膜プローブによる壁面乱流の計測に関する研究, 東京大学卒業論文.

Temperton, C., 1983a, Self-Sorting Mixed-Radix Fast Fourier Transforms, J. Comput. Phys., Vol.52, pp.1-23.

Temperton, C., 1983b, Fast Mixed-Radix Real Fourier Transforms, J. Comput. Phys., Vol.52, pp.340-350.

Wei, T. and Willmarth W. W., 1989, Reynolds-Number Effects on the Structure of a Turbulent Channel Flow, J. Fluid Mech., Vol. 204, pp. 57-95.

A P P E N D I X

APPENDIX (A)

重み付き残差法とスペクトル法

(A) 重み付き残差法による関数の近似

ex. 1) 周期関数のフーリエ級数展開

・ $x = 0 \sim L$ で定義された区分的に滑らかな周期関数 $u(x)$ に対して、

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i k_n x) \tag{1}$$

$$k_n = 2\pi n / L \quad i : \text{虚数単位}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L u(x) \exp(-i k_n x) dx \tag{2}$$

$u(x)$ が十分に滑らか (連続かつ微分可能) で周期的である場合には、 $|a_n|$ は十分に大きい n に対して n の増加とともに指数関数的に減少することが証明できる。この性質はスペクトル法の精度を議論する際に重要である。

ex. 2) 周期関数の有限フーリエ級数展開による近似

$$u(x) \sim \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} a_n \phi_n(x) \tag{3}$$

$\phi_n(x)$: 試行関数

今の場合 $\phi_n(x) = \exp(i k_n x)$

係数 a_n の決定法 (重み付き残差法)

元の関数 $u(x)$ と近似関数 $\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} a_n \exp(i k_n x)$ の残差

$$R(x) \equiv u(x) - \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} a_n \exp(i k_n x) \tag{4}$$

をある意味で 0 とするように N 個の係数 a_n を決定する。

(イ) 選点法

区間 $x = 0 \sim L$ の適当 (適切) な N 点 (x_m ; $m = 0, 1, \dots, N-1$) で $R(x_m) = 0$ となるように a_n を決定する。

具体的には、

$$R(x_m) \equiv u(x_m) - \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} a_n \exp(i k_n x_m) = 0 \quad m = 0, \dots, N-1 \tag{5}$$

の連立方程式を解くことによってN個の未知数 a_n を決定することができる。

(ロ) ガラーキン法

残差 $R(x)$ に試行関数 $\phi_m(x)$ を掛けた $R(x)\phi_m(x)$ の区間 $x = 0 \sim L$ での平均が 0 となるように係数 a_n を決定する。

$$\begin{aligned}
 H(x) &\equiv \frac{1}{L} \int_0^L R(x) \exp(i k_n x) dx \quad m = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (6) \\
 &= \frac{1}{L} \int_0^L \left\{ u(x) - \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} a_n \exp(i k_n x) \right\} \exp(i k_n x) dx \\
 &= \frac{1}{L} \int_0^L u(x) \exp(i k_n x) dx - \frac{1}{L} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} a_n \int_0^L \exp\{i(k_n + k_n)x\} dx \\
 &= \frac{1}{L} \int_0^L u(x) \exp(i k_n x) dx - a_{-n} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore a_{-n} = \frac{1}{L} \int_0^L u(x) \exp(i k_n x) dx \quad (7)$$

ここで $n = -m$ とすると、 $k_n = 2\pi m/L = -2\pi n/L = k_{-n}$ より、

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L u(x) \exp(-i k_n x) dx \quad (8)$$

(2) 式と比べて、ガラーキン法によって得られる係数は、 $n = -N/2 \sim N/2-1$ に対して元の関数 $u(x)$ を無限フーリエ級数展開した場合の係数と等しい係数が得られることが分かる。

(ハ) 最小自乗法

区間 $x = 0 \sim L$ での残差の自乗平均値

$$G(x) \equiv \frac{1}{L} \int_0^L R(x) R(x) dx \quad (9)$$

が最小となるように a_n を決定する。これは、

$$H(x) = \partial G(x) / \partial a_n = 0 \quad m = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (10)$$

を解くことによってなされる。

(ニ) モーメント法

区間 $x = 0 \sim L$ で $R(x)x^m$ が 0 となるように a_n を決定する。

$$H(x) \equiv \frac{1}{L} \int_0^L R(x) x^m dx = 0 \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (11)$$

ex. 3) 重み付き残差法の一般形 (ex. 2のまとめ)

区間 $x = \alpha \sim \beta$ で定義される関数 $u(x)$ を適当な基底関数 $\phi_n(x)$ を用いて、

$$u(x) \sim \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(x) \tag{12}$$

と近似し、残差

$$R(x) = u(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(x) \tag{13}$$

と重み関数の内積 $(R(x), w_m(x))$ が 0 となるように係数 a_n を決定する。

$$(R(x), w_m(x)) = \int_a^b R(x) w_m(x) dx = 0 \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \tag{14}$$

$$w_m(x) = \delta(x - x_m) \quad : \text{選点法}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$w_m(x) = \partial R(x) / \partial a_m \quad : \text{最小自乗法}$$

$$w_m(x) = x^m \quad : \text{モーメント法}$$

$$w_m(x) = v_m(x) \phi_m(x) \quad : \text{ガラーキン法}$$

$v_m(x)$: $\phi_m(x)$ の正規直交性を定義する重み関数

$$v_m(x) = 1 / 2\pi \quad : \text{フーリエ (三角関数)}$$

$$v_m(x) = 1 / (1 - x^2)^{-1/2} \quad : \text{チェビシェフの多項式}$$

$$v_m(x) = 1 \quad : \text{ルジャンドルの多項式}$$

・
・

基底関数 ϕ_n の持つべき性質として望ましいもの

- (1) 計算が容易であること (直交関数系、FFT が利用できるなど)
- (2) '完備' であること ($N \rightarrow \infty$ とした場合に残差が 0 となる性質)
- (3) 収束が速いこと (小さい N で精度の高い近似が得られること)

(B) スペクトル法

スペクトル法は重み付き残差法を用いて偏微分方程式を空間的に離散化する手法である。

微分方程式

$$L u - f(x) = 0 \quad L : \text{微分演算子} \tag{15}$$

の解、 $u(x)$ を前節と同様に、問題に適合した基底関数 $\phi_n(x)$ を用いて

$$u(x) \sim u_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(x) \tag{16}$$

と近似する。この近似解を式 (15) に代入することによって得られる残差、

$$R(x) = L u_N - f \tag{17}$$

に対して、前節と同様に

$$(R(x), w_m(x)) = \int_{\alpha}^{\beta} R(x) w_m(x) dx = 0 \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \tag{18}$$

によって係数 a_n を従属変数とする微分方程式が得られる。ここで、ガラーキソ法を用いる場合を スペクトル法、選点法を用いる場合を 擬スペクトル法 と呼ぶ（但し、スペクトル法、擬スペクトル法の分類は非線形項の取扱い方などによってなされる場合もあり、ここでの定義が唯一のものではないことを注意しておく）。

ex. 4) 熱伝導問題におけるフーリエ・ガラーキソ法の適用例

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0 < x < \pi, t > 0) \tag{19a}$$

$$B. C. \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \tag{19b}$$

$$I. C. \quad u(x, 0) = f(x) \tag{19c}$$

式(19b)の境界条件を自然に満たす関数 $\sin(nx)$ を用いて、 $u(x, t)$ を展開する。

$$u(x, t) \sim u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \sin(nx) \tag{20}$$

(20)の空間微分は 解析的 に行うことができる。

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^N \{-n^2 a_n(t) \sin(nx)\} \tag{21}$$

(20)、(21)を式(19a)に代入することによって得られる残差は、

$$R(x, t) = \sum_{n=1}^N \dot{a}_n(t) \sin(nx) + K \sum_{n=1}^N \{n^2 a_n(t) \sin(nx)\} \tag{22}$$

これにガラーキソ法を適用する。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} R(x, t) \sin(mx) dx \\ &= \sum_{n=1}^N \dot{a}_n(t) \int_0^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx \quad (\dot{\quad}) : \text{時間微分} \\ & \quad + K \sum_{n=1}^N \{n^2 a_n(t) \int_0^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx\} \\ &= \frac{\pi}{2} \dot{a}_m(t) + \frac{\pi}{2} K m^2 a_m \quad \because \int_0^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \frac{\pi}{2} \delta_{nm} \end{aligned}$$

より、

$$\dot{a}_m(t) + K m^2 a_m = 0 \quad m = 1, 2, \dots, N \tag{23}$$

を得る。ここで、初期条件は、(19c)にガラーキソ法を適用することによって、

$$a_m(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(mx) dx \tag{24}$$

によって与える。

ところで、(19)には厳密解が存在する。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(nx) \tag{25a}$$

$$a_n(t) = a_n(0) \exp(-Kn^2 t) \tag{25b}$$

$$a_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \tag{25c}$$

(25a)を(20)のように有限項で打ち切って近似した場合の誤差は、

$$\begin{aligned} \varepsilon_N &= u(x, t) - u_N(x, t) \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(0) \exp(-Kn^2 t) \sin(nx) \\ &\sim O(\exp(-KN^2 t)) \end{aligned} \tag{26}$$

と見積られ、Nの増加とともに指数関数的に減衰することが分かる。

ex.5)非線形項

$$w(x) = u(x)v(x) \tag{27}$$

のフーリエ・ガラーキン法による取扱い。

$$u_N(x) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} a_n \exp(inx) \tag{28}$$

$$v_N(x) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} b_n \exp(inx) \tag{29}$$

$$w_N(x) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n \exp(inx) \tag{30}$$

とすると、

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_N v_N \exp(-ikx) dx \tag{31} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} a_m \exp(imx) \right\} \left\{ \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} b_n \exp(inx) \right\} \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} a_m b_n \int_0^{2\pi} \exp\{i(m+n-k)x\} dx \\ &= \sum_{\substack{m+n=k \\ -N/2 \leq m < N/2 \\ -N/2 \leq n < N/2}} a_m b_n \end{aligned} \tag{32}$$

演算回数

(32)による直接計算 $O(N^2)$

(31)を用いる変換法 $O(N \log_2 N)$

(27)(28)によって物理空間での u 、 v を求めて積をとった後(31)によって係数を求める。これらの変換にFFTを利用する。但し、この方法を単純に適用すると高波数成分が低波数成分にまわり込むエイリアジングエラーが生じる。このエラーを除去する方法として3/2則、位相シフトなどの手法がある。

ex.6) 3/2 則

(32)式のフーリエ変換を離散フーリエ変換で置き換えた場合 (FFTを用いた場合) には、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{c}_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u_N v_N \exp(-i k x_j) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=-M/2}^{M/2-1} a_m b_n \sum_{j=0}^{N-1} \exp\{i(m+n-k)x_j\} \\ &= \sum_{\substack{m+n=k \\ -M/2 \leq m < M/2 \\ -M/2 \leq n < M/2}} a_m b_n + \sum_{\substack{m+n=k+M \\ -M/2 \leq m < M/2 \\ -M/2 \leq n < M/2}} a_m b_n \end{aligned} \tag{33}$$

where $x_j = 2\pi j / M$

(33)の第2項がエイリアジング項である。 \hat{c}_k と \hat{c}_k を等価とするには、 $M > (3/2)N - 1$ とし、(28)(29)によって物理空間での u 、 v を求める前に $-M/2 \leq k < -N/2$ 、 $N/2 < k \leq M/2$ に対して、 $a_k = b_k = 0$ を補填してスペクトルモード数を N から M に増やす必要がある。

APPENDIX (B)

チェビシェフ・タウ法

1、チェビシェフ多項式

定義

第一種チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ は、 $-1 \leq x \leq 1$ で次のように定義される、

$$T_n(\cos \theta) \equiv \cos(n\theta) \quad (1.1)$$

例えば、

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

性質

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = (\pi/2) c_n \delta_{nm} \quad (\text{直交性}) \quad (1.2)$$

$$c_0 = 2, \quad c_n = 1 \quad (n > 0)$$

$x = \pm 1$ の境界において、

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n \quad (1.3)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} T_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n+m} \prod_{k=0}^{m-1} (n^2 - k^2) / (2k + 1) \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{dx} T_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n+1} n^2 \quad (1.4)'$$

また、

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(n)} T_n(x)$$

とすると、

$$c_{n-1} a_{n-1}^{(n)} - a_{n+1}^{(n)} = 2n a_n^{(n-1)}, \quad n \geq 1 \quad (1.5)$$

$$c_n a_n^{(1)} = 2 \sum_{\substack{k=n+1 \\ k+n:\text{odd}}}^{\infty} k a_k \quad (1.6)$$

2、チェビシェフ・タウ法の形式

$u(-1) = u(1) = 0$ の境界条件の下での 2 階の微分方程式の場合、

$$(T_m, R(x; a_0, \dots, a_N)) = 0 \quad m = 0, \dots, N-2$$

$$\sum_{n=0}^N a_n T_n(\pm 1) = 0$$

3、Burgers 方程式への応用例

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0 \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.3)$$

(3.1) 式の近似解を以下のようにおく、

$$u^N(x, t) = \sum_{m=0}^{\widehat{N}} \widehat{u}_m(t) T_m(x), \quad (3.4a)$$

$$\left(\frac{\partial u^N}{\partial x} \right) = \sum_{m=0}^{\widehat{N}} \widehat{u}_m^{(1)}(t) T_m(x), \quad (3.4b)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right) = \sum_{m=0}^{\widehat{N}} \widehat{u}_m^{(2)}(t) T_m(x), \quad (3.4c)$$

(3.1) に (3.4) を代入して、ガラーキン近似を施すと、

$$\int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial u^N}{\partial t} + u^N \left(\frac{\partial u^N}{\partial x} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right) \right\} T_k(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = 0 \quad (3.5)$$

$$k = 0, \dots, N-2$$

直交性 (1.2) を用いると (3.5) は

$$\frac{\partial \widehat{u}_k}{\partial t} + \left[u^N \left(\frac{\partial u^N}{\partial x} \right) \right]_k - \nu \widehat{u}_k^{(2)} = 0 \quad (3.6)$$

一方、境界条件 (3. 2) は、

$$u^N(-1, t) = u^N(1, t) = 0 \quad (3. 7)$$

(1. 3) の性質を用いると、

$$\sum_{k=0}^N \widehat{u}_k = 0, \quad \sum_{k=0}^N (-1)^k \widehat{u}_k = 0 \quad (3. 8)$$

(3. 6) における非線形項は 2 つの物理量 u, v の積の特殊な場合と考えることができる、

$$\begin{aligned} (u v)_k &= \frac{2}{\pi c_k - 1} \int_{-1}^1 u^N v^N T_k(x) (1-x^2)^{-1/2} dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|l+m|=k} \widehat{u}_l \widehat{v}_m + \sum_{|l-m|=k} \widehat{u}_l \widehat{v}_m \end{aligned} \quad (3. 9)$$

4、

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + \lambda u = f, \quad u(\pm 1) = 0 \quad (4. 1) \quad \text{の解法}$$

(4. 1) 式のチェビシェフ・タウ近似は、

$$\widehat{u}_n^{(2)} + \lambda \widehat{u}_n = \widehat{f}_n \quad n = 0, 1, \dots, N-2 \quad (4. 2)$$

$$\sum_{n=0}^N \widehat{u}_n = 0, \quad \sum_{n=0}^N (-1)^n \widehat{u}_n = 0 \quad (4. 3)$$

(4. 3) の両式の和、差をとることにより (4. 3) は次のように書き換えることができる、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{even}}}^N \widehat{u}_n = 0, & \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^N \widehat{u}_n = 0 \end{aligned} \quad (4. 4)$$

さて、(4. 2) 式を $n+1$ と $n-1$ の場合について書くと、

$$\widehat{u}_{n+1}^{(2)} + \lambda \widehat{u}_{n+1} = \widehat{f}_{n+1} \quad n = -1, \dots, N-3$$

$$\widehat{u}_{n-1}^{(2)} + \lambda \widehat{u}_{n-1} = \widehat{f}_{n-1} \quad n = 1, \dots, N-1$$

$$\sum_{n=1}^N n^2 \widehat{u}_n = \beta, \quad \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} n^2 \widehat{u}_n = \alpha \quad (4.3)$$

両式の差をとることによって、

$$\sum_{\substack{n=2 \\ n:\text{even}}}^N n^2 \widehat{u}_n = \frac{1}{2}(\beta - \alpha), \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^N n^2 \widehat{u}_n = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \quad (4.4)$$

5、空間微分法について

$$u^N(x) = \sum_{m=0}^N \widehat{u}_m T_m(x) \quad (5.1)$$

$$\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right) = \sum_{m=0}^N \widehat{u}^{(1)}_m T_m(x) \quad (5.2)$$

のとき、 \widehat{u}_m と $\widehat{u}^{(1)}_m$ は漸化式 (1.5) によって関係付けられる。即ち、 $\widehat{u}^{(1)}_m$ は、 $\widehat{u}_{N+1} = 0$ とおき、(1.5) によって高次側から漸化的に求めることができる。

$$c_{n-1} \widehat{u}_{n-1}^{(1)} - a_{n+1}^{(1)} = 2n \widehat{u}_n, \quad n \geq 1 \quad (1.5)'$$

非線形項の微分について

$$w(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$w^N(x) = \sum_{m=0}^N \widehat{w}_m T_m(x) \quad (5.3)$$

とすると、(3.9) 式から、

$$\widehat{w}_m = \frac{1}{2} \sum_{l+m=k} \widehat{u}_l \widehat{v}_m + \sum_{|l-m|=k} \widehat{u}_l \widehat{v}_m \quad (5.4)$$

ここで、(1.5)' の関係式によって $\widehat{w}_m^{(1)}$ を求めることができるが、 $\widehat{w}_{N+1} = 0$ ではなく、 $\widehat{w}_{2N+1} = 0$ を初期値として与える必要がある。

あるいは、(1.6) の関係を用いて、

$$\widehat{w}_N = \sum_{\substack{k=N+1 \\ k+N:\text{odd}}}^{2N} k \left\{ \sum_{\substack{l=1+m \\ 0 \leq l, m \leq N}} \widehat{u}_l \widehat{v}_m \right\} \quad (5.5)$$

$$\widehat{w}_{N-1} = \sum_{\substack{k=N \\ k+N-1:\text{odd}}}^{2N} k \left\{ \sum_{k=1+m} \widehat{u}_1 \widehat{v}_m \right\} + N (\widehat{u}_0 \widehat{v}_N + \widehat{u}_N \widehat{v}_0) \quad (5.6)$$

を初期値として、 $0 \sim N-2$ 次の項については (1.5) の関係によって求める。

6、離散チェビシエフ変換に伴う非線形項のエイリアジング

積分による表現 (ガラーキン法)

$$u(x) = \sum_{l=0}^N \widehat{u}_l T_l(x), \quad v(x) = \sum_{m=0}^N \widehat{v}_m T_m(x)$$

$$w(x) = u(x)v(x) = \sum_{k=0}^N w_k T_k(x)$$

とすると、 $w(x)$ のスペクトル (チェビシエフ係数) は、

$$\begin{aligned} \widehat{w}_k &= \frac{2}{\pi c_k} \int_{-1}^1 w(x) T_k(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{2}{\pi c_k} \int_{-\pi}^0 w(\theta) \cos(k\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi c_k} \int_{-\pi}^0 \left\{ \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N \widehat{u}_l \widehat{v}_m \cos(l\theta) \cos(m\theta) \right\} \cos(k\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi c_k} \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N \widehat{u}_l \widehat{v}_m \int_{-\pi}^0 \left\{ \cos(l\theta) \cos(m\theta) \cos(k\theta) \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1+m} \widehat{u}_l \widehat{v}_m + \frac{1}{2} \sum_{k=|l-m|} \widehat{u}_l \widehat{v}_m \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$c_k = 2 \text{ for } k = 0, 1 \text{ for } k > 0, \quad 0 \leq k, l, m \leq N$$

離散積分による定式化

$$u_j = u \{ \cos(\pi j/N) \} = \sum_{l=0}^N \widehat{u}_l \cos(\pi l j/N)$$

$$v_j = v \{ \cos(\pi j/N) \} = \sum_{m=0}^N \widehat{v}_m \cos(\pi m j/N)$$

$$\begin{aligned}
 w_j &= u_j v_j = w \{ \cos(\pi j / N) \} = \sum_{l=0}^N \tilde{w}_k \cos(\pi k j / N) \\
 \tilde{w}_k &= \sum_{j=0}^N \frac{2}{N \bar{c}_j \bar{c}_k} \left\{ \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N \hat{u}_l \hat{v}_m \cos\left(\frac{\pi j l}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi j m}{N}\right) \right\} \cos\left(\frac{\pi j k}{N}\right) \\
 &= \frac{2}{N \bar{c}_k} \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N \hat{u}_l \hat{v}_m \sum_{j=0}^N \frac{2}{\bar{c}_j} \cos\left(\frac{\pi j l}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi j m}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi j k}{N}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1+m} \hat{u}_l \hat{v}_m + \frac{1}{2} \sum_{k=|1-m|} \hat{u}_l \hat{v}_m \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{N=1+m} \hat{u}_l \hat{v}_m - \frac{1}{4} \sum_{N=|1-m|} \hat{u}_l \hat{v}_m \tag{6.2} \\
 &\quad + \frac{1}{2 \bar{c}_k} \sum_{\substack{k=-1-m+2N \\ k=-1+m+2N \\ k=1-m+2N}} \hat{u}_l \hat{v}_m
 \end{aligned}$$

$$\bar{c}_k = 2 \text{ for } k = 0, N, 1 \text{ for } 0 < k < N, \quad 0 \leq k, l, m \leq N$$

(6.2) 式、最終辺第3～5項がエイリアジング項である。3/2則では、u、vのN+1～(3/2)N次のチェビシェフ係数に0を補填することによってモード数を(3/2)Nに増やすことによって、0 < k < N-1の \hat{w}_k からエイリアジングを取り除くことができる。 \hat{w}_N からはさらに(1/2) $\hat{u}_N \hat{v}_N$ を差し引く必要がある。

Proc. of ISCFD Symp. Nagoya, 1989, pp.1174-1179.

**A Direct Numerical Simulation of
the Fully Developed Turbulent Channel Flow at a Very Low Reynolds Number**

A. Kuroda, N. Kasagi and M. Hirata

The University of Tokyo, Tokyo, Japan

Introduction

The use of direct numerical simulation (DNS) of turbulent flow has proved to be an effective tool for understanding the turbulent transport mechanism. Recently, Spalart (1988) carried out the direct simulation of turbulent boundary layers at $Re_\theta = 225 \sim 1410$ and documented some significant Reynolds number effects on the turbulence statistics. At low Reynolds numbers, the inertial sublayer is very thin or even does not exist, so direct interaction between outer- and wall-layers may take place. In this situation, the flow structures in the wall-region may be different between boundary layers and internal flows. Kim et al. (1987) (KMM, hereafter) simulated the turbulent channel flow, and reported the turbulence statistics in detail. In the present study, a direct numerical simulation of the fully developed two-dimensional turbulent channel flow at an extremely low Reynolds number has been carried out. Statistical properties including mean velocity, Reynolds stresses, skewness and flatness of three velocity fluctuations, vorticity components, and streamwise two-point correlations are calculated and compared with those obtained at a higher Reynolds number by KMM. Thus, the universality of scaling laws for turbulent statistics is examined.

Numerical Method

Referring to the numerical method used by KMM, a fourth-order equation for v , a second-order equation for the wall-normal component of vorticity and the continuity equation are solved using a spectral method: Fourier series in the streamwise and spanwise directions, and Chebyshev polynomial expansion in the normal direction (Chebyshev-tau method). For time integration, the second order Adams-Bashforth for the nonlinear terms and Crank-Nicolson for the viscous terms are adopted. The Reynolds number based on the channel half width δ and the wall friction velocity u_τ is set to be 100. Two computational domains are used: i. e., the streamwise and spanwise computational periods are chosen to be $4\pi\delta \times 2\pi\delta$ (Case I) and $8\pi\delta \times 2\pi\delta$ (Case II), respectively. For these cases, 64×64 and 128×64 Fourier modes are respectively used to represent the velocity field in the x - and z -directions, while in the both cases Chebyshev polynomials up to order 64 are used in the y -direction. The effective grid spacings are $\Delta x^+ \approx 19.6$ and Δz^+

≈ 9.8 in the streamwise and spanwise directions, respectively. The spacings in the wall-normal direction are varied as $\Delta y^+ \approx 0.12 \sim 4.9$. The collocation grid used to compute the nonlinear terms has 1.5 times finer resolution in each direction to remove aliasing errors.

The initial conditions of u and v at each grid point are generated in the Fourier space with a filter which imitates the power spectrum distributions. The u' and v' intensities and the mean velocity profile are given in accordance with the numerical results of KMM, while w is calculated automatically through the continuity equation. The velocity field obtained in Case I is extrapolated and used as the initial condition for Case II. With these initial conditions, the time advancement is repeated until the fully developed state is reached. This state is identified through a linear profile of total shear stress and also stationary behavior of second, third, and fourth moments of the three velocity components at some distance from the wall. Further, the computation is continued for about $24 \delta/u_T$ ($2400 \nu/u_T^2$) in Case I and $12 \delta/u_T$ ($1200 \nu/u_T^2$) in Case II, respectively, in order to obtain the ensemble averages of various turbulence properties. The computations were carried out on the HITAC-S820/80 at the Computer Center of the University of Tokyo. For one time step advancement, 1.36 sec SPU (Scalar Processor Unit) time and 1.05 sec VPU (Vector Processor Unit) time were required in Case II.

Results and Discussion

In Case I, the streamwise two point correlation coefficient of u' does not decrease to zero within half the length of computational domain, while it decays satisfactorily in Case II which has two times a longer streamwise period than that of Case I (see Fig. 11(a)). In other statistics, e. g., rms values, skewnesses and flatnesses of the velocity fluctuations and vorticity fluctuations, some differences are found between the results of Cases I and II. The largest difference is found in the skewnesses of three velocity fluctuations, which are shown in Fig. 1. A reason for these discrepancies is that full convergence of statistics is not reached yet, since the skewness of w' is not zero in Fig. 1, but should be zero from symmetry condition. However, the time steps in Cases I and II, over which the turbulence statistics are averaged, are comparable to $10 \delta/u_T$ ($1800 \nu/u_T^2$) in the KMM's simulation and $6 \delta/u_T$ ($1008 \nu/u_T^2$) in the DNS of a curved channel flow by Moser and Moin (1987). Hence, fluctuations of longer periods may exist in the very low Reynolds number flow. Hereafter, the results of Case I are solely shown except for the two point correlations. Some global parameters of the simulated flow are summarized in Table 1.

Figure 2 shows the mean velocity profile, which has larger values in the logarithmic region than that of KMM; this is well known as a low Reynolds number

effect (e. g., Patel and Head, 1969). Strictly speaking, the log-layer, where $y^+ \partial u / \partial y^+$ must be constant, almost disappears as shown in Fig. 3.

The rms velocity fluctuations are shown in Figs. 4 and 5. For the low Reynolds number, u'^+ is increased in the central region of the channel, while all the components are decreased near the wall; thus, anisotropy is enhanced over the whole channel cross section. This tendency is also found in the results of the turbulent boundary layer flows (Spalart, 1988).

The vorticity fluctuations which represents the fine scale turbulence are shown in Figs. 6 and 7. It is found that anisotropy remains even in the channel central region in the present result, and this suggests appreciably anisotropic dissipation. The values of $\omega_1'^+$ and $\omega_3'^+$ near the wall are smaller than those of KMM; this should be due to less turbulent production at a lower Reynolds number (see also Fig. 10).

The skewness and flatness factors are shown in Figs. 8 and 9, respectively. These values are often related to turbulent structures and their activity: e. g., a positive skewness of u' and a negative skewness of v' in the near-wall region are related to the sweep motion, while a large flatness of v' is related to intermittency of the event. Overall similarity between the present and KMM's results suggests existence of the similar structure.

The turbulent energy budget is compared in Fig. 10. The sum of turbulent and pressure diffusions is obtained as the residual of other terms. Overall agreement is good between the two results, but the production and dissipation rates are slightly smaller in the lower Reynolds number case. Note that, in the turbulent boundary layer simulated by Spalart (1988), the turbulent production is very weakly dependent upon the Reynolds number when it is normalized by the wall variables and plotted versus y^+ , and the collapse of the production profiles at $Re_\theta = 300$ and 1410 is strikingly good at least in the region of $y^+ < 80$.

Finally, the streamwise two-point correlations of velocity fluctuations at two wall distances are shown in Figs. 11 and 12. In the lower Reynolds number case, the correlation persists over a somewhat longer distance; i. e., the integral scales are larger. It is found that, on the whole, the correlations scale with x^+ rather than with x/δ . This is true even in the central region of the channel (Fig. 12). This should be a low Reynolds number effect: the inertial sublayer is so thin that the wall can directly affect the turbulence dynamics in the outer region.

Conclusions

A direct numerical simulation of the fully developed two-dimensional turbulent channel flow at $Re_m = 2890$ has been carried out. The mean velocity, the rms values, skewnesses and flatnesses of velocity fluctuations, the vorticity

fluctuations, the turbulent kinetic energy and the streamwise two-point correlations are calculated and compared with the DNS results of Kim et al. (1987) at $Re_m = 5600$. Although overall similarities are obtained between the present results and those of Kim et al., some noticeable differences are found: for a low Reynolds number flow, anisotropy of normal stresses and vorticities is enhanced, and the turbulent production rate scaled with the wall variables become smaller. The latter leads to the fact that the turbulent kinetic energy as well as its dissipation rate is smaller for lower Reynolds number flows. The distributions of streamwise two-point correlation coefficients are scaled with the wall variables rather than with the outer layer variables.

Acknowledgements The authors acknowledge the financial supports through the Grant-in-Aids for Scientific Research on Priority Areas (No. 63613002) and for Encouragement of Young Scientists (No. 63790284) by the Japanese Ministry of Education, Science and Culture.

Nomenclature

F = flatness factor	δ = channel half width
S = skewness factor	δ^* = displacement thickness
Re_c = Reynolds number, $U_c \delta / \nu$	θ = momentum thickness
Re_m = Reynolds number, $2U_m \delta / \nu$	ν = kinematic viscosity
R_{ii} = Two-point correlation coefficient	ω = vorticity
U_c = centerline mean velocity	$()_i$ = component in the i -th direction ($i = 1, 2, 3$ denote the x -, y - and z -directions, respectively)
U_m = bulk mean velocity	$()'$ = fluctuating component or root mean square value
u, v, w = velocity components in the x -, y - and z -directions	$()^+$ = normalized by the wall variables, u_τ and ν
u_τ = friction velocity	
x, y, z = streamwise, wall-normal and spanwise coordinates	

References

- Kim, J., Moin, P. and Moser, R., 1987, J. Fluid Mech., Vol. 177, pp. 133-166.
- Mansour, N. N., Kim, J. and Moin, P., 1987, Proc. 6th Symp. Turbulent Shear Flows, Toulouse, 17-4-1-6.
- Moser, R. D. and Moin, P., 1987, J. Fluid Mech., Vol. 175, pp. 479-510.
- Patel V. C. and Head M. R., 1969, J. Fluid Mech., Vol. 38, pp. 181-201.
- Spalart, P. R., 1988, J. Fluid Mech., Vol. 187, pp. 61-98.

Table 1 Parameters of the flow

$U_c/u_\tau=17.4, U_m/u_\tau=14.5$ $Re_c=u_c\delta/\nu=1740, Re_m=U_m2\delta/\nu=2890$ $C_f=9.58\times 10^{-3}$ $\delta^*/\delta=0.169, \delta^*/\theta=1.87$
--

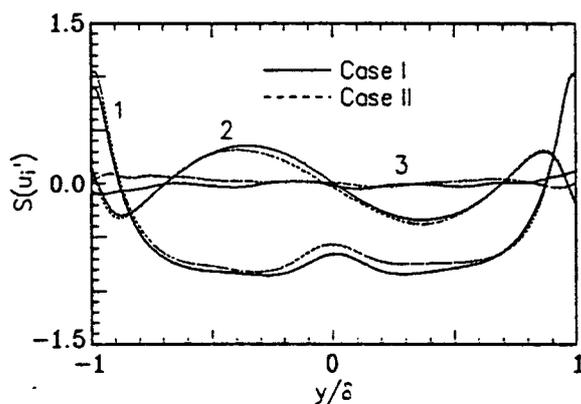


Fig. 1 Skewness factors

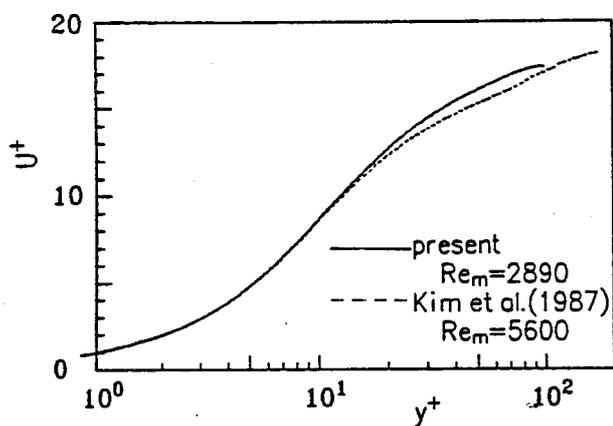


Fig. 2 Mean velocity

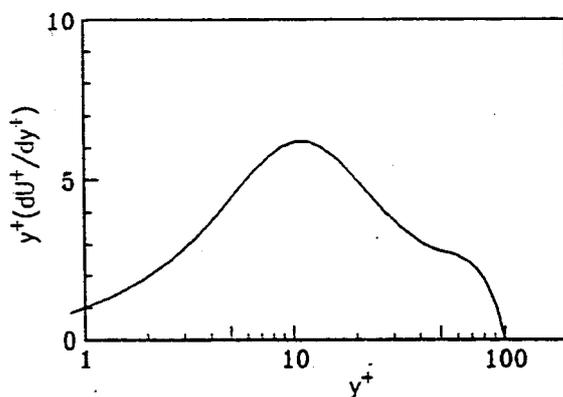


Fig. 3 Mean velocity derivative

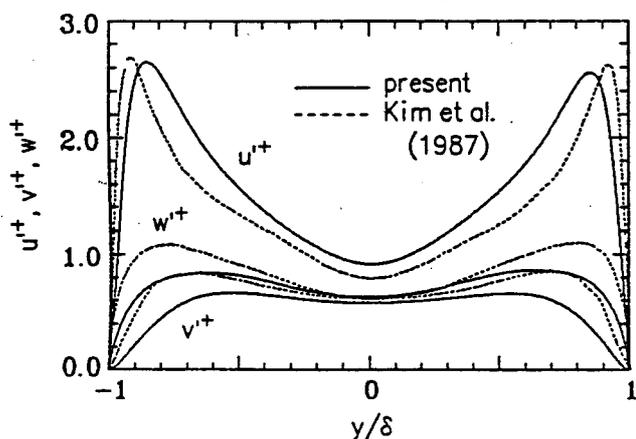


Fig. 4 Turbulence intensities

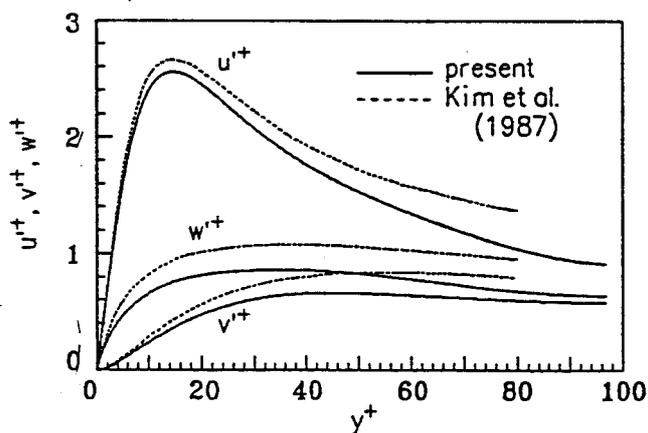


Fig. 5 Turbulence intensities

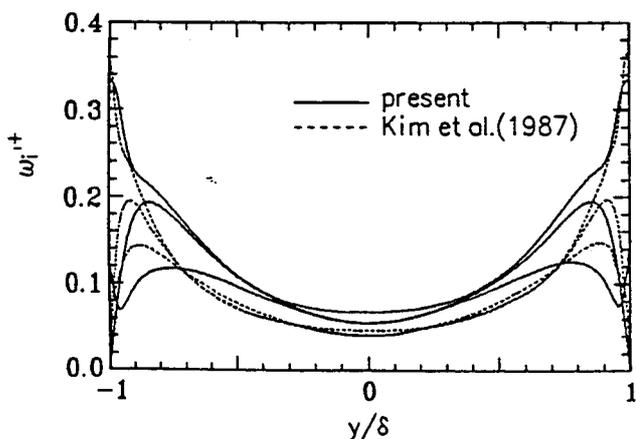


Fig. 6 Vorticity fluctuations

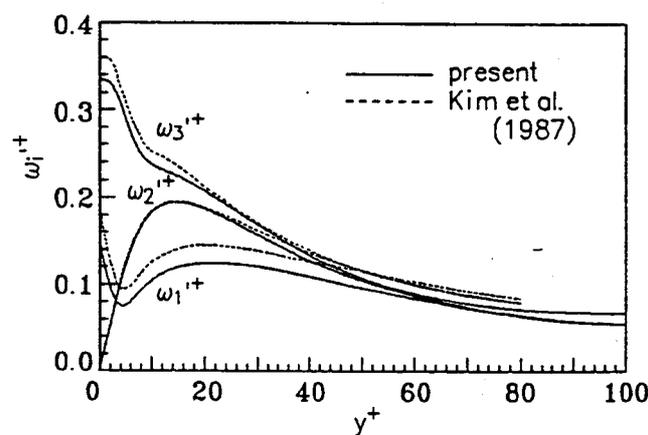


Fig. 7 Vorticity fluctuation

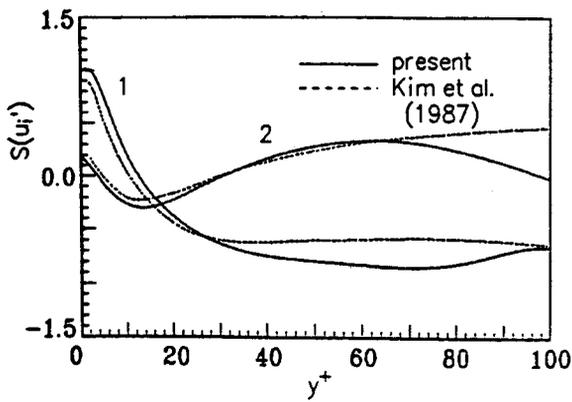


Fig. 8 Skewness factors

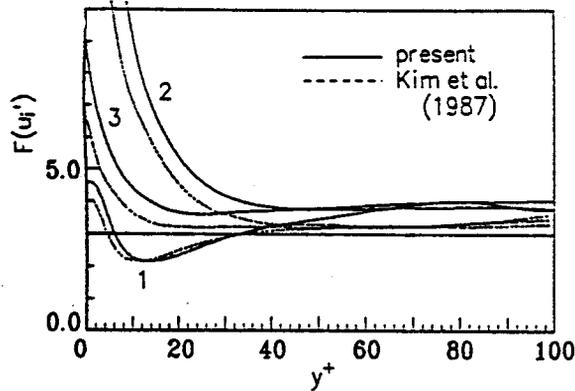


Fig. 9 Flatness factors

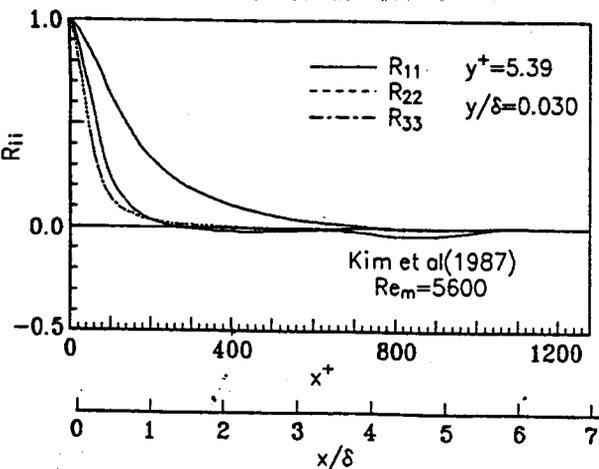
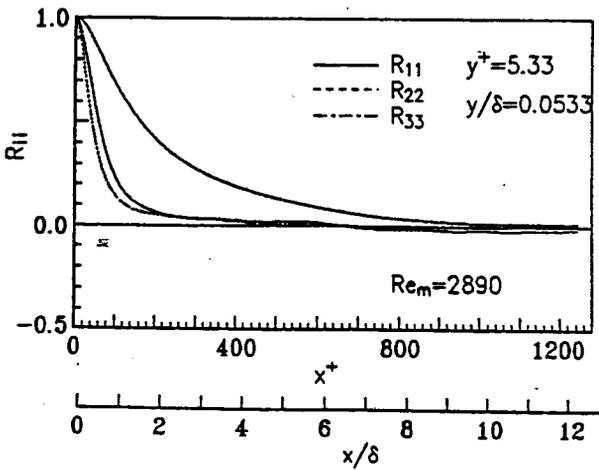


Fig. 11 Two-point correlations in the streamwise direction

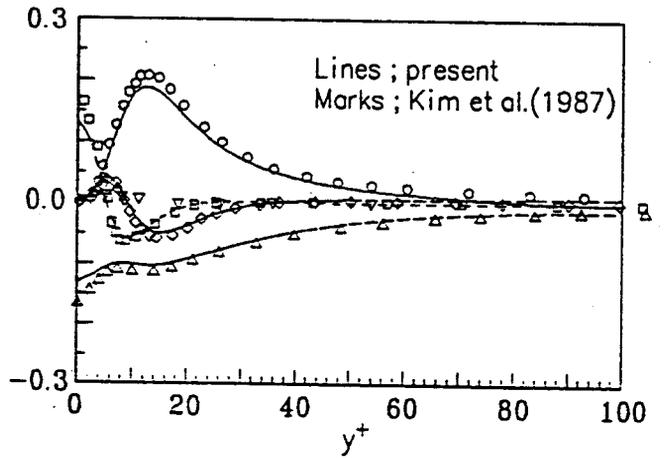


Fig. 10 Turbulent energy balance

— ; ○ : Production, - - - ; □ : Viscous diffusion
 - - - : Turbulent diffusion and Pressure diffusion
 ◇ : Turbulent diffusion, ▽ : Pressure diffusion
 - - - ; △ : Dissipation

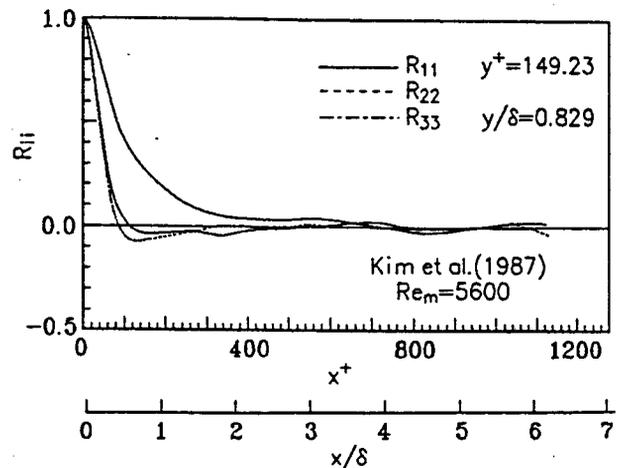
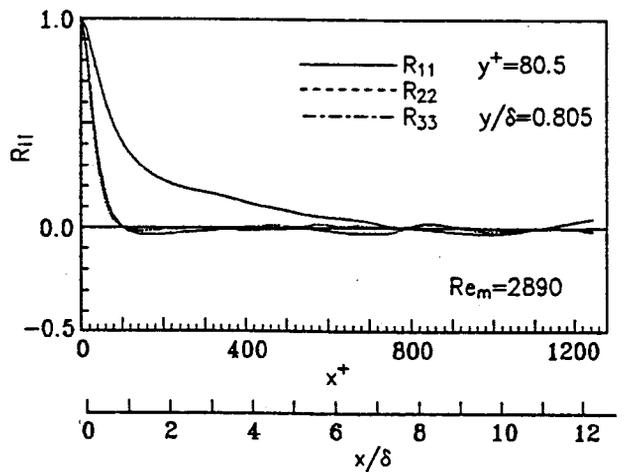


Fig. 12 Two-point correlations in the streamwise direction