連測値の整理に就て (I)

正中時附近に於ける連測値の整理に就て

平　岩　　節　（航海運用学教室）

ON THE TREATMENT OF SUCCESSIVE OBSERVED ALTITUDES.

(I) ON THE TREATMENT OF SUCCESSIVE OBSERVED ALTITUDES NEAR THE MERIDIAN.

Takashi HIRAIWA.
(Faculty of Fisheries, Hokkaido University)

In the case of the observation of the altitude of a heavenly body at sea, the exact value for altitude is seldom attained by one observation, and needs successive ones, it being affected by various causes.

For the determination of a ship's position, it is necessary and important to deduce the most reliable altitude for a series of several altitudes observed successively. I stated about it before in my treatise" On the treatment of successive observed altitudes (I)". Generally most navigators, assuming that the altitude changes proportionally to the observed interval, estimate some definite observed altitudes for any observed instant by averaging separately each sum of observed times and altitudes.

However, near the meridian, the relative change of altitude and time cannot be expressed by an equation of first degree; so the above-mentioned method is not considered to accurate.

And thus, to think of how to treat successive observed altitudes at different instants and positions, the writer regards it most proper that the altitudes at different instants and positions should be reduced to the same instant and position, and thereby the most reliable value of altitude is determined from the arithmetical mean of the above reduced altitudes.

I　緒　　言

海上に於て天体観測をなすに当り船体動揺等のために唯一回の観測によつて正確なる値が得られるとは限らない。そのため数回連続観測を行いその平均値を採るを可と考える。その平均値を求むる事に関しては "連測値の整理について（I）"(本誌第1巻、第1号、51頁)に述べたところであるが、一般には高度は時間に正比例して変化するものであると見做し、観測時刻と高度とを夫々相加平均して所要の値としてゐる様である。即ち $a_m = \frac{1}{n}\Sigma a$, $t_m = \frac{1}{n}\Sigma t$, とし時刻 t_m に於ける高度を a_m とする。玆に a は観測高度、t は観測時刻、n は観測回数．Σは和を表はす記号とする。

然し乍ら正中時附近に於ては高度の変化と時刻の変化の関係は一次形にて表はし得ない。換言すれば時間の経過に対して高度は直線狀の排列をなさないのであるからして上記の如く別々に相加平均し

た値を以て求むるものとすることの不正確なるは容易に首肯される処である。

それではどういふ排列をなすか、又時刻 t_m に於ける高度を a_m としてどの程度の差違あるものか、又然らば如何にして測得せる連測値を整理すべきかに就て論じて見たい。

II　正中時附近に於ける高度の變化

高度 (a)、赤緯 (d)、時角 (h)、緯度 (l) の関係式 $\sin a = \sin l.\ \sin d + \cos l.\ \cos d.\ \cos h$ に於て l, d, h, が微小なる変化 dl, dd, dh, をなすとき之と函数関係にある a も亦 da なる変化をなす。而して天体が子午線附近にあるとき夫等の間には次の関係式が成立する。

$$da = -(dl - dd) - \cos d.\ \cos l.\ \mathrm{cosec}\ (l-d).\ \sinh.\ dh$$

今時刻 T_0 に於ける赤緯、高度、緯度、時角を夫々 d_0, a_0, l_0, h_0; 時刻 T に於けるそれ等を夫々 d, a, l, h; とすれば、時刻 T_0 より T までの高度の変化は次式によりて表はされる。

$$\int_{a_0}^{a} da = -\int_{l_0}^{l} dl + \int_{d_0}^{d} dd - \cos d.\ \cos l.\ \mathrm{cosec}\ (l-d) \int_{h_0}^{h} \sinh.\ dh$$

但し l, d, の変化は極く微小なるため、cosd. cosl. cosec (l−d) を constant と取扱つた。

$$\therefore\ a - a_0 = -(l - l_0) + (d - d_0) - \frac{1}{\tan l - \tan d} \int_{h_0}^{h} h \sin 1' dh$$

こゝに h は微小なる故角度の分單位で表はされてゐるとして $\sinh = h \sin 1'$ と扱つた。

$$\therefore\ a - a_0 = -(l - l_0) + (d - d_0) - \frac{\sin 1'}{2\ (\tan l - \tan d)} \times (h^2 - h_0^2),\quad \frac{\sin 1'}{2\ (\tan l - \tan d)} = A \text{ とおけば、}$$

$a = a_0 -$(緯度の変化量)$+$(赤緯の変化量)$- A(h^2 - h_0^2)$, 玆に緯度、赤緯の変化は時間の函数、時角も亦時間の函数なるを以て、$a = a_0 + mt + nt^2 + \cdots\cdots$ にて表はされる。

III　測得時刻と高度とを別々に相加平均して所要の値とすることに就て

Maclaurin の級数即ち $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lfloor n} f^{(n)}(0)$ により高度 a を t の昇冪に就いて展開すれば、

$a = a_0 + \frac{da_0}{dt} t + \frac{1}{2} \frac{d^2 a_0}{dt^2} t^2 + \cdots\cdots$ 但し a_0 は時刻T (t=0) に於ける高度とする。

観測高度の相加平均値を a_m, n を観測回数とすれば、$a_m = \frac{1}{n} \Sigma a = a_0 + \frac{da_0}{dt} \frac{\Sigma t}{n} + \frac{1}{2} \frac{d^2 a_0}{dt^2} \frac{\Sigma t^2}{n} + \cdots\cdots$

今Tを観測時刻の平均とすれば $\Sigma t = 0$ となる。 $\therefore\ a_0 = a_m - \frac{1}{2} \frac{d^2 a_0}{dt^2} \frac{\Sigma t^2}{n}$ ....(1)

位置の三角形に於て $\sin a = \sin l.\ \sin d + \cos l.\ \cos d.\ \cosh$ 之を t で微分すれば

$$\cos a \frac{da}{dt} = (\cos l.\ \sin d - \sin l.\ \cos d.\ \cosh) \frac{dl}{dt} + (\sin l. \cos d - \cos l. \sin d. \cosh) \frac{dd}{dt} - \cos l. \cos d. \sinh \frac{dh}{dt}$$

今観測間の短時間に赤緯の変化なしと見做せば

$$\cos a \frac{da}{dt} = (\cos l. \sin d - \sin l. \cos d. \cosh) \frac{dl}{dt} - \cos l. \cos d. \sinh \frac{dh}{dt}$$

更に微分して $\frac{d^2 a}{dt^2}$ を求むれば

$$\begin{aligned}\frac{d^2 a}{dt^2} = &\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 (\tan a.\ \sec^2 a.\ \cos^2 l.\ \cos^2 d.\ \sin^2 h - \cos l.\ \cos d. \sec a.\ \cosh) \\ &+ \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \left\{\tan a.\ \sec^2 a\ (\cos l.\ \sin d - \sin l.\ \cos d.\ \cosh)^2 - \sec a\ (\sin l.\ \sin d + \cos d.\ \cos l.\ \cosh)\right\} \\ &- 2\left(\frac{dh}{dt}\right)\left(\frac{dl}{dt}\right) \Big(\tan a.\ \sec^2 a.\ \cos^2 l.\ \cos d.\ \sinh.\ \sin d \\ &\qquad - \tan a.\ \sec^2 a.\ \cos l.\ \cos^2 d.\ \sin l.\ \sinh.\ \cosh - \sin l.\ \cos d.\ \sinh.\ \sec a\Big)\end{aligned}$$

seca. cosl. cosd＝Aとおけば

$$\frac{d^2a}{dt^2}=A\left(\frac{dh}{dt}\right)^2(A.\tan a.\sin^2 h-\cos h)$$
$$+A\left(\frac{dl}{dt}\right)^2\left\{A.\tan a(\tan d-\tan l.\cos h)^2-\tan d.\tan l-\cos h\right\}$$
$$-2\left(\frac{dh}{dt}\right)\left(\frac{dl}{dt}\right)A.(A\tan a.\sin h.\tan d-A.\tan a.\tan l.\sin h.\cos h-\sin h.\tan l)$$

之を（1）式に代入することにより a_0 の値は求め得らる。こゝに t を時の分で改正値を角度の分で表はすことにすれば

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\Sigma t^2}{n}=\frac{1}{2}\times(15)^2\sin 1'\times\frac{\Sigma t^2}{n}=0.'0327\frac{\Sigma t^2}{n}$$ となる。

以上 a_m と a_0 との関係を覗いてみた。之により a_m より a_0 は求め得らると云うも海上に於て頻々と行う天体観測の連測値整理法としては不可能といつても過言ではない。又その労力に値するものであるとも思はれない。さりとて a_m を以て平均時刻に於ける高度なりとするは不精確なること論を俟たない。

Ⅳ 整 理 法

連続観測値の整理法として筆者は此等異れる時刻に於ける観測値を同一時刻、場所に於けるものに修正しその平均値を採らんとするものである。位置の三角形に於て

sina＝sinl. sind＋cosl. cosd. cosh 之を differentiate して

$$\cos a.\,da=(\cos l.\sin d-\sin l.\cos d.\cos h)\,dl$$
$$+(\sin l.\cos d-\cos l.\sin d.\cos h)\,dd-\cos l.\cos d.\sin h.\,dh$$

天体が子午線附近にあるときは h は甚だ小なる故に cosh＝1 として差支ない。故に

cosa. da＝－sin (l－d) (dl－dd)－cosd. cosl. sinh. dh, 又子午線附近では sina＝cos (l－d), cosa＝±sin (l－d)（複号は l>d なるときは＋，l<d なるときは－，）とおくことも差支ない。

故に da＝∓ (dl－dd) ∓ cosd. cosl. sinh. cosec (l－d) dh（式中∓符は l<d なるとき＋，l>d なるとき－）之により微小なる時間 位置の変化による高度の変化量は算出される訳である。依つて短時間を隔てゝ測つた観測値を同一時刻に同一場所に於て観測せるものに修正することが出来る。

是に於て一つの未知量たる高度を同じ正確の程度で直接観測したものと考え、其の未知量の最も確からしい値として夫等の相加平均値をとる。この比較により自己の観測技術の程度も数量的に明らかにされ好便なりと考える。尚之が計算に当つては頻々と行う正中時附近の天体観測に於て船位決定の精度に於て必要にして且十分なる修正値は共線図表により求め得られると考える。又他の一つは煩雑の労を可及的軽減するために図表によるのが便利である。（第1図参照）

次に一例を挙げて他の整理法と比較して見たいと思う。

§昭和23年3月23日太陽高度を連測し第1表に示すの結果を得たり。

Table 1

世界時		高度	
16^h	3^m	47^0	9.'5
〃	4^m	〃	10.'0
〃	5^m	〃	10.'5
〃	6^m	〃	10.'7
〃	7^m	〃	10.'8

但し $16^h\ 3^m$ に於ける推定位置 Lat. 44^0 0' N, Long 60^0 0' W, 本船の眞針路 S 50^0 E, 速力20節とす、又 16^h の赤緯は 1^0 10.'1 N, $E_{\odot}$ は $11^h\ 53^m\ 24^s$。

〔整　理　法〕

$da = -(dl - dd) - \cos d.\ \cos l.\ \mathrm{cosec}\,(l-d)\ \sinh.\ dh$ により $16^h\ 5^m$ に於けるものに引直すことにする。

T. CO. S 50° E, Speed 20′ なる故1分間の $dl = 0.'21$ d. long（経差）$= 0.'36$

Table 2

u	H	alt.	dl	cosl. cosd. cosec (l-d) × sinh. dh		da	修正高度
16ʰ 3ᵐ	359° 6′	47° 9.′5	0.′21	0.′24	0.′21	0.′42	47° 10.′27
〃 4ᵐ	〃 21.′4	〃 10.′0	0.′21	0.′18	0.′14	0.′35	〃 10.′35
〃 5ᵐ	〃 36.′7	〃 10.′5	0.′21	0.′10	0.′07	0.′28	〃 10.′50
〃 6ᵐ	〃 52.′1	〃 10.′7	0.′21	0.′04	0.′00	0.′21	〃 10.′42
〃 7ᵐ	0° 7.′4	〃 10.′8		−0.′04			〃 10.′31

$a^m = 47^\circ\ 10.'37$

〔附記〕 こゝに $a_m = 47^\circ\ 10.'37$ の確率誤差

$r = 0.6745\sqrt{\dfrac{[vv]}{n(n-1)}} = \pm 0.'026$ 但し v：残差、n：観測回数、〔 〕は和を表はす記号とする。

〔註〕 (1) cosl. cosd. cosec (l−d) sinh の値はhが0より大なるか小なるかによつて符号は相反する。又 dl の符号も針路によりて異る。

(2) 15′ cosl. cosd. cosec (l−d) sinh による修正値は例へば $16^h\ 3^m$ より 4^m に至る値を求めるに、3^m 及 4^m を中心とする前後1分間の修正値の相加平均 0.′21 をとり求むるものとした。

(3) 修正高度として小数以下2位迄とりたるは六分儀による観測値の精度に於て、又作図、実用の点より至難且不要と思はるゝも数値計算の結果として掲げておいた。

Cf. 1. ch^2 による法

Ⅱに述べたる如く $a = a_0 - d.\ lat - \dfrac{\sin l'}{\tan l - \tan d} \times \dfrac{h^2 - h_0{}^2}{2}$，hを時の分で表はせば $a = a_0 - d.\ lat - \dfrac{0.'0327\,(h^2 - h_0{}^2)}{\tan l - \tan d}$，となる。こゝに $\dfrac{0.'0327}{\tan l - \tan d} \times h^2$ は所謂 ch^2 として航海者には馴染深いものであるから ch^2 表又は ch^2 図表より求め得らる。前例をこの方法によつて整理して見れば第3表の如くになる。

Table 3

u	ch²	c(h² − h₀²)	dl	da	alt	修正高度
16ʰ 3ᵐ	0.′43	0.′21	0.′21	0.′42	47° 9.′5	47° 10.′27
〃 4ᵐ	0.′22	0.′14	0.′21	0.′35	〃 10.′0	〃 10.′35
〃 5ᵐ	0.′08	0.′07	0.′21	0.′28	〃 10.′5	〃 10.′50
〃 6ᵐ	0.′01	0.′00	0.′21	0.′21	〃 10.′7	〃 10.′42
〃 7ᵐ	−0.′01				〃 10.′8	〃 10.′31

$a^m = 47^\circ\ 10.'37$

〔註〕 経度に△Lの誤差があればhにも当然△Lが含まれ従つて修正値に対して h^2 となつて影響する。

Rate of change of altitude per minute of time near the meridian

$\Delta a = 15' \cos d \cos l \operatorname{cosec}(l-d) \sin h$

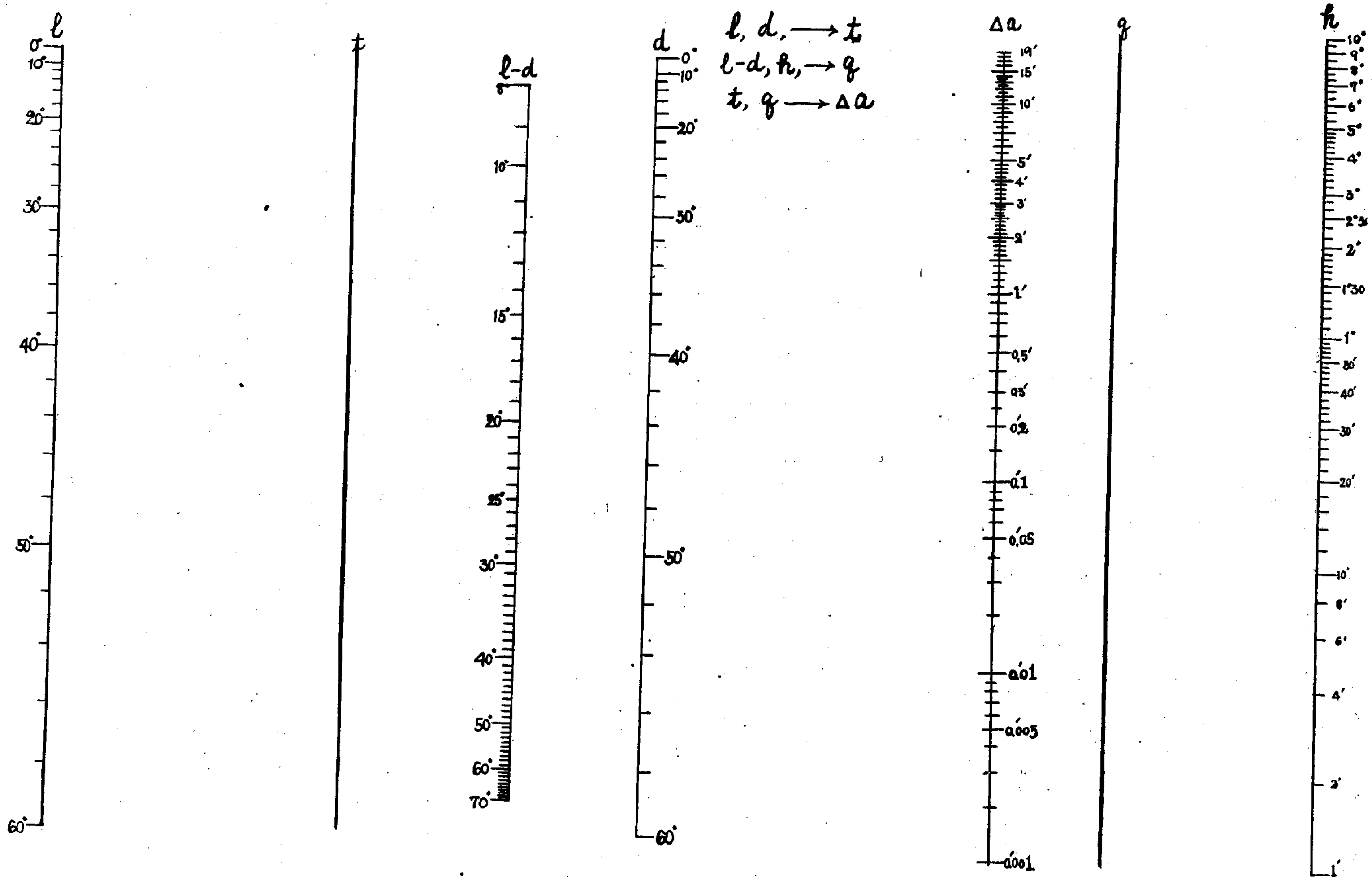

Fig 1

高度を時間の二次函数と見做して最小自乘法による処理

$=a_0+mt+nt^2$ として処理して見ると、$a=47^{\circ}\,9.'48+0.'64t-0.'08\,t^2$ を得る。但し世界時 $16^h\,3^m$ に於て $t=0$ とした。依つて $16^h\,5^m$ に於ける a として $47^{\circ}\,10.'44$ を得る。

〔註〕 以上は單に結果のみを記したのであるが、實際計算に當つては相當煩雜にして、海上観測の整理法としては實用に遠く、又その勞力に値する丈の價値のあるものではない。先づ不適當と云えよう。

3. $a_0=a_m-\frac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2}\frac{\Sigma t^2}{n}$ による法

$A=\text{seca. cosl. cosd}$ に於て、a, l, d, に夫々の値を代入すれば $A=1.058$ を得る。次に h は微小なる故 $\text{tand. sinh} \doteqdot 0$, $\sin^2 h \doteqdot 0$, $\cosh=1$ とおいて $\frac{d^2a}{dt^2}$ を求むれば -1.11 を得る。依つて $a_0=a_m+0.'07$ となる。∴ $a^m=47^{\circ}\,10.'37$

〔註〕 前にも述べた通り此の方法は實用には凡そ縁遠く、たゞ斯くすれば精密な數値計算がなし得られるという参考迄に行つて見た。

〔附記〕

1. Ⅳに述べたる $da=-(dl-dd)-\text{cosl. cosd. cosec}\,(l-d).\ \text{sinh. dh}$ に於て $da=0$ となる時角を求めて見るに $h_0^m=\pm 0.'2546\,(\text{tand}-\text{tanl})\,(\Delta l-\Delta d)$, こゝに Δl, Δd, は夫々緯度、赤緯の一時間の變化量、$l>d$ なるときは（－），$l<d$ なるときは（＋）を採る。h が上記のとき天体高度は最大（最小）高度に達しそれ以後は下降（上昇）するのであるから、最大（最小）高度を挾んで連測した場合には是非共Ⅳに述べた方法によらなければならない。精密な數値を必要としないからといつて時刻、高度を別々に相加平均する概算法は全然無意味なものである。又 h_0 を挾む連測の場合に於て何れの時刻に於ける値にも引直し得るが之を h_0 なる時のそれに修正するならばその測定地に於ける子午線高度に改正される便利さがある。

2. Ⅳに述べたる例題の整理に於て、a_m に比し $47^{\circ}\,10.'50$ なる値は相當懸離れてゐる様であるが之を棄却して了つてよいかどうかを調べて見る。

〔Chauvenet 氏の棄却限界による〕

確率誤差 $r=0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}=0.6745\sqrt{\frac{0.034}{4}}=\pm 0.'06$ $Q=\frac{2n-1}{2n}=0.900$, $\frac{a}{r}=2.44$ $\left(Q=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{a}{r}} e^{-t^2}\,dt\ \text{表より求む}\right)$ ∴ $a=2.44\times(\pm 0.'06)=\pm 0.'146$ 因つて残差 $+0.'13$ は a より小なる故之を棄却してはいけない。然し乍ら斯様な事を観測毎に行うことは不可能でもあるし又それ程の必要もない。さうかといつて異常の観測として無暗矢鱈に棄却することは妥当ではない。本例の場合は左程の差違はないから棄てる気にはならないと思うが、一般に相當懸離れた値が出た場合時刻或は六分儀読取の誤謬として無雜作に捨てたくなるのが普通ではなからうか。玆に於てWright 氏の「ある観測の誤差が單観測の確率誤差の５倍を超ゆるときは之を棄却する。」の言に依つて異常観測値を取捨したい。

（水產科學研究所業績第56号）