HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	木質板に関する研究(第1報)：周辺単純支持，中央集中荷重による矩形板の撓み
Author(s)	沢田，稔；上田，恒司
Citation	北海道大學農學部 演習林研究報告，25(1)，61-84
Issue Date	1967-11
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/20846
Type	departmental bulletin paper
File Information	25(1)_P61-84.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

木質板に関する研究 (第1報)

周辺単純支持，中央集中荷重による矩形板の撓み

沢田　稔*　上田恒司**

Studies on the Wooden Plates 1.
Deflection of Rectangular Plates under a Concentrated Load at the Centre, Edges Simply Supported

By

Minoru SAWADA and Koji UEDA

目　　次

まえがき …… 61
1. 矩形板の曲げ理論式 …… 62
2. 実験方法 …… 70
2.1 試　　料 …… 70
2.2 基礎弾性定数の測定方法 …… 70
2.3 矩形板の曲げ試験方法 …… 72
3. 実験結果と考察 …… 73
3.1 基礎弾性定数 …… 73
3.2 矩形板の撓み …… 77
3.3 理論撓みと実測撓みとの比較 …… 79
むすび …… 84
文　　献 …… 84
Summary …… 84

まえがき

合板および木質ボード類の力学的性能のなかで，矩形板としての曲げや座屈についての研究はきわめて少ない。しかも実さいには，木造プレハブ用の木質パネルにしても，コンクリート型枠用プライフォームにしてもすべてこの種の変形をうけているのであって，

* 沢田　稔：北海道大学農学部林産学科　教授　林学博士
M. SAWADA: Professor, Doctor of Forestry, Institute of Forest Products, Faculty of Agriculture, Hokkaido University.
** 上田恒司：　同　助手　農学修士
K. UEDA: Assistant, Master of Agriculture, do.

木質平面材料として合理的な利用方法をもとめるためには，どうしても解決しておかなければならない重要な課題である。われわれはまず，この種の材料が近似的には直交異方性材料であることから周辺単純支持，中央集中荷重のばあいの撓みに関する理論式をもとめた。MARCH[1] はすでに本文中にのべる基礎微分方程式中の k の値で，$k<1$ のばあいについては解を与えているが，合板の表板の繊維方向と 45° をなすように木取った矩形板や，ハードボードなどの $k>1$ となるものについては取扱っていない。われわれはこのばあいについても理論式をもとめ，これによる計算値と実測値との比較をおこなった。

1. 矩形板の曲げ理論式

このばあい，木質矩形板が微小変形理論の適用をうけるものとして理論式を導いた。したがって板の中立面は彎曲はするが伸縮はなく，変形前に中立面の法線上にあった点は変形後も彎曲した中立面の法線上にあるという仮定がなりたつものとする。

1.1 基礎微分方程式の誘導

中立面に直交座標 x, y, z 軸をとり，それぞれの方向の変位を u, v, w で表わせば中立面から z の距離にある点 (x, y) の x, y 方向の変位は次のようになる。

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.1}$$

負号は Fig. 1 より u, v の方向により定まる。

さて，x, y 方向の歪を $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ とすると，

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

またせん断歪を γ_{xy} とすると，Fig. 2 により，

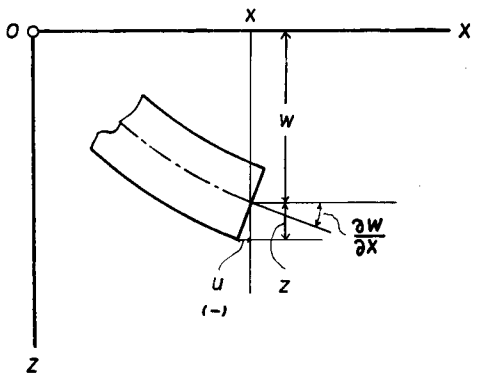

Fig. 1.

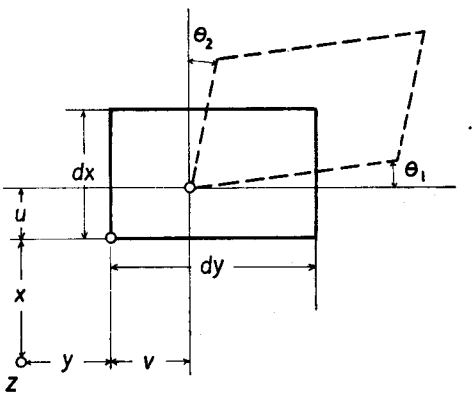

Fig. 2.

$$\theta_1=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \theta_2=\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}=\theta_1+\theta_2=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3}$$

(1.1), (1.2), (1.3) より

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \varepsilon_y&=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ \gamma_{xy}&=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

次に，応力と歪の関係は，E をヤング係数，G をせん断弾性係数，μ をポアソン比とすれば次のように表わすことができる。

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E_x}(\sigma_x-\mu_{xy}\sigma_y)\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E_y}(\sigma_y-\mu_{yx}\sigma_x)\\ \gamma_{xy}&=\frac{1}{G_{xy}}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

または

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=C_{11}\varepsilon_x+C_{12}\varepsilon_y\\ \sigma_y&=C_{21}\varepsilon_x+C_{22}\varepsilon_y\\ \tau_{xy}&=C_{66}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

なお $C_{11}=\dfrac{E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}$, $C_{22}=\dfrac{E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}$, $C_{12}=C_{21}=\dfrac{\mu_{yx}E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}=\dfrac{\mu_{xy}E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}$, $C_{66}=G_{xy}$

つぎに垂直応力 σ_x, σ_y およびせん断応力 τ_{xy} によるモーメントを考えると

$$\left.\begin{aligned}M_x&=\int\sigma_x z\,dz\\ M_y&=\int\sigma_y z\,dz\\ M_{xy}&=\int\tau_{xy} z\,dz\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

(1.6) を (1.7) に代入し，板厚全体について積分すると次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}M_x&=-D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_{yx}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ M_y&=-D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\ M_{xy}&=-D_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \frac{h^3}{12} C_{11} = \frac{E_x h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})} \\ D_y &= \frac{h^3}{12} C_{22} = \frac{E_y h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})} \\ D_{xy} &= \frac{h^3}{6} C_{66} = \frac{G_{xy} h^3}{6} \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

D_x, D_y は板剛性といわれるもので梁のばあいの剛性 EI に対応するものであるが，式からも明らかなようにポアソン比による項によって $D>EI$ となっている。

次に，板に垂直に作用するせん断力 Q_x, Q_y について考えると，

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D_x\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu_{yx}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) - D_{xy}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D_y\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu_{xy}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) - D_{xy}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

ここで，板に作用している荷重密度 p_0 とせん断力 Q についての釣合条件から

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_0 = 0 \tag{1.11}$$

(1.10) を (1.11) に代入すると次式がえられる。

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2D_{xy} + \mu_{yx}D_x + \mu_{xy}D_y)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_0 \tag{1.12}$$

上式において $\mu_{yx}D_x = \mu_{xy}D_y$ であり，さらに $\mu_{yx}D_x + D_{xy} = K$ とおけば

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2K\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_0 \tag{1.13}$$

さらに $y = \frac{\eta}{m}$ とおけば

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = m^2\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = m^4\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4}$$

となり，

$$m = \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} = \sqrt[4]{\frac{E_x}{E_y}}$$

とおいて (1.13) を書きかえると，

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2K\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \eta^2} + D_x\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = p_0 \tag{1.14}$$

$\frac{K}{\sqrt{D_x D_y}} = k$ とおき両辺を D_x で除すと，

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2k\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{p_0}{D_x} \tag{1.15}$$

1.2 周辺が単純支持された矩形板の中央に局部的分布荷重を加えるばあいの撓み

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2k\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial \eta^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4}=\frac{p_0}{D_x} \tag{1.15}$$

の解は左辺 $=\Delta\Delta w=0$ とおいた方程式の一般解 w_2 と境界条件により定まる特殊解 w_1 の和としてもとめられる。

$$w = w_1+w_2 \tag{1.16}$$

1.2.1 特殊解 w_1

周辺単純支持の境界条件は Fig. 3 において

$$x=0,\ a:\ w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{1.17}$$

ここで特解として次のような形を考える。

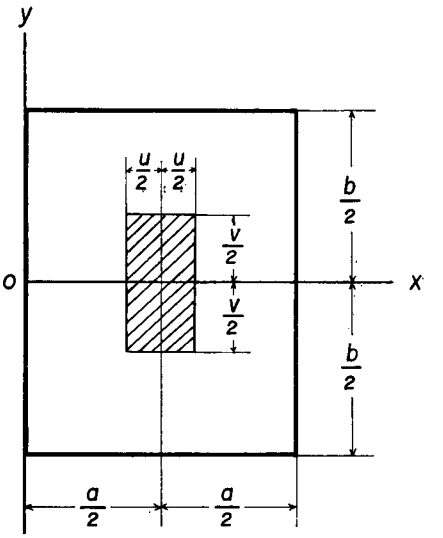

Fig. 3.

$$w_1=\frac{p_0 a^4}{24D_x}\left(\frac{x}{a}-\frac{2x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}\right) \tag{1.18}$$

(1.18) は p_0 が $y=\pm\infty$ の板に一様に分布しているばあいの解であり (1.15), (1.17) を満足する。いまこれをフーリェの sin 級数に展開すれば,

$$w_1=\sum_n a_n \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{1.19}$$

ここで a_n は分布荷重 $p(x)$ によって定まる係数であるから $p(x)$ も同様にフーリェの sin 級数に展開し, さらに $x_0-\frac{u}{2}<x<x_0+\frac{u}{2}$ の範囲で $p=p_0=$const. 他の範囲で $p=0$ であることから a_n を決定すれば次のようになる。

$$a_n=\frac{4p_0a^4}{n^5\pi^5D_x}\sin\frac{n\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi u}{2a} \tag{1.20}$$

$$\therefore\quad w_1=\sum_n^{1,3,\cdots}\frac{4p_0a^4}{n^5\pi^5D_x}\sin\frac{n\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi u}{2a}\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{1.21}$$

とくに $u\to 0$ の線荷重になったばあいには

$$\sin\frac{n\pi u}{2a}\to\frac{n\pi u}{2a},\qquad x_0\to\frac{a}{2}$$

$$\therefore\quad w_1=\sum_n^{1,3,\cdots}\frac{2a^3P}{n^4\pi^4D_x}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{1.22}$$

ただし $\quad P=up_0$

1.2.2 一般解 w_2

これは $\Delta\Delta w=0$ とおいた方程式の一般解をもとめることである。ここで

$$w_2 = \sum_n Y_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$Y_n = e^{\lambda y}$$

とおくとそれぞれ次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{n^4\pi^4}{a^4} e^{\lambda y} \sin\frac{n\pi x}{a} \\
&\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \eta^2} = -\frac{n^2\pi^2\lambda^2}{m^2 a^2} e^{\lambda y} \sin\frac{n\pi x}{a} \\
&\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{\lambda^4}{m^4} e^{\lambda y} \sin\frac{n\pi x}{a}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.23)$$

ここに　$m=\dfrac{y}{\eta}$

さらに　$\varphi=\dfrac{n\pi}{a}$，$\rho=\dfrac{\lambda}{m}$ とおくと

$$\rho^4 - 2k\varphi^2\rho^2 + \varphi^4 = 0 \qquad (1.24)$$

$$\therefore\quad \rho = \pm\varphi\sqrt{k \pm \sqrt{k^2-1}} \qquad (1.25)$$

ここでつぎの3種のばあいが考えられる。

i)　$k > 1$

ii)　$k < 1$

iii)　$k = 1$

i)　$k>1$ のばあい

(1.25) より

$$\rho = \pm\left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{k-1}{2}}\right)\varphi \qquad (1.26)$$

ここで $\lambda=m\rho$ であるから

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1 = m\varphi\left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} + \sqrt{\frac{k-1}{2}}\right) = m\varphi t_1 \\
&\lambda_2 = m\varphi\left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}}\right) = m\varphi t_2
\end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

ゆえに λ の根は相異なる4実根で

$$\lambda_1,\quad -\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad -\lambda_2$$

となる。したがって

$$Y_n = Ae^{\lambda_1 y} + Be^{-\lambda_1 y} + Ce^{\lambda_2 y} + De^{-\lambda_2 y} \qquad (1.28)$$

A, B, C, D は係数

$e^{\lambda y}$ の形を双曲線函数の形に書き改めると

$$Y_n = (A+B)\cosh\lambda_1 y+(A-B)\sinh\lambda_1 y+(C+D)\cosh\lambda_2 y+(C-D)\sinh\lambda_2 y$$

$$\therefore\quad w_2 = (A_1\cosh\lambda_1 y+B_1\sinh\lambda_1 y+C_1\cosh\lambda_2 y+D_1\sinh\lambda_2 y)\sin\frac{n\pi x}{a} \quad (1.29)$$

ここで $A_1=A+B$, $B_1=A-B$, $C_1=C+D$, $D_1=C-D$

ただし $-\frac{v}{2}<y<\frac{v}{2}$ の区間

また $y>\frac{v}{2}$ および $y<-\frac{v}{2}$ の区間では (1.29) の係数が変化するのみであるから,

$$w' = (A_2\cosh\lambda_1 y+B_2\sinh\lambda_1 y+C_2\cosh\lambda_2 y+D_2\sinh\lambda_2 y)\sin\frac{n\pi x}{a} \quad (1.30)$$

また $y=\pm\frac{v}{2}$ で w は同値, $y=0$ で $\frac{\partial w}{\partial y}=0$ を用いて係数 $B_1=D_1=0$ となる。

$-\frac{v}{2}<y<\frac{v}{2}$ の区間では

$$\therefore\quad w = w_1+w_2 = (a_n+A_1\cosh\lambda_1 y+C_1\cosh\lambda_2 y)\sin\frac{n\pi x}{a} \quad (1.31)$$

つぎに $y=\frac{v}{2}$ における (1.30), (1.31) の連続条件から $w=w'$, $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w'}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 w'}{\partial y^3}$

また $y=\frac{b}{2}$ において $w'=0$, $\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}=0$

以上によって (1.30), (1.31) の係数をもとめると

$$A_1 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\cdot\frac{\cosh\gamma_1}{\cosh\alpha_1}a_n = a_n d_2\frac{\cosh\gamma_1}{\cosh\alpha_1}$$

$$C_1 = \frac{-\lambda_1^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\cdot\frac{\cosh\gamma_2}{\cosh\alpha_2}a_n = -a_n d_1\frac{\cosh\gamma_2}{\cosh\alpha_2}$$

$$A_2 = \frac{-\lambda_2^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\sinh\beta_1\tanh\alpha_1\cdot a_n = -a_n d_2\sinh\beta_1\tanh\alpha_1$$

$$B_2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\sinh\beta_1 a_n = a_n d_2\sinh\beta_1$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\sinh\beta_2\tanh\alpha_2 a_n = a_n d_1\sinh\beta_2\tanh\alpha_2$$

$$D_2 = \frac{-\lambda_1^2}{\lambda_1'-\lambda_2^2}\sinh\beta_2 a_n = -a_n d_1\sinh\beta_2$$

ただし $d_1=\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}$, $d_2=\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}$, $\alpha_1=\frac{b\lambda_1}{2}$, $\alpha_2=\frac{b\lambda_2}{2}$, $\beta_1=\frac{v\lambda_1}{2}$, $\beta_2=\frac{v\lambda_2}{2}$,

$\gamma_1=\alpha_1-\beta_1$, $\gamma_2=\alpha_2-\beta_2$

以上の係数を用いて矩形板に局部的分布荷重が加わったばあいの撓みが求められる。次に分布荷重 p_0 の範囲が無限に小さくなった時を考えると $u\to 0$, $v\to 0$, $p_0uv=P$ となり, 集中荷重 P が加えられたばあいとなる。このばあいは

$$\sin\frac{n\pi u}{2a}=\frac{n\pi u}{2a},\quad \sin\frac{v\lambda}{2}=\frac{v\lambda}{2},\quad \cos\frac{v\lambda}{2}=1,$$

$$\sinh\frac{v\lambda}{2}=\frac{v\lambda}{2},\qquad \cosh\frac{v\lambda}{2}=1,$$
$$\cosh(\alpha_1-\beta_1)=\cosh\alpha_1-\beta_1\sinh\alpha_1,$$
$$\sinh(\alpha_2-\beta_2)=\cosh\alpha_2-\beta_2\sinh\alpha_2$$

とおいて任意の位置の撓み w および最大撓み $w_0\left(y=0,\ x=\frac{a}{2}\right)$ を求めると次のようになる。

$$w_{(x,y)}=\frac{a^2mP}{\pi^3(t_1^2-t_2^2)D_x}\sum_n^{1,3,\cdots}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3}\Big\{t_2(\sinh\lambda_1y-\tanh\alpha_1\cosh\lambda_1y)$$
$$-t_1(\sinh\lambda_2y-\tanh\alpha_2\cosh\lambda_2y)\Big\}\sin\frac{n\pi x}{a}\qquad(1.32)$$

$$w_{0(x=a/2;\ y=0)}=\frac{a^2mP}{2\pi^3\sqrt{k^2-1}\,D_x}\sum_n^{1,3,\cdots}\frac{1}{n^3}(t_1\tanh\alpha_2-t_2\tanh\alpha_1)\qquad(1.33)$$

または

$$w_0=f(k)\cdot\frac{a^2P}{D_x};\quad f(k)=\frac{m}{2\pi\sqrt{k^2-1}}\sum_n^{1,3,\cdots}\frac{1}{n^3}(t_1\tanh\alpha_2-t_2\tanh\alpha_1)\qquad(1.34)$$

ここに　$m=\sqrt[4]{\frac{E_x}{E_y}}$，$t_1=\sqrt{\frac{k+1}{2}}+\sqrt{\frac{k-1}{2}}$，$t_2=\sqrt{\frac{k+1}{2}}-\sqrt{\frac{k-1}{2}}$，

$$\alpha_1=\frac{bm\varphi}{2}t_1,\quad \alpha_2=\frac{bm\varphi}{2}t_2,\quad \varphi=\frac{n\pi}{a}$$

a,b は x,y 方向の辺長

ii)　$k<1$ のばあい

(1.24) 式の根を λ であらわすと

$$\lambda=\pm m\varphi\left(\sqrt{\frac{1+k}{2}}\pm i\sqrt{\frac{1-k}{2}}\right)$$

ここで　$\varphi=\frac{n\pi}{a}$

$$\lambda_1=m\varphi\sqrt{\frac{1+k}{2}}=m\varphi t_1$$
$$\lambda_2=m\varphi\sqrt{\frac{1-k}{2}}=m\varphi t_2$$

とおけば

$$Y_n=Ae^{(\lambda_1+i\lambda_2)y}+Be^{(\lambda_1-i\lambda_2)y}+Ce^{-(\lambda_1+i\lambda_2)y}+De^{-(\lambda_1-i\lambda_2)y}$$
$$\therefore\quad Y_n=A_1\sinh\lambda_1y\sin\lambda_2y+B_1\sinh\lambda_1y\cos\lambda_2y$$
$$+C_1\cosh\lambda_1y\sin\lambda_2y+D_1\cosh\lambda_1y\cos\lambda_2y$$

以下前に述べた $k>1$ のばあいと同様な境界条件をもちいて係数の決定をし，$u\to0$,

$v\to 0$ によって中央集中荷重のばあいの撓み w, w_0 を求めると次のようになる。

$$w_{(x,y)}=\frac{a^2mP}{2t_1t_2\pi^3D_x}\sum_{n}^{1,3,\cdots}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi x}{a}}{\cosh 2\alpha_1+\cos 2\alpha_2}$$
$$\times\Big[-(t_1\sinh 2\alpha_1+t_2\sin 2\alpha_2)\sinh\lambda_1 y\sin\lambda_2 y-t_2(\cosh 2\alpha_1$$
$$+\cos 2\alpha_2)\sinh\lambda_1 y\cos\lambda_2 y+t_1(\cosh 2\alpha_1+\cos 2\alpha_2)\cosh\lambda_1 y\sin\lambda_2 y$$
$$+(t_2\sinh 2\alpha_1-t_1\sin 2\alpha_2)\cosh\lambda_1 y\cos\lambda_2 y\Big] \tag{1.35}$$

$$w_{0(x=a/2;\ y=0)}=\frac{a^2mP}{\pi^3\sqrt{1-k^2}\,D_x}\sum_{n}^{1,3,\cdots}\frac{1}{n^3}\frac{t_2\sinh 2\alpha_1-t_1\sin 2\alpha_2}{\cosh 2\alpha_1+\cos 2\alpha_2} \tag{1.36}$$

または

$$w_0=f(k)\cdot\frac{a^2P}{D_x};\quad f(k)=\frac{m}{\pi^3\sqrt{1-k^2}}\sum_{n}^{1,3,\cdots}\frac{1}{n^3}\frac{t_2\sinh 2\alpha_1-t_1\sin 2\alpha_2}{\cosh 2\alpha_1+\cos 2\alpha_2} \tag{1.37}$$

ここで $m=\sqrt[4]{\dfrac{E_x}{E_y}}$, $t_1=\sqrt{\dfrac{1+k}{2}}$, $t_2=\sqrt{\dfrac{1-k}{2}}$,

$\alpha_1=\dfrac{bm\varphi}{2}t_1$, $\alpha_2=\dfrac{bm\varphi}{2}t_2$, $\varphi=\dfrac{n\pi}{a}$

、 a,b は x,y 方向の辺長

iii) $k=1$ のばあい

$\lambda=\pm m\varphi$ で重根

$$Y_n=A_1\cosh m\varphi y+B_1 m\varphi y\sinh m\varphi y+C_1\sinh m\varphi y+D_1\cdot m\varphi y\cosh m\varphi y$$

となり，$u\to 0$; $v\to 0$ によって，集中荷重のばあいの撓み w, w_0 をもとめると

$$w_{(x,y)}=\frac{a^2mP}{2\pi^3D_x}\sum_{n}^{1,3,\cdots}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3}\Big\{(\tanh\alpha-\alpha\operatorname{sech}^2\alpha+m\varphi y)\cosh m\varphi y$$
$$-(1+m\varphi y\tanh\alpha)\sinh m\varphi y\Big\}\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{1.38}$$

$$w_{0(x=a/2;\ y=0)}=\frac{a^2mP}{2\pi^3D_x}\sum_{n}^{1,3,\cdots}\frac{1}{n^3}\left(\tanh\alpha-\frac{\alpha}{\cosh^2\alpha}\right) \tag{1.39}$$

$$w_0=f(k)\cdot\frac{a^2P}{D_x}$$
$$f(k)=\frac{m}{2\pi^3}\sum_{n}^{1,3,\cdots}\left(\tanh\alpha-\frac{\alpha}{\cosh^2\alpha}\right) \tag{1.40}$$

ここで $m=\sqrt[4]{\frac{E_x}{E_y}}$; $\varphi=\frac{n\pi}{a}$; $\alpha=\frac{bmn\pi}{2a}$

a, b は x, y 方向の辺長

2. 実験方法

2.1 試料

公称厚 3 mm および 6 mm の 3 ply シナ合板と，3 mm および 5 mm の S2S 繊維板を試料としてもちいた。合板は北海道立林産試験場製のタイプ II 合板であり，構成は表面単板の合計厚さとコア単板の厚さが等しくなるようにしたものである。繊維板は松岡木材株式会社製の市販のものである。各試料の平均厚さ，比重，含水率を Table 1 に示す。平板実験用の 45×45 cm の正方形板を Table 1 に示す数だけ木取ったあとで，残りの部分から基礎弾性定数測定用の試験片を作成した。

Table 1. Test materials and number of specimen

Test Material	Notation	Thickness (cm)	Specific Gravity	MC (%)	No. of Specimen*	
					0°	45°
Shinanoki Plywood (Basswood)	A	0.319	0.56	10.6	4	3
	B	0.615	0.48	11.0	4	3
Hard Board	C	0.326	0.98	6.8	4	
	D	0.473	1.09	6.9	4	

* Size of specimen: 45×45 cm

2.2 基礎弾性定数の測定方法

すでに矩形板の曲げ理論式の項であきらかなように，矩形板の曲げ撓み量はその板材料がもっている $D_x, D_y, D_{xy}, \mu_{xy}, \mu_{yx}$ および板の寸法と荷重の大きさによって定まる。このうちはじめの 3 個の係数は (1.9) 式により計算されるので実際には，その板材料の曲げヤング係数 E，せん断弾性係数 G およびポアソン比 μ を実測し数値をもとめれば，理論撓みの計算をおこなうことができる。

2.2.1 曲げヤング係数 (E)

曲げヤング係数の測定は，合板の表板繊維方向がスパン方向に対して 0°, 45°, 90° の傾斜をもつ試験片についておこなった。ハードボードにおいては成板方向を 0° とした。試験片の幅は 5 cm とし，曲げのスパンは 24 cm に定めた。このような試験片を各々 4 本づつ木取りして，錘による死荷重をスパン中央に加えて撓みをダイアルゲージで測定した。撓みは板厚の 1/2 程度になるようにし，測定はすべて板の両面についておこなった。

2.2.2 せん断弾性係数 (G)

ここで考えるせん断弾性係数は，木質板の板面内におけるせん断変形に関与するものであって，板厚方向のせん断変形に関与するいわゆる rolling shear のせん断弾性係数ではない。測定法については，直接せん断による方法，曲げねじりによる方法あるいは他の弾性定数から算出する方法などが考えられるが，この研究では，できるかぎり板の曲げに近い形での測定という意味で plate shear 法をもちいた。この方法についても，1点荷重法と2点荷重法があるが，3 mm 程度のうすものについては2点荷重法は技術的に困難が伴い，荷重一撓みの関係も直線性が非常に悪いことから1点荷重法を採用した。

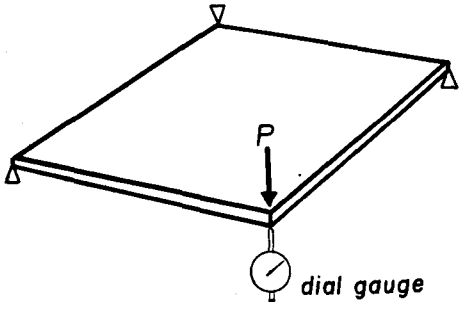

Fig. 4. Sketch of a plate shear experiment by 1-point loading

測定はすべて 25×25 cm の正方形板についておこなった。試験片の繊維方向は辺に対して 0° (=90°) および 45° の2種である。試験方法は Fg. 4 に示すように3点を単純支持した正方形板の1点に荷重 P を加えてその点の撓み δ を測定するものである。撓みの測定には精度 1/100 mm のダイアルゲージをもちい，撓みはいずれも板厚以内とした。計算は次式によった。

$$G=\frac{3a^2P}{\delta h^3}$$

ここで a, h は板の辺長および厚さ，P は荷重，δ は荷重点の撓みである。

2.2.3 ポアソン比 (μ)

ポアソン比はその定義からいえば，ある材料に軸方向の応力を加えそのばあいの軸方向の歪と軸に直角方向の歪とを測定するともとめられるものである。そこで通常は圧縮あるいは引張試験によって両方向の歪を測定する方法がとられている。

MAXWELL の定理から $E_1\mu_{21}=E_2\mu_{12}$ という関係が成立するが，この実験にもちいた合板の構成は表単板の合計厚さがコア単板の厚さと等しいものであるから，圧縮試験あるいは引張試験によるかぎり上の等式中の E_1 と E_2 は等しくなり，故に $\mu_{12}=\mu_{21}$ とならねばならない。しかし合板の曲げヤング係数は通常のばあい 0° 方向と 90° 方向では等しくはならず上の等式が曲げにおいても成立すると考えるならば $\mu_{0°}$ と $\mu_{90°}$ は等しくないはずである。そこで，この研究では曲げによるポアソン比の実測を試みた。

曲げヤング係数の測定を終えたもののうちから各方向について2本づつをポアソン比測定用の試験片とした。歪測定のために試験片の中央部に strain gauge 2枚を直角に接着した。この試験片の両端に木製のつかみをとりつけ，Fig. 5 に示すように2点荷重を加

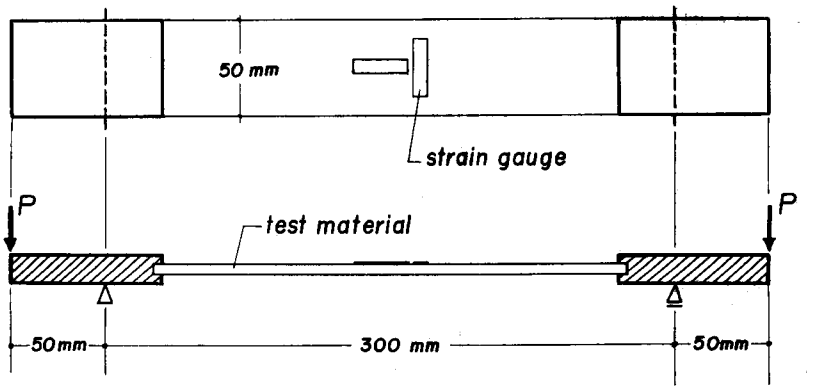

Fig. 5. Test apparatus for measuring Poisson's ratios in bending

えて試験片が一様な曲げモーメントを受けるようにした。使用した strain gauge (31 mm ペーパーゲージ) および strain meter は共和電業株式会社製のものである。

2.3 矩形板の曲げ試験方法

40×75 mm の鉄製チャンネルを組合わせて内側の寸法が 40×40 cm の方形鉄枠を作成した。この枠の上面にナラ材の support edge を固定して支持枠とした。このばあいの支持線の間隔は 41 cm になる。周辺単純支持のばあいには Fig. 6 (a) に示すように，直接木質板をのせて実験をおこなったが，周辺固定の条件をうるためにはさらにこの上から木

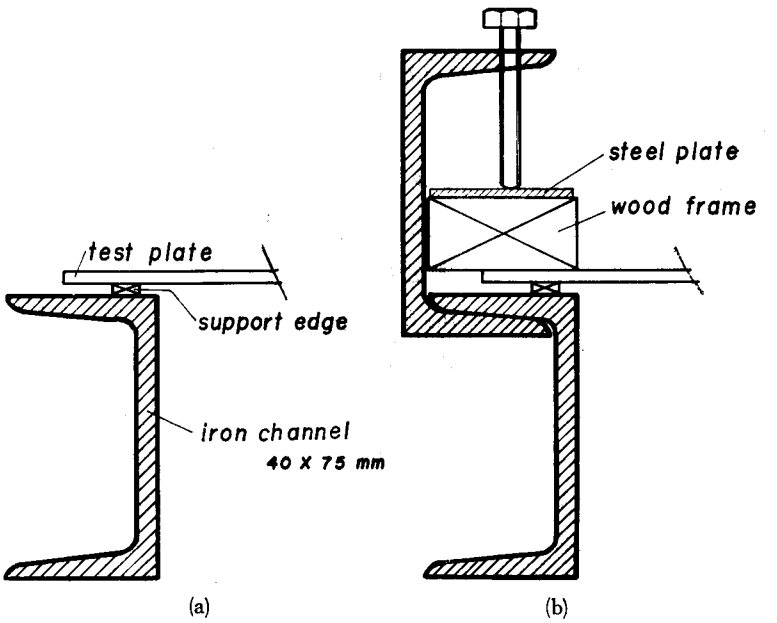

Fig. 6. Cross-sectional view of apparatus for loading a rectangular plate
(a) edges simply supported (b) edges clamped

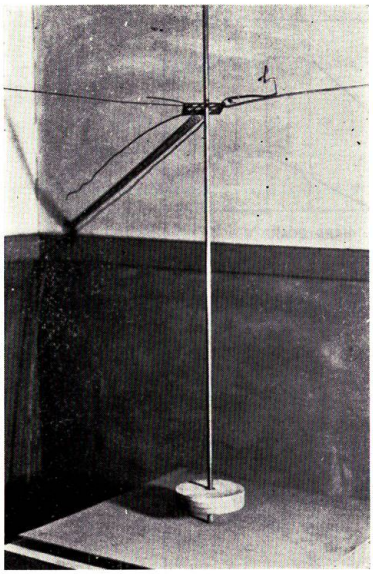

Fig. 7. Method of loading

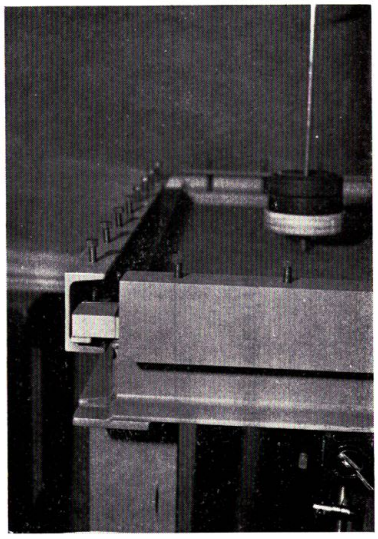

Fig. 8. A view of a clamped plate

枠と鋼板とを介してボルトでクランプ締めにした (Fig. 6 (b))。荷重は Fig. 7, 8 に示すように，鉄の丸棒に木皿をつけてその上から錘によって加え，撓みは板の下面で精度 1/100 mm，10 mm ストロークのダイアルゲージをもちいて測定した。撓みは板厚の 1/2 とし，板の両面について測定した。

3. 実験結果と考察

3.1 基礎弾性定数

3.1.1 曲げヤング係数

結果は Table 2 に示すとおりであるが，このうちで $E_{45°}$ に関しては試験片の幅の影響を考慮する必要があろう。すなわちポアソン比 $\mu_{45°}$ が他の方向の μ に比較して大きな値をとるために，2.2 で述べた条件による曲げ試験片は梁と板の中間的な存在と考えるべきであるからである。この点については現在実験を進めており，その結果の一部を Fig. 9 に示す。もちいた試験片はこの実験と同一の板から木取ったものではないが，その傾向はあきらかに μ の値の大きなものほど見かけの曲げヤング係数の変動が大きい。特に 45° 試験片では A 板，B 板ともに同様の傾向を示し，試験片の幅による影響が顕著にあらわれている。本実験ではヤング係数の測定の条件として試験片の幅を 5 cm，スパンを 24 cm に定めたが，このばあいの b/l をみると 0.21 となり Fig. 9 によるならば試験片幅の影響を受けているとみるべきである。

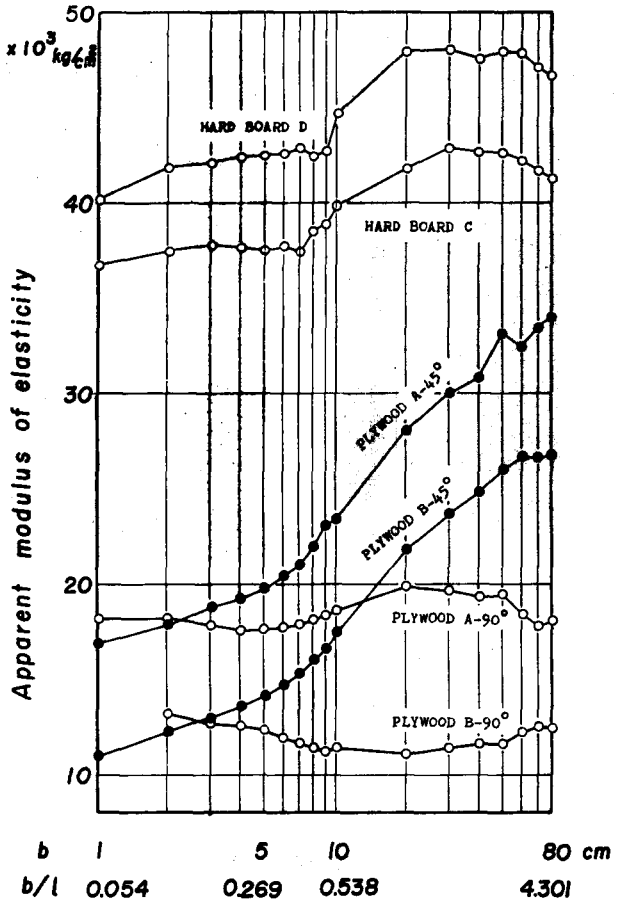

Fig. 9. Apparent modulus of elasticity in relation to the width of a bending specimen

b: width of specimen
l: length of bending span = 18.6 cm

Table 2. Basic constants of test materials (average values)

Panel	E ($\times 10^3$ kg/cm^2)			G ($\times 10^3$ kg/cm^2)		μ		
	0°	45°	90°	0°	45°	0°	45°	90°
A	102.4	22.3	20.0	9.3	18.8	0.168	0.418	0.030
B	76.7	16.1	14.7	6.2	12.5	0.191	0.374	0.020
C	36.5			16.4		0.228		
D	49.1			20.8		0.223		

Note: E: Modulus of elasticity from bending experiment
G: Modulus of rigidity from plate shear experiment
μ: Poisson's ratio from bending experiment

Table 3. Observed values of rigidity modulus ($\times 10^3$ kg/cm^2)

	Thickness (cm)	No. of Plies	MC (%)	$G_{0°}$	$G_{45°}$	$G_{45°}/G_{0°}$	Reference
Lauan Plywood	0.3	3	11	9.8	16.7	1.7	(2)
	0.6	3	11	5.6	15.8	2.8	
	0.9	5	10	5.9	28.2	4.8	
	1.2	5	10	5.4	24.0	4.4	
	1.5	5	10	5.4	32.2	6.0	
	1.2	5	12	7.4	43.3	5.9	(3)
	1.5	5	12	7.6	49.7	6.5	
	1.8	7	13	8.8	48.8	5.5	

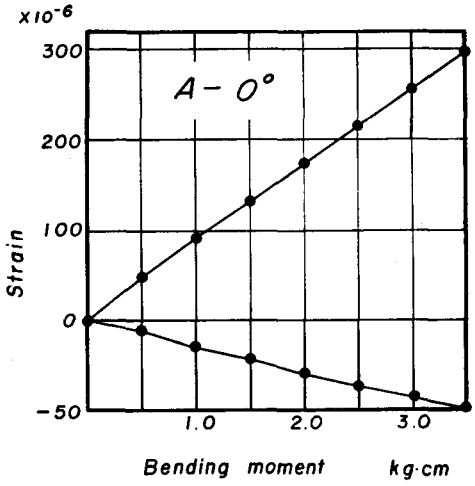

Fig. 10.

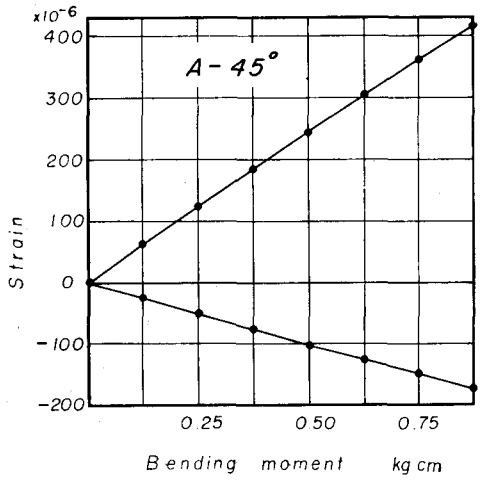

Fig. 11.

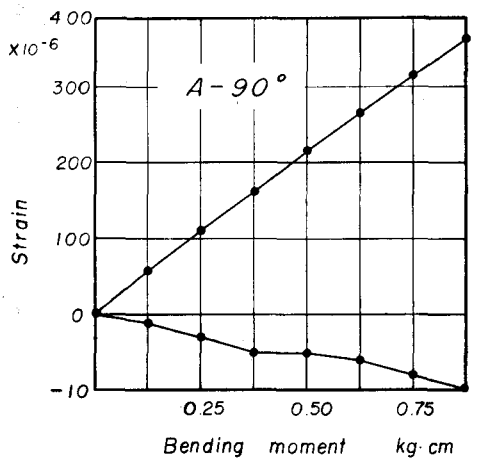

Fig. 12.

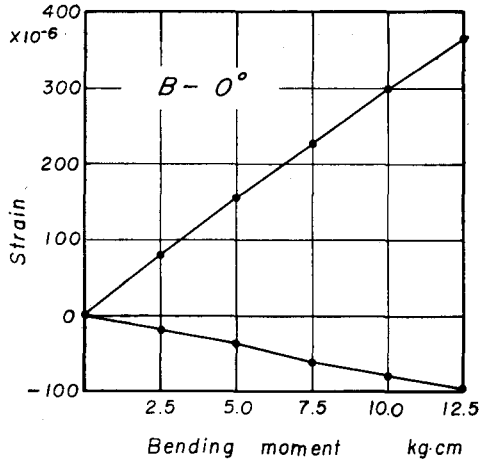

Fig. 13.

3.1.2 せん断弾性係数

結果は Table 2 に示すとおりである。この試料においては $G_{45°}$ が $G_{0°}$ の約2倍となっている。しかし，これまでに知られているラワン合板の厚板では $G_{45°}$ は $G_{0°}$ の5～6倍のものが多いようである (Table 3)。これについては G の測定値の安定性について，特に木取角度の変化に関連して実験的に検討をすすめてゆく必要がある。

3.1.3 ポアソン比

数値は Table 2 に示す。この測定においては，試験片の大きさや strain gauge を接着する位置がポアソン比の値に影響することが考えられるが，この実験では板の種類に関係なく，Fig. 5 に示すように試験片の幅を 5 cm スパンを 30 cm に定めて測定をおこなっ

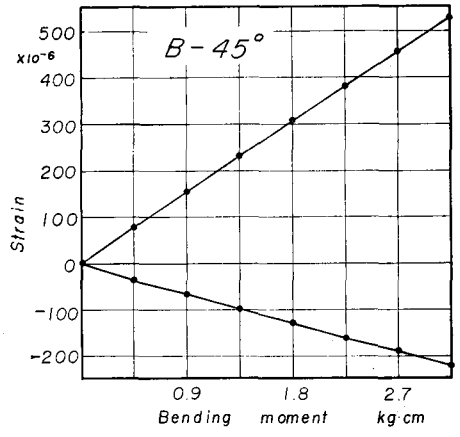

Fig. 14.

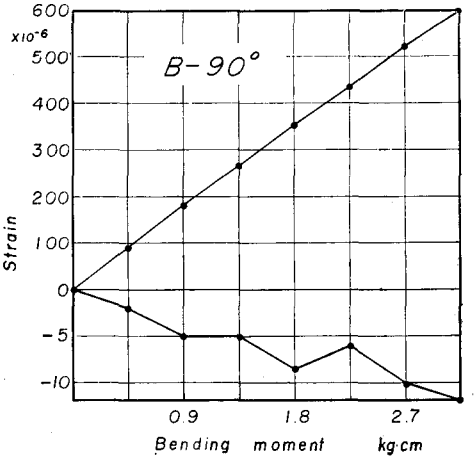

Fig. 15.

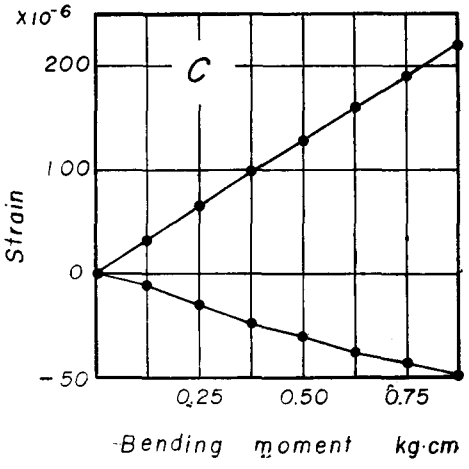

Fig. 16.

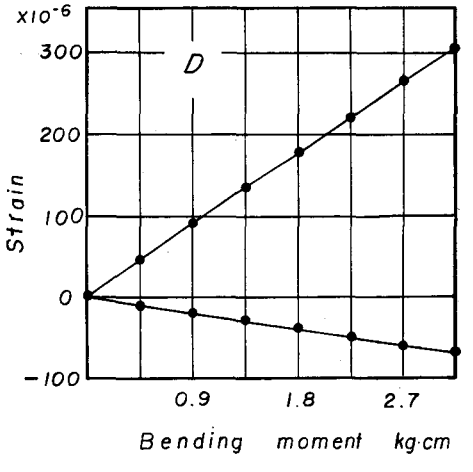

Fig. 17.

Figs. 10～17. Observed bending moment-strain relations

た。実測結果を Fig. 10～Fig. 17 に示してあるが，どの図においても，スパン方向の引張歪――図では正の strain――は両端末に加えたモーメントの増加により直線的に変化している。一方，スパンに直角の方向の縮みは 90° 試験片においては著しく小さくそのために直線性がよくない。0°, 45° 試験片では，両方向の歪の絶対量が大きくなり，測定値は安定している。

3.2 矩形板の撓み

撓みの理論値は，板の弾性定数によって定まる k の値により (1.33) あるいは (1.36) 式のどちらかをもちいて計算をするともとめられる。そこでまず，Table 2 の 3 個の基礎弾性定数をもちいてそれぞれの板についての k を計算すると Table 4 に示すように 0° 合板については $k<1$ となり，45° 合板およびハードボードでは $k>1$ となる。これにより，45° 合板およびハードボードは (1.33) 式により，0° (=90°) 合板は (1.36) 式をもちいて理論撓みの計算をおこなえばよいことがわかる。ここで，各数値をそれぞれ理論式に代入して計算することは煩雑であるので，理論式を次のようにおき，$f(k)$ についての計算図表をあらかじめ作成しておくと便利である。

$$w_0 = \frac{a^2 P}{D_x} \cdot f(k) \qquad (1.34)\ (1.37)$$

ここで $f(k)$ は k の値および板の寸法によって定まる係数である。Fig. 18 はこの実験における条件である正方形板 ($a \times a$ cm) についての計算図表である。Table 5 は k の値か

Table 4. Calculated constants* of the plates

Panel	h	$1-\mu_{xy}\mu_{yx}$	D_x	D_y	D_{xy}	$\mu_{xy}D_y$	$\mu_{xy}D_x$	k	m
A- 0°	0.318	0.9950	53.9	276.1	49.9	8.28	9.06	0.480	0.6648
A-45°	0.320	0.8254	73.9	73.9	102.6	30.9	30.9	1.809	1
B- 0°	0.613	0.9962	283.4	1478.8	238.0	29.6	54.1	0.432	0.6617
B-45°	0.617	0.8602	365.8	365.8	489.0	136.8	136.8	1.710	1
C	0.326	0.9480	111.4	111.4	94.9	25.4	25.4	1.080	1
D	0.473	0.9502	456.1	456.1	367.0	101.7	101.7	1.028	1

* Calculated from the values in Table 2.

Note: h: Thickness of the plate (cm)

D_x: $\dfrac{E_x h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}$

D_y: $\dfrac{E_y h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}$

D_{xy}: $\dfrac{G_{xy} h^3}{6}$

k: $\dfrac{\mu_{yx}D_x + D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}$

m: $\sqrt[4]{\dfrac{D_x}{D_y}} = \sqrt[4]{\dfrac{E_x}{E_y}}$

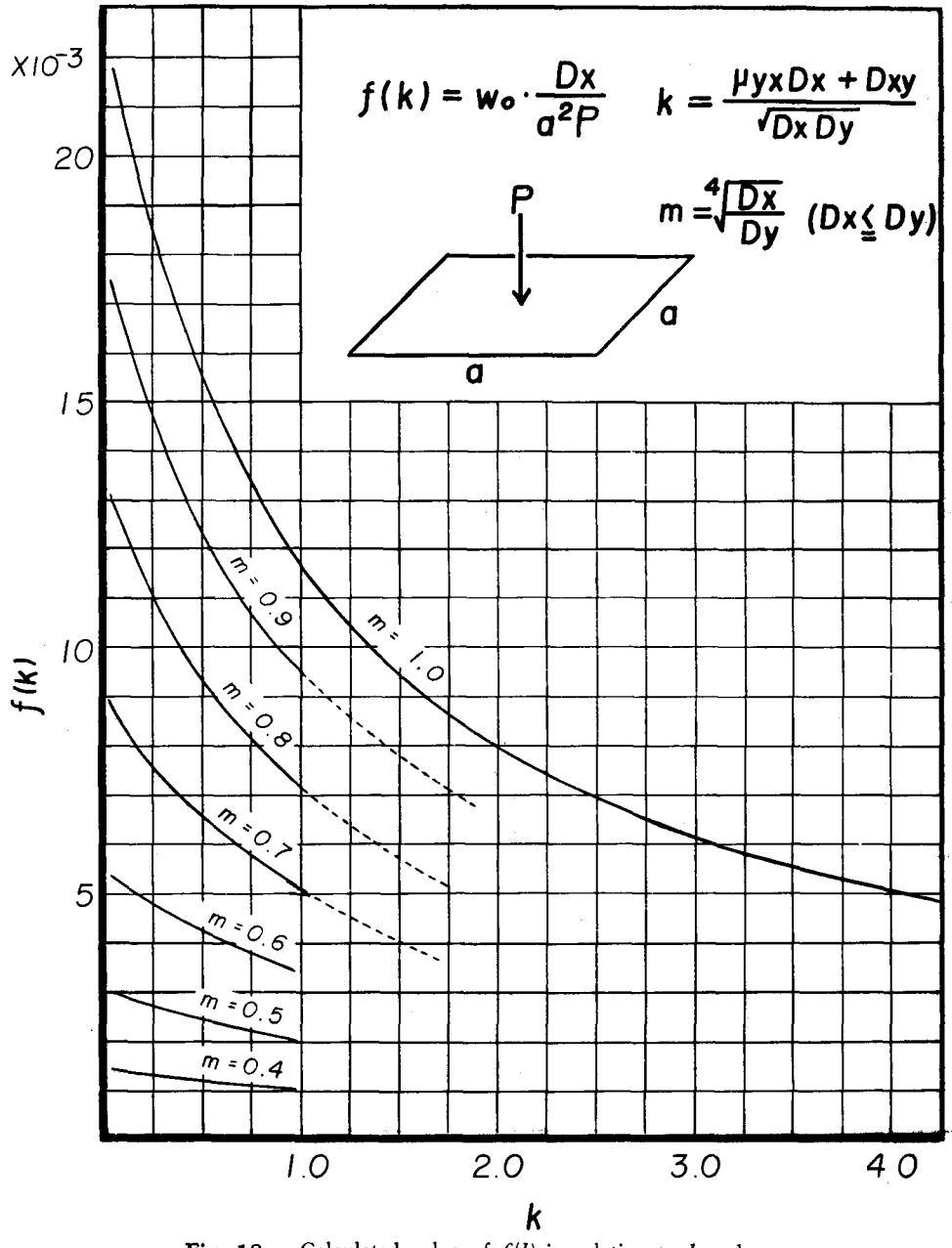

Fig. 18. Calculated value of $f(k)$ in relation to k and m

ら$f(k)$を図でもとめ，これに Table 4 の D_x，辺長 $a=41$ cm および荷重 $P=1$ kg を代入したときの中央撓み w_0 を示したものである。この理論値からいうと，A 板，B 板ともに 45° 木取のものの撓みが 0° 木取のものの撓みよりわずかに大きくなるが，ほぼ等しいことが知られる。また C 板，D 板については，k の値が 1 に近く，このことから，ハードボード

Table 5. Theoretical deflection at the centre of the plate w_0' ($\times 10^{-3}$ cm/kg)

Panel	k	m	$f(k)$	w_0'
A- 0°	0.480	0.6648	5.8×10^{-3}	181.0
A-45°	1.809	1	8.3×10^{-3}	189.0
B- 0°	0.432	0.6617	5.9×10^{-3}	35.0
B-45°	1.710	1	8.6×10^{-3}	39.5
C	1.080	1	11.0×10^{-3}	166.0
D	1.028	1	11.5×10^{-3}	42.4

は板面内ではほとんど等方性材料に近いとみることができる。

3.3 理論撓みと実測撓みの比較

実験では，板の周辺を単純に支持したばあいと，さらに周辺をボルトでクランプ締めにしたばあいの両方について，板中央の撓みを実測した。この結果が Fig. 19～24 であるが，単純支持においてはどのばあいにも荷重一撓みの関係が直線的でなく，荷重増加に伴いその撓み増加が減少する傾向を有している。これに対し周辺固定のばあいにはむしろ直

Table 6. Observed deflection at the centre of the plate ($a=41$ cm)

Plywood

	Panel No.	w_0	w_{0c}	w_{0c}/w_0
0°	A 1	137.5	81.3	0.591
	A 2	157.0	97.4	0.621
	A 3	154.0	92.6	0.601
	A 4	147.5	83.4	0.565
	Average	149.0	88.7	**0.595**
	B 1	32.9	18.6	0.565
	B 2	31.1	19.0	0.611
	B 3	29.4	17.8	0.606
	B 4	29.5	17.6	0.597
	Average	30.7	18.3	**0.596**
45°	A 1	150.0	100.6	0.671
	A 2	132.0	90.3	0.684
	A 3	164.5	104.4	0.635
	Average	148.8	98.4	**0.661**
	B 1	33.7	19.1	0.567
	B 2	30.7	17.5	0.570
	B 3	31.8	17.8	0.560
	Average	32.1	18.1	**0.564**

Table 6. (Continued)

Hard Board

	Panel No.	w_0	w_{0c}	w_{0c}/w_0
	C 1	126.3	79.0	0.625
	C 2	128.0	80.8	0.631
	C 3	129.2	82.9	0.641
	C 4	128.0	87.4	0.683
	Average	127.9	82.5	**0.645**
	D 1	42.7	24.6	0.576
	D 2	41.8	23.5	0.562
	D 3	43.0	25.0	0.581
	D 4	40.0	23.1	0.577
	Average	41.9	24.1	**0.575**
Total average				**0.606**

Note: w_0: Edges simply supported ($\times 10^{-3}$ cm/kg)
w_{0c}: Edges clamped ($\times 10^{-3}$ cm/kg)

Table 7. Comparisons of observed and theoretical deflections, edges simply supported

Panel	w_0	w_0'	w_0/w_0'
A- 0°	149.0	181.0	0.825
A-45°	148.8	189.0	0.785
B- 0°	30.7	35.0	0.875
B-45°	32.1	39.5	0.815
C	127.9	166.0	0.770
D	41.9	42.4	0.990
Average			**0.843**

Note: w_0: Observed deflection at the centre of the plate
w_0': Theoretical deflection at the centre of the plate

線的に撓みが増加している。この原因として考えられることは，板の初期変形による周辺の不均等な支持が考えられる。Table 6 は荷重 1 kg あたりの平均実測撓みおよび固定撓みと単純支持撓みの比を示している。これによると，クランプ締めによって撓みは板の種類に関係なく単純支持のほぼ60% に減少している。

Table 7 は周辺単純支持における実測撓みと理論撓みの比を示したものである。平均値は 0.843 であり，このことからこの実験での単純支持が理想的な支持条件を現わしていないことが指摘される。一方理論撓みの算出には 3 個の基礎弾性定数の実測という過程を経ており，そのために生じたと思われる理論値の誤差などの問題点については今後の研究

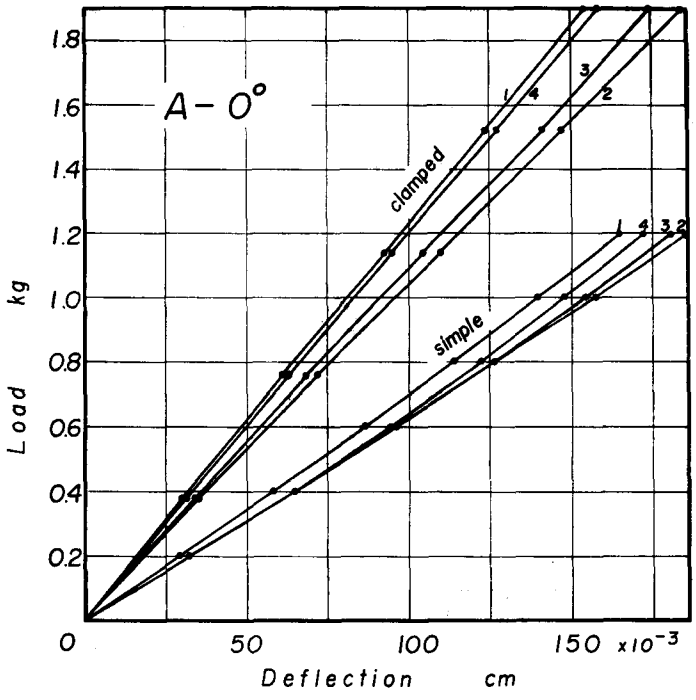
A-0°
clamped
simple
Load kg
Deflection cm
0
50
100
150 x10⁻³
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8

Fig. 19.

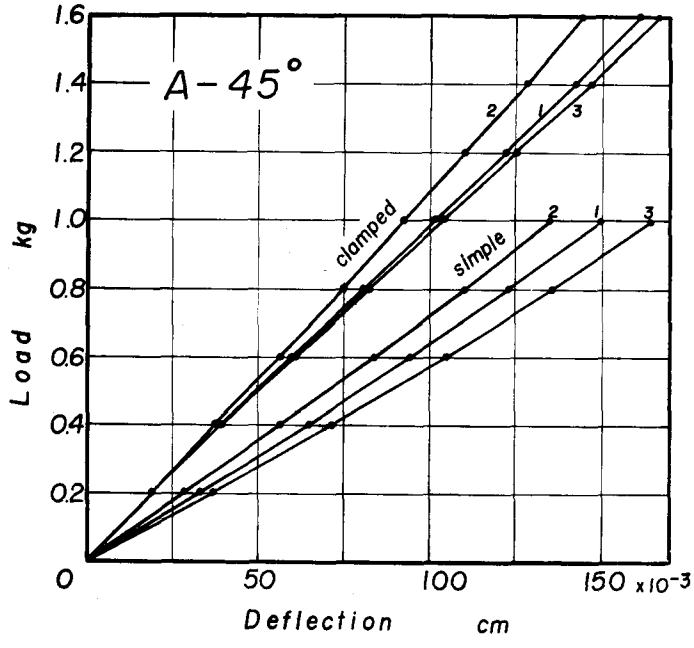
A-45°
clamped
simple
Load kg
Deflection cm
0
50
100
150 x10⁻³
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6

Fig. 20.

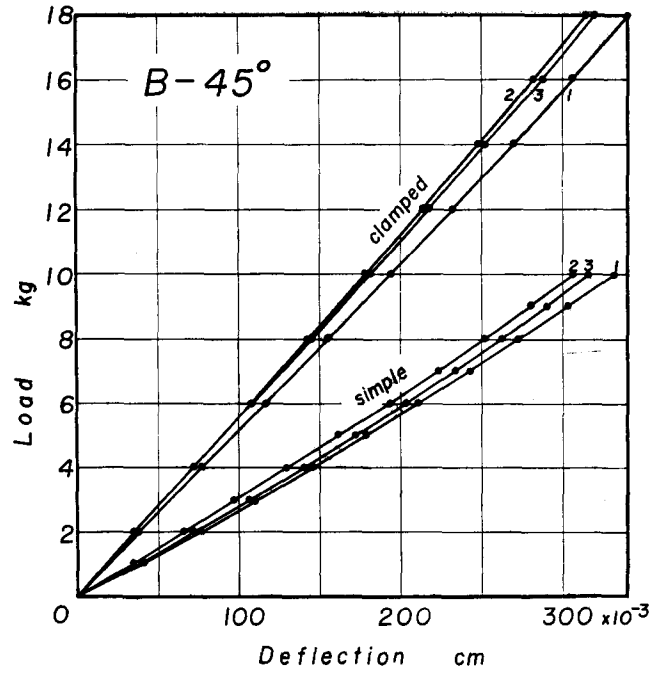
B-45°
clamped
simple
Load kg
Deflection cm
0
100
200
300 x10⁻³
2
4
6
8
10
12
14
16
18

Fig. 21.

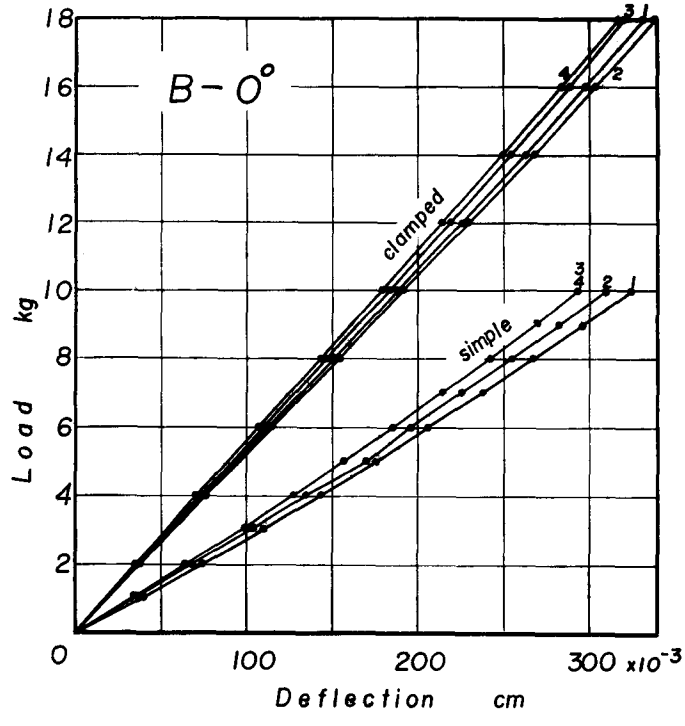
B-0°
clamped
simple
Load kg
Deflection cm
0
100
200
300 x10⁻³
2
4
6
8
10
12
14
16
18

Fig. 22.

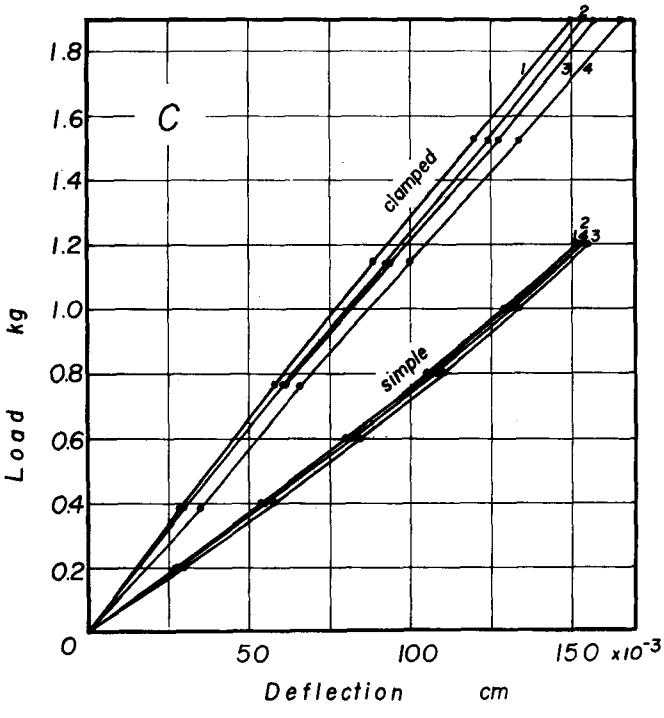

Fig. 23.

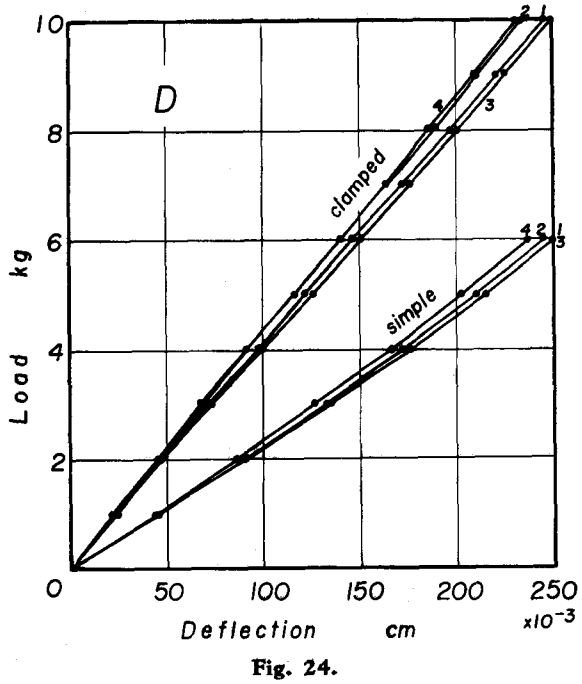

Fig. 24.

Figs. 19~24. Observed load-deflection diagrams of the plates

で検討する必要があろう。

むすび

直交異方性矩形板として，シナ3mmおよび6mm合板，ハードボード3mmおよび5mmの4種を使用しそれぞれの0°および45°木取のものについて周辺単純支持，中央集中荷重条件のもとで曲げ試験をおこなった。同時に，あらかじめ誘導した理論式による計算をおこなって比較した結果，基礎弾性定数とくに $E_{45°}$ およびポアソン比の測定，周辺支持条件などについてはなお検討すべき問題もあるが，概してよく一致していることを知った。またこのばあい，実測値はつねに理論値よりも小さいことから実用上からみてその誤差は安全側にあるものと思われる。この研究では周辺固定の実験もおこなったが，固定条件の付与には実験装置上の問題もあり，またこのばあいの理論式の検討も充分ではないので，参考的におこなったにすぎない。こんごはさらに周辺固定支持，等分布荷重条件のものについても理論的ならびに実験的検討を加えてゆく考えである。

文献

1) MARCH, H. W.: Flat Plates of Plywood under Uniform or Concentrated Loads. U. S. Dept. Agr. Mimeo No. 1312 (1942).
2) 北海道大学農学部林産学科木材加工学研究室資料 (1966)—未発表.
3) 合板強度利用研究委員会： 合板の強度利用に関する研究 1. (1965).

Summary

This report represents data on central deflections of the rectangular plates under a concentrated load at the centre. The plate is at first simply supported on four edges and then clamped. The deflections of all plates were measured under two conditions mensioned above. Test materials, A, B, C and D, are shown in Table 1.

The theoretical equations are derived from the small deflection theory of the plate. Simultaneously, three elastic constants, modulus of elasticity (E), modulus of rigidity (G) and Poisson's ratio (μ) are measured on each plate to calculate theoretical deflections by the equations derived.

Properties of panels used in this experiment are shown in Table 2. Test method and apparatus are illustrated in Figs. 4-8.

The results of test are summerized as follows:

1) Under the condition of clamped edges, the average deflection observed is about 60% of that of simply supported plate (Table 6).

2) At the plates with simply supported edges, the observed central deflections are smaller than those calculated by the equation, which is based on the exact analysis of ideal cases. On the average they are about 15% smaller (Table 7).