演習林研究報告第一卷第九號

其一　同齡林分中ノ各直徑階ニ對スル本數配分關係ノ統計的研究（第一回）

i. Statistical Investigation on the Distribution of the Number of Stems According to the Grade of Diameter in an Even-aged Forest. (I)

林學士　石　尾　和　作

第一節　總　論

極メテ均一ナル種子ヲ同一立地上ニ同時ニ播種シ可及的一樣ナル取扱ノ下ニ一林分ヲ成立セシメタリトスルモ其各個樹ノ生長ニ不同ヲ生ズルハ吾人ノ常ニ目擊スル所ナリ蓋假令比重大サ色澤等ノ物理的性質同一ナル種子ニ於テモ其中ニ存スル胚子ノ個性ノ異ルモノアルベキガ故ニ發芽當初ニ於ケル勢力ヲ仔細ニ檢スレバ決シテ一樣ナルモノニアラズ斯クシテ生ジタル生長力ノ差異ハ其後ノ生存競爭ニヨリテ益々其差ヲシテ大ナラシメ玆ニ同齡林分中各個樹ノ直徑或ハ樹高ニ於テ差ヲ來スニ至ルハ免ルベカラザル事ナリ又實際上種子ヲ精選スルニ際シテモ微細ナル點迄均一ナラシムル事ハ到底不可能ナルガ故ニ或ハ種皮ノ厚サ或ハ含水量ニ於テモ差ヲ存スベク且同一立地ト稱スルモ各個樹ニ對スル外界因子ヲ全然一樣ナラシムル事難キヲ以テ此生長ノ差ヲ生ズル原因タルヤ甚ダ複雜ナリト云フベシ

既ニ生長ノ偏差免ルベカラザルモノトセバ是ガ同一年齡ニ於テ如何ナル直徑ノモノガ幾本存スベキカ換言スレバ各直徑階ニ對スル本數配分關係ヲ明カニスルハ造林上森林經理上並ニ森林利用上誠ニ重要事ナリト云ハザルベカラズ蓋是ニヨリテ除伐間伐受光伐等ノ諸種撫育事業

ニ對スル參考資料ヲ供スルヲ得ベク又收穫豫定ヲシテ一層精密ナラシムルヲ得ベク加フルニ森林ノ利用價値判定ヲシテ一層詳細ナラシメ得ベキガ故ナリ

然ルニ著者ノ寡聞ナル未ダ從來此種ノ研究ハ殆ドアルヲ見ズ唯 H. Prytz 氏(參考書16ヲ見ヨ)ガ氏ノ發案ニヨル林分材積算出法ニ於テ一ノ鬱閉林分中各直徑階ニ屬スル本數配分關係ハ恰モ Gauß 氏ノ誤差曲線ノ如ク平均直徑ヲ有スル樹木ノ本數最大ニシテ夫ヨリ大或ハ小ニ進ムニ從ヒ愈々本數ヲ減ジ遂ニ消失シ其曲線ハ平均直徑ヲ軸トシテ互ニ對稱ナリトノ前提ヲナセルアルノミ是固ヨリ詳細ナル研究ノ結果得タルモノニアラズシテ林分材積略算法ニ役立ツノ程度ニ於テ滿足セル推測ニ過ギズ著者ハ斯クノ如キ問題ハ廣キ材料ニヨリテ統計的ニ考究スベキモノナリト信ジ近時 Karl Pearson 氏等一派ニヨリテ廣ク統計學上ニ應用セラレツヽアル一般的頻度曲線 (Frequency-Curve in General) ノ適用ヲ試ミタリ左ニ聊是ガ結果ヲ報告シ江湖ノ示敎ヲ仰ガント欲ス

此 Karl Pearson 氏ノ一般的頻度曲線ニ關シテハ生物測定學 (Biometry) ノ專門家或ハ特殊ノ統計學者以外ニハ餘リ廣ク知ラレ居ラザルガ如ク感ゼラレ且其理論及應用法ニ關シ何等ノ知識ヲモ有セザル時ハ本論文ハ全ク不理解ニ終ルベキヲ恐ルヽガ故ニ先ヅ順序トシテ頻度曲線ニ就キテ次ニ之ヲ實際ニ應用スルニ當リ慣用セラルヽ乘率法 (Method of Moments) ニ就キテ論ジ更ニ此法ニ基キテ計算セル各種常數ニ伴フ蓋然誤差 (Probable Error) 及蓋然楕圓形 (Probability-Ellipse) ニ關シテ說述シ然ル後著者ノ用ヒタル統計材料及是ヨリ導キタル頻度曲線ニ關シテ述ベ最後ニ是ガ實際ニ適合スル程度ニ迄論及セント欲ス

附言

林學博士敎授新島先生ハ本問題ノ爲メニ多數ノ材料ヲ提供セラレタルノミナラズ研究ノ餘暇ヲ與ヘテ常ニ著者ヲ激勵セラレタリ又林學博士敎授小出先生ハ必要ナル參考書ヲ貸與セラレ且原稿ヲ綿密ニ校閱セラレ其結果賜ハリタル懇切ナル御注意ハ著者ヲ裨益セル所尠カラズ若

シ本論文ニシテ聊カタリトモ貢献スル所アリトセバ是偏ニ兩先生ノ賜ト感謝ニ堪エザル所ナリ然レドモ若シ不備ノ點アリトセバ是著者ノ不明ノ致ス所大方ノ讀者願ハクハ示教ニ吝カナラセ給ハザラン事ヲ

猶本論文ニ於テ專ラ參考ニ供セルBiometrikaハ農學博士田中義麿氏ノ厚意ニヨリテ借用スルヲ得タリ玆ニ特記シテ謝意ヲ表ス更ニ計算器ノ使用ヲ快諾セラレタル林學士中島廣吉氏ニ敬意ヲ表ス

第二節　頻度曲線 Frequency-Curves

或事象事件性質等ガ或特定ノ環界(Universe)內ニ於テ起ル回數ヲ一般ニ其事象事件性質等ノ當該環界內ニ於ケル頻度(Frequency)ト稱ス若シ其事象等ガ數量的ニ表出セラレ得ルモノナル時ハ其數値ノ增加ニ伴フテ夫々ノ頻度ヲ生ズベシ今互ニ或間隔ヲ置キタル事象ノ一定數値每ニ頻度ガ測定セラレタル時ハ之ヲ直角坐標系ニ於テ橫距(Abscissa)ニ事象ノ變化ヲ表ハシテ圖示スレバ其各數値ニ對スル頻度ハ幅ヲ有セザル縱距(Ordinate)ヲ以テ示サレ其端ハ一點ニ終ルベシ是等ノ端點ヲ連結スレバ玆ニ一ノ多角形ヲ得是ヲ頻度多角形(Frequency-Polygon)ト稱ス然ルニ自然現象或ハ其他ノ統計ニ於テモ事象ノ嚴格ナル一定値ニ對スル頻度ヲ實測スルヨリモ寧ロ其一定範圍內ニ入リ來ル頻度ヲ實測スルニ如カザル場合ニ遭遇スル事屢々アリ此場合ニ其頻度配分ノ狀況ヲ圖示スルニハ事象ノ一定群ニ對スル頻度ハ矩形ノ面積ヲ以テ示サレ其圖ノ形ハ階段狀ヲ呈ス(第二圖版參照)是ヲ**ヒストグラム**(Histogram)ト稱ス而シテ頻度多角形ニ於テ測定スベキ事象ノ間隔ヲ又**ヒストグラム**ニ於テ事象ノ群ノ範圍ヲ限リナク減少セシメタル極限ニ於テハ均一ナル環界內ヨリ極メテ多數ノ材料ヲ取リテ測定セル場合ニ何レモ一ノ滑カナル曲線ヲ描クモノト考フル事ヲ得ベシ此曲線ヲ頻度曲線(Frequency-Curves)ト稱ス

Karl Pearson氏ニヨレバ均一系(Homogeneous System)ヨリ取レル豐富ナル(假令全体ニアラズトモ)材料ヲ以テ觀察スル時ハ頻度ハ其增減ノ模樣

不定ナルニ拘ラズ下ノ兩特性ヲ有スル滑カナル曲線ニ歸着スルノ傾向ヲ示ス

(一)事象等ヲ示ス數値ガ絶エズ増加シ行ク間ニ頻度ハ零ヨリ始マリテ次第ニ上昇シ極大點ニ達シ夫ヨリ次第ニ減少シテ終ニ再ビ零トナル但シ其上昇及下降ニ於ケル速度ハ大小種々アルベク又上昇ノ速度ト下降ノ速度トハ必ズシモ常ニ相等シキヲ要セズ此性質ハ實ニ均一系ニ於ケル頻度ノ單型的配分 (Unimodal distribution of Frequency) ニ通有スル所ノモノナリ實用上ノ目的ニ對シテハ均一性 (Homogeneity) ハ自ラ單型性 (Unimodality) ト考ヘテ支障ナシト雖其逆ハ必ズシモ常ニ眞ナルモノニアラズ

(二)一般ニ頻度曲線ノ兩端ニ於テ軸ニ接觸ス

以上ノ兩性質ニヨリ均一系ニ於ケル頻度曲線ハ下ノ微分方程式ニヨリ表示セラルヽ事ヲ知ル

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(x+a)}{F(x)}\cdots\cdots(1)$$

式(1)ニ於テ $F(x)$ ノ形ヲ一般的ニ取ル時ハ $\frac{dy}{dx}$ ニ對シ假定セラレタル形モ極メテ廣キ意義ヲ有シ $y=0$ ナル場合ニ $\frac{dy}{dx}\neq 0$ ニシテ 0 ト ∞ トノ間ノ任意ノ値ヲ取ル如キ特別ナル場合ヲ含ムカヽル場合ハ前述ノ特性(二)ニ符合セズサレド實際ノ統計上ニハ其實例ヲ見ル事屢々アリ(參考書2 pp. 364—5 同3 p. 287 參照)

却說今 $F(x)$ ヲ Maclaurin ノ定理ニ從ヒ展開セラレ得ルモノトセバ微分方程式(1)ハ下ノ形トナル

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x+a}{b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots}\cdots\cdots(2)$$

此未知常數 $a, b_0, b_1, b_2, b_3\cdots\cdots$ ハ統計材料ヨリ決定スベキモノナルガ其方法トシテ所謂乘率法 (Method of Moments) ヲ用フレバ極メテ容易ナリ即チ式(2)ノ兩邊ニ x^n ヲ乘ジテ積分スレバ

$$\int x^n(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots)\frac{dy}{dx}dx=\int y(x+a)x^n dx\cdots\cdots$$

故ニ

$$x^n(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots)y-\int\{nb_0x^{n-1}+(n+1)b_1x^n$$
$$+(n+2)b_2x^{n+1}+\cdots\cdots\}y\,dx=\int yx^{n+1}dx+a\int yx^n dx$$

然ルニ前述ノ特性(一)ニヨリ曲線ノ兩端點ニ於テハ$y=0$ナルガ故ニ此兩點間ノ積分ニ對シテハ積分記號$\int$ヲ含マザル項ハ消失スサレバ乘率法ノ記號

$$\mu'_n=\int yx^n dx \cdots\cdots (3)$$

ヲ用フル時ハ下ノ如ク改メラルベシ

$$a\mu'_n+nb_0\mu'_{n-1}+(n+1)b_1\mu'_n+(n+2)b_2\mu'_{n+1}+\cdots\cdots=-\mu'_{n+1} \cdots (4)$$

今式(4)ニ $n=0,1,2,3,\cdots\cdots$ 等ヲ與フル時ハ夫々次ノ式ヲ生ズ

$$\left.\begin{array}{l}
\mu'_0a+0\times b_0+\mu'_0b_1+2\mu'_1b_2+3\mu'_2b_3+\cdots\cdots=-\mu'_1\\
\mu'_1a+\mu'_0b_0+2\mu'_1b_1+3\mu'_2b_2+4\mu'_3b_3+\cdots\cdots=-\mu'_2\\
\mu'_2a+2\mu'_1b_0+3\mu'_2b_1+4\mu'_3b_2+5\mu'_4b_3+\cdots\cdots=-\mu'_3\\
\mu'_3a+3\mu'_2b_0+4\mu'_3b_1+5\mu'_4b_2+6\mu'_5b_3+\cdots\cdots=-\mu'_4\\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}\cdots\cdots (5)$$

次ニ總テノ乘率ヲμ'_0即チ$\int y\,dx$ヲ單位トシテ表ハシタルモノトスレバ$\mu'_0=1$トナルガ故ニ式(5)ハ一層簡單トナル更ニ又乘率計算ノ原點ヲ統計材料ノ算術平均點ニ移シタル場合ノ乘率ヲ示スニ夫々右肩ニ記セル符號「$'$」ヲ除キ即チμヲ以テ表ハス時ハ

$$\mu_1=\int yx\,dx=0$$

トナルヲ以テ益々簡單ナラシメ得ベシ是第三節ニ於テ說明スルガ如ク乘率法ニテハ算術平均點ニ關係セシメ且第零次ノ夫ヲ單位トシテ表ハセル乘率ヲ用フル所以ナリ今此意義ニ於ケル乘率ヲ用フレバ式(5)ハ次ノ如ク書キ換ヘラル

$$\left.\begin{array}{l}
1\times a+0\times b_0+1\times b_1+2\times 0\times b_2+3\mu_2b_3+\cdots\cdots=-0\\
0\times a+1\times b_0+2\times 0\times b_1+3\mu_2b_2+4\mu_3b_3+\cdots\cdots=-\mu_2\\
\mu_2a+2\times 0\times b_0+3\mu_2b_1+4\mu_3b_2+5\mu_4b_3+\cdots\cdots=-\mu_3
\end{array}\right\}\cdots\cdots (5')$$

$$\mu_3 a + 3\mu_2 b_0 + 4\mu_3 b_1 + 5\mu_4 b_2 + 6\mu_5 b_3 + \cdots\cdots = -\mu_4$$

....

而シテ此計算ニ必要ナル乘率ノ次數ハ F(x) ノ展開式ニ於テ幾個ノ常數迄取ルベキカニヨリテ定マル即チ今(甲) b_0 ノミヲ取ル場合(乙) $b_0 b_1$ ノミヲ取ル場合及(丙) $b_0 b_1 b_2$ ノミヲ取ル場合ニ分チテ微分方程式(2)ニ於ケル常數ヲ乘率ヲ以テ置換セル式ヲ作レバ次ノ如シ

(甲) b_0 ノミヲ取ル場合

此場合ハ $a=0$ $b_0=-\mu_2$ ナルヲ以テ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\mu_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

是 Gauß–Laplacian Normal Curve ヲ示ス又 Karl Pearson 氏ハ之ヲ第零次ノ偏曲線 (Skew Curves of Zero Order) ト稱セリ

(乙) b_0, b_1 ノミヲ取ル場合

此場合ハ $a+b_1=0$; $b_0=-\mu_2$; $a\mu_2+3b_1\mu_2=-\mu_3$ トナルガ故ニ

$$b_1=-\frac{\mu_3}{2\mu_2}\ ;\ a=\frac{\mu_3}{2\mu_2}$$

從テ頻度曲線ノ微分方程式ハ式(2)ニ此値ヲ代用スレバ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{x+\frac{\mu_3}{2\mu_2}}{\mu_2+\frac{\mu_3}{2\mu_2}x}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

是 Karl Pearson 氏ノ偏曲線第三型 (Skew Curve of Type III) ヲ示スモノナリ同氏ハ又是ヲ第一次ノ偏曲線 (Skew Curves of 1st Order) ト稱セリ

(丙) b_0, b_1, b_2 ノミヲ取ル場合

此場合ハ

$$a+b_1=0$$

$$b_0+3b_2\mu_2=-\mu_2$$

$$a\mu_2+3b_1\mu_2+4b_2\mu_3=-\mu_3$$

$$a\mu_3+3b_0\mu_2+4b_1\mu_3+5b_2\mu_4=-\mu_4$$

此四個ノ方程式ヲ解ケバ a, b_0, b_1 及 b_2 ヲ三箇ノ乘率 μ_2, μ_3 及 μ_4 ニテ表ハスヲ得即チ求ムル微分方程式ハ式(2)ニ之等ノ常數ヲ代入スルコトニヨリ

ヲ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{x+\dfrac{\mu_3(\mu_4+3\mu_2^2)}{10\mu_2\mu_4-18\mu_2^3-12\mu_3^2}}{\dfrac{\mu_2(4\mu_2\mu_4-3\mu_3^2)+\mu_3(\mu_4+3\mu_2^2)x+(2\mu_2\mu_4-3\mu_3^2-6\mu_2^3)x^2}{10\mu_2\mu_4-18\mu_2^3-12\mu_3^2}}\cdots(8)$$

トナルヲ知ル是 Karl Pearson 氏ノ示シタル偏曲線第一乃至六型(Skew Curves of Type I—VI) ヲ表ハスモノニシテ甲乙ノ兩曲線モ其特別ナル場合トシテ含ミ得ルモノナリ同氏ハ又是ヲ第二次偏曲線 (Skew Curves of 2nd Order) ト稱セリ

單ニ數式上ヨリ考フレバ更ニ多クノ常數ヲ含ム方程式ヲ際限無ク作リ得ル所ナルモ此クノ如キハ實際上無用ナルノミナラズ煩雜ナル手數ヲ要シ且其結果ヲシテ却テ疑ハシキ方向ニ導クニ至ラン蓋 Pearson, K. 氏ノ論ズル所ニヨレバ式(8)ハ普通ノ頻度配分關係ヲ表ハスニ充分ニシテ又通常ノ頻度系列ノ大サニ於テハ高次ノ乘率ニ伴フ蓋然誤差ハ著シク增加スベケレバナリ (第41頁參照) 若シ此第二次偏曲線ヲ以テ記載シ難キ頻度關係ニ遭遇スル時始メテ μ_5 及 μ_6 ヲ用フル所ノ第三次偏曲線ノ必要ヲ生ズルモ是經驗上極メテ稀ナリ

次ニ式(8)ニヨリテ表ハサルヽ頻度曲線ガ確カラシサノ理論 (Theory of Probabity) ト如何ナル關係ニアルヤヲ考究スルハ極メテ興味多キ事ナルベシ何トナレバ既ニ述ベタル如ク頻度トハ特定ノ事象ガ特定ノ環界內ニ於テ生起スル回數ナルガ故ニ確カラシサノ概念トハ密接不離ノ關係存スレバナリ此說明ノ便宜上嚢中ヨリ黑白兩種ノ球ヲ取出ス例ヲ借用セン

今一ノ嚢ノ中ニ n 個ノ同大ニシテ構造均一ナル球ヲ容レアリトシ其中ニ pn 個ヲ黑球 qn 個ヲ白球トセバ此中ヨリ黑球ヲ取リ出ス確カラシサハ p 又白球ヲ取出ス確カラシサハ q ニシテ

$$p+q=1$$

ナルベシ今此嚢中ヨリ r 個 (勿論 $r<n$ ナリトス) ノ球ヲ何等ノ選擇意志ヲ用フル事ナク自由ニ取出シタル時黑球ガ $r, r-1, r-2, \cdots r-x, \cdots 0$ 個ナル確カラシサハ一種ノ冪級數ニヨリ表ハサル而シテ如何ナル種類ノ級

數ニヨリ示サルヽカハ其取リ出シ方ニヨリ異ナル即チr個ヲ一緒ニ取出スカ或ハ一個宛取出スモ一旦取出シタルモノヲ再ビ舊位置ニ返シテ能ク混合シテ又次ノ一個ヲ取出ス如クセル場合ハ幾回行フモ各回共ニ互ニ無關係 (independent) ナリト考ヘ得ルガ故ニ二項級數 (Binomial Series)

$$(p+q)^r=p^r+\frac{\lfloor r}{\lfloor r-1}p^{r-1}q+\frac{\lfloor r}{2\lfloor r-2}p^{r-2}q^2+\cdots\cdots+\frac{\lfloor r}{\lfloor x\lfloor r-x}p^{r-x}q^x+\cdots\cdots+q^r$$

ノ各項ニヨリテ説明セラルサレバ是ガN回ノ實行ニ於テハ頻度配分關係ハ $N(p+q)^r$ ヲ以テ表示セラル然レドモ若シ一個宛取出シテ一旦取出シタル球ヲ舊位置ニ返サザル場合ニハ最早二項級數ヲ以テ表ハサレズシテ超越幾何級數 (Hypergeometrical Series) 即チ

$$\frac{pn(pn-1)\cdots\cdots(pn-r+1)}{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}\left\{1+\frac{rqn}{pn-r+1}+\frac{r(r-1)}{\lfloor 2}\frac{qn(qn-1)}{(pn-r+1)(pn-r+2)}+\cdots\cdots\right\}$$

ニヨリ示サル更ニ此確カラシサヲ表ハス他ノ級數ヲモ考ヘ得ベシト雖第二次迄ノ偏曲線式ト比較スル爲メニハ是ニテ充分ナリトス

A) 確カラシサガ二項級數ヲ以テ表出セラルヽ場合

此場合ハr個ノ球ヲ取出シタル時黒球ガ $r, r-1, r-2,\cdots\cdots r-x,\cdots\cdots 0$ 個ナル確カラシサノ配分關係ヲ生ゼシムル原因ガ相互ニ獨立ナリト見做セルモノニシテ一般ニ $r-x$ 個ガ黒球ナル確カラシサハ

$$y_x=\frac{\lfloor r}{\lfloor x\lfloor r-x}p^{r-x}q^x$$

又 $\{r-(x+1)\}$ 個ガ黒球ナル確カラシサハ

$$y_{x+1}=\frac{\lfloor r}{\lfloor x+1\lfloor r-x-1}p^{r-x-1}q^{x+1}=y_x\frac{q(r-x)}{p(x+1)}$$

故ニ $p+q=1$ ナル事ヲ適用スレバ下ノ結果ヲ得ベシ

$$\Delta y_x=y_{x+1}-y_x=y_x\left\{\frac{q(r-x)}{p(x+1)}-1\right\}=y_x\frac{qr-p-x}{p(x+1)}\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

次ニ y_x ト y_{x+1} トノ算術平均ヲ $y_{x+\frac{1}{2}}$ トスレバ

$$y_{x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(y_{x+1}+y_x)=\frac{1}{2}y_x\left\{\frac{q(r-x)}{p(x+1)}+1\right\}=\frac{y_x}{2}\frac{\{(p-q)x+qr+p\}}{p(x+1)}\cdots\cdots\cdots(b)$$

今式(a)ノ兩邊ヲ式(b)ノ兩邊ニテ除スレバ

$$\frac{\Delta y_x}{y_{x+\frac{1}{2}}}=\frac{2\{rq-p-x\}}{(p-q)x+rq+p}\cdots\cdots(c)$$

今 x ガ變化スル單位ヲ微分小 (Infinitesimal small) トナセバ式(c)ハ次ノ微分方程式ニ書キ換ヘラル

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\frac{a+x}{b_0+b_1x}$$

是前述ノ頻度曲線ノ乙場合ニ相當スル事ハ式(7)ト比較スルコトニヨリテ知リ得ベシ

若シ式(c)ニ於テ p=q トスレバ

$$\frac{\Delta y_x}{y_{x+\frac{1}{2}}}=\frac{2\{(r-1)p-x\}}{(1+r)p}\cdots\cdots(d)$$

トナルガ故ニ容易ニ Gauß-Laplace ノ正曲線ヲ示ス微分方程式

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\frac{a+x}{b_0}$$

トナルヲ洞見シ得ベシ

B) 確カラシサガ超越幾何級數ヲ以テ表出セラルヽ場合

此場合ニハ $y_x, y_{x+1}, \Delta y_x, y_{x+\frac{1}{2}}$ ノ意味ヲ A ニ於ケルト同樣ナリトセバ

$$y_x=\frac{pn(pn-1)\cdots(pn-r+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}\cdot\frac{r(r-1)\cdots(r-x+2)}{\underline{|x-1}}\cdot\frac{qn(qn-1)\cdots(qn-x+2)}{(pn-r+1)(pn-r+2)\cdots(pn-r+x-1)}$$

$$\Delta y_x=y_{x+1}-y_x=y_x\left\{\frac{(r+1)(qn+1)-x(n+2)}{x(pn-r+x)}\right\}$$

$$y_{x+\frac{1}{2}}=\frac{y_{x+1}+y_x}{2}=\frac{1}{2}y_x\left\{\frac{(r+1)(qn+1)-x[2(r+1)+n(q-p)]+2x^2}{x(pn-r+x)}\right\}$$

$$\therefore\ \frac{\Delta y_x}{y_{x+\frac{1}{2}}}=\frac{2\{(r+1)(qn+1)-x(n+2)\}}{(r+1)(qn+1)-x\{2(r+1)+n(q-p)\}+2x^2}\cdots\cdots(e)$$

從テ x ノ變化スル單位ヲ微分小トナセバ式(e)ハ微分方程式

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\frac{a+x}{b_0+b_1x+b_2x^2}\cdots\cdots(f)$$

トナル是頻度曲線式(8)ト同形ニシテ前述ノ丙場合ニ相當スルヲ見ン

以上述ブル所ニヨリ吾人ハ頻度曲線ニ對スル方程式ハ又確カラシサ

ノ理論ヲ以テ説明セラルベキ事ヲ知レリ

更ニPearson氏第零次偏曲線即チ正曲線モ同氏第一次偏曲線モ皆同氏第二次偏曲線ノ特別ナル場合ト考ヘ得ルハ方程式ノ形ヲ見ルモ明カナルベシ故ニ式(8)ニヨリテ示サルル總テノ曲線ヲ論ズレバ普通現ハルヽ多クノ頻度曲線ヲ盡シ得ベシサレバ以下専ラ式(8)ニヨリテ表示セラルル曲線ニ就キ考究セント欲ス玆ニ豫メ注意シ置クベキハ此乘率法ヲ頻度曲線ニ應用スル場合ニ常ニ乘率 μ_2, μ_3, μ_4 ノ函數

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

ヲ用フル事ナリトス即チ先ヅ式(8)ニ於テ此置換ヲ行フ時ハ

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x+\dfrac{\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}}{\dfrac{\mu_2(4\beta_2-3\beta_1)+\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)x+(2\beta_2-3\beta_1-6)x^2}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}}\cdots(9)$$

トナル以後式(8)ノ代リニ式(9)ヲ用フル事トス

以下此頻度曲線ノ一般的性質ヲ吟味セン

微分方程式(2)ニ於テ $x=-a$ ナル時ハ $\frac{dy}{dx}=0$ ニシテ頻度曲線ノ極大値ガ存スベキ點ナリ即チ頻度ノ最大ナル事象ヲ示スカヽル點ヲPearson氏及其他ノ統計學者ハmodeト稱シ是ノ一個ナル場合ヲUnimodalト稱セリ此點ノ位置ヲ知ル時ハ其曲線ガ偏曲線ナルカ正曲線ナルカ即チ大体ノ曲線型ヲ明カニスルヲ得ベキヲ以テ予ハmodeヲ型點Unimodalヲ單型性ト譯セリ

扨説aハ原點ト型點トノ距離ヲ示スモノニシテ式(9)ニヨリ

$$a=-\frac{\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)}$$

式中 $\mu_2=\int yx^2dx$ ハ統計數學上標準偏差(Standard deviation)ト稱セラルヽモノノ二乘ト同一ナリ何トナレバ此 μ_2 ハ統計材料ノ算術平均點ヲ原點トシテ計算シ且 $\mu_0=\int ydx=$(頻度ノ總計)ヲ單位トシテ表出セルモノナレバナリ今此標準偏差ヲ統計數學上慣用セラルヽ記號 σ ヲ以テ表ハセ

ハ型點値 a ハ下ノ如シ

$$a=-\frac{\sigma\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)} \cdots\cdots(10)$$

此 a ヲ知ル時ハ正曲線ヨリ偏スル程度ヲ知リ得ベシト雖是ハ又統計材料ノ散亂度 (Measure of Scatter of the Statistics) ニ關聯セシメテ考フルヲ要ス即チ此散亂度ハ標準偏差ニヨリテ表示セラルヽガ故ニ曲線ノ偏度 (之ヲ sk ニテ表ハス) ハ

$$sk=-\frac{a}{\sigma}=\frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)} \cdots\cdots(11)$$

ヲ以テ表ハサル

次ニ微分方程式(9)ガ如何ナル型ノ曲線ヲ含ムヤヲ明カニセント欲ス即チ方程式

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx}=\frac{d\log y}{dx}=\frac{x+a}{b_0+b_1x+b_2x^2} \cdots\cdots(ア)$$

ニ於テ右邊ノ分母ヲ因子分解スレバ

$$b_0+b_1x+b_2x^2=b_2\left[x-\frac{-b_1+\sqrt{b_1^2-4b_0b_2}}{2b_2}\right]\left[x-\frac{-b_1-\sqrt{b_1^2-4b_0b_2}}{2b_2}\right] \cdots\cdots(イ)$$

トナルガ故ニ式(イ)ノ根號ヲ含ム部分 $\sqrt{b_1^2-4b_0b_2}$ ノ數値如何ニヨリテ微分方程式(ア)ヲ積分シタル形モ自ラ異ナルベシ從テ二次方程式 $b_0+b_1x+b_2x^2=0$ ノ根ノ性質ヲ判別スル爲ニ用ヒラルヽ $\frac{b_1^2}{4b_0b_2}$ ハ式(ア)ニヨリテ表示セラルヽ曲線型ヲ判斷スル爲ノ條件トシテモ役立ツ所ナリ此判斷條件ヲ軌範 (Criterion) ト名付ケ希臘文字 κ ヲ以テ表ハス前出ノ判斷條件 $\frac{b_1^2}{4b_0b_2}$ ニ微分方程式(9)中 b_0, b_1, b_2 ニ相當スル値ヲ置換シタルモノヲ κ_2 (後ニ述ブル他ノ軌範 κ_1 ト區別スル爲メ「2」ナル接尾數字ヲ用フ) ト稱シ次式ニヨリ與ヘラル

$$\kappa_2=\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(2\beta_2-3\beta_1-6)(4\beta_2-3\beta_1)} \cdots\cdots(12)$$

而シテ必然的ニ $\beta_2>\frac{3}{4}\beta_1$ ナルヲ要スルガ故ニ吾人ノ論ゼントスル曲線ニ對シ正象限内ニ横ハル β_1, β_2 ノ總テノ可能的數値ハ直線

$$\beta_2=\frac{3}{4}\beta_1 \qquad 及 \qquad \beta_2=\frac{15}{8}\beta_1+\frac{9}{2}$$

ノ間ニ來ル所ナリ此後ノ直線ヲ超エタル場合ハ其頻度配分 (Frequency-Distributions) ハ Pearson 氏ノ所謂異質型 (Heterotypic) トナル

今頻度曲線ノ主要ナル型ヲ分類スル事次ノ如シ

(一) $\sqrt{b_1^2-4b_0b_2}$ ガ實數ナル場合

是ハ又 κ_2 ノ値ニヨリテ下ノ如ク分類セラル

1. κ_2 ガ負ナル場合

此場合ハ Pearson 氏ノ曲線第一型ヲ示ス

2. κ_2 ガ正ノ場合

此際 $\sqrt{\{b_1^2-4b_0b_2\}}$ ガ實數ナルガ爲ニハ $\kappa_2>+1$ ナルヲ要ス是 pearson 氏曲線第六型ヲ示スサレバ此型ハ $\kappa_2=\infty$ ナル線ト $\kappa_2=+1$ ナル線トノ間ニ横ハルモノナリ

3. $\kappa_2=\infty$ ノ場合

是 $b_2=0$ ナル場合ニ起ルモノニシテ Pearson 氏曲線第三型ヲ示ス前述ノ如ク $\beta_2>\frac{3}{4}\beta_1$ ナルヲ以テ此場合ニ更ニ簡單ナル判斷條件 κ_1 ヲ提出スルコトヲ得即チ

$$\kappa_1=2\beta_2-3\beta_1-6 \qquad \cdots\cdots\cdots (13)$$

ガ 0 ナル事ハ第三型ナルヲ表ハス實ニ Pearson 氏第三型曲線ハ $\kappa_1=0$ ナル直線上ニ横ハルモノナリサレバ此 κ_1 モ曲線型決定上ノ軌範トシテ κ_2 ト並ビ用ヒラル

4. $\kappa_2=+1$ ナル場合

此場合ハ $\sqrt{\{b_1^2-4b_0b_2\}}=0$ 從テ $b_0+b_1x+b_2x^2=0$ ノ兩根ハ全ク相等シ是 Pearson 氏曲線第五型ヲ示ス此型ハ β_1, β_2 ノ二次式 $\kappa_2=1$ ヲ以テ表示セラルヽ曲線上ニ來ルモノナリ

5. $\kappa_2=0$ 但シ $b_2\neq0$ ノ場合

此場合ハ必然的ニ $b_1=0$ ニシテ方程式 $b_0+b_1x+b_2x^2=0$ ノ兩根ハ絶對値相等シキモ符號相反スルモノナリ是 Pearson 氏曲線第二型及第七型ヲ示

ス第二型ニ對スルβ常數ノ數値ハ下ノ如シ

$$\beta_1=0,\quad 0<\beta_2<+3$$

然ルニ若シ $\beta_1=0, \beta_2>+3$ トナレバ $b_2>0$ トナリ $b_0+b_1x+b_2x^2=0$ ハ二ツノ等シキ虚根ヲ有スルコトヽナル是第七型曲線ナリ

6. $\kappa_2=0,\quad b_1=b_2=0$

是所謂正曲線ニシテ Pearson 氏ノ第零次偏曲線又ハ G 型頻度曲線ト稱セラルヽモノヲ示ス此型ハ $\beta_1=0, \beta_2=+3$ ナル時ニノミ現ハル

(二) $\sqrt{\{b_1^2-4b_0b_2\}}$ ガ虚數ナル場合

此場合ハ $+1>\kappa_2>0$ ナル關係アリ是 Pearson 氏曲線第四型ヲ示ス而シテ直線 $\beta_2=\frac{15}{8}\beta_1+\frac{9}{2}$ (第12頁參照) ハ此型ノ消失スル限界ヲ劃ス

以上微分方程式(9)ニヨリテ表示セラルヽ八種ノ頻度曲線ヲ擧ゲタルガ其中主要ナルモノハ第一型第四型及第六型ノ三種ニシテ是等ヲ以テ殆ド總テノ場合ヲ表ハシ得ベシ他ノ四種ハ一ノ型ヨリ他ノ型ニ移リ行ク轉移點ニ於テ用ヒラレ得ル稍々簡單ナル曲線式タルニ過ギズ之等ノ型ハ β_1 及 β_2 ノ大サニヨリテ定マルモノナレバ之ヲ兩軸トスル直角坐標系ニ圖示スレバ其曲線型ヲ決定スル事ヲ得ベシ(參考書10ノ66頁, 67頁及88頁ヲ見ヨ) 而シテ兩種ノ型ノ限界附近ニ於テハ何レモ用フルヲ得唯或型ヲ採用セントスルニ當リ其型ノ適合スル確カラシサニ就キ吟味スルノ要アルベシ其法ハ第四節ニ於テ述ブル所アラン

最近 Pearson 氏ハ以上ノ曲線ノ特別ナル場合トシテ數種ヲ發表セルモ玆ニハ必要ナラザルガ故ニ省略ス

是ヨリ微分方程式(9)ヨリ積分法ニヨリテ微係數ヲ含マザル式ヲ誘導セン

第一型 κ_2 即チ $\frac{b_1^2}{4b_0b_2}<0$

此場合ニハ

$$b_0+b_1x+b_2x^2=b_2\left[x-\frac{\text{正ノ數}}{2b_2}\right]\left[x+\frac{\text{正ノ數}}{2b_2}\right]$$

故ニ

$$\frac{d\log y}{dx}=\frac{x+a}{b_0+b_1x+b_2x^2}=\frac{x+a}{b_2(x+A_1)(x-A_2)}=\frac{A_1-a}{b_2(A_1+A_2)}\cdot\frac{1}{x+A_1}+\frac{A_2+a}{b_2(A_1+A_2)}\cdot\frac{1}{x-A_2}$$

據テ之ヲ積分スレバ

$$\log y=\frac{A_1-a}{b_2(A_1+A_2)}\log(x+A_1)+\frac{A_2+a}{b_2(A_1+A_2)}\log(x-A_2)+C$$

但Cハ積分常數ナリ故ニ

$$y=y'(x+A_1)^{\frac{A_1-a}{b_2(A_1+A_2)}}(x-A_2)^{\frac{A_2+a}{b_2(A_1+A_2)}}$$

トナル今曲線ノ原點ヲ型點(mode)即チ $x=-a$ ナル位置ニ移ス時ハ

$$y=y'(x-a+A_1)^{\frac{A_1-a}{b_2(A_1+A_2)}}(x-a-A_2)^{\frac{A_2+a}{b_2(A_1+A_2)}}$$

トナリ更ニ是ヲ變形シ以テ簡單ナラシムレバ次ノ如シ

$$y=y_0\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{\nu a_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{\nu a_2}\quad\cdots\cdots(14)$$

是Pearson氏第一型曲線ノ一般式ナルガ今其性質及常數間並ニ常數ト乘率トノ關係ニ就キ稽査セバ下ノ如シ

式(14)ヲ書換フレバ

$$y=y_0\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{m_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{m_2}\quad\cdots\cdots(15)$$

但シ $\frac{m_1}{a_1}=\frac{m_2}{a_2}$

此曲線ハ $x=-a_1$ ヨリ $x=+a_2$ 迄擴ガリ居ルヲ以テ此極限ノ間ニ定積分ヲ行ヘバ頻度ノ總計Nヲ求メ得ベシ今此積分ニ際シ便宜上次ノ置換ヲ行フ

$$a_1+a_2=b\quad\cdots\cdots(i)$$

$$\frac{a_1+x}{a_1+a_2}=z\quad\cdots\cdots(ii)$$

然ル時ハ

$$\begin{aligned}N&=\int_{-a_1}^{+a_2}y_0\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{m_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{m_2}dx\\&=\int_{-a_1}^{+a_2}\frac{y_0}{a_1^{m_1}a_2^{m_2}}(a_1+x)^{m_1}(a_2-x)^{m_2}dx\\&=\frac{y_0(a_1+a_2)^{m_1+m_2+1}}{a_1^{m_1}\ a_2^{m_2}}\int_0^1 z^{m_1}(1-z)^{m_2}dz\\&=\frac{y_0(m_1+m_2)^{(m_1+m_2)}b}{m_1^{m_1}\ m_2^{m_2}}B(m_1+1,\ m_2+1)\end{aligned}$$

$$=\frac{y_0(m_1+m_2)^{(m_1+m_2)}b}{m_1^{m_1}\ m_2^{m_2}}\ \frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)}{\Gamma(m_1+m_2+2)}$$

即チ

$$y_0=\frac{N}{b}\ \frac{m_1^{m_1}\ m_2^{m_2}}{(m_1+m_2)^{(m_1+m_2)}}\ \frac{\Gamma(m_1+m_2+2)}{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)}\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

此y_0ハ型點ニ於ケル頻度ナリトス

次ニ乘率ノ計算ニモ同様ノ方法ヲ應用シ得ベシ即チ$x=-a_1$ヲ通過スル縱距ニ關スル第n次ノ乘率ハ次ノ如シ

$$N\mu'_n=\int_{-a_1}^{+a_2}\frac{y_0}{a_1^{m_1}a_2^{m_2}}(a_1+x)^n(a_1+x)^{m_1}(a_2-x)^{m_2}dx$$

$$=\frac{y_0(a_1+a_2)^{m_1+m_2+n+1}}{a_1^{m_1}\ a_2^{m_2}}\int_0^1 z^{m_1+n}(1-z)^{m_2}dz$$

$$=\frac{y_0(a_1+a_2)^{m_1+m_2}b^{n+1}}{m_1^{m_1}\ m_2^{m_2}}\ \frac{\Gamma(m_1+n+1)\Gamma(m_2+1)}{\Gamma(m_1+m_2+n+2)}$$

故ニΓ函數ノ性質$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)$ヲ利用スレバ容易ニ

$$\mu'_1=\frac{b(m_1+1)}{m_1+m_2+2}$$

$$\mu'_2=\frac{b^2(m_1+1)(m_1+2)}{(m_1+m_2+2)(m_1+m_2+3)}$$

等ヲ求ムルヲ得次ニ是等ノ數値ヨリ算術平均點ニ關スル乘率ヲ求メ

$$m'_1=m_1+1;\quad m'_2=m_2+1;\quad r=m'_1+m'_2$$

ノ置換ヲ行ヘバ

$$\mu_2=\frac{b^2m'_1m'_2}{r^2(r+1)}\cdots\cdots\cdots\cdots(iii)$$

$$\mu_3=\frac{2b^3m'_1m'_2(m'_2-m'_1)}{r^3(r+1)(r+2)}\cdots\cdots\cdots\cdots(iv)$$

$$\mu_3=\frac{3b^4m'_1m'_2\{m'_1m'_2(r-6)+2r^2\}}{r^4(r+1)(r+2)(r+3)}\cdots\cdots\cdots\cdots(v)$$

是等ノ數値ヨリ本論ニ於テ慣用スル乘率ノ函數β_1,β_2(第10頁ヲ見ヨ)ヲ用ヒ又$\varepsilon=m'_1m'_2$ノ置換ヲ行フ時ハ左ノ關係式ヲ得

$$\frac{\beta_1(r+2)^2}{4(r+1)}=\frac{r^2}{\varepsilon}-4\cdots\cdots\cdots\cdots(vi)$$

$$\frac{\beta_2(r+2)(r+3)}{3(r+1)}=\frac{2r^2}{\varepsilon}+r-6\cdots\cdots\cdots\cdots(vii)$$

(vi) (vii) 兩式ヨリ $\frac{r^2}{\varepsilon}$ ヲ消去スレバ

$$\frac{\beta_1(r+2)^2}{2(r+1)}-\frac{\beta_2(r+2)(r+3)}{3(r+1)}=-(r+2)$$

此兩邊ヲ (r+2) ヲ以テ除シテ r ヲ求ムレバ

$$r=\frac{6(\beta_2-\beta_1-1)}{3\beta_1-2\beta_2+6} \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

此値ヲ式(vi)ニ挿入スレバ

$$\varepsilon=m'_1m'_2=\frac{r^2}{4+\frac{1}{4}\beta_1\frac{(r+2)^2}{r+1}} \cdots\cdots\cdots\cdots (viii)$$

式(viii)ニヨル ε ノ値ヲ式(iii)ニ於ケル $m'_1m'_2$ ニ置換スレバ

$$b^2=\frac{\mu_2(r+1)r^2}{\varepsilon}=\frac{1}{4}\mu_2\{\beta_1(r+2)^2+16(r+1)\}$$

$$\therefore\ b=a_1+a_2=\frac{1}{2}\sqrt{\mu_2}\sqrt{\{\beta_1(r+2)^2+16(r+1)\}} \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

次ニ指數 m_1 及 m_2 ハ容易ニ求メラルベシ即チ

$$r=m'_1+m'_2$$

$$\varepsilon=m'_1m'_2$$

$$m'_1=m_1+1$$

$$m'_2=m_2+1$$

ナルガ故ニ

$$m_1=\frac{1}{2}\{r-2+\sqrt{r^2-4\varepsilon}\}$$

$$m_2=\frac{1}{2}\{r-2-\sqrt{r^2-4\varepsilon}\}$$

從テ此 ε ニ式(viii)ヲ代入スレバ m_1 及 m_2 ハ夫々

$$\frac{1}{2}\left\{r-2\pm\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_1(r+2)^2+16(r+1)}}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

ニヨリテ示サル而シテ其根號ノ前ニアル符號ハ μ_3 ノ符號如何ニヨリテ定マル即チ m_1 ニ對シテハ μ_3 ガ正ナルトキニ負ニシテ之ガ負ナルトキニ正號ヲ取リ m_2 ハ之ニ反ス蓋 μ_3 ガ正ナル時ハ型點値ヨリモ算術平均値大ナルベキガ故ニ $a_1<a_2$ 從テ $\frac{m_1}{a_1}=\frac{m_2}{a_2}$ ナル關係ニヨリ $m_1<m_2$ ナルベ

キヲ以テナリ

サレバ先ヅ公式(17)ニヨリテrヲ公式(13)ニヨリテbヲ又公式(19)ニヨリテm_1及m_2ヲ求ムレバ關係式

$$\frac{m_1}{a_1}=\frac{m_2}{a_2} \quad 及 \quad b=a_1+a_2$$

ニヨリテa_1及a_2ヲ求ムル事容易ナリ最後ニ公式(16)ニヨリ型點ニ於ケル頻度y_0ヲ求ムレバ玆ニ曲線式(15)中ノ總テノ常數ヲ乘率ノ函數トシテ求ムルヲ得

次ニ偏度ハ一般ニ公式(11)ニヨリテ算出セラルベシト雖此第一型曲線ニ對シテハ前ニ屢々用ヒタル記號rヲ利用シテ簡單ナル形式ニ表ハサル即チ曲線ノ起點ト型點トノ距離ハa_1ニシテ算術平均點トノ距離ハμ'_1ナルガ故ニ公式(18)及(19)ヲ用フレバ

$$型點値-算術平均値=a_1-\mu'_1=a_1-\frac{bm'_1}{r}=\frac{bm_1}{m_1+m_2}-\frac{bm'_1}{r}$$

$$=\frac{b(2m_1-r+2)}{r(r-2)}=\frac{1}{2}\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}\frac{r+2}{r-2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\mu_3}{\mu_2}\left\{\frac{r+2}{r-2}\right\}\cdots\cdots(20)$$

從テ

$$sk=\frac{1}{2}\sqrt{\beta_1}\ \frac{r+2}{r-2}\cdots\cdots(21)$$

第二型

此型ハ第一型ノ特別ナル場合ト見做サルヽモノニシテ$\kappa_2=0$從テ公式(12)ニヨリ$\beta_1=0$故ニ又公式(19)ニヨリ

$$m_1=m_2=m=\frac{1}{2}(r-2)=\frac{5\beta_2-9}{2(3-\beta_2)}\cdots\cdots(22)$$

又$\frac{m_1}{a_1}=\frac{m_2}{a_2}$ナル關係ニヨリ

$$a_1=a_2=a=\frac{b}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{\mu_2}\ \sqrt{16(r+1)}$$

サレバ曲線式ハ

$$y=y_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^m\cdots\cdots(23)$$

トナル式中 m ハ公式(22)ニヨリテ求ムベク又 a^2 ハ次式ニヨリテ算出セラル

$$a^2=\mu_2(r+1)=\frac{2\mu_2\beta_2}{3-\beta_2} \quad\cdots\cdots(24)$$

又 y_0 ハ公式(16)ニ於テ $m_1=m_2=m$; $b=2a$ ト置キテ作リタル公式

$$y_0=\frac{N\Gamma(2m+2)}{a2^{2m+1}\{\Gamma(m+1)\}^2}\quad\cdots\cdots(25)$$

ニヨリテ求メ得ベシ

此型ノ曲線ニ於テハ偏度零ニシテ型點ハ算術平均點ト一致シ此點ヲ通過スル縱距ニ關シテ對稱ナリ又曲線ノ擴ガル範圍ハ有限ニシテ $-a$ ヨリ $+a$ 迄ナリ

若シ此型ノ曲線ニシテ β_2 ガ $\frac{9}{5}$ 即チ 1.8 ヨリモ小ナル時ハ公式(22)ニヨリテ $m<0$ 從テ方程式ノ形ハ

$$y=y_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m}$$

トナリU字形ノ曲線ヲ表ハス因テ前ノ場合ヲ第二a型トナシ後者ヲ第二b型トシテ區別ス又 $\beta_2=1.8$ ナル時ハ $m=0$ ナルガ故ニ $y=y_0$ トナル

第三型

是ハ $\kappa_2=\infty$ 即チ $\kappa_1=0$ ニシテ $b_2=0$ ナル場合ニ起ル從テ此型ノ曲線ノ方程式ハ下ノ如クシテ得ラル

$$\log y=\int\frac{x+a}{b_0+b_1x}dx=\int\left(\frac{1}{b_1}+\frac{a-\frac{b_0}{b_1}}{b_1x+b_0}\right)dx$$

$$=\frac{x}{b_1}+\left(a-\frac{b_0}{b_1}\right)\frac{1}{b_1}\log(b_1x+b_0)+C$$

$$\therefore y=y'e^{\frac{x}{b_1}}(b_1x+b_0)^{\frac{1}{b}\left(a-\frac{b_0}{b_1}\right)}$$

更ニ原點ヲ型點ニ移シ常數ヲ簡單ナラシムレバ

$$y=y_0e^{-\gamma x}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\gamma a}\quad\cdots\cdots(26)$$

ナル方程式ヲ得

此曲線ハ第一型ニ於テ $a_2=\infty$ トナシタル特別ノ場合トモ見做ス事ヲ得式(26)中ノ a ハ頻度曲線ヲ示ス微分方程式(2)中ニ於ケル a ト意味ヲ異ニスルハ明カナリ方程式(26)ヨリ此曲線ノ擴ガル範圍ハ $-a$ ヨリ $+\infty$ 迄ナル事ヲ知リ得ベシ

以下方程式(26)ニ於ケル常數ヲ求ムル方法ヲ論ゼン

今方程式(26)ニ於テ $\gamma a=p$; $\gamma(a+x)=z$ ノ置換ヲ行フテ積分スレバ頻度ノ總計 N ハ

$$N=y_0\int_{-a}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{a}\right)^p e^{-\gamma x}dx$$

$$=y_0\int_0^{+\infty} z^p a^{-p} e^{-z+p}\gamma^{-(p+1)}dz$$

$$=y_0\frac{e^p}{a^p\gamma^{p+1}}\int_0^{+\infty} z^p e^{-z}dz$$

$$=y_0\frac{e^p}{\gamma p^p}\Gamma(p+1)=y_0\frac{ae^p}{p^{p+1}}\Gamma(p+1)$$

$$y_0=\frac{Np^{p+1}}{ae^p\Gamma(p+1)}\cdots\cdots(27)$$

次ニ曲線ノ始マル點ヲ通過スル y 軸ニ關スル第 n 次ノ乘率ハ

$$\mu'_n=\frac{1}{N}\int_{-a}^{+\infty} y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^p e^{-\gamma x}(x+a)^n dx=\frac{y_0 e^p}{Np^p\gamma^{n+1}}\int_0^{+\infty} z^{p+n}e^{-z}dz$$

$$=\frac{\Gamma(p+n+1)}{\gamma^n\Gamma(p+1)}$$

サレバ $\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)$ ナル性質ヲ利用スレバ

$$\mu'_1=\frac{p+1}{\gamma}$$

$$\mu'_2=\frac{(p+1)(p+2)}{\gamma^2}$$

$$\mu'_3=\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{\gamma^3}$$

ヲ得是ヨリ算術平均點ヲ通過スル y 軸ニ關シテ乘率ヲ算出スレバ

$$\mu_2=\frac{p+1}{\gamma^2}$$

$$\mu_3=\frac{2(p+1)}{\gamma^3}$$

此兩式ヨリγ及pヲ求メ其結果ヨリaヲ算出シ得ベシ其公式下ノ如シ

$$\gamma=\frac{2\mu_2}{\mu_3}\quad\cdots\cdots(28)$$

$$p=\frac{4\mu_2^3}{\mu_3^2}-1\quad\cdots\cdots(29)$$

$$a=\frac{2\mu_2^2}{\mu_3}-\frac{\mu_3}{2\mu_2}\quad\cdots\cdots(30)$$

又偏度ハ

$$sk=\frac{\mu'_1-a}{\sqrt{\mu_2}}=\frac{\frac{p+1}{\gamma}-a}{\sqrt{\mu_2}}=\frac{1}{2}\ \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}\quad\cdots\cdots(31)$$

第四型

此型ハ頻度曲線ノ微分方程式

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\frac{x+a}{b_0+b_1x+b_2x^2}$$

ニ於ケル右邊ノ分母 $b_0+b_1x+b_2x^2$ ヲ其儘ニテ因子ニ分解スレバ必ズ複. 素數トナル場合ニ生ズ今之ヲ虛數ヲ生ゼザル樣ニ積分センガ爲メニ該方程式ニ

$$X=x+\frac{b_1}{2b_2},\qquad c=a-\frac{b_1}{2b_2},\qquad A^2=\frac{b_0}{b_2}-\frac{b_1^2}{4b_2^2}$$

ノ置換ヲ行フテ次ノ如キ形ニ變更スベシ

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dX}=\frac{X+c}{b_2(X^2+A^2)}$$

然ル後積分ヲ行フ事下ノ如シ

$$\log y=\int\frac{X+c}{b_2(X^2+A^2)}dX=\frac{1}{b_2}\int\frac{X}{X^2+A^2}dX+\frac{1}{b_2}\int\frac{c}{X^2+A^2}dX$$

$$=\frac{1}{2b_2}\log(X^2+A^2)+\frac{c}{Ab_2}\tan^{-1}\frac{X}{A}+c$$

$$\therefore\quad y=y'(X^2+A^2)^{\frac{1}{2b_2}}e^{\frac{c}{Ab_2}\tan^{-1}\frac{X}{A}}$$

即チ書キ換フレバ

$$y=y_0\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m}e^{-\nu\tan^{-1}\frac{x}{a}} \quad\cdots\cdots(32)$$

トナル但シ此式中ノaハ基本方程式(2)ニ於ケルaト全ク意味ヲ異ニス此場合基本方程式ノ右邊ノ分母ヲ直チニ因子ニ分解スレバ $b_2(x-iA_1)(x+iA_2)$ ノ如クナリ第一型ニ於ケルト同樣ノ形トナルモ複素式(Complex expression)ヲ含ムガ故ニ實際ニ適セズ

却說方程式(32)ニ含マルヽ各常數ヲ乘率ヲ以テ表ハサンガ爲メノ公式ヲ誘導セン

方程式(32)ニ於テ $\tan\theta=\frac{x}{a}$ 即チ $\theta=\tan^{-1}\frac{x}{a}$ ト置ケバ

$$\left\{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}^{-m}=(1+\tan^2\theta)^{-m}=(\sec^2\theta)^{-m}=\cos^{2m}\theta$$

ナルガ故ニ方程式(32)ハ次ノ如ク改メラル

$$y=y_0\cos^{2m}\theta e^{-\nu\theta}$$

方程式(32)ニヨリ此型ノ曲線ハ正負共ニ無限大迄擴リ居ルヲ以テ頻度ノ總計ヲNトスレバ

$$N=y_0\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{1+\frac{x^2}{a^2}\right\}^{-m}e^{-\nu\tan^{-1}\frac{x}{a}}dx$$

$$=y_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}\theta e^{-\nu\theta}\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=y_0a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^r\theta e^{-\nu\theta}d\theta$$

但シ　$r=2m-2$

今角 θ ノ餘角ヲ Φ トスレバNハ次式ニヨリ表ハサルベシ

$$N=y_0ae^{-\frac{1}{2}\nu\pi}\int_0^{\pi}\sin^r\Phi e^{\nu\Phi}d\Phi$$

此定積分ハ所謂G積分ニシテ普通ニ $G(r,\nu)$ ヲ以テ表ハサル即チ

$$N=y_0ae^{-\frac{1}{2}\nu\pi}G(r,\nu)$$

$$\therefore\quad y_0=\frac{N}{a}\,\frac{e^{\frac{1}{2}\nu\pi}}{G(r,\nu)}\quad\cdots\cdots(33)$$

次ニ原點ヲ通過スル縱軸ニ關スル第n次ノ乘率ハ下ノ如シ

$$\mu'_n=\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}yx^n dx$$

$$=\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}y_0x^n\left\{1+\frac{x^2}{a^2}\right\}^{-m}e^{-\nu\tan^{-1}\frac{x}{a}}dx$$

$$=\frac{y_0}{N}a^{n+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-2}\theta\tan^n\theta e^{-\nu\theta}d\theta$$

$$=\frac{y_0}{N}a^{n+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^{r-n}\theta\sin^n\theta e^{-\nu\theta}d\theta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

但シ　$r=2m-2$

$$=\frac{y_0}{N}a^{n+1}\Bigg[-\frac{\cos^{r-n+1}\theta\sin^{n-1}\theta e^{-\nu\theta}}{r-n+1}$$

$$-\int\left\{\frac{\cos^{r-n+1}\theta}{r-n+1}(\sin^{n-2}\theta\cos\theta e^{-\nu\theta}(n-1)-\nu e^{-\nu\theta}\sin^{n-1}\theta\right\}d\theta\Bigg]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

是 $\sin^{n-1}\theta e^{-\nu\theta}$ 及 $\cos^{r-n}\theta\sin\theta$ ノ兩部分ニ分チテ部分積分法 (Integration by Parts) ヲ行ヘルモノナリ　然ルニ θ ガ $\frac{\pi}{2}$ 或ハ $-\frac{\pi}{2}$ ノ時ニハ $\cos^{r-n+1}\theta\sin^{n-1}\theta e^{-\nu\theta}$ $=0$ ナルガ故ニ

$$\mu'_n=\frac{y_0a^{n+1}}{N(r-n+1)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left\{(n-1)\cos^{r-n+2}\theta\sin^{n-2}\theta e^{-\nu\theta}-\nu\cos^{r-n+1}\theta\sin^{n-1}\theta e^{-\nu\theta}\right\}d\theta$$

$$=\frac{a}{r-n+1}\left\{(n-1)a\mu'_{n-2}-\nu\mu'_{n-1}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

更ニ公式(34)ニヨリ

$$\mu'_1=\frac{y_0a^2}{N}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^r\theta\tan\theta e^{-\nu\theta}d\theta=\frac{-y_0a^2}{Nr}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\nu\cos^r\theta e^{-\nu\theta}d\theta$$

然ルニ　$N=y_0a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^r\theta e^{-\nu\theta}d\theta$ ナルヲ以テ

$$\mu'_1=-\frac{a\nu}{r}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

而シテ　$\mu'_0=1$ ナルヲ以テ公式(35)及(36)ニヨリ各次ノ乘率ヲ求メ得ベシ

即チ

$$\mu'_2=\frac{a^2}{r(r-1)}(r+\nu^2)$$

$$\mu'_3=\frac{a^3\nu}{r(r-1)(r-2)}(3r-2+\nu^2)$$

$$\mu'_4=\frac{a^4}{r(r-1)(r-2)(r-3)}\left\{3r(r-2)+\nu^2(6r-8)+\nu^4\right\}$$

次ニ算術平均點ヲ通過スル縦軸ニ關スル乘率ヲ求ムレバ原點ト算術平均點トノ距離ハ $\mu'_1=-\frac{a\nu}{r}$ ナルガ故ニ次ノ如シ

$$\mu_2=\frac{a^2}{r^2(r-1)}(r^2+\nu^2) \cdots\cdots(37)$$

$$\mu_3=\frac{4a^3\nu(r^2+\nu^2)}{r^3(r-1)(r-2)} \cdots\cdots(38)$$

$$\mu_4=\frac{3a^4(r^2+\nu^2)\{(r+6)(r^2+\nu^2)-8r^2\}}{r^4(r-1)(r-2)(r-3)} \cdots\cdots(38)$$

今 $\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$, $\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ ナル關係式ヲ利用シ簡單ノ爲 $r^2+\nu^2=z$ トスレバ下ノ兩式ヲ得ベシ

$$\frac{\beta_1(r-2)^2}{2(r-1)}=8-\frac{8r^2}{z}$$

$$\frac{\beta_2(r-2)(r-3)}{3(r-1)}-r=6-\frac{8r^2}{z}$$

從テ前式ヨリ後式ヲ減ズレバ

$$\frac{\beta_1(r-2)^2}{2(r-1)}-\frac{\beta_2(r-2)(r-3)}{3(r-1)}=2-r$$

トナル此式ノ兩邊ヲ $(r-2)$ ヲ以テ除シタル上分母ヲ拂ヒテ r ヲ求ムレバ

$$r=\frac{6(\beta_2-\beta_1-1)}{2(\beta_2-3\beta_1-6)} \cdots\cdots(40)$$

$$\therefore\ z=\frac{r^2}{1-\frac{\beta_1(r-2)^2}{16(r-1)}} \cdots\cdots(41)$$

然ルニ $\nu^2=z-r^2$ ナルガ故ニ

$$\nu=\frac{r(r-2)\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\{16(r-1)-\beta_1(r-2)^2\}}} \cdots\cdots(42)$$

$$\therefore\ a=\frac{r\sqrt{r-1}}{\sqrt{z}}\sqrt{\mu_2}=\frac{1}{4}\sqrt{\mu_2}\sqrt{\left\{16(r-1)-\beta_1(r-2)^2\right\}} \cdots\cdots(43)$$

次ニ型點即チ曲線ノ最高點ハ如何ナル位置ニアルヤト云フニ y ノ第一次微分商ノ零トナル點ヲ吟味スレバ可ナリ即チ

$$\frac{dy}{dx}=y_0\left\{1+\frac{x^2}{a^2}\right\}^{-(m+1)}e^{-\nu\tan^{-1}\frac{x}{a}}\left[-\frac{2mx}{a^2}-\frac{\nu}{a}\right]=0$$

ナルガ爲ニハ $x=-\infty$, $x=+\infty$ 及 $x=-\frac{\nu a}{2m}$ ナルヲ要ス而シテ其第二次微分商ハ $x=-\infty$ 及 $x=+\infty$ ニ於テハ尙零ナルモ $x=-\frac{\nu a}{2m}$ ニ於テハ負數トナルヲ知ル從テ此曲線ハ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ 迄廣ガリ $x=-\frac{\nu a}{2m}$ ニ於テ型點ヲ有スル事ヲ示ス算術平均點ノ位置ハ公式(36)ニヨリ $-\frac{a\nu}{r}$ ナルガ故ニ

$$\text{曲線ノ原點}=\text{算術平均値}+\frac{\nu a}{r}\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

$$\text{型點値}=\text{算術平均値}-\frac{1}{2}\ \frac{\mu_3(r-2)}{\mu_2(r+2)}\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

$$\text{偏度 sk}=\frac{1}{2}\sqrt{\beta_1}\ \frac{r-2}{r+2}\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

第五型

此型ニ於テハ $\kappa_2=1$ ニシテ二次方程式 $b_0+b_1x+b_2x^2=0$ ハ二個ノ相等シキ實根ヲ有スベキヲ以テ頻度曲線ヲ示ス微分方程式右邊ノ分母 $b_0+b_1x+b_2x^2$ ハ平方ニ開カルベキ形ナルヲ知ル據リテ

$$\log y=\frac{1}{b_2}\int\frac{x+a}{\left(x+\frac{b_1}{2b_2}\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{b_2}\left[\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b_1}{2b_2}\right)}+\int\frac{a-\frac{b_1}{2b_2}}{\left(x+\frac{b_1}{2b_2}\right)^2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{b_2}\log\left(x+\frac{b_1}{2b_2}\right)+\frac{a-\frac{b_1}{2b_2}}{b_2\left(x+\frac{b_1}{2b_2}\right)}+C$$

$$\therefore\quad y=y'\left(x+\frac{b_1}{2b_2}\right)^{\frac{1}{b_2}}e^{\frac{a-\frac{b_1}{2b_2}}{b_2\left(x+\frac{b_1}{2b_2}\right)}}$$

此ノ式ノ原點ヲ適當ナル位置ニ移シ常數ヲ簡單ナラシムレバ

$$y=y_0x^pe^{-\frac{\gamma}{x}}\cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

トナル　次ニ方程式(47)中ノ常數ヲ求ムル公式ヲ誘導スベシ方程式(47)ニ於テ $\frac{\gamma}{x}=z$ ト置ケバ頻度ノ總計Nハ

$$N=y_0\int_0^\infty e^{-z}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^p\frac{\gamma}{z^2}dz=y_0\gamma^{1-p}\Gamma(p-1)$$

(是後ニ述ブルガ如ク此曲線ハ 0 ヨリ∞迄廣ガリ居ルヲ以テナリ)

$$\therefore\quad y_0=\frac{N\gamma^{p-1}}{\Gamma(p-1)}\cdots\cdots(48)$$

同様ニシテ原點ニ關スル第 n 次ノ乘率ヲ求ムレバ

$$\mu'_n=\int_0^\infty e^{-\frac{\gamma}{x}}x^{n-p}dx=\frac{y_0}{N}\gamma^{n-p+1}\Gamma(p-n-1)$$

$$=\gamma^n\frac{\Gamma(p-n-1)}{\Gamma(p-1)}\cdots\cdots(49)$$

是ヨリΓ函數ノ性質 $\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)$ ヲ利用スルコトニヨリテ

$$\mu'_1=\frac{\gamma}{p-2}$$

$$\mu'_2=\frac{\gamma^2}{(p-2)(p-3)}$$

$$\mu'_3=\frac{\gamma^3}{(p-2)(p-3)(p-4)}$$

ヲ得從テ算術平均點ヲ通過スル縱軸ニ關スル乘率ハ

$$\mu_2=\frac{\gamma^2}{(p-2)^2(p-3)}\cdots\cdots(50)$$

$$\mu_3=\frac{4\gamma^3}{(p-2)^3(p-3)(p-4)}\cdots\cdots(51)$$

故ニ

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}=\frac{16(p-3)}{(p-4)^2}=\frac{16}{(p-4)^2}+\frac{16}{p-4}$$

$$(p-4)^2-\frac{16}{\beta_1}(p-4)-\frac{16}{\beta_1}=0\cdots\cdots(52)$$

式(50)ヨリγヲ求ムレバ

$$\gamma=(p-2)\sqrt{\mu_2(p-3)}\cdots\cdots(53)$$

此γノ數値ガ虚數トナラザルガ爲メニ方程式(52)ヲ解キテ得ル $(p-4)$ ハ正根ナルヲ要スルガ故ニ

$$p=4\left\{1+\frac{2+\sqrt{4+\beta_1}}{\beta_1}\right\}\cdots\cdots(54)$$

次ニ方程式(47)ニヨリテ表示セラルヽ曲線ノ形ヲ究メンガ爲ニ$\frac{dy}{dx}=0$ナル點ヲ吟味セン

即チ $\frac{dy}{dx}=y_0x^{-p-1}e^{-\frac{\gamma}{x}}\left\{-p+\frac{\gamma}{x}\right\}$

ハ $x=0$, $x=\infty$ 及 $x=\frac{\gamma}{p}$ ノ場合ニ零トナル而シテ0及∞ハ曲線ノ擴ル範圍ヲ示シ $\frac{\gamma}{p}$ ハ極大點即チ型點ヲ表ハス事ハ第二次微係數ヲ吟味スル事ニヨリテ明カナルベシ

要スルニ此型ノ曲線ニアリテハ算術平均點及型點ノ位置並ニ偏度ハ下ノ公式ニヨリテ與ヘラル

$$\text{算術平均値}-\text{原點}=\frac{\gamma}{p-2} \quad\cdots\cdots(55)$$

$$\text{算術平均値}-\text{型點値}=\frac{2}{p(p-2)} \quad\cdots\cdots(56)$$

式(56)ニ公式(53)ヲ應用スレバ偏度ヲ得即チ

$$sk=\frac{2\sqrt{p-3}}{p} \quad\cdots\cdots(57)$$

第六型

此型ハ $+\infty>\kappa_2>+1$ ナル場合ナルガ故ニ $b_0+b_1x+b_2x^2=0$ ノ兩根ハ同一符號ヲ有スベシ從テ其積分ハ下ノ如シ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x+a}{(x+A_1)(x+A_2)}=\frac{a-A_1}{A_2-A_1}\frac{1}{x+A_1}+\frac{a-A_2}{A_1-A_2}\frac{1}{x+A_2}$$

$$\therefore\ \log y=\frac{a-A_1}{A_2-A_1}\log(x+A_1)+\frac{a-A_2}{A_1-A_2}\log(x+A_2)+C$$

$$\therefore\ y=y'(x+A_1)^{\frac{a-A_1}{A_2-A_1}}(x+A_2)^{\frac{a-A_2}{A_1-A_2}}$$

今原點ヲ適當ナル位置ニ移シテ常數ヲ簡單ナラシムレバ次ノ形ニ書キ換ヘラル

$$y=y_0(x-a)^{q_2}x^{-q_1} \quad\cdots\cdots(58)$$

此方程式ノ形ニヨリテ直チニ知リ得ルガ如ク此曲線ハ $x=+a$ ヨリ $x=\infty$ 迄擴リ居ルヲ以テ頻度ノ總計ヲNトスレバ

$$N=\int_a^\infty y_0(x-a)^{q_2}x^{-q_1}$$

$$=y_0a^{q_2-q_1}\int\left(\frac{x}{a}-1\right)^{q_2}\left(\frac{x}{a}\right)^{q_1}dx$$

今此式ニ $\frac{x}{a}=\frac{1}{z}$ 即チ $dx=a\ z^{-2}dz$ ノ置換ヲ行ヘバ

$$N=y_0a^{q_2-q_1+1}\int_0^1(1-z)^{q_2}z^{q_1-q_2-2}dz=y_0a^{q_2-q_1+1}B(q_2+1,q_1-q_2-1)$$

$$\therefore\ y_0=\frac{N}{a^{q_2-q_1+1}B(q_2+1,q_1-q_2-1)}=\frac{N\Gamma(q_1)a^{q_1-q_2-1}}{\Gamma(q_2+1)\Gamma(q_1-q_2-1)}\cdots\cdots(59)$$

同様ニ原點ニ關スル第n次ノ乘率ヲ求ムル事次ノ如シ

$$\mu'_n=\frac{y_0}{Na^{q_1-q_2-n-1}}\ \frac{\Gamma(q_1-q_2-n-1)\Gamma(q_2+1)}{\Gamma(q_1-n)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(60)$$

式(60)ニ前ニ求メタル y_0 ノ値ヲ入レ $\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)$ ナル關係式ヲ利用スレバ

$$\mu'_1=\frac{a(q_1-1)}{q_1-q_2-2},\quad \mu'_2=\frac{a^2(q_1-1)(q_1-2)}{(q_1-q_2-2)(q_1-q_2-3)}$$

等ヲ得ベシ即チ之等ノ乘率ヲ求ムル式ヲ第一型曲線ニ於ケル μ'_1,μ'_2 等ヲ求ムル公式(第15頁參照)ト比較スルニ $a=b,\ m_1=-q_1,\ m_2=q_2$ トスレバ全ク同一ナルコトヲ知ル從テ常數算出ノ公式ハ第一型ニ於ケルト同様ナリ唯曲線ノ擴ル範圍ガ第一型ハ兩方ニ有限ナルニ反シ此型ハ一方ニ有限ニシテ他方ニ無限ナルノ差アルノミサレバ多少重複スル事アルベシト雖讀者ノ記憶ヲ新ニシ且通覽ニ便センガ爲本型ニ對スル公式ヲ一覽的ニ示スコト下ノ如シ

$$r=\frac{6(\beta_2-\beta_1-1)}{6+3\beta_1-2\beta_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

(之公式(17)ト同様ナリ)

$$\left.\begin{aligned}1+q_2&=-\frac{r}{2}-\frac{r(r+2)}{2}\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_1(r+2)^2+16(r+1)}}\\1-q_1&=-\frac{r}{2}+\frac{r(r+2)}{2}\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_1(r+2)^2+16(r+1)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(62)$$

此公式(62)ニ於ケル根號ノ前ノ符號ハ μ_3 ノ符號ニヨリテ左右セラルヽ所ニシテ μ_3 ガ正ナル時ニハ $1-q_1$ ニ對シテ正號 $1+q_2$ ニ對シテ負號ヲ取ル μ_3 ノ符號之ニ反スル時ハ根號ノ前ノ符號モ亦反對ナリ

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1(r+2)^2+16(r+1)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

$$\mathrm{sk}=\frac{1}{2}\sqrt{\beta_1}\frac{\mathrm{r}+2}{\mathrm{r}-2} \quad \cdots\cdots(64)$$

$$\text{原點}=\text{算術平均}-\frac{\mathrm{a}(\mathrm{q}_1-1)}{\mathrm{q}_1-\mathrm{q}_2-2} \quad \cdots\cdots(65)$$

$$\text{型點}=\text{算術平均}-\frac{1}{2}\frac{\mu_3}{\mu_2}\frac{\mathrm{r}+2}{\mathrm{r}-2} \quad \cdots\cdots(66)$$

此型ノ曲線ハ $+a$ ヨリ ∞ 迄擴リ居ル所ニシテ原點ハ起點ノ前ニアリトス

G 型

此型ハ從來 Gauß-Laplacian Normal Curve of Error トシテ一般ニ知ラレタル曲線ニシテ狹義ニ於テ蓋然曲線 (Probability Curve) ト稱セラルヽモノナルガ Karl Pearson 氏ノ有名ナル研究ニヨリ此曲線ハ所謂一般的頻度曲線ノ特別ナル一場合ニ過ギザルコト證明セラレタリ即チ $\kappa_2=0,\ \beta_1=0,\ \beta_2=3$ ナル時ニノミ此型ノ曲線ヲ生ズ而シテ Pearson 氏ハ是ヲ第零次偏曲線ト稱セル事既述ノ如シ(第 6 頁參照)此型ヲ示ス微分方程式ハ $b_1=0,\ b_2=0$ ナルガ故ニ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x+a}{b_0}$$

$$\therefore\quad \log y=\frac{x^2}{2b_0}+\frac{ax}{b_0}+C$$

$$\therefore\quad y=y'e^{\frac{(x+a)^2}{2b_0}}$$

今原點ヲ適當ナル位置ニ移シ且方程式(9)ニ於ケル前ノ符號ガ負ナル事ニ注意スレバ下ノ如キ普通ノ形ニ改メラル

$$y=y_0e^{-\frac{x^2}{c}} \quad \cdots\cdots(67)$$

此曲線ハ $+\infty$ ヨリ $-\infty$ 迄擴ガリ算術平均點(之ハ勿論原點及型點ト一致ス)ヲ通過スル y 軸ニ關シテ對稱ナリ

次ニ方程式(66)ニ於ケル常數ハ下ノ如クシテ求メラル

$$N=y_0\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{c}}dx$$

ニ於テ $\frac{x^2}{c}=z^2$ 或ハ $dx=\sqrt{c}\,dz$ ノ置換ヲ行ヘバ

$$N=y_0\sqrt{c}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=y_0\sqrt{c\pi}$$

但 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=2\int_{-0}^{+\infty}e^{-z^2}=\sqrt{\pi}$ （此證明ハ普通ノ積分學書ニ讓ル）

$$\therefore\ y_0=\frac{N}{\sqrt{c\pi}}\cdots\cdots(68)$$

更ニ c ヲ求メンガ爲メニハ

$$N=y_0\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{c}}dx=y_0\Big[xe^{-\frac{x^2}{c}}\Big]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{c}}dx$$

$$=\frac{2y_0}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{\frac{x^2}{c}}dx$$

然ルニ $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{c}}dx$ ハ算術平均點ニ關スル第二次ノ乘率ナルガ故ニ μ_2 ヲ以テ表出セラル據リテ

$$N=\frac{2N}{c}\mu_2$$

$$\therefore\ c=2\mu_2\cdots\cdots(69)$$

故ニ方程式(67)ハ次ノ如ク改メラル

$$y_0=\frac{N}{\sqrt{2\pi\mu_2}}\cdots\cdots(70)$$

第七型

是ハ $\kappa_2=0,\ \beta_1=0,\ \beta_2>3$ ナル場合ニ生ズ而シテ公式(32)及(24)ニヨリテ m 及 a^2 ハ負數トナルヲ知ル據テ第二型ニ對スル方程式(23)ヲ下ノ如ク書キ換ヘテ此型ノ曲線ニ對スル方程式ヲ得

$$y=y_0\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m}\cdots\cdots(71)$$

式中 m ノ計算ニハ公式(22)ヲ變形シタル

$$m=\frac{5\beta_2-9}{2(\beta_2-3)}\cdots\cdots(72)$$

ヲ用ヒ又 a^2 ハ公式(24)ヲ變形シタル

$$a^2=\frac{2\mu_2\beta_2}{\beta_2-3}\cdots\cdots(73)$$

ニヨリテ計算シ得ル所ナリ然レドモ此曲線ノ擴ル平面ハ虛數 (imaginary number) ノ平面ニシテ實數 (real number) ノ平面ニハ現ハレザルモノナリ即チ此曲線ハ $-ia$ ヨリ $+ia$ 迄擴リ居ルモノニシテ型點ニ於ケル縱距 y_0 ハ公式(25)中ノ a ヲ代リニ ia ヲ入レテ算出シ得ベシ即チ

$$y_0=\frac{N\Gamma(2m+2)}{ia2^{2m+1}\{\Gamma(m+1)\}^2}\cdots\cdots(74)$$

故ニ此型ハ實數ノミヲ取扱フ所ノ統計ニハ不必要ナリ

以上論ジ來レルガ如ク均一系ニ於ケル頻度曲線ハ各種ノ型ヨリナル勿論是ノミニテ未ダ完全ニ盡シタルモノニアラズトト雖 Karl Pearson 氏等ノ經驗ニヨレバ大概ノ場合ヲ說明スルニ充分ナリ勿論此以外ノ曲線ヲ用ヒザルベカラザル場合ノ屢々存スルハ既ニ述ベタルガ如シ然レドモ本論文ニ於テハ其必要認メラレザルガ故ニ之ヲ省略ス

次ニ是迄述ベ來リタル曲線ノ各型ヲ主トシテ κ_2 ノ大サニ關聯セシメテ一覽的ニ示ス事下ノ如シ

$\kappa_2=-\infty$		$\kappa_2=0$		$\kappa_2=+1$		$\kappa_2=+\infty$
	$\kappa_2<0$ 第一型		$+1>\kappa_2>0$ 第四型		$+\infty>\kappa_2>+1$ 第六型	
第三型 ($\kappa_1=0$)		G 型 ($\beta_2=3$) 第二型 ($\beta_2<3$) 第七型 ($\beta_2>3$)		第五型		第三型 ($\kappa_1=0$)

第三節　乘率法 (Method of Moments) ニヨル曲線決定法ノ大要

前節ニ述ベタル頻度曲線ニ於テ常數ヲ算出スルニ當リ常ニ乘率法ヲ採用セリ由テ之ガ大要ヲ玆ニ說明スルノ要アルベシ

此法ハ多數ノ實驗結果ヨリ實驗式中ノ常數ヲ定メ以テ曲線ヲ決定スルノ一方法トシテ學界ニ呈出セラレタルモノニシテ現今統計數學上廣ク用ヒラルヽモノナリ蓋シ此法ハ最小二乘法ニヨリ實驗式ヲ定ムル事不可能ナル如キ多數ノ場合ニモ能ク實用ニ供シ得ラルヽ曲線ヲ決定ス

ル所ノ組織的方法タルヲ失ハザルガ故ナリ

今一定ノ既知件(data)ノ系例ニ對シ實驗式或ハ曲線ヲ與ヘントスレバ其式ノ形ハ次ニ示ス方法ノ内何レカニヨリ既ニ定メラレアルヲ要ス

(一) 直接理論上決定セラルヽモノアリ

(二) 直接理論上確定セラレザルモ何等カ理論上ノ暗示ニ基キテ定メラルヽモノアリ

(三) 全ク實驗的ナルモ經驗上類似ノ場合ニ相當ノ恰適度 (Goodness of Fit) ヲ示スモノアリ

(四) 全ク未知函數ナル時ハ唯既知件ニ就キテ考究スル事ニヨリテノミ定ムルヲ要ス

今何レノ方法ニヨルニセヨ前提セラレタル函數ヲ

$$y=\Phi(x, c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots c_n) \cdots\cdots \text{(i)}$$

トシ自變數 x ノ變化スル範圍ノ間ニ對シ觀測セラレタル既知件ニ恰當スル樣ニ任意常數 (Arbitrary Constants) $c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots c_n$ ヲ決定セント欲ス是ガ爲方程式(i)ヲ Maclaurin's theorem ニヨリ展開スレバ

$$y=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{\underline{|2}}+a_3\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

(式中 $a_0=\Phi(0)$, $a_1=\Phi'(0)$, $a_2=\Phi''(0)$, $a_3=\Phi'''(0)$ $\cdots\cdots$)

トナル然ル時ハ a_0, a_1, a_2, a_3 等ハ任意常數 $c_1, c_2, c_3 \cdots\cdots c_n$ ノ函數ナリサレバ函數 Φ ノ形ハ既ニ定マリ居ルヲ以テ $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_{n-1}$ ヲ見出ス時ハ $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ ヲ決定スル事ヲ得ベシ而シテ $a_n, a_{n+1}, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\cdots$ ヲ $a_0, a_1, \cdots\cdots a_{n-1}$ ノ函數トナシ其關係ヲ

$$a_n=\Phi^n(a_0, \ a_1, \ a_2, \ \cdots\cdots a_{n-1})$$

$$a_{n+1}=\Phi^{n-1}(a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_{n+1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(但 Φ ノ右肩ニ記セル n, n+1 $\cdots\cdots$ ハ函數中ノ微分次數ヲ表ハスモノナリ)

ヲ以テ表ハス時ハ

$$y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}+\Phi^n\frac{x^n}{\underline{|n}}+\Phi^{n+1}\frac{x^{n+1}}{\underline{|n+1}}+\cdots\cdots\text{(ii)}$$

トナルベシ(簡單ノ爲函數Φノ括弧内ヲ省略セルナリ)

次ニ觀測ニヨリ與ヘラレタル既知件ノ系列ニ於テ任意ノxニ相當スル縱距ヲy'又前提セラレタル函數ニ於ケル夫ヲyトスレバ觀測値xノ點ニ於ケル偏差ハ$y-y'$ナリ吾人ハ式(ii)ニ於ケル$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_{n-1}$ヲ決定スルニ當リ此偏差$y-y'$ヲシテ可及的小ナラシメントス即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_{n-1}$ノ數値ヲ微量ニ變化セシメタル爲縱距$y$ニ起ル變化ヲ$\delta y$トスレバ

$$\int(y-y')\delta y\,dx=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

ナル如キ條件ノ下ニ$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_{n-1}$ヲ決定セントス然ルニ$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_{n-1}$ニ於ケル微量ノ變化ヲ$\delta\alpha_0, \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \cdots\cdots\delta\alpha_{n-1}$ヲ以テ表ハセバ

$$\begin{aligned}\delta y=&\delta\alpha_0+\delta\alpha_1x+\delta\alpha_2\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\delta\alpha_{n-1}\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}\\&+\left(\frac{d\Phi^n}{d\alpha_0}\delta\alpha_0+\frac{d\Phi^n}{d\alpha_1}\delta\alpha_1+\frac{d\Phi^n}{d\alpha_2}\delta\alpha_2+\cdots\cdots+\frac{d\Phi^n}{d\alpha_{n-1}}\delta\alpha_{n-1}\right)\frac{x^n}{\underline{|n}}\\&+\left(\frac{d\Phi^{n+1}}{d\alpha_0}\delta\alpha_0+\frac{d\Phi^{n+1}}{d\alpha_1}\delta\alpha_1+\frac{d\Phi^{n+1}}{d\alpha_2}\delta\alpha_2+\cdots\cdots+\frac{d\Phi^{n+1}}{d\alpha_{n-1}}\delta\alpha_{n-1}\right)\frac{x^{n+1}}{\underline{|n+1}}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\=&\delta\alpha_0\left(1+\frac{d\Phi^n}{d\alpha_0}\frac{x^n}{\underline{|n}}+\frac{d\Phi^{n+1}}{d\alpha_0}\frac{x^{n+1}}{\underline{|n+1}}+\cdots\cdots\right)\\&+\delta\alpha_1\left(x+\frac{d\Phi^n}{d\alpha_1}\frac{x^n}{\underline{|n}}+\frac{d\Phi^{n+1}}{d\alpha_1}\frac{x^{n+1}}{\underline{|n+1}}+\cdots\cdots\right)\\&+\delta\alpha_2\left(\frac{x^2}{1.2}+\frac{d\Phi^n}{d\alpha_2}\frac{x^n}{\underline{|n}}+\frac{d\Phi^{n+1}}{d\alpha_2}\frac{x^{n+1}}{\underline{|n+1}}+\cdots\cdots\right)\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\=&\delta\alpha_0\left\{1+\frac{d}{d\alpha_0}\left(\frac{x^n}{\underline{|n}}\Phi^n(\theta x)\right)\right\}\\&+\delta\alpha_1\left\{x+\frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{x^n}{\underline{|n}}\Phi^n(\theta x)\right)\right\}\\&+\delta\alpha_2\left\{\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{x^n}{\underline{|n}}\Phi^n(\theta x)\right)\right\}\end{aligned}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}$$

(但θハ0以上1以下ナル數ヲ示ス)

式(iv)ニ於ケル $\frac{x^n}{\lfloor n}\Phi^n(\theta x)$ ハ函數Φヲ Maclaurin ノ定理ニ從ヒ展開セル際ノ第n項後ノ剩餘(Remainder)ヲ示スモノニシテ之ヲRヲ以テ表ハス而シテ式(iv)ニヨルδyノ値ヲ式(iii)ニ置換スル時ハ

$$\left\{\int(y-y')\left(1+\frac{dR}{da_0}\right)dx\right\}\delta a_0$$

$$+\left\{\int(y-y')\left(x+\frac{dR}{da_1}\right)dx\right\}\delta a_1$$

$$+\left\{\int(y-y')\left(\frac{x}{1\cdot2}+\frac{dR}{da_2}\right)dx\right\}\delta a_2$$

$$+\left\{\int(y-y')\left(\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{dR}{da_3}\right)dx\right\}\delta a_3$$

$$+\left\{\int(y-y')\left(\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{dR}{da_4}\right)dx\right\}\delta a_4$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left\{\int(y-y')\left(\frac{x^{n-1}}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}+\frac{dR}{da_{n-1}}\right)dx\right\}\delta a_{n-1}$$

$$=0$$

トナル吾人ハ此條件ヲ滿足スル樣ニ任意ニ $a_0, a_1, \cdots\cdots a_{n-1}$ ヲ決定スレバ可ナリ即此條件式ハx及yノ値如何ニ拘ラズ滿足セザルベカラザルガ故ニ其各項ハ別々ニ零トナルヲ要ス從テ $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_{n-1}$ ヲ求ムルガ爲ニ次ノn個ノ方程式ヲ得

$$\int(y-y')\left(1+\frac{dR}{da_0}\right)dx=0$$

$$\int(y-y')\left(x+\frac{dR}{da_1}\right)dx=0$$

$$\int(y-y')\left(\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{dR}{da_2}\right)dx=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int(y-y')\left(\frac{x^{n-1}}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}+\frac{dR}{da_{n-1}}\right)dx=0$$

尙書キ換フレバ

$$\int y\,dx=\int y'dx-\int(y-y')\frac{dR}{d\alpha_0}dx$$

$$\int yx\,dx=\int y'x\,dx-\int(y-y')\frac{dR}{d\alpha_1}dx$$

$$\int yx^2dx=\int y'x^2dx-\underline{|2}\int(y-y')\frac{dR}{d\alpha_2}dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int yx^{n-1}dx=\int y'x^{n-1}dx-\underline{|n-1}\int(y-y')\frac{dR}{d\alpha_{n-1}}dx$$

今

$$A=\int y\,dx,\qquad A'=\int y'dx$$

$$A\mu_1=\int yx\,dx,\qquad A'\mu'_1=\int y'x\,dx$$

$$A\mu_2=\int yx^2dx,\qquad A'\mu'_2=\int y'x^2dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A\mu_{n-1}=\int yx^{n-1}dx,\qquad A'\mu'_{n-1}=\int y'x^{n-1}dx$$

トスレバ此關係式ハ

$$\left.\begin{aligned}A&=A'-\int(y-y')\frac{dR}{d\alpha_0}dx\\A\mu_1&=A'\mu'_1-\int(y-y')\frac{dR}{d\alpha_1}dx\\A\mu_2&=A'\mu'_2-\underline{|2}\int(y-y')\frac{dR}{d\alpha_2}dx\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\A\mu_{n-1}&=A'\mu'_{n-1}-\underline{|n-1}\int(y-y')\frac{dR}{d\alpha_{n-1}}dx\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{v})$$

偖式(v)中 $y-y'$ ハ小ナル數値ト見做スヲ得ベク且 $R=\frac{x^n}{\underline{|n}}\Phi^n(\theta x)$ ハ n ヲ增大スルニ從ヒ愈減少スベキヲ以テ是等ヲ含ム項ヲ省略スルモ可ナリ玆ニ於テ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_{n-1}$ ヲ求ムル爲下ノ如キ實用ニ供シ得ベキ n 個ノ方程式ヲ得

$$\left.\begin{aligned}A&=A'\\\mu_1&=\mu'_1\\&\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{vi})$$

$\mu_{n-1}=\mu'_{n-1}$

サレバ觀測ノ結果ヨリ得タル $A', \mu'_1, \mu'_2 \cdots\cdots \mu'_{n-1}$ ヲ前提セル曲線式(i)ニ於ケル常數 $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ ヲ以テ表ハシタル $A, \mu_1, \mu_2, \cdots\cdots\cdots \mu_{n-1}$ ト夫々相等シク置キテ得タル方程式ヨリ未知常數ヲ算出シ得ル所ナリ此 $\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots\cdots \mu_{n-1}$ 等ハ夫々第一次,第二次……第(n−1)次ノ乘率 (Mdments of 1st order, 2nd order, ……, (n−1)th order) ト稱セラル又Aハ曲線ノ當該部分及其兩端ニ於ケル y 軸及 x 軸ニヨリテ圍マルヽ面積ヲ表ハスモノナルガ乘率ト云フ語ヲ用フル時ハ第零次ノ乘率トモ稱セラル (μ_1, μ_2, 等ハ x ノ第一冪第二冪等ト y トノ相乘積ノ積分ヲ A 即第零次ノ乘率ヲ單位トシテ表出セルモノナリ) 上記ノ方法ニヨリ曲線ヲ決定スルヲ乘率法ト云フ以下此乘率法ヲ前節ニ述ベタル頻度曲線ニ應用スル方法ヲ論ゼン

先或一點ヨリ同一單位ヲ以テ計リタル各ノ x ノ値(之ヲ s ト稱ス)ニ對シ是ニ相當スル頻度 f ヲ觀測シ fs, fs^2, fs^3, fs^4 ヲ求ムルヲ要ス是前節ニ於テハ第四次迄ノ乘率ヲ用ヒタルガ故ナリ此 f, fs, fs^2, fs^3 及 fs^4 ノ總計ヲ求メ f ノ總計 N (是ハ前出ノ A ニ相當ス) ヲ以テ除シタルモノヲ頻度配分 (Erequency Distribution) ニ於ケル或一點ニ關シテノ統計的粗乘率 (unadjusted moments about a point) ト云フ今之ヲ ν'_0, ν'_1, ν'_2 等ヲ以テ表ハス時ハ ν'_1 ハ算術平均點ト此粗乘率ノ關スル點トノ距離 d ニ等シカルベシ次ニ算術平均點ニ關スル粗乘率ヲ ν_0, ν_1, ν_2 等ヲ以テ表ハセバ一般ニ下ノ關係アリ

$$\nu_n=\nu'_n-nd\nu'_{n-1}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}d^2\nu'_{n-2}- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(vii)}$$

而シテ又 $\nu_0=\nu'_0=\frac{N}{N}=1$ ナリ又算術平均點ニ關スル fs ノ總和ハ零ナリ

故ニ $\nu_1=0$

從テ此 n=2, 3, 4 ヲ挿入スル時ハ算術平均點ニ關スル第二次乃至第四次粗乘率ハ左ノ公式ニヨリテ與ヘラル

$$\left.\begin{aligned}\nu_2&=\nu'_2-d^2\\ \nu_3&=\nu'_3-3d\nu_2-d^3\\ \nu_4&=\nu'_4-4d\nu_3-6d^2\nu_2-d^4\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(viii)}$$

即任意ノ點ニ關スル粗乘率ν'_1, ν'_2, ν'_3及ν'_4ヲ知ル時ハν'_1ノ其點ト算術平均點トノ距離dヲ示スガ故ニ容易ニ其算術平均ヲ計算スル事ヲ得ベク又公式(viii)ニヨリテ算術平均點ニ關スル粗乘率ヲ容易ニ算出シ得ベシ統計ニ於テハ極メテ多數ノ材料ヲ取扱ハザルベカラザルガ故ニ普通ノ方法ニテ算術平均ヲ求メ此點ニ關スル乘率ヲ計算スルガ如キハ甚ダシク時間ト勞力トヲ空費スベキガ故ニ斯クノ如キ公式ハ極メテ必要ナリ尙其他ニモ算術平均ニ關スル粗乘率ヲ算出スル簡便法存セリト雖本論文ニハ必要ナラザルガ故ニ省略ス

以上ノ如クシテ算術平均點ニ關スル統計的粗乘率ヲ求メ得タルモ是ハ觀測セル結果ヲ直チニ用ヒテ計算セル乘率ナルガ故ニ是ヲ曲線式中ノ常數ヲ求ムル公式ニ適用スルハ時ハ不精密タルヲ免レズ玆ニ於テ統計的修正乘率(Statistical adjusted moment)ヲ求ムルノ要アリ此乘率修正法ヲ單ニ曲線決定法上ヨリ見レバ二種ノ場合ヲ考フルヲ得即下ノ如シ

1) 各横距毎ニ孤立セル縱距ノ系列ガ與ヘラレ夫等ノ諸點ニ最近接セル曲線ヲ求メントスル場合

2) 一定範圍ノ横距群內ニ屬スル面積ノ系列ガ與ヘラレ而モ夫等ノ面積ガ各横距群ノ中點ニ集中セルモノト假定シテ乘率ヲ求メ此系列ニ最近接セル曲線ヲ求メントスル場合

サレド本論文ニ於テハ各直徑階ニ屬スル本數ヲ測定セルモノニ應用セントスル場合ナルガ故ニ2)ノ修正法ヲ用ヒタリ從テ1)ニ就テハ之ヲ略シ2)ノ修正法ノミヲ略述セン

此場合ニy_xヲ横距xニ對スル頻度トスレバ横距XヨリX+n−1)迄ノ第t次粗乘率ノ和ハ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y_x X^t dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} y_x (X+1)^t dx + \cdots\cdots + \int_{n-1\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} y\,(X+n-1)^t dx \cdots\cdots \text{(ix)}$$

ヲ以テ表ハサルベシ何トナレバ横距Xニ相當スル群ノ面積ハ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y_x X^t dx$$

ニシテ横距(X+1)ニ相當スル群ノ面積ハ

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} y_x(X+1)^t dx \qquad \text{(以下之ニ準ズ)}$$

ナルベキガ故ナリ今此横距ノ各群毎ニ曲線ノ形ヲ次ノ方程式ヲ以テ表ハサルヽモノトス

$$y_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(x)}$$

然ル時ハ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y_x dx = a + \frac{c}{12} + \frac{e}{80} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(xi)}$$

而シテ方程式(x)ニ於テ $x=0, -1, +1, -2, +2$ ヲ當テハムレバ y_0, y_{-1}, y_1, y_{-2} 及 y_2 ノ間ニ次ノ關係ノ存スルヲ見ン

$$y_0 = a \qquad y_{-1} + y_1 = 2(a+c+e) \qquad y_{-2} + y_2 = 2(a+4c+16e)$$

而シテ今

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y_x dx = a + \frac{c}{12} + \frac{e}{80} \equiv hy_0 + k(y_{-1}+y_1) + l(y_{-2}+y_2)$$

ナリトスル時ハ

$$a + \frac{c}{12} + \frac{e}{80} \equiv ah + 2k(a+c+e) + 2l(a+4c+16e)$$

此兩邊ノ a, c 及 e ノ係數ハ夫々相等シカルベキガ故ニ h, k 及 l ヲ求ムル爲メ下ノ三方程式ヲ得

$$h + k + 2l = 1$$

$$2k + 8l = \frac{1}{12}$$

$$2k + 32l = \frac{i}{80}$$

是ヲ解ケバ

$$h = \frac{5178}{5760}, \qquad k = \frac{308}{5760}, \qquad l = \frac{17}{5760}$$

$$\therefore \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y_x dx = \frac{1}{5760}\left\{5178y_0 + 308(y_{-1}+y_1) - 17(y_{-2}+y_2)\right\} \cdots\cdots\cdots \text{(xii)}$$

今式(ix)ニ於テハ一定範圍ノ群内ニテハ y ハ等シキモノト見做サルヽガ故ニ $X+x=\xi$ (但 $x=0, 1, 2, \cdots\cdots n-1$) トスレバ第 t 次ノ粗乘率ハ一般ニ次ノ如キ項ヨリ成ルベシ

$$\frac{1}{5760}\left\{\cdots\cdots+\left[5178\xi^t+308\{(\xi-1)^t+(\xi+1)^t\}-17\{(\xi-2)^t+(\xi+2)^t\}\right]y_x+\cdots\right\}$$

即チ y ノ一般的係數ヲ計算スレバ

$$\frac{1}{5760}\left\{5760\xi^t+240t(t-1)\xi^{t-2}+3t(t-1)(t-2)(t-3)\xi^{t-4}+\cdots\cdots\right\}$$

トナル故ニ

$t=1$	ノ時ニハ	此係數ハ	ξ
$t=2$	〃	〃	$\xi^2+\frac{1}{12}$
$t=3$	〃	〃	$\xi^3+\frac{1}{4}\xi$
$t=4$	〃	〃	$\xi^4+\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{80}$

斯クシテ求メタル粗乘率ヲ曲線上ノ乘率ナル

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(X+x)^t y_x dx$$

ト比較スル時ハ乘率ノ修正値ヲ得ル所ナリ若シ統計結果ノ兩端附近ニ於テ頻度ガ著シク減少シ全ク消失スル前ニ x 軸ニ密接スル如キ傾向ヲ示ス場合(之ヲ數學的ニ解スレバ最初ノ數次ノ微分商 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 等ガ零トナル事ニシテ幾何學上ハ數個ノ連續セル接點ヲ有スルノ意ナリ以後カヽル場合ヲ「高級接點ヲ有ス」ト稱ス)ニハ縱距ハ修正スルヲ要セザルヲ以テ粗乘率ヲ ν 修正乘率ヲ μ トスレバ μ_2, μ_3, μ_4 ハ次式ニヨリ求メラル

$$\left.\begin{array}{lll}\mu_2+\frac{1}{12} & \text{即} & \mu_2=\nu_2-\frac{1}{12}\\ \mu_4+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{1}{80} & \text{即} & \mu_4=\nu_4-\frac{1}{2}\nu_2+\frac{7}{240}\\ \mu_3+\frac{1}{4}\mu_1=\nu_3 & \text{即} & \mu_3=\nu_3 \quad (\because \mu_1=0)\end{array}\right\}\cdots\cdots(\text{xiii})$$

此修正法ハ最初 W. F. Sheppard 氏ニヨリテ發表セラレタルモノ(參考書9, 19, 及20)ナレバ Sheppard 氏修正法 (Sheppard's Correction) ノ名ヲ以テ知ラル是曲線ノ兩端ニ於テ高級接點ヲ有スルモノト見做セル場合ニハ屢々用ヒラルヽ所ナルモ然ラザル場合ニハ修正法困難ナリ高級接點ヲ有セザ

ル場合ノ修正法トシテ多少提出セラレタルモノアリト雖寧ロカヽル場合ニハ特別ナル例ヲ除ク外修正ヲ施サズシテ用フルニ如カズ

既ニ述ベタルガ如ク $\mu_1=0$, $\mu_0=1$ ナルヲ以テ以上ノ方法ニヨリ μ_2, μ_3 及 μ_4 ヲ求ムレバ茲ニ算術平均點ニ關スル第四次迄ノ乘率ヲ知リ得ベシ又第二節ニ論ジタルガ如ク Pearson 氏頻度曲線ヲ決定センニハ此乘率ノ函數タル

$$\left.\begin{aligned}\beta_1&=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}\\ \beta_2&=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{xiv})$$

ヲ算出スルヲ要ス

第四節　頻度曲線ニ於ケル各種常數ニ伴フ蓋然誤差及蓋然楕圓形

以上兩節ニ亘リテ頻度曲線ノ理論及之ヲ實際ニ應用スルノ方法ヲ概論シタルガ更ニ進ミテ其算出セル常數ニ伴フ所ノ蓋然誤差(Probable error)ヲ考究セザルベカラズ蓋是ニヨリテ偶然ノ材料選擇(Random sampling)ニヨリテ各種常數ニ伴ヒ起ル誤差關係ヲ明示シ從テ夫等常數ノ確カラシサヲ定メ得ル所ナリ而シテ變數一個ナル場合ニハ蓋然誤差（本論文ニ於テハ之ヲ m ヲ以テ表ハシ其右方ノ下ニ記セル文字ハ如何ナル常數ノ誤差ナルヤヲ示ス）ハ標準偏差（Standard deviation 若クハ mean error, 二乘平均誤差トモ云フ本論文ニ於テハ材料ノ標準偏差ヲ σ ニテ表ハシ其他ノ常數ノ夫ハ Σ ヲ以テ示シ其常數ノ種類ハ其右下ニ記セル文字ニテ示ス）ニ常數 $0.67448985 \fallingdotseq 0.67449$ ヲ乘ジテ計算セラルヽハ最小二乘法ヲ學バレタル讀者ハ熟知セラルヽ事ナルベシ即チ算術平均値 h ノ蓋然誤差ハ供試材料ノ總數ヲ N トスレバ

$$m_h 0.67449\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{xv})$$

更ニ算術平均點ニ關シテ取リタル第 q 次ノ乘率 μ_q ノ蓋然誤差ハ

$$m_{\mu_q}=0.67449\sqrt{\frac{\mu_{2q}-\mu_q^2-2q\mu_{q+1}\mu_{q-1}+q^2\sigma^2\mu_{q-1}^2}{N}}^{*)}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{xvi})$$

ニヨリテ與ヘラル因テ今(xvi)式ニ於テ $q=2$ トスレバ

$$m_{\mu_2}=0.67449\sqrt{\frac{\mu_4-\mu_2^2}{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{xvii})$$

又 $q=3$ トスレバ

$$m_{\mu_3}=0.67449\sqrt{\frac{\mu_6-\mu_3^2-6\mu_4\mu_2+9\mu_2^3}{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{xviii})$$

又 $q=4$ トスレバ

$$m_{\mu_4}=0.67449\sqrt{\frac{\mu_8-\mu_4^2-8\mu_5\mu_3+16\mu_2\mu_3^2}{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{xix})$$

ニヨリテ與ヘラル

然ルニ正曲線ノ場合ニハ微分方程式(2)ニ於ケル右邊ノ分母中 b_0 以外ノ項ハ消滅スルヲ以テ式(5′)ニヨリテ各次ノ乘率ハ次ノ關係ニアルコトヲ知ル

---

*) 之ガ證明ハ次ノ如シ

$$n\mu_q=S\{(x_s-h)^q y_s\}$$
$$=n\left(\mu'_q-qh\mu'_{q-1}+\frac{q(q-1)}{1\cdot2}h^2\mu'_{q-2}+\cdots\cdots\right)$$

或ハ $\quad \mu_q=\mu'_q-qh\mu'_{q-1}+h^2\varkappa$

式中 $\quad n\mu'_q=Sx_s^q y_s$

$\varkappa=q, h$ 及 μ'_{q-2}, μ'_{q-3} 等ノ函數

故ニ $\delta\mu_q=\delta\mu'_q-qh\,\delta\mu'_{q-1}-\delta h(q\mu'_{q-1}+2h\varkappa)+(h^2$ 及夫ヨリ高羃ノ諸項) 斯クシテ若シ h ヲ次第ニ小ナラシメ終ニ 0 ニ違セシムル時ハ x ヲ測定スル基準點ハ材料ノ算術平均點ト一致スルニ至ル此極限ニ於テハ h ノ微小ナル變化 δh ハ存スルモ h ヲ含ム項ハ消失スベシ故ニ前式ハ次ノ如クナル

$$\delta\mu_q=\delta\mu'_q-q\delta h\mu'_{q-1}+(h\text{ト共ニ消失スル諸項})$$

從テ $\quad \delta\mu_q^2=\delta\mu'^2_q+q^2\delta h^2\mu'^2_{q-1}-2q\mu'_{q-1}\delta h\delta\mu'_q+(h\text{ト共ニ消失スル諸項})$

$$\therefore\quad \Sigma^2_{\mu_q}=\Sigma^2_{\mu'_q}+q^2\Sigma^2_h\mu'_{q-1}-2q\mu'_{q-1}\Sigma_h\Sigma_{\mu'_q}R_{h\mu'_q}+(h\text{ヲ含ム諸項})$$

然ルニ $\quad \Sigma^2_{\mu'_q}=\frac{\mu'_{2q}-\mu'^2_q}{N};\quad h=\frac{\sigma}{\sqrt{N}};\quad \Sigma_{\mu'_q}\Sigma_h R_{h\mu'_q}=\frac{\mu'_{q+1}-h\mu'_q}{N}$

ナルガ故ニ

$$\Sigma^2_{\mu_q}=\frac{\mu'_{2q}-\mu'^2_q+q^2\sigma^2\mu'_{q-1}-2q\mu'_{q-1}\mu'_{q+1}+(h\text{ヲ含ム諸項})}{N}$$

此式ニ $h=0$ トシ $\mu'_i=\mu_i$ トスレバ本文ノ公式ヲ得ベシ

$a=0$

$\mu_2=-b_0$

$\mu_3=0$

$\mu_4=-3\mu_2 b_0=3\mu_2\mu_2$

$\mu_5=-4\mu_3 b_0=0$

即チ一般ニ $\mu_{2s+1}=0$；$\mu_{2s}=(2s-1)\mu_{2s-2}\mu_2$ 故ニ此場合各次ノ乘率ノ標準偏差ハ μ_2 ヲ合ム相乘積ニ改算シ得ベシ從テ正曲線ノ場合ニ於ケル乘率ノ變動步合 (Percentage Variability) $\frac{100\Sigma\mu_s}{\mu_s}$ ヲ計算スル事容易ナルベシ今 μ_2, μ_4, μ_6 及 μ_8 ニ對スルモノヲ N=1000 及 500 ノ場合ニ就キ掲グレバ次ノ如シ

乘　率	N=500	N=1000
μ_2	6.3	4.5
μ_4	14.6	10.3
μ_6	30.1	21.3
μ_8	60.6	42.9

此表ニヨリテ見ルモ高次ノ乘率ノ變動步合ハ次數ト共ニ著シク增加スル事ヲ推知シ得ベシ更ニ β 常數ノ變動步合ヲ掲グレバ次ノ如シ

β 常數	N=500	N=1000
$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$	7.3	5.2
$\beta_4=\frac{\mu_6}{\mu_2^3}$	23.3	16.5
$\mu_6=\frac{\mu_8}{\mu_2^4}$	55.1	39.0

是亦其增加速度著シク大ナルコトヲ示ス此高次ノ乘率ニ伴フ所ノ變動步合增加ノ速度大ナルコトハ普通ノ統計ニ於テ μ_4 ヨリモ高次ノ乘率ヲ用フルコトノ不必要ナル所以ナリ（モトヨリNヲ著シク增加スレバ變動步合モ小トナルハ明カナリ）

次ニ吾人ハ頻度曲線ノ研究ニ於テ算術平均値h及各次ノ乘率 (μ_2, μ_3 μ_q ……）ノ函數（一般ニ Ci ト名ヅク）ノ蓋然誤差及任意ノ二常數間ノ相

關率ヲ知ルヲ要ス

今任意ノ常數ヲ Ci トスレバ之ハ算術平均値及各次ノ乘率ノ函數ナリ

即チ　$Ci=\Phi(h, \mu_2, \mu_3, \cdots\cdots\cdots\mu_q\cdots\cdots\cdots)$

普通ニ誤差ハ之ヲ生ズル原量ニ比シテ小ナリト考ヘ得ルガ故ニ

$$\delta_{Ci}=\Phi_h\delta_h+\Phi\mu_2\delta\mu_2+\Phi\mu_3\delta\mu_3+\cdots\cdots\cdots$$

式中 $\Phi_h, \Phi\mu_2, \Phi\mu_3\cdots\cdots\cdots$ ハ函數 Φ ヲ夫々接尾文字 $(h, \mu_2, \mu_3, \cdots\cdots\cdots$ 等) ニテ表ハセル量ニ關シテ微分セル式ヲ示ス然ルニ Φ 及 $h, \mu_2, \mu_3\cdots\cdots\mu_q\cdots\cdots$ ハ定マリ居ルヲ以テ $\Phi_h, \Phi\mu_2, \Phi\mu_3, \cdots\cdots\Phi\mu_q\cdots\cdots$ ハ既知量ナリ今之ヲ夫々 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\cdots\cdots\cdots$ ナル文字ニテ表ハセバ

$$\delta Ci=\lambda_1\delta h+\lambda_2\delta\mu_2+\lambda_3\delta\mu_3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

今此兩邊ヲ二乘シテ相加ヘ供試材料ノ總數ヲ以テ除スレバ

$$\begin{aligned}\Sigma^2_{Ci} &= \lambda_1^2\Sigma^2_h+\lambda_2^2\Sigma^2_{\mu_2}+\lambda_3^2\Sigma^2_{\mu_3}+\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad +2\lambda_1\lambda_2\Sigma_h\Sigma\mu_2 R_{h\mu_2}+2\lambda_1\lambda_3\Sigma_h\Sigma\mu_3 R_{h\mu_3}+\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad +2\lambda_2\lambda_3\Sigma\mu_2\Sigma\mu_3 R\mu_2\mu_3+\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \lambda_1^2\Sigma^2_h\lambda+S(\lambda_q^2\Sigma^2_{\mu_q}) \\ &\quad +2\lambda_1\Sigma_h S(\lambda_q\Sigma\mu_q R_{h\mu_q}) \\ &\quad +2S'(\lambda_q\lambda_{q'}\Sigma\mu_q\Sigma\mu_{q'}R\mu_q\mu_{q'}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(xx)\end{aligned}$$

但 S 及 S′ ハ何レモ括弧内ノ量ノ總和ヲ示スト雖前者ハ之ヲ構成スル各項ガ同一項 (例ヘバ第 q 次) ノ乘率ニノミ關係スルモノニ反シ後者ハ二個ノ異ナル次數 (例ヘバ第 q 次ト第 q′ 次ト云フガ如シ) ノ乘率ニ關係セル量ノ乘積ヨリ成ルガ故ニ特ニ之ヲ明瞭ナラシムルガ爲符合「′」ヲ以テ區別セルナリ

次ニ任意ノ二常數 Ci, Ci' 間ノ相關率ヲ $R_{Ci Ci'}$ トスレバ

$$\begin{aligned}\delta_{Ci}\delta_{Ci'} &= \lambda_1\lambda'_1\delta h^2+S\{(\lambda_q\lambda'_1+\lambda'_q\lambda_1)\delta h\delta\mu_q\} \\ &\quad +S(\lambda_q\lambda'_q\delta^2\mu_q) \\ &\quad +'\{(\lambda_q\lambda'_q+\lambda'_q\lambda_{q'})\delta\mu_q\delta\mu_{q'}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \Sigma_{Ci}\Sigma_{Ci'}R_{CiCi'} &= \lambda_1\lambda'_1\Sigma^2_h+S(\lambda_q\lambda'_q\Sigma^2_{\mu_q}) \\ &\quad +S\{(\lambda_q\lambda'_q+\lambda'_q\lambda_1)\Sigma_h\Sigma\mu_q R_{h\mu_q}\}\end{aligned}$$

$$+2S'\{(\lambda_q\lambda'_{q'}+\lambda'_q\lambda_{q'})\Sigma\mu_q\Sigma\mu_{q'}R\mu_q\mu_{q'}\} \cdots\cdots\cdots(xxi)$$

斯クノ如ク式(xx)ニヨリテ算術平均値及乘率ノ函數タル任意ノ常數ノ蓋然誤差ヲ求メ得ベシト雖其計算ハ甚ダ煩勞ナリト云ハザルベカラズ是公式(xix)ニヨリテ明カナルガ如ク本論文ニ必要ナル第四次迄ノ乘率ニ對スル蓋然誤差算出ニ當リテモ第八次迄ノ乘率ヲ要スルヲ見テモ知ラルベシ即チ前出 β_1 及 β_2 ノ蓋然誤差ハ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ *) ヲ含ム所ノ或數式トシテ示サルベキナリ而シテ參考書10ノ第三十七表及第三十八表ニハ之等ノ數式ヨリ計算セル $\sqrt{N}\Sigma_{\beta_1}$ 及 $\sqrt{N}\Sigma_{\beta_2}$ **) ヲ揭ゲアリ

サレバ此表ヲ利用スレバ β_1, β_2 ノ蓋然誤差ハ夫々

$$m_{\beta_1}=0.67448985\Sigma_{\beta_1} \cdots\cdots\cdots(xxii)$$

$$m_{\beta_2}=0.67448985\Sigma_{\beta_2} \cdots\cdots\cdots(xxiii)$$

ニヨリテ算出セラル

其他型點ト算術平均點トノ距離及偏度ノ如キ常數ノ標準偏差モ一般的公式(xx)ノ應用ニヨリテ求メ得ラルヽモ是亦參考書10ノ第四十表及第四十一表ニ揭ゲラル又統計材料ノ標準偏差 σ ノ蓋然誤差ハ式(xvii)ニ

---

*) $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ ハβ常數ト稱セラレ乘率ノ函數ナリ而シテ其形ハ次ノ如シ

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3},\quad \beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2},\quad \beta_3=\frac{\mu_3\mu_5}{\mu_2^4},\quad \beta_4=\frac{\mu_6}{\mu_2^3},\quad \beta_5=\frac{\mu_7\mu_3}{\mu_2^5},\quad \beta_6=\frac{\mu_8}{\mu_2^4}$$

而シテ頻度配分關係ガ Pearson 氏ノ頻度曲線式ノ何レカノ型ニ屬スルモノト前提スレバ此β常數ハ β_1 及 β_2 ノ函數トナリ次ノ公式ニヨリテ算出セラル

$$\beta_{n(\text{nガ偶數})}=(n+1)\frac{\{\frac{1}{2}\beta_{n-1}+(1+\frac{1}{2}\alpha)\beta_{n-2}\}}{\{1-\frac{1}{2}(n-1)\alpha\}}$$

$$\beta_{n(\text{nガ奇數})}=(n+1)\frac{\{\frac{1}{2}\beta_1\beta_{n-1}+(1+\frac{1}{2}\alpha)\beta_{n-2}\}}{\{1-\frac{1}{2}(n-1)\alpha\}}$$

但　$$\alpha=\frac{2\beta_2-3\beta_1-6}{\beta_2+3}$$

此式ニヨリ計算セルモノハモトヨリ既知件其自身ヨリ直接ニ計算セルモノニアラズト雖 $\mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8$ ニ伴フ蓋然誤差ノ大ナルコトヲ考フレバ其合理的近眞値ト見做スモ差支無キ結果ヲ得ベシ參考書10第四十二表(a)—(d)ニハ $\beta_3, \beta_4, \beta_5$ 及 β_6 ノ値ヲ β_1 及 β_2 ニ關係セシメテ揭載セラル從テ $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots\cdots\beta_6$ ノ函數ハ又 β_1, β_2 ノ函數トシテ表ハサルベキナリ

**) 標準偏差ハ前述ノ如ク供試材料ノ總數Nニ關係スル所ナルモ之ニ $\sqrt{N}$ ヲ乘ズレバ供試個數ノ如何ニ無關係トナリ得ルヲ以テ $\sqrt{N}\Sigma$ ヲ揭ゲラルヽ所ナリ

於テ正曲線タルノ條件

$$\beta_2=3 \quad 即チ \quad \mu_4=3\mu_2^2$$

ヲ適用シ且 $\sigma=\sqrt{\mu_2}$ ナル事ニ注意スレバ得ラルベシ蓋偶然撰擇 (Random sampling) ニヨル誤差ハ正曲線即チ Gauß ノ誤差法則ニ從フト見做シ得ルノ理由存スレバナリサレバ σ ノ蓋然誤差ハ

$$m_\sigma=0.67448985\sqrt{\frac{1}{2N}}\sigma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (xxiv)$$

ニヨリ計算セラル

次ニ曲線型ノ決定條件タル κ_1, κ_2 ノ蓋然誤差ヲモ求ムルノ要アリ何レモ公式(xx)及(xxi)ノ應用ニヨリテ求メラルヽ所ナリサレド κ_2 ノ標準偏差ハ參考書10ノ第四十三表ニ揭ゲラルヽ $\sqrt{N}\Sigma_{\kappa_2}$ ニヨリ求メ得ラル κ_1 ノ標準偏差ハ表ニ揭ゲラレザルモ $R_{\beta_1\beta_2}$ ハ參考書10ノ第三十九表ニ揭ゲラルヽガ故ニ次式ニヨリテ計算セラル

$$(\sqrt{N}\Sigma_{\kappa_1})^2=4(\sqrt{N}\Sigma_{\beta_2})^2+9(\sqrt{N}\Sigma_{\beta_1})-12(\sqrt{N}\Sigma_{\beta_1})R_{\beta_1\beta_2} \cdots\cdots (xxv)$$

$R_{\beta_1\beta_2}$ ハ β_1 ニ於ケル偏差及 β_2 ニ於ケル偏差ノ相關率ニシテ一般公式(xxi)ニヨリテ求メ得ラルヽモノナリ是ハ公式(xx)ニヨリテ明カナル如ク β_1 及 β_2 ノ函數タル總テノ常數ノ標準偏差ヲ求ムルニ當リ必要ナルモノトス

更ニ第二節所論ノ頻度曲線ハ互ニ相關セル二個ノ量 β_1, β_2 ニヨリテ決定セラルヽ所ナルガ故ニ此二個ノ量ノ偏異區域ニ關シテ考フルヲ要ス即チ β_1 及 β_2 ヲ二個ノ變數ト見做ス時ハ一ノ規正的(normal)相關面

$$z=\frac{N}{2\pi\Sigma_{\beta_1}\Sigma_{\beta_2}\sqrt{1-R_{\beta_1\beta_2}^2}}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

$$式中 \qquad \chi^2=\frac{1}{1-R_{\beta_1\beta_2}^2}\left(\frac{\beta_1^2}{\Sigma_{\beta_1}^2}+\frac{\beta_2^2}{\Sigma_{\beta_2}^2}-\frac{2R_{\beta_1\beta_2}\beta_1\beta_2}{\Sigma_{\beta_1}\Sigma_{\beta_2}}\right)$$

ヲ構成ス即 z ニ常數ヲ當テハムル時ハ $\chi^2=$常數 トナリテ一ノ橢圓形トナル從テ此相關面上ノ各點ヨリ坐標軸 β_1, β_2 ノ平面ニ射影シテ生ジタル圖形ハ位置形狀共ニ相等シキ多數ノ同心橢圓形トナル而シテ此橢圓形ノ大サハ偶然撰擇 (Random sampling) ニヨリテ β_1, β_2 ニ生ズル偏差ガ此

楕圓形ノ外ニ出デザル確カラシサニヨリテ定マル即此楕圓形ノ大ナル程此確カラシサ大ナリ吾人ハ此確カラシサノ$\frac{1}{2}$ナル楕圓形ヲ蓋然楕圓形(Probability Ellipse)ト稱ス故ニ蓋然楕圓形ヲ描ク時ハβ_1, β_2ハ種々ニ偏異スルモ總頻度ノ$\frac{1}{2}$ハ此楕形上又ハ其内ニ入ルモノナリサレバ蓋然楕圓形ハ第二節所論ノ方法ニヨリ曲線型ヲ決定スル際殊ニ兩型ノ限界線ニ近キ時ニ於テ或型ニ屬スル確カラシサヲ判定シ其型ヲ採用スベキコトヲ決定スルガ爲ニ屢々用ヒラル

此蓋然楕圓形ハ勿論點(β_1, β_2)ヲ中心トスル所ナルガ故ニ是ヲ描カンガ爲ニハ主軸ノ方向ト長短兩徑ノ大サヲ知ルヲ要ス

(一) 蓋然楕圓形ニ於ケル主軸ノ方向

$\beta_1=0$ナル時ハβ_2ノ偏差トβ_1ノ偏差トノ間ニハ關係無キガ故ニ$R_{\beta_1\beta_2}=0$ナリ此場合ニハ楕圓形ノ主軸ノ方向ハ軸β_2ノ方向ナリ然ルニβ_2及β_1ガ皆一定ノ値ヲ有スル時ハ$R_{\beta_2\beta_1} \neq 0$ナリ從テ軸$\beta_1$ノ方向ト或角度$\theta$ヲナス今此角$\theta$ヲ求ムル時ハ主軸ノ方向ヲ確定スルコトヲ得ベシ先此楕圓形上ノ各點ヲ軸β_1及軸β_2ニ關スル坐標ヲ以テ表ハシタルモノヲ(X, Y)トシ軸β_1ニ對シテ長軸ガ角θ丈ケ廻轉シタルモノトスレバ新坐標軸ニ關スル各點ノ坐標x, yハ次ノ式ニヨリテ與ヘラルベシ

$$x=\mathrm{X}\cos\theta-\mathrm{Y}\sin\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{イ})$$

$$y=\mathrm{Y}\cos\theta+\mathrm{X}\sin\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ロ})$$

然ルニ變數x, yノ間ニハ相關率零ナルベキガ故ニ$\mathrm{S}(xy)=0$ (Sハ總和ヲ示ス以下之ニ從フ)ナルヲ以テ(イ)(ロ)兩式ヲ互ニ乘ジテ相加フレバ

$$0=2\mathrm{XY}(\cos^2\theta-\sin^2\theta+2(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2)\cos\theta\sin\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ハ})$$

又 $\mathrm{S}(\mathrm{Y}^2)=\Sigma^2_{\beta_2}$, $\mathrm{S}(\mathrm{X}^2)=\Sigma^2_{\beta_1}$, $\mathrm{S}(\mathrm{XY})=\mathrm{R}_{\beta_1\beta_2}\Sigma_{\beta_1}\Sigma_{\beta_2}$ ナルヲ以テ

$$0=2\mathrm{R}_{\beta_1\beta_2}\Sigma_{\beta_1\beta_2}\cos2\theta+(\Sigma^2_{\beta_1}-\Sigma^2_{\beta_2})\sin2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ニ})$$

$$\therefore\quad \tan2\theta=\frac{2\mathrm{R}_{\beta_1\beta_2}\Sigma_{\beta_1}\Sigma_{\beta_2}}{\Sigma^2_{\beta_2}-\Sigma^2_{\beta_1}} \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ホ})$$

此式(ホ)ニヨル角θハ軸β_1ト楕圓形ノ長軸トナス角ナルガ故ニ之ニ90ヲ加フル時ハ軸β_2ト楕圓形ノ長軸トナス角ヲ得ベシ即チ此角度ハ$\Sigma_{\beta_1} \neq \Sigma_{\beta_2}$

及 $R_{\beta_1\beta_2}$ ニヨリテ定マル所ニシテ之等ハ又 β_1 及 β_2 ノ大サニヨリ定マル此角度ノ概略ノ値ハ參考書10ノ第四十六表ニ揭ゲラル

(二) 蓋然楕圓形ニ於ケル長短兩徑ノ長サ

前ニ揭ゲタル β_1 及 β_2 ヲ以テ構成セラルヽ規正的相關面上ノ同高點ノ射影ニヨリテ描カルヽ楕圓形(Contour-ellipses)ノ兩主軸ニ關スル標準偏差 Σ_1 及 Σ_2 ハ楕圓形

$$1=\frac{1}{1-R^2_{\beta_1\beta_2}}\left(\frac{\beta_1^2}{\Sigma^2_{\beta_1}}+\frac{\beta_2^2}{\Sigma^2_{\beta_2}}-\frac{2R_{\beta_1\beta_2}\beta_1\beta_2}{\Sigma_{\beta_1}\Sigma_{\beta_2}}\right)$$

ノ長短兩半徑ヲナスモノナリ此 Σ_1 及 Σ_2 ハ下ノ如クシテ算出セラル

今(イ)(ロ)兩式ヲ二乘シテ相加ヘ其各點ニ關スルモノヲ總計スレバ

$$\Sigma_1^2+\Sigma_2^2=\Sigma^2_{\beta_1}+\Sigma^2_{\beta_2}\cdots\cdots(\text{ヘ})$$

ヲ得次ニ此楕圓形ノ短軸ハ β_1 及 β_2 ヲ坐標軸トスル場合ニハ

$$y_{\beta_1\beta_2}=\frac{N}{2\pi\Sigma_{\beta_1}\Sigma_{\beta_2}\sqrt{(1-R^2_{\beta_1\beta_2})}}\cdots\cdots(\text{ト})$$

又此楕圓形ノ主軸ヲ坐標軸トスル場合ニハ相關率零ナルガ故ニ

$$y_{\beta_1\beta_2}=\frac{N}{2\pi\Sigma_1\Sigma_1}\cdots\cdots(\text{チ})$$

(ト)(チ)兩式ニヨリテ

$$\Sigma_1\Sigma_2=\Sigma_{\beta_1}\Sigma_{\beta_2}\sqrt{(1-R^2_{\beta_1\beta_2})}\cdots\cdots(\text{リ})$$

兩方程式(リ)ト(ヘ)トニヨリテ未知數 Σ_1 及 Σ_2 ヲ求メ得ベシ即チ

$$\Sigma_1=\frac{\sqrt{\Sigma^2_{\beta_1}+\Sigma^2_{\beta_2}+2\Sigma_{\beta_1}\Sigma_{\beta_2}\sqrt{1-R^2_{\beta_1\beta_2}}}+\sqrt{\Sigma^2_{\beta_1}+\Sigma^2_{\beta_2}-2\Sigma_{\beta_1}\Sigma_{\beta_2}\sqrt{1-R^2_{\beta_1\beta_2}}}}{2}\cdots(\text{ヌ})$$

$$\Sigma_2=\frac{\sqrt{\Sigma^2_{\beta_1}\Sigma+^2_{\beta_2}+2\Sigma_{\beta_1}\Sigma_{\beta_2}\sqrt{1-R^2_{\beta_1\beta_2}}}-\sqrt{\Sigma^2_{\beta_1}+\Sigma^2_{\beta_2}-2\Sigma_{\beta_1}\Sigma_{\beta_2}\sqrt{1-R^2_{\beta_1\beta_2}}}}{2}\cdots(\text{ル})$$

此 Σ_1 及 Σ_2 ハ兩變數 β_1,β_2 ニヨリテ決定セラルヽ楕圓形ノ長短兩半徑ノ標準偏差ナルガ故ニ之ニ或常數ヲ乘ズレバ其蓋然誤差ヲ得ベシ此常數ハ Karl Pearson 及 Alice Lee 兩氏*) ノ計算ニヨレバ變數二個ナル場合ニハ1.177ナリ即チ β_1 及 β_2 ノ偏異ガ半徑ヲ $1.177\Sigma_1$ 及 $1.177\Sigma_2$ トスル楕圓形外ニ出デザル確カラシサハ $\frac{1}{2}$ ナリ其他ノ確カラシサヲ有スル楕圓形ノ半徑ヲモ

容易ニ求ムルヲ得ベシ

以上ノ如クシテ$\frac{1}{2}$ノ確カラシサヲ以テβ_1, β_2ノ偏異スル區域即チ蓋然楕圓形ヲβ_1, β_2ノ平面上ニ描クコトヲ得而シテΣ_1及Σ_2ハ總頻度ノ平方根$\sqrt{N}$ニ逆比例スル所ナルガ故ニ之ニ$\sqrt{N}$ヲ乘ジタルモノ即チ$1.177\sqrt{N}\Sigma_1$, $1.177\sqrt{N}\Sigma_2$ハ總頻度ノ如何ニ拘ラズβ_1及β_2ニヨリテ定マル所ナリ故ニ參考書10ノ第四十四表及第四十五表ニ此値ヲ掲ゲラル

---

*) 唯一個ノ變數ガ獨立ニ變化スル如キ場合ニハ標準偏差ニ0.67448985チ乘ズルコトニヨリテ蓋然誤差チ求メ得ル事ハ最小二乘法ノ敎フル所ナリ然レドモ一般ニn個ノ變數ガ相互ニ相關聯シテ變化スル如キ場合ニハ此關係較複雜ナリ是實ニ1908年 Pearson, K, 及 Alice Lee 兩氏ニヨリテ發表セラレタル研究ニヨリテ始メテ明カトナレリ今其主旨トスル所チ略叙センニ次ノ如シ規正的ト前提セラレタル多次相關面 (Muitiple Correlation Surface) ノ方程式ハ一般ニ

$$z=\frac{N}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}\sigma_1\sigma_2\cdots\cdots\sigma_n\sqrt{R}}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

式中
$$\chi^2=\frac{1}{R}\left\{S\left(\frac{R_{pp}x_p^2}{\sigma_p^2}\right)+2S'\left(\frac{R_{pq}x_px_q}{\sigma_p\sigma_q}\right)\right\}$$

又
$$R=\begin{vmatrix} 1, & r_{12}, & r_{13}\cdots\cdots r_{1n} \\ r_{21}, & 1, & r_{23}\cdots\cdots r_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ r_{n1}, & r_{n2}, & r_{n3}\cdots\cdots 1 \end{vmatrix}$$

ニシテR_{pp}及R_{pq}ハ行列式Rノ小行列式 (minor) ナリトス而シテzニ或ル値チ與ヘタル時ハχ^2ニ常數トナリテn次空間ニ於ケル同一頻度ノ ellipsoid トナル故ニ此任意ノ ellipsoid 內ニ包容セラルヽ總頻度換言スレバ其頻度面ノ体積ハ次ノ積分式ニヨリ表ハサルベシ

$$I\chi=\int_0^\chi z\,dV$$

$$\therefore\ \frac{I\chi}{N}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}\sigma_1\sigma_2\cdots\cdots\sigma_n\sqrt{R}}\int_0^\chi e^{-\frac{1}{2}\chi^2}dV$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}\mu_{n-1}(\chi)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(n-2)}\quad \text{(變數ノ個數nガ偶數ナル時)}$$

$$=\frac{2\mu_{n-1}(\chi)}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(n-2)}\quad \text{(變數ノ個數nガ奇數ナル時)}$$

然ルニ$\mu_n(\chi)$ハn次ノ不完全ナル規正乘率函數 (nth incomplete normal moment function) ニシテ

$$\mu_n(x)=\int_0^x x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

チ表ハス而シテ其積分數値ハ參考書9ノ第五十九頁ニ揭ゲラル但此表ハ$\mu_n(x)$ニアラズシテソノ函數$m_n(x)$ナリトス

而シテnガ偶數ノ場合ハ

$$m_n(x)=\frac{\mu_n(x)}{\{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots\cdots 1\}}$$

nガ奇數ナル時ハ

$$m_n(x)=\frac{\mu_n(x)}{\{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots\cdots 2\}}$$

因テ此表ヲ利用スレバ Ix/N ノ價ハ計算セラルヽ所ナリ而シテ $Ix_0/N=\frac{1}{2}$ ナル χ_0 ハ總頻度ノ半ヲ包容スル所ノ ellipsoid ヲ與フ此 χ_0 ヲ Pearson 及 Lee 兩氏ノ Generalised Probable Error ト云フ其數値ハ次ノ如シ（尚之ニ關シテハ參考書11ヲ見ヨ）

變數ノ個數	1	2	3	4	5	6
蓋然誤差	2.6744898	1.1774062	1.5381667	1.8321239	2.0860146	2.3125982
變數ノ個數	7	8	9	10	11	12
蓋然誤差	2.5190869	2.7100022	2.8883962	3.0564360	3.2157402	3.367

第五節　統計材料

本研究ニ使用セル材料ハ札幌營林區署管內高島國有林內第一間伐試驗區ニ於ケル調查報告中ヨリ得タルモノニシテ其間伐施行前ノ各直徑階ノ本數分配狀況ナリトス

本試驗區ニハ第一第二及第三分地ヲ設ケラレ其第一分地ハ面積一段步ニシテ無間伐區又第二及第三分地ハ面積各五段步宛ニシテ夫々B度及C度間伐試驗區トシテ設置セラレシモノナリ第一分地ニ就キテハ各直徑階ノ本數調查ヲ欠クガ故ニ差當リ第二及第三分地ニ就キテ研究スルノ外ナシ

先其試驗地ノ位置地況及林況並ニ被害關係ニ就キ槪述シ次ニ調查方法ヲ述ベ最後ニ材料表ヲ揭ゲン

位置及地況

本試驗地ハ小樽區稻穗澤ニアリテ小樽高等商業學校ノ裏手ニ當ル海拔三百五十尺內外ナリ地形ハ二十度以下(多クハ十五度內外ナリ第三分地ハ約十七八度ナリ)ノ角度ヲ以テ南東ノ方向ニ傾斜ス積雪量較々多クシテ五乃至六尺ノ事アリ丘陵地ニシテ風害尠カラズ第三期洪積層ニ屬シ土壤深クシテ比較的肥沃ナリ林內ニハ蘚苔類ノ繁茂旺盛ニシテ落葉枝死ノ堆積亦多シ

林況

樹種ハ落葉松 (Larix leptolepis, Gord.) ノ單純人工林ナルモ少數ノほゝ,なら,きはだ等ノ濶葉樹ノ後生樹ヲ混淆ス其中ニハ主林木ト其生長ヲ競フ如キモノアリ又せんのき,たらんぼ等ハ其下木ヲ構成ス

記錄ニヨレバ本林ハ明治三十二年ニ四尺五寸平方ニ一本宛植栽セラレタルモノナルモ其後枯損セル爲メ殆ド大部分ハ明治三十四年春季ニ補植セラレタルモノナリ若シ四尺五寸平方ニ一本宛存スルモノトセバ一町歩當リ本數五千三百三十本餘トナルベキモ本調査ノ當時ハ三千二百本内外(後ニ記載スル材料表參照)ニ過ギズ是植栽後ノ枯損伐採(是ハ大正八年ニ間伐試驗地ヲ此地ニ設置スル前撫育其他ノ目的ノ爲ニ隨時行ハレタルモノニシテ確實ナル記錄ヲ欠クモノ) 並ニ後ニ述ブル被害ニ基因スル所ナルベシト雖其記錄ヲ審ニスルヲ得ザルハ甚遺憾トスル所ナリ

第一回ニ植栽セルモノハ殆全部枯死シ現在活着セルモノハ大多數明治三十四年ノ植栽ニ係ルモノナレバ調査年度タル大正八年ニ於テハ植栽後十八年ヲ經過セルモノト見做シ得ベシ從テ普通此地方ニ於テ落葉松造林ニ對シテハ二年生苗木ヲ用ヒラルヽガ故ニ年齡二十年内外ト斷定スルヲ得

被害關係

既ニ一言セル如ク本造林地ハ風害ヲ被リ易シ殊ニ本調査ノ前年タル大正七年九月ニハ大暴風アリテ多數ノ風倒木ヲ出シタルニヨリ甚ダシキ疎開地ヲ生ジ且樹冠ノ形狀モ著シク毀損セラレタリ其他比較的僅少ナリト雖多少野鼠ノ害ヲ免ルヽ能ハズ又盜伐ノ害尠カラズト云フ

調査方法

當該森林中比較的均一ト認メラルヽ部分ヲ五段步丈ケ區劃シ其中ニ入リ來レル各樹幹ノ胸高直徑ヲ測定セリ胸高ノ位置ハ地上四尺ト定メ測桿ヲ以テ標識シ此位置ニ於ケル直徑ヲ互ニ直角ナル二方面ヨリ輪尺ヲ以テ測リ是ガ算術平均ヲ用ヒタリ而シテ五分宛ノ直徑階ヲ編成シ各

階内ニ入リ來ル本數ヲ總計シテ之ヲ材料表ニ揭グル所ナリ此際各階ノ中央ノ直徑ヲ以テ各階ヲ代表セシム例ヘバ八分ヨリ一寸二分迄ヲ一寸ノ直徑階ニ又一寸三分ヨリ一寸七分迄ヲ一寸五分ノ直徑階ニ編入スルガ如シ

材料表

(甲) 第二分地

直徑階 (分)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	計
本數	19	64	115	207	331	360	307	120	47	8	1	1579

(乙) 第三分地

直徑階 (分)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	計
本數	40	71	155	202	324	304	304	129	63	12	4	1608

第六節　曲線型ノ決定

(甲) 第二分地

直徑階分	$\frac{直徑-35}{5}=s$	本數 f	fs	fs2	fs3	fs4
10	− 5	19	− 95	475	− 2375	11875
15	− 4	64	− 256	1024	− 4036	16384
20	− 3	115	− 345	1035	− 3105	9315
25	− 2	207	− 414	828	− 1656	3312
30	− 1	331	− 331	331	− 331	331
35	0	360	− 1441		− 11563	
40	+ 1	307	+ 307	307	+ 307	307
45	+ 2	120	+ 240	480	+ 960	1920
50	+ 3	47	+ 141	423	+ 1269	3807
55	+ 4	8	+ 32	128	+ 512	2048
60	+ 5	1	+ 5	25	+ 125	625
			+ 725		+ 3173	
和		1579	− 716	+ 5056	− 8390	+ 49924

上表ニヨリ

$\nu'_1 = -\ 0.4534516$

$\nu'_2 = +\ 3.2020265$

$\nu'_3 = -\ 5.3134896$

$\nu'_4 = +31.6174794$

算術平均値$=32.732742 \pm 0.1448638$

次ニ原點ヲ算術平均點ニ移シ Sheppard 氏修正法ヲ施シタル時ノ第二次乃至第四次ノ乘率ヲ揭ゲン

$\mu_2 = \ \ 2.9130748$

$\mu_3 = -1.1440735$

$\mu_4 = \ 24.3343355$

故ニ本材料ノ標準偏差ヲ其蓋然誤差ト共ニ示セバ次ノ如シ

$\sigma = 8.53395 \pm 0.10244$

更ニ　　算術平均値－型點値$= -1.1473300 \pm 0.1855015$

故ニ　　型點値$= 32.732742 + 1.14733 \fallingdotseq 33.88$

又偏度ハ

$sk = 0.134443 \pm 0.020488825$

トナル因テ多少偏曲線ナル事ヲ知ルサレド其偏度極メテ小ナリ次ニβ_1及β_2ヲ求メ其蓋然誤差ト共ニ表ハセバ

$\beta_1 = 0.0529583 \pm 0.01400$

$\beta_2 = 2.8675846 \pm 0.07520$

即 Gauß-Laplace ノ正曲線(G型曲線)タルノ條件 $\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 3$ トハ異ル型ナル事明カナリ今κ_1及κ_2ヲ其蓋然誤差ト共ニ示セバ次ノ如シ

$\kappa_1 = -0.4237057 \pm 0.01400$

$\kappa_2 = -0.0951 \pm 0.0505$

以上求メタル常數ニヨリ考フルニκ_2ハ負數ナルガ故ニ第一型ニ屬スベシト雖此値及β_1ハ小ニシテ0ニ近キヲ示シ且κ_2ノ蓋然誤差ハκ_2ノ$\frac{1}{2}$以上ニ達セルガ故ニκ_2ノ符號及大サニノミヨリテ曲線型ヲ判斷スル事

ハ甚不確實ナルベシ蓋此事實ハ第二型トノ限界線(Critical line)ニ甚近キヲ示スガ故ナリ玆ニ於テ第一型曲線ノ適合スル確カラシサヲ確定センガ爲蓋然楕圓形ヲ描キ見ルヲ要ス（尤是ガ實地應用ニ便ナラシメンガ爲Karl Pearson 氏ハ參考書10ノ88頁(Diagram 47)ニ於テ一圖式ヲ掲ゲアリ）

即蓋然楕圓形ノ長短兩半徑ノ長サハ

$$1.177\Sigma_1=0.79126\times\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{0.79126}{\sqrt{1579}}=0.01991$$

$$1.177\Sigma_2=5.49082\times\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{5.49082}{\sqrt{1579}}=0.13818$$

長短兩徑ノ比ハ

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}=0.144105$$

次ニ長軸ト軸β_2トナス角度ヲ求ムルニ大略6.3°ナルヲ知ル從テβ_1及β_2ヲ直角坐標軸トスル圖上ニ此蓋然楕圓形ヲ描ク時ハ第一圖(甲)ノ如クナリテ全部第一型曲線內ニ入ル既ニ第四節ニ於テ述ベタルガ如ク蓋然楕圓形ハβ_1及β_2ニヨリテ構成セラレタル相關面ノ射影圖形ノ一ニシテ總頻度ノ$\frac{1}{2}$ハ其中ニ横ハルモノナリ從テ第一型曲線ヲ以テ表ハスヲ得

(乙) 第三分地

直徑	s	f	fs	fs2	fs3	fs4
10分	−5	40	−200	1000	−5000	25000
15	−4	71	−284	1136	−4544	18176
20	−3	155	−465	1395	−4185	12555
25	−2	202	−404	808	−1616	3232
30	−1	324	−324	324	−324	324
35	0	304	−1677		−15669	
40	+1	304	+304	304	+304	304
45	+2	129	+258	516	+1032	2064
50	+3	63	+189	567	+1701	5103
55	+4	12	+48	192	+768	3072
60	+5	4	+20	100	+500	2500
			+819		+4305	
和		1608	−858	+6342	−11364	+72330

上表ニヨリ

$\nu'_1 = -\ 0.5335821$

$\nu'_2 = +\ 3.9440299$

$\nu'_3 = -\ 7.0671647$

$\nu'_4 = +44.9813433$

算術平均値$=32.3320895 \pm 0.1593939$

次ニ原點ヲ算術平均點ニ移シ Sheppard 氏修正法ヲ施シタル時ノ第二次乃至第四次ノ乘率ヲ揭ゲン

$\mu_2 = \ \ 3.5921067$

$\mu_3 = -1.0404030$

$\mu_4 = \ 34.9524506$

故ニ本材料ノ標準偏差ヲ其蓋然誤差ト共ニ示セバ次ノ如シ

$\sigma = 9.47645 \pm 0.11272$

更ニ　算術平均値－型點値$= -0.9385372 \pm 0.2026831$

從テ　型點値$=32.3320895 + 0.9385372 \fallingdotseq 33.27$

又偏度ハ

$sk = 0.0990389 \pm 0.0209884$

トナル即其偏度前場合ヨリモ更ニ小ナリサレド偏曲線ト認ムルコトヲ得ベシ猶β_1及β_2ヲ求メ其蓋然誤差ト共ニ表ハセバ

$\beta_1 = 0.02334907 \pm 0.0057616$

$\beta_2 = 2.7088143 \pm 0.0564996$

即 Gauß–Laplace ノ正曲線タルノ條件ト異ナレル型ナルヲ示ス今κ_1及κ_2ヲ其蓋然誤差ト共ニ示セバ次ノ如シ

$\kappa_1 = -0.6524186 \pm 0.1111847$

$\kappa_2 = -0.0270865 \pm 0.0087158$

以上求メタル常數ニヨリ稽査スルニκ_1ハ負數ナルガ故ニ第一型ニ屬スベシト雖此値及β_1ハ小ニシテ零ニ近キヲ示シ且κ_2ノ蓋然誤差ハκ_2ノ$\frac{1}{4}$以上ニ達シ居ルガ故ニ是ノミヲ以テ判定スルハ未ダ早計ナリト云

フベシ從テ前場合ト同ジク蓋然楕圓形ノ長短兩半徑ヲ求ムルニ

$$1.177\Sigma_1=0.32688698\times\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{0.32688698}{\sqrt{1608}}=0.00815$$

$$1.177\Sigma_2=4.13307464\times\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{4.13307464}{\sqrt{1608}}=0.10307$$

長短兩徑ノ比ハ

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}=0.0790905$$

次ニ長軸ト軸β_2トナス角度ヲ求ムルニ大略$3.^{\circ}2$ナルヲ知ル因テβ_1及β_2ヲ直角坐標軸トスル圖上ニ此蓋然楕圓形ヲ描ク時ハ第一圖版(乙)ノ如シ從テ是亦第一型ヲ以テ表ハスモ支障無キ事ヲ示スモノナリ

第七節　本數配分曲線方程式

(甲) 第二分地

前節(甲)ニ於ケルβ_1及β_2ノ數値ヨリ第一型曲線式ニ於ケル常數ヲ求ムル事下ノ如シ(公式(17)(18)及(19)ニヨル)

$$r=25.6965101$$

$$b=18.3122$$

$$m_1=15.63428005 \qquad (\mu_3\text{ガ負數ナルガ故ニ }m_1>m_2)$$

$$m_2=\ 8.06223005$$

從テ關係式$b_1=a_1+a_2$, $\frac{a_1}{m_1}=\frac{a_2}{m_2}$ニヨリ$a_1$及$a_2$ヲ求ムレバ

$$a_1=12.0819$$

$$a_2=\ 6.2303$$

トナル更ニ型黙ニ於ケル本數y_0ヲ公式(16)ニヨリ算出スレバ

$$\log y_0=2.560793$$

即　$y_0=363.74$

トナル

因テ此場合本數配分曲線方程式ハ下ノ如シ

$$y_x=363.74\left(1+\frac{x}{12.0819}\right)^{15.63428005}\left(1-\frac{x}{6.2303}\right)^{8.06223005}\cdots\cdots\cdots\cdots\mathrm{I}$$

但原點ハ型點即直徑33.88分ノ點ニアリテxハ五分ヲ單位トシテ計レル直徑ヲ示シy_xハ各xニ相當スル本數ヲ示スモノナリ

(乙) 第三分地

前節(乙)ニ於ケルβ_1及β_2ノ數値ヨリ第一型曲線式ニ於ケル常數ヲ求ムル事下ノ如シ(公式(17)(18)及(19)ニヨル)

$$r=15,5004643$$

$$b=15.6047$$

$$m_1=8.008832 \quad (\mu_3\text{ガ負數ナルガ故ニ } m_1>m_2)$$

$$m_2=5.491632$$

從テ關係式$b=a_1+a_2$, $\frac{a_1}{m_1}=\frac{a_2}{m_2}$ニヨリテ$a_1$及$a_2$ヲ求ムレバ

$$a_1=9.2571$$

$$a_2=6.3476$$

トナル更ニ型點ニ於ケル本數y_0ヲ公式(16)ニヨリ算出スレバ

$$\log y_0=2.5104409$$

即 $y_0=323.92$

因テ此場合本數配分曲線方程式ハ下ノ如シ

$$y_x=323.92\left(1+\frac{x}{9.2571}\right)^{8.008832}\left(1-\frac{x}{6.3476}\right)^{5.491632}\cdots\cdots\cdots\text{ II}$$

但原點ハ型點即直徑33.27分ノ點ニアリテxハ五分ヲ單位トシテ計レル直徑ヲ示シy_xハ各xニ相當スル本數ヲ示スモノナリ

第八節　實測結果ト頻度曲線トノ比較

吾人ハ同一立地上ニ均一ナル種子ヨリ成立シ一樣ナル境遇ノ下ニ置カレ(即其取扱及被害關係等全林ニ亙リテ均一ナル樣ニナサレ)タル同齡林分中ノ各直徑階ニ對スル本數配分關係ハ均一系ニ於ケル頻度曲線ニ從フベキモノト前提シ先高島國有林第一間伐試驗區ノ調査材料ヲ借リテ此頻度曲線方程式ヲ求メタリ然レドモ第五節ニ記述セル如ク此材料トシテ取レル林分ハ或ハ盜伐或ハ風害或ハ其他種々ノ危害ヲ被リタ

ルモノナルガ故ニ前記ノ均一性タルノ條件ヲ完全ニ具備スルモノト云フベカラズ唯同一立地上ニ成立シ且同齢ナル林分タルノ點ニ於テノミ均一性ト見做シ得ルノミ其鬱閉度ニ關シテモ大正七年ノ暴風ノ爲疎開地ヲ多ク生ジタル關係上嚴正ニ均一ナリト稱シ得ベカラズト雖其森林中ナルベク理想ニ近キ部分ヲ撰定セリ斯ノ如ク實地ニ於ケル森林ハ種種ノ危害ニ曝サレ居ルモノナルガ故ニ一二ノ材料ヲ以テ得タル結果ニヨリテ直ニ實際ニ應用シ得ベキ程ニ恰適スル曲線ヲ得ル事ハ最初ヨリ期待セズト雖各直徑階ニ屬スル本數配分狀況ニ通有スル所ノ物理的性質 (physical characher) ヲ明カニスル一階程トモナリ又其恰適スル程度ノ少キコトハ外部ヨリ當該同齡林ニ與ヘラルヽ被害及樹木相互ノ競爭ガ如何ニ多ク其均一性ヲ破リタルヤヲ示スモノナリト信ズ吾人ガ今實測結果ト頻度曲線ヨリ求メタル結果トヲ比較スル所以ハ玆ニ存ス

先曲線ニ現ハルヽ直徑ノ範圍ト實際ニ現ハルヽ夫トヲ比較セン

方程式 I ニヨリテ示サルヽ曲線ハ $x=-12.0819$ ヨリ $x=+6.2303$ ノ間ニ擴リ居ル所ナルモ實際是ガ材料タル林分ニ於テ現ハルヽハ

$$x=\frac{1\overset{分}{0}-33\overset{分}{.}88}{5^{分}}=-4.776 \quad ヨリ \quad x=+\frac{6\overset{分}{0}-33\overset{分}{.}88}{5^{分}}=+5.224$$

ノ間ナリ又方程式 II ニヨリテ示サルヽ曲線ハ $x=-9.2571$ ヨリ $x=6.3476$ ノ間ニ擴リ居ルモ實際是ガ材料タル林分ニ於テ現ハルヽハ

$$x=\frac{1\overset{分}{0}-33\overset{分}{.}27}{5^{分}}=-4.645 \quad ヨリ \quad x=+\frac{6\overset{分}{0}-33\overset{分}{.}27}{5^{分}}=5.346$$

ノ間ナリ此兩端點ノ一致セザル理由ハ下ノ二點ニ歸スルヲ得ベシ

(一) 理論的頻度曲線ハ連續的性質ヲ有スル滑ナルモノナルガ故ニ一本ニ達セザル小數ノ部分ヲモ含ムニ反シ實際測定ノ結果ハ一本以上ナル事

(二) 外部及內部ヨリ何等ノ影響無キモノトスレバ頻度曲線ニヨリ表ハサルヽ總テノ直徑階ハ實際モ現ハルベシト雖或直徑階(此場合ハ一寸)以下ノモノハ樹木相互ノ生存競爭ノ結果壓倒セラレテ實際林分中ヨリ消滅スルニ至ル事

此第二ノ理由ハ直徑ノ小ナル限界ニ於テ大ナル限界ニ於ケルヨリモ始點ノ不一致著シキ所以ナリ

斯クノ如ク終始兩端ハ一致セズト雖實際現ハルヽ直徑階ヨリ外ニ出デタル曲線ノ部分ニヨリ圍マルヽ面積ハ極メテ小ニシテ殆ド之ヲ閑却シ得ベキ事ハ第二圖版ヲ見レバ明ナリ

次ニ曲線ニヨリテ示サルル各直徑階ノ本數ト實際ノ材料表ニ於テ現ハルヽ夫トヲ比較セン

先曲線方程式Iニヨリテ各直徑ニ屬スル本數及五分宛ノ各直徑階ニ包含セラルヽ本數ヲ計算スル事第一表ノ如シ

第一表

直徑	x	y	各直徑階ノ本數	
			小數點以下三位迄計算セルモノ	完約セルモノ
分 5	− 5.776	2.772		
10	− 4.776	22.668	22.867	23
15	− 3.776	47.343	49.334	49
20	− 2.776	119.808	121.329	121
25	− 1.776	228.780	228.538	229
30	− 0.776	331.945	328.842	329
35	+ 0.224	360.628	356.157	356
40	+ 1.224	282.008	279.584	280
45	+ 2.224	145.204	146.572	147
50	+ 3.224	41.238	44.029	44
55	+ 4.224	4.256	5.621	6
60	+ 5.224	4.141×10^{-2}	0.215	0
65	+ 6.224	1.716×10^{-19}		
計				1584

又曲線方程式IIニヨリテ各直徑ニ屬スル本數及五分宛ノ各直徑階ニ包含セラルル本數ヲ算出スル事第二表ノ如シ

第　二　表

直　徑	x	y_x	各直徑階ノ本數	
			小數點以下三位迄求メタルモノ	完約セルモノ
分 5	− 5.654	5.592		
10	− 4.654	24.662	25.780	26
15	− 3.654	70.559	71.818	72
20	− 2.654	147.391	148.000	148
25	− 1.654	238.835	237.936	238
30	− 0.654	308.694	306.231	306
35	+ 0.346	319.443	316.501	317
40	+ 1.346	259.591	257.807	258
45	+ 2.346	156.931	157.284	157
50	+ 3.346	62.737	64.568	65
55	+ 4.346	12.492	14.086	14
60	+ 5.346	0.493	0.972	1
65	+ 6.346	0.000		
計				1002

此兩表中夫々方程式I及IIニ於テy_xハ對數表ヲ利用シテ求メ得ル所ナルモ各直徑階ニ包含セラルヽ本數算出法ニ就キテハ予ノ採用セル方法ヲ述ブルノ要アルベシ一定ノ幅ヲ有スル直徑階ニ包含セラルヽ本數ハ其階ノ兩端ニ於ケル縦距及曲線ノ當該部分及x軸ニヨリテ圍マルヽ面積ニ等シ而シテ曲線ノ分割セラレタル各部分ハ二次ノ拋物線ノ一部ト見做スモ其誤差ハ殆ド閑却シ得ベキ程微量ナルモノト考フルヲ得即其各部分ハ方程式

$$y = a + bx + cx^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

ニヨリテ表出セラル之ヲ $-\frac{1}{2}$ ヨリ $+\frac{1}{2}$ ノ間ニ積分スル時ハ次式ヲ得

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y\,dx = a + \frac{c}{12} \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

然ルニ今xノ$-1, 0$及$+1$ニ相當セルyヲ夫々y_{-1}, y_0及y_{+1}トスレバ式(A)ニヨリ次ノ關係アリ

$$y_0 = a$$

$$y_{-1}+y_{+1}=2a+2c \quad 或ハ \quad c=\frac{y_{-1}+y_{+1}-2y_0}{2}$$

從テ此a及cヲ式(B)ニ置換スレバ其定積分ノ値ハ y_0, y_{-1} 及 y_{+1} ヲ以テ表ハサルベシ即

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y\,dx = y_0+\frac{y_{-1}+y_{+1}-2y_0}{24}=y_0-\frac{1}{24}\left\{(y_0-y_{-1})-(y_{+1}-y_0)\right\}$$

$$=y_0-\frac{1}{24}\left(\Delta y_{-1}-\Delta y_0\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

即各直徑階ノ中央ニ於ケル直徑ヲ0トシ其一階丈前ノ直徑階ノ夫ヲ−1其一階丈後ノ直徑階ノ夫ヲ+1トシ其中間ヨリ中間迄ヲ積分シタルモノハ當該直徑階ニ屬スル本數ニシテ公式(C)ニヨリテ之ヲ算出シ得ベシ

斯クシテ各直徑階ニ屬スル本數ヲ小數點以下三位迄計算シタルモノト小數點以下ヲ四捨五入法ニヨリ完約セルモノトヲ前表ニ掲グラル今此兩表ニ於ケル各直徑階ノ完約本數總計ヲ夫々其材料トセル林分ノ總本數ト比較スルニ第二分地ニ對スルモノハ五本丈過大トナリ第三分地ニ對スルモノハ六本丈ケ過小トナレルヲ見ル此過小トナルハ理論上ノ曲線ガ實際現出スル限界ヲ超エテ擴リ居ル事ニ歸シ得ベキモ過大トナルハ稍々解シ難シサレド全計算ヲ通ジテ各所ニ行ヘル四捨五入完約法ニヨル誤差ノ積算セルモノト考フルヲ得ベシ此ノ如キ微量ナル差異ニヨリテ總本數ヲ超ユルガ如キハ理論上ノ曲線ガ實際現出スル直徑ノ限界ヲ超エテ擴リ居ル面積ノ甚ダ小ナル事ヲ證明スルモノナリ

次ニ以上ノ如ク第一型頻度曲線ニヨリ求メタル各直徑階ノ本數配分狀況ヲ理論的ノモノト假定シ實側セル材料表ニ於ケルモノガ是ニ比シテ幾許ノ偏差ヲ示セルヤ又此偏差及是以上ノ偏差ハ幾許ノ確カラシサヲ以テ期待シ得ベキヤヲ吟味セント欲ス予ハ此目的ノ爲ニ Karl Pearson 氏ノ所謂恰適度ノ判定 (Testing the Goodness of Fit of Theory to Observation. 參考書 5 (p. 157), 8 (p. 250), 10, 12, 14) ヲ應用セリ

先其理論及應用法ニ就キ概述セン

其前提トスル所ハ一事象ノ各點ニ於テ偏差ノ起ル確カラシサノ系列ハ Gauß-Laplace ノ正曲線(即G型曲線)ニ從フモノニシテ且各點ニ於ケル偏差ハ互ニ相關係セルモノト見做セルナリサレバ一事象ヲ一般ニ n′ 個ノ群ニ分チテ觀測セル場合ニハ其總テノ群ニ於ケル偏差ノ系列ハ n′ 個ノ變數ヲ含ム所ノ規正的相關面 (Normal frequency surface) (第47頁脚註ニ示セル如キ方程式ニテ示サル) ニ相當スル式ヲ生ズ斯ノ如キ法則ニ從フ偏差ノ系列ニ於テ χ 及夫以上ノ偏差ノ起ル確カラシサ P ハ此式ヲ $x=\chi$ ヨリ $x=\infty$ 迄積分セルモノヲ $x=0$ ヨリ $x=\infty$ 迄積分セルモノヲ以テ除スレバ得ラル而シテカヽル積分ヲ各群ニ於テ行フベキモノナルヲ以テ其分母及分子ハ一般ニ n′ 重ノ定積分ナリ之ヲ數學的操作ニヨリテ單積分ニ誘導スル時ハ下ノ結果トナル

$$P=\frac{\int_{\chi}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{n'-1} dx}{\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{n'-1} dx}=\frac{\int_{\chi}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{n} dx}{\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{n} dx}$$

但 $n=n'-1$

此積分ノ比ハ次ノ如ク展開シテ計算スル事ヲ得

n′ ガ偶數ナル時ハ

$$P=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\chi}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\left(\frac{\chi}{1}+\frac{\chi^3}{1\cdot3}+\frac{\chi^5}{1\cdot3\cdot5}+\cdots+\frac{\chi^{n'-3}}{1\cdot3\cdot5\cdots(n'-3)}\right)$$

又 n′ ガ奇數ナルトキハ

$$P=e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\left(1+\frac{\chi^2}{2}+\frac{\chi^4}{2\cdot4}+\frac{\chi^6}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{\chi^{n'-3}}{2\cdot4\cdot6\cdots(n'-3)}\right)$$

トナル而シテ此 χ ハ理論及實測ノ頻度ヲ夫々 m_r 及 m'_r トスレバ

$$\chi^2=S\left\{\frac{(m_r-m'_r)^2}{m_r}\right\}$$

ニヨリテ與ヘラル但此 S ハ總和ヲ示ス從テ n′ 及 χ ヲ求ムレバ前出ノ展開式ニヨリ P ハ計算シ得ラルヽモ此方法ハ生物統計學其他ニ於テ屢々用ヒラルヽ所ナルヲ以テ W. Palin Elderton 氏ハ n′ ノ 3 乃至 30 及 χ^2 ノ 1 乃至 30 ニ對シ其各數値毎ニ P ヲ計算シ尚 30 以上ノ χ^2 ハ 10 毎ニ 70 迄ノ P ヲ計算シ更ニ補助表ヲモ掲ゲテ其以上ノ場合ニモ容易ニ P ヲ計算シ得ル如ク

ナセリ(參考書15又此表ハ參考書10ノ26—30頁ニアリ)

以上ノ如クニシテ求メタルPハ理論ト實際ト恰適スル程度ヲ示スモノニシテP大ナル時ハ實測セルモノノ誤差或ハ之以上ノ誤差ヲ生ズル確カラシサノ大ナルコト換言スレバ其誤差以內ニアル如キ供試材料ヲ撰ビ得ル確カラシサノ小ナル事ヲ示スガ故ニ善ク理論ト實際ト恰適スル事ヲ表ス然レドモ是ヲ萬般ノ統計材料ニ應用スルニ當リテハ杓子定規的ニ單ニ數字ノ大小ノミヲ以テ判定スル時ハ往々ニシテ正鵠ヲ失スルモノトス即此法ヲ應用スルニ當リテハ常ニ下ノ諸點ニ注意スルヲ要ス(參考書14ノ142--143頁ニヨル)

(1)若シ事象ヲ一定範圍ノ群ニ分チテ實測セル結果ト理論上ヨリ得タル結果トヲ比較スル場合ニハ此Pノ數値ハ概シテ群ノ個數增加ト共ニ減少スベシ何トナレバ理論上ノ數字ノ各個ノxニ相當スル縱距yヲ用ヒラルヽ所ナルモ嚴格ニ云ヘバ斯クノ如キ場合ニハ此數字ハ補間法ニヨリテ得タル數値ヨリモ善ク適合スルモノト云フ能ハザル關係上各群ニハ誤差ヲ作フ所ニシテ群ノ數增加ト共ニ是ガ積算セラルヽ事大ナレバナリ

(2)此判定法ハ一ノ配分關係(distribution)ヲ前提トスルガ故ニ數字ガ單ニ縱距ノ系列(a series of ordinates)ノミナル時ハ應用スベカラズ勿論此縱距モ極メテ多數取ル時ハ此恰適度判定ノ正シキ思想ニ近ヅクベシト雖是正當ナル應用法ニアラズ

(3)經驗上終リノ方(tail)ノ數字ハ甚ダ小トナルガ爲能ク適合セズPearson氏モ此點ニ關シ下ノ如ク注意ヲナセリ

"We ought to take our final theoretical groups to cover as much of the tail area as amounts to at least a unit of frequency in such cases."

(4)觀測セル總頻度ヲ增加シ例ヘバ一定整數cヲ以テ乘ゼラレ偏差モc倍セラルヽ時ハχ^2モc倍セラレ恰適度ハ低下スベシ此觀測數ノ增加ト共ニ恰適度ノ低下スルハ一見解セラレザルガ如シト雖少シク考フル時ハ明トナルベシ即多數ノ觀測ヨリ得タル結果ハ少數ノ夫ニ比シテ滑ナ

ル系列ヲ得ベキ所ナルニ拘ラズ其得タル結果ハ比例的ニ相等シク其理論的配分關係モ同一ニシテ只總頻度ノミ異ナルガ故ニ多數頻度ヲ以テセル觀測ハ少數頻度ヲ以テセル夫ニ比シテ劣レルナリ

(5)又此判定法ヲ應用スルニ當リ極メテ多數ノ材料ヲ取扱ヒ且曲線ハ善ク統計材料ニ適合シ居ルニ拘ラズPノ數値ノ小ナル事屢々アリ是ガ說明ハ下ノ如シ即吾人ノ實地ニ於テ取扱フ所ノ粗材料ハ殆ド常ニ幾許カノ不屬的部分 (extraneous matter) ヲ含ム所ナヲガ故ニ多少不均一タルヲ免レズ極メテ多數ノ場合ヲ觀測スル時ハ之ヲ減少セシメ得ベシト雖尙不均一性 (heterogeneity) ハ殘ルモノナリ曲線決定上ノ見地ヨリ考フレバ其實測結果ハ實際ハ二個或ハ夫以上ノ頻度曲線ヨリ構成セラルヽモノナリト雖計算セラレタル曲線ハ最優越セルモノニシテ此統計材料ハ是ニ近ヅカントスル傾向ヲ示スモノナリ

(6)一般ニ曲線式中ノ常數ヲ增加スレバ必然的ニ曲線ノ恰適度ヲ高メ得ベシト考ヘラレ居ル所ナリ或場合ニハ斯クノ如キ事アリト雖又十個ノ常數ヲ含ム曲線式モ僅ニ三個ヲ有スルニ過ギザル曲線式ニ劣ル事モアリトス

(7)以上ノ諸項ニ注意ヲ拂ヒテ稽査スベキ所ナルモ概シテPノ大ナルモノ即善ク恰適スル曲線ヲ撰定スベキナリ但時ニハ幾分恰適性劣ルト雖簡單ナル式ヲ使用スル事ノ奬勵セラルベキ場合アリトス

偖今恰適度判定ヲナサンガ爲ニχ^2ヲ算出スル事第三表ノ如シ

第三表

直徑	第二分地 m'_r	m_r	$m_r-m'_r$	$\frac{(m_r-m'_r)^2}{m_r}$	第三分地 m'_r	m_r	$m_r-m'_r$	$\frac{(m_r-m'_r)^2}{m_r}$
1 0 分	19	23	+ 4	0.69565	40	26	− 14	7.54846
1 5	64	49	− 15	4.59184	71	72	+ 1	0.01389
2 0	115	121	+ 6	0.29752	155	148	− 7	0.33108
2 5	207	229	+ 22	2.11354	202	238	+ 36	2.44538
3 0	331	329	− 2	0.01216	324	306	− 18	1.05882
3 5	360	356	− 4	0.04494	304	317	+ 13	0.53312
4 0	307	280	− 27	2.60357	304	258	− 46	8.20155
4 5	120	147	+ 27	4.95918	129	157	+ 28	4.99363
5 0	47	44	− 3	0.20455	63	65	+ 2	0.06154
5 5	8	6	− 2	0.66667	12	14	+ 2	0.28571
6 0	1	0	……	……	4	1	……	……
計				16.18962				28.46318

因テ第二分地ニ對シテハ

$n'=10 \qquad \chi^2=16.18962 \qquad \therefore \ P=0.063437$

又第三分地ニ對シテハ

$n'=10 \qquad \chi^2=28.46318 \qquad \therefore \ P=0.000812$

此計算ニ六寸ノ直經階ヲ除ケルハ此最終ノ群ニ於テ頻度曲線ノ縱距ハ著シク減少シ爲ニ之ヲ入ルヽ時ハ恰適度判定ヲシテ誤マラシムル恐アルヲ以テナリ（前掲ノ注意(3)(61頁)參照）

茲ニ求メタルPノ數値ハ極メテ小ナリト雖是ハ前掲ノ注意事項(5)ニヨリテ說明シ得ベシ即茲ニ用ヒタル高島第一試驗區第二分地及第三分地ニ於ケル統計材料ノ多數ノ部分ハ頻度曲線式I及IIニヨリテ表ハサレ又之ニ近カントスル傾向ヲ示スト雖尙夫以外ノ曲線ニ從フ如キ不屬的部分ノ存在スルガ爲メナリ今是ヲ證センガ爲メ其不屬的部分ト認メラルベキ群ヲ除キテPヲ計算スル事次ノ如シ

第二分地ノ場合

$\frac{(m_r-m'_r)^2}{m_r}$ノ最大ナル直徑階ヨリ次第ニ除キ行キテPノ增加スル模樣ヲ

見ルニ次ノ如シ

45分ノ直徑階ヲ除ケルモノ	$n'=9$	$\chi^2=11.23044$	$P=0.190063$
45分及15分ノ兩直徑階ヲ除ケルモノ	$n'=8$	$\chi^2=6.63860$	$P=0.46895$
45分, 15分及40分ノ三直徑階ヲ除ケルモノ	$n'=7$	$\chi^2=4.03503$	$P=0.672022$
45分, 15分, 40分及25分ノ四直徑階ヲ除ケルモノ	$n'=6$	$\chi^2=1.92149$	$P=0.858051$
45分, 15分, 40分, 25分及10分ノ五直徑階ヲ除ケルモノ	$n'=5$	$\chi^2=1.22581$	$P=0.870491$

此上更ニ直徑階ヲ減ジ行ケバ幾分Pヲ増加スベシト雖其速度僅少ナリ故ニ45分, 15分, 40分及25分ノ四個ノ直徑階ハ所謂不屬的部分ト認ムベキモノナリ

第三分地ノ場合

前ト同様ノ方法ニテPノ増加スル狀況ヲ示ス事下ノ如シ

40分ノ直徑階ヲ除ケバ	$n'=9$	$\chi^2=20.26163$	$P=0.009502$
40分及10分ノ兩直徑階ヲ除ケバ	$n'=8$	$\chi^2=12.72317$	$P=0.079985$
40分, 10分及25分ノ三直徑階ヲ除ケバ	$n'=7$	$\chi^2=7.27779$	$P=0.317462$
40分, 10分, 25分及45分ノ四直徑階ヲ除ケバ	$n'=6$	$\chi^2=2.28416$	$P=0.806761$
40分, 10分, 25分, 45分及30分ノ五直徑階ヲ除ケバ	$n'=5$	$\chi^2=1.22534$	$P=0.862832$

以上更ニ直徑階ヲ減ジ行ケバ幾分Pヲ増加スベシト雖其速度ハ比較的僅少トナレリ即此場合ニハ45分, 10分, 25分及45分ノ四個ノ直徑階ハ所謂不屬的部分ト稱スベキモノナリ

而シテ兩場合共直徑階ヲ減ジ行クニ從ヒ幾分Pヲ増加シ行クハ前揭ノ注意事項(1)ニヨリテ了解セラルヽ所ナルモ著シク増加スルガ如キハ其除ケル群ガ不屬的(extraneous)ナルコトヲ示スモノナリ

以上論ジ來レル所ニヨリテ玆ニ採用セル統計材料ノ系列ノ最多クノ部分ハ求メタル曲線式ニ適合スト雖伺他ノ曲線ニヨリテ示サルベキ部分ヲモ包含スルモノナリ

猶調査セル高島間伐試驗區第二分地及第三分地ニ於ケル各直徑階ノ本數配分狀況ハ其大部分ニ於テ求メタル曲線I及IIト如何ニヨク一致スルヤヲ明ニセンガ爲是ヲ圖解セリ即第二圖版是ナリ其(甲)ハ第二分地

ニ於ケル狀況ニシテ(乙)ハ第三分地ニ於ケル狀況ナリ階段狀況ヲナセルハ材料表ヲ**ヒストグラム**ニ表ハセルモノニシテ滑ナル曲線ハ求メタル式I及IIニヨリテ表示セラルヽモノトス

第九節 摘要

本論文ニ於テ統計數學的應用ヲ試ミタル試驗區ハ僅ニ二ケ所ニシテ又樹種モ落葉松ノミナリ故ニ今俄ニ一般的結論ヲ下ス能ハズト雖茲ニ得タル結果ノ要點ヲ摘記スル事下ノ如シ

(一) 高島國有林第一間伐試驗區ノ如キ立地ニ於テハ二十年生落葉松ノ胸高直徑(地上四尺ニ於ケルモノ)ハ一寸乃至六寸ノ間ニアリ

(二) 其各直徑階ニ屬スル本數配分關係ハ一ノ偏曲線ナリ然レドモ其偏度甚小ニシテ前記二ケ所ノ經驗ニヨレバ一ハ0.134ニシテ他ハ0.099ニ過ギズ

(三) 二ケ所共ニ型點ノ位置ハ算術平均點ヨリモ右方ニアリ(第二圖參照)即直徑ノ增加ニ伴ヒ起ル所ノ本數增減ノ狀況ヲ見ルニ型點以前ニ於ケル本數增加ノ速度ハ型點以後ニ於ケル本數減低ノ速度ニ比シ幾分小ナリ

(四) 前記二ケ所共ニ各直徑階ニ屬スル本數配分關係ハ Karl Pearson 氏頻度曲線第一型ニヨリテ表示セラル而シテβ_1ハ大略一ハ0.05ニシテ他ハ0.02又β_2ハ大略一ハ2.87ニシテ他ハ2.71ナルガ故ニ第二型曲線ニ接近セル位置ニアリ然レドモ蓋然橢圓形ハ明カニ第一型ノ範圍ニ入リ居レリ

(五) 此直徑階ニ屬スル本數配分關係ヲ示ス曲線式ハ夫々I及IIニヨリテ示サルヽコトヲ知レリ而シテ茲ニ求メタル曲線ガ夫々材料トセルモノニ適合スル程度ヲ檢セルニ其多クノ部分ニ適合スルモ尙此外ニ他ノ曲線ニヨリテ表ハサルベキ部分ヲモ包含ス即何レモ四個宛ノ不屬的直徑階ヲ有セリ

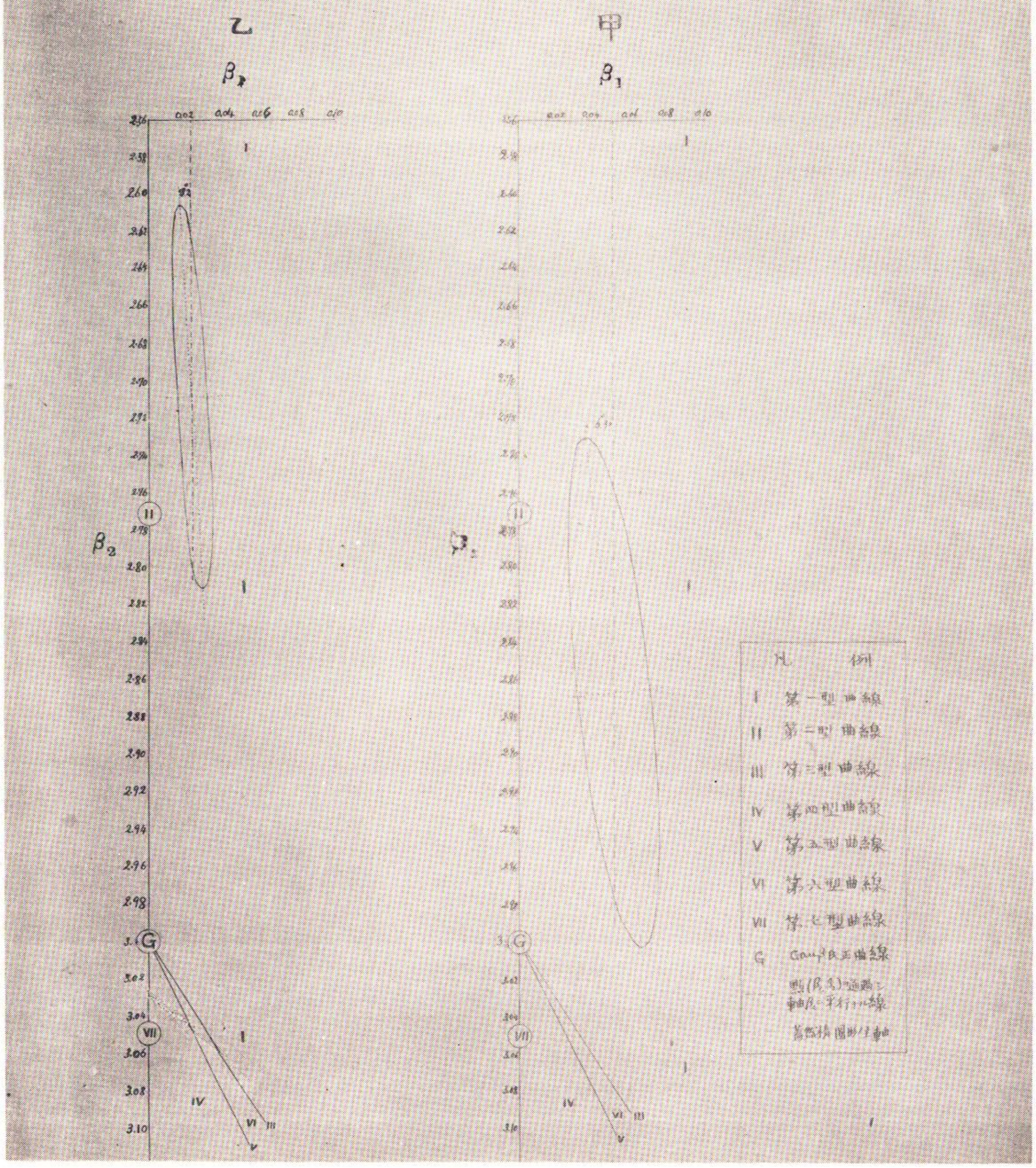
猶本問題ノ如キハ性質上多數ノ材料ニ就キ調査決定スルノ要アルヲ以テ更ニ他日ヲ期シテ研究セン

第十節　參考文獻

本問題ニ關スル文獻極メテ多シト雖其主要ナルモノヲ揭グレバ下ノ如シ

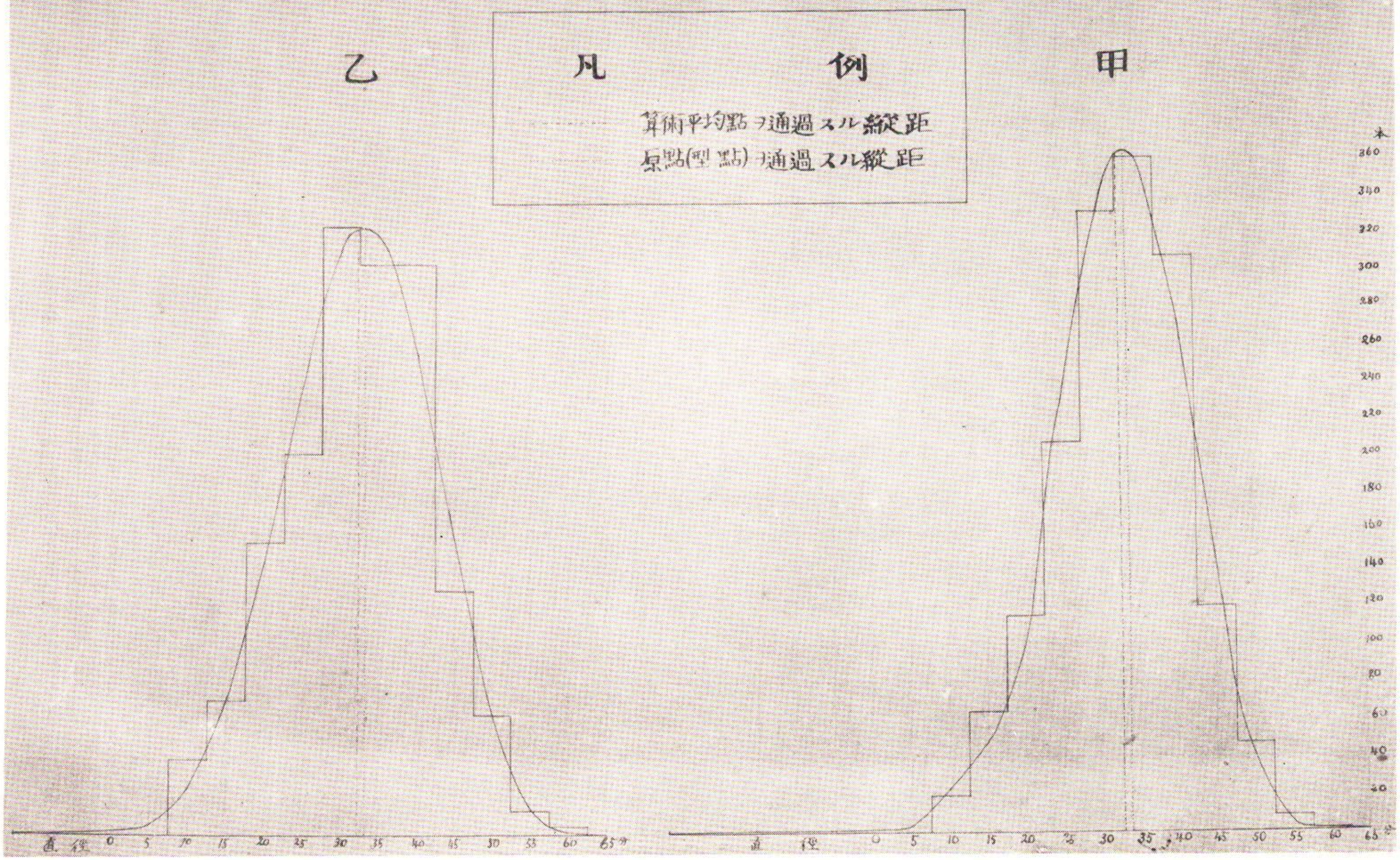
1. Pearson, Karl, : "Contributions to the Mathematical Theory of Evolution (On the Dissection of Assymmetrical Frequency Curves)," Phil. Trans. Roy. Soc. Series A, Vol. 185, 1894.
2. Pearson, Karl, : "Skew Variation in Homogeneous Material," Phil. Trans. Soc., Series A. Vol. 186., 1895.
3. Pearson, Karl, : "Cloudiness, Note on a Novel case of Fraquency," Roy. Soc., Vol. 62, 1897.
4. Pearson, Karl, : "On Certain Properties of the Hypergeometrical Series, and on the Fitting of such series to Observation Polygons in the Theory of Chance," Phil. Mag. 5th Series, Vol. 48., 1899, p. 236.
5. Pearson, Karl, : "On the Criterion that a given System of Deviations from the Probable, in the case of a Correlated System of Variables, is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling," Phil. Mag. 5th Series, Vol. 50, 1900.
6. Pearson, Karl, : "On the Systematic Fitting of Curves to Observations and Measurements," Biometrika, Vol. 1., 1902, p. 265 & Vol. 2. p. 1., 1903.
7. Pearson, Karl, & others (editorial) : "On the Probable Errors of Frequency Constants," Biometrika, Vol. 2, 1903, p. 273 and Vol. 9., 1913, p. 22.
8. Pearson, Karl, : "On the Probability that Two Independent Distributions of Frequency are really Samples from the same Population." Biometrika, Vol. 8, 1911.
9. Pearson, Karl, : "On an Elementary Proof of Sheppeard's Formulae and others (editorial), for correcting Raw Moments, and on other allied points," Biometrika, Vol. 3, 1904, p. 308.
10. Pearson, Karl, : Tables for Statisticians and Biometrician, 1914.
11. Pearson, Karl, and Alice Lee, : "On the Generalised Probable Error in Multiple Normal Correlation," Biometrika, Vol. 6, 1908, p. 59.
12. Pearson, Karl, : "On the Application of Goodness of Fit Tables to test Regression Curves and Theoretical Curves used to describe Observational or experimental Data," Biometrika, Vol. 11, part III, May, 1916.
13. Yule, G. Udny, : An Introduction to the Theory of Statisties, 1917.
14. Elderton, W. Palin, : Frequency Curves and Correlation, 1906.
    „ „ and Addendum and Errata, 1917.
15. Elderton, W. Palin, : "Table for Testing the Goodness of Fit of Theory to Observation," Biometrika, Vol. 1, 1902, p. 155.
16. Czuber, E., : Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statik und Lebensversicherung.
17. Czuber, E., : Theorie der Beobachtungsfehler.
18. Prytz, E. V., : "Massenermittelungsmethode von Rittmeister H. Prytz." Allg. Forst-u. Jagd-Zeitung, August, 1888.
19. Sheppard, W. F., : "On the Calculation of the most Probable Values of Frequency Constants for Data arranged according to Equidistant Divisions of a Scale," Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 29, pp. 353-380.
20. Sheppard, W. F., : "The Calculation of Moments of a Frequency-Distribution," Biometrika, V., 1907, p. 450.

第壹圖



乙
甲
凡例
I 第一型曲線
II 第二型曲線
III 第三型曲線
IV 第四型曲線
V 第五型曲線
VI 第六型曲線
VII 第七型曲線

第貳圖



乙
凡例
算術平均點ヲ通過スル縦距
原點(型點)ヲ通過スル縦距
甲
本
360
340
320
300
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
直徑 0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65分