



HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|------------------|---|
| Title | Golden-Thompsonの不等式をめぐって |
| Author(s) | 安藤, 毅 |
| Citation | 電子科学研究, 1, 1-6 |
| Issue Date | 1993 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/24268 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | 1_P1-6.pdf |



Golden-Thompson の不等式をめぐって

情報数理研究分野 安藤 毅

この不等式は、統計力学の分野で、エルミート作用素 $-H$ 及び $-K$ をそれぞれのハミルトニアンとしてもつ系の分配関数と、それをミックスした $-(H+K)$ をハミルトニアンにもつ系の分配関数の比較として現われた

$$\mathrm{Tr}(e^H e^K) \geq \mathrm{Tr}(e^{H+K})$$

を指し、1965年に発表された Golden[1] と Thompson[2] の論文に由来している。

この総説では、この不等式を成立させる数学的な深い背景、また $\mathrm{Tr}(e^{H+K})$ を下から評価する不等式の確立及びその一般化について、本質をより明快に理解してもらうために「離散化」して、行列の固有値の問題として selfcontained な解説を行なうことを目的としている。

1. はじめに

ここで H と K が「可換」すなわち $HK = KH$ の場合は $e^{H+K} = e^H e^K$ なので、上の不等式(GT不等式と呼ぼう)は等式になってしまう。可換性は、直感的には同時対角化可能性に、また物理の言葉で言えば同時観測の可能性に対応する。(勿論ここで H, K は非有界な作用素なので、数学的には可換性の定義 $HK = KH$ はもっと厳密にしなければならぬが、そこまでは立ち入らない。)

H, K が非可換のときは、 e^{H+K} と e^H, e^K の間には一般には何等の代数的な関係も存在しないが、それでも Tr (トレース)をとった「期待値」の間には上記の不等式関係が常に成り立つというのが数学的に大変興味を引くのである。

この不等式は氷山の一角で、関連した一連の不等式が成り立つことは、Lenard[3] や Thompson[4] 自身により巧みな方法で確立されているが、ここでは更に深く背景を探り、その考察を発展させて $\mathrm{Tr}(e^{H+K})$ の下からの評価も導出しようというのであるが、本質を判りやすくするため全て行列の場合に話を限る。

この総説の数学的な内容は、数年前まで応用電気研究所の応用数学部門に在職した日合文雄と筆者の共同研究による処が多い。

2. 固有値と特異値

必要な用語の解説から始めよう。以下では、 A, B, \dots 等はすべて $n \times n$ (複素)行列とする。行列 A の固有値(eigenvalues)はその特性をある程度代表するユニタリ不変量であり、 $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ と書くことにする。一般にこれは複素数であり、そのみからはあまり行列そのものに関する情報は得られない。例えば、すべての固有値が0となるがそれ自身は行列として0ではないものは沢山ある。固有値がユニタリ不変量だといったのは、行列 A, B を $B = U^* A U$ なる関係で結び着けるユニタリ行列 U が存在するときは、 A の固有値と B の固有値は集合として同一になる。ここで $U^* A U$ は A に直交座標変換を加えたものと見ることが出来るから、固有値は座標のとり方に依存しないことを言っている。

A がエルミート行列の場合は固有値はすべて実数となるので、

$$\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$$

と、いつも大きい順に番号を付けることにする。エルミート行列 A に関しては固有値は、直交座標変換を除いて行列のすべての情報を與える。すなわちユニタリ行列 V を

$$V^* A V = \mathrm{diag}(\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$$

と選ぶことができる(主軸変換)。行列 A のエルミート性は、すべての(縦)単位ベクトル x での A の期待値 x^*Ax が実数となることで特徴付けられる。そして期待値の最大値が $\lambda_1(A)$ であり、最小値が $\lambda_n(A)$ となるわけである。さらにこれらの期待値が非負(または正)のとき A は半正定値(positive semi-definite)(または正定値(positive definite))と呼ばれている。 $A \geq 0$ 及び $A > 0$ でそれぞれ A が半正定値および正定値行列であることを表わそう。

一般の行列 A の別のユニタリ不変量としては特異値(singular values) $\sigma_i(A)$ ($i = 1, \dots, n$) がある。これは、行列 A の複素共役転置行列を A^* と書くと A^*A は常に半正定値行列となるから、 A の(行列としての)絶対値(modulus) $|A|$ を A^*A の(行列としての)非負の平方根(non-negative square root) $(A^*A)^{1/2}$ で定義し、 $\sigma_i(A) \equiv \lambda_i(|A|) = \lambda_i(A^*A)^{1/2}$ で定める。これは非負な実数なので、これも

$$\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A)$$

と並べる。エルミート行列の特異値はその固有値の絶対値で、また半正定値行列に対しては固有値と特異値は同じものである。

行列の固有値または特異値を計算するのは困難な場合が多い。しかし、2次方程式の根と係数の関係に見られるように、行列 A のすべての固有値の和と積は容易に計算できる。すなわち次の関係がある：

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) = \text{Tr}(A) \equiv \text{対角要素の和,}$$

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i(A) = \det(A) \equiv \text{行列式.}$$

更に固有値を絶対値の大きな方から番号を付け

$$|\lambda_1(A)| \geq \dots \geq |\lambda_n(A)|$$

と並べておくと、この他にも(固有ベクトルでの期待値を考えて)判ることは、

$$\sigma_1(A) \geq |\lambda_1(A)|, \quad |\lambda_n(A)| \geq \sigma_n(A) \quad (1)$$

である。しかし驚くべきことに、(1)はすべての $k = 1, \dots, n$ に対して次のように一般化される：

$$\prod_{i=1}^k \sigma_i(A) \geq \prod_{i=1}^k |\lambda_i(A)|. \quad (2)$$

(ここで $k = n$ では(2)は等式になることに注意する。)

このような関係が初めて認識されたのは Weyl[5] による積分方程式の固有値に関する不等式の考察から

である。(2)は(1)からある数学的な「魔術」を使うとたちまち出てくる。

その魔術は、行列 A にその k 次の反対称積 $\wedge^k A$ を対応させる写像を考えることである。 $\wedge^k A$ は古くから行列の理論でも考察の対象となっていたが、それを $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$ の行列で、その行列要素は A の k 次の正方小行列の行列式として定義したので、直感的な思考を妨げていた。物理との関連からいって一番判り易い定義は A の k 次のテンソル積 (tensor product) $\otimes^k A$ を k 次の反対称テンソル (anti-symmetric tensor) のなす部分空間での写像と考えたときの表示行列とするものである。そうすれば、次のような関係式は直ちに判る：

$$\wedge^k(AB) = \wedge^k A \cdot \wedge^k B$$

$$\wedge^k A^* = \{\wedge^k A\}^*.$$

そして一番重要なのは、反対称テンソルのみを考えたことの結果として

$$\lambda_i(\wedge^k A) = \prod_{i=1}^k \lambda_i(A), \quad (3)$$

及び

$$\sigma_i(\wedge^k A) = \prod_{i=1}^k \sigma_i(A) \quad (4)$$

が成り立つことである。したがって、驚くべき不等式群(2)は、一般的な不等式(1)を $\wedge^k A$ に適用することにより、(3)と(4)から直ちに判るのである。

ここで更に言えることは、行列 A の固有値と特異値の間的一般的な関係は(2)及びその $k = n$ の場合の等式で尽くされることである。これを数学的に正確に表現すると次のようになる。非負のベクトル $[\sigma_i]$ と複素ベクトル $[\lambda_i]$ の成分が、

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$$

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

のように並んでおり、どの $k = 1, \dots, n$ でも、

$$\prod_{i=1}^k \sigma_i \geq \prod_{i=1}^k |\lambda_i|$$

なる不等式を満たし、かつ $k = n$ ではこれが等式となるなら

$$\sigma_i(A) = \sigma_i, \quad \lambda_i(A) = \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を満たす行列 A が存在する。勿論、これはいわゆる「存在定理」であるから、 A を作りだす algorithm はそう簡単ではない。

3. 優位関係

行列から離れて、実(縦)ベクトル $a = [a_i]$ と $b = [b_i]$ の比較に関する新しい概念を導入しよう。まず自然な順序として、 $a_i \geq b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ のとき $a \geq b$ と書く。

次にそれぞれのベクトルの成分を大きい方から番号を付け直して

$$a_{[1]} \geq \dots \geq a_{[n]}, \quad b_{[1]} \geq \dots \geq b_{[n]}$$

と書く。 a が b に優位(majorize)な立場にある、記号で $a \succ b$, とはどの $k = 1, \dots, n$ に対しても

$$\sum_{i=1}^k a_{[i]} \geq \sum_{i=1}^k b_{[i]} \quad (5)$$

が成立し、そして $k = n$ では

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i \quad (6)$$

となるときとする。(5)だけを満足し、(6)までは要求しないとき準優位(weakly majorize)な立場にあるといい、記号で $a \succ_w b$ と書くことにする。

ここで注意することは、(5)は累積したものの比較であるから、 a が b に優位な立場にあれば、確かに $a_{[1]} \geq b_{[1]}$ であるが、2番目のものからの順序に関しては一般的にはいえないし、最後の n 番目に関しては、(6)の影響で、逆に $a_{[n]} \leq b_{[n]}$ とならざるをえない。すなわち、 $a \succ b$ から $a \geq b$ は出ない。勿論、 $a \geq b$ なら $a \succ_w b$ であることは明かであるが、 $a \succ b$ は出ない。

このような優位関係の意味するところは何か。もっとも基本的な事実、 $a \succ b$ となる必要かつ充分な条件はある双確率行列 $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^n$ が存在し

$$b = Da \quad (7)$$

の関係で a が b に変換できるという、古典的な Hardy-Littlewood-Polya (1922) の結果である。ここで D が双確率行列(doubly stochastic)であるとは、その要素がすべて ≥ 0 で、かつ各行及び各列の和がすべて 1 となるもののことである。すなわちどの $k = 1, \dots, n$ に対しても

$$\sum_{i=1}^n d_{ik} = \sum_{j=1}^n d_{kj} = 1.$$

また並行して、 $a \succ_w b$ である必要十分条件は、 $b \leq Da$ となる双確率行列 D が存在することである。

ここでも難しいのは D の存在の保証で、そこにも

algorithm が確立されているが複雑である。実際に有用なのは、 D の存在から出てくる易しい方向である！例えば、 $b = Da$ は、すべての $i = 1, \dots, n$ に対して

$$b_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} a_j$$

のことであるから、 $f(t)$ が凸関数ならば、

$$[f(a_i)] \succ_w [f(b_i)], \quad (8)$$

すなわち

$$a \succ b, f(t) \text{ が凸関数} \Rightarrow f(a) \succ_w f(b) \quad (9)$$

が示された。もちろんここで $f(a) = [f(a_i)]$ のことである。同じ考察から、更に $f(t)$ が増加関数であれば、 $a \succ_w b$ から上の結論が導き出せる。

優位関係が多く不等式を生み出す根拠がここにある。

4. 対数的優位関係

正ベクトル $a, b > 0$ が $\log(a) \succ \log(b)$ の優位関係にあるとき、 a は b に対して対数的に優位(log-majorize)な立場にあるといい $a \succ_{(\log)} b$ で表わす。これはすなわち、どの $k = 1, \dots, n$ に対しても

$$\prod_{i=1}^k a_{[i]} \geq \prod_{i=1}^k b_{[i]} \quad (10)$$

の不等式が成立し、特に $k = n$ では等式

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n b_i \quad (11)$$

を要求することと同じである。(10)のみを要求するとき、対数的に準優位(weakly log-majorize)な立場にあるといい $a \succ_w b$ で表わす。

e^t は凸増加関数であるから、(10)から

$$a \succ_w b \Rightarrow a \succ_{(\log)} b \quad (12)$$

が得る。勿論逆向きは正しくないが、 $-\log t$ が凸関数なことから、

$$a > 0, a \succ b \Rightarrow a^{-1} \succ_w b^{-1} \quad (13)$$

が得る。

さてここで Weyl の不等式(2)は、一般の行列 A の固有値と特異値の間に対数的優位関係

$$[\sigma_i(A)] \succ_{(\log)} [|\lambda_i(A)|] \quad (14)$$

が成り立っていることを示すものである。

5. 行列の和及び積の固有値と特異値

まず2つのエルミート行列 A, B の和 $A + B$ の考察から始めよう。可換性 $AB = BA$ があるときは、固有値の番号付けを除いては A, B は共通のユニタリ行列で対角化ができる。このことから $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列 π, δ があり、どの $i = 1, \dots, n$ に対しても

$$\lambda_i(A + B) = \lambda_{\pi(i)}(A) + \lambda_{\delta(i)}(B)$$

となり、和 $A + B$ の固有値に関する情報は、 A 及び B それぞれの固有値に関する情報から完全に得られる。

可換性がないときには、 $A + B$ の固有値と A, B の固有値の間には

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(A + B) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(B)$$

を除いては、一般的な代数関係はない。しかし majorization の立場からすると多くの関係が見いだされる。いちばん簡単なのは

$$[\lambda_i(A) + \lambda_i(B)] \succ [\lambda_i(A + B)] \quad (15)$$

で、より導出が困難で Lidskii-Wielandt の定理の名前で知られているのは

$$[\lambda_i(A + B)] \succ [\lambda_i(A) + \lambda_{n-i+1}(B)] \quad (16)$$

であるが、その他にも種々の majorization の関係が証明されている。

1 個の行列の固有値と特異値が一般的に有すべき相互関係が (2) とその $k = n$ の場合の等式に尽くされるのに反して、3 つの実ベクトル $[a_i], [b_i], [c_i]$ が (15), (16) に対応した

$$[a_{[i]} + b_{[i]}] \succ [c_i], [c_i] \succ [a_{[i]} + b_{[n-i+1]}]$$

をはじめ上に触れたその他諸々の majorization 関係を満たしていても、果して

$$\lambda_i(A) = a_i, \lambda_i(B) = b_i$$

及び

$$\lambda_i(A + B) = c_i$$

をすべての $i = 1, \dots, n$ に対して満たすエルミート行列の対 A, B が存在するかどうかは未解決の問題である。

エルミート行列 A, B の固有値が $[\lambda_i(A)] \succ [\lambda_i(B)]$ を満たすとき、 A は B に対して優位 (majorize) な立場にあるといい $A \succ B$ と書くことにする。Hardy-Littlewood-Polya の定理の結果として、この関係はユニタリ行列の列 $U_j (j = 1, \dots, m)$ と $\alpha_j \geq 0 (j = 1, \dots, m)$ で $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ なるものが存在して

$$B = \sum_{j=1}^m \alpha_j U_j^* A U_j$$

と表示できることと同値であることが証明される。 $U_j^* A U_j$ は A の直交回転とも考えられるから、これは B が A をいろいろに直交回転したものを平均 (average) したものであることを示している。

同様に、準優位 (weak majorization) の関係 $A \succ_w B$ を $[\lambda_i(A)] \succ_w [\lambda_i(B)]$ で定義しよう。

順序関係 $A \geq B$ は通常のように $A - B \geq 0$ を表わすが、これは非常にきつい要請であり、(自明なことではないが)

$$A \geq B \Rightarrow \lambda_i(A) \geq \lambda_i(B)$$

が証明される。したがって

$$A \geq B > 0 \Rightarrow [\lambda_i(A)] \succ_{(log)} [\lambda_i(B)] \quad (17)$$

となるわけである。

次に非可換の場合は2つのエルミート行列の積はエルミートにはならないことに注意して、一般の行列 A, B 及びその AB に関しては特異値の関係を考察する。まず (15) に対応しては log-majorization の形で、

$$[\sigma_i(A) \sigma_i(B)] \succ_{(log)} [\sigma_i(AB)] \quad (18)$$

が成り立つが、この証明にも §2 で述べたような魔術が使われる。(16) に対応するものとして Gelfand-Naimark の定理と名付けられる

$$[\sigma_i(AB)] \succ [\sigma_i(A) \cdot \sigma_{n-i+1}(B)] \quad (19)$$

が成り立つが、証明は大変難しい。和の場合と同様に、(18), (19) 等の逆命題もまだ解決されていない困難な問題である。

$A, B > 0$ の間の対数的優位関係 (log-majorization) $A \succ_{(log)} B$ を $[\lambda_i(A)] \succ_{(log)} [\lambda_i(B)]$ で定義しよう。対数的準優位関係 (weak log-majorization) $A \succ_w B$ も対応して定義される。(12) から

$$A \succ_w B \Rightarrow A \succ_{(log)} B \quad (20)$$

が導かれる。

6. ユニタリ不変なノルム

ベクトル $a = [a_i]$ の大きさは普通

$$\|a\| = \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right\}^{1/2}$$

で計るが、行列の大きさを計るノルム (norm) としてはその問題の性格に応じて種々のものを考える必要が起こる。

行列 A のノルム $\|A\|$ とは次の条件を満たすものをいう：

- (1) $\|A\| \geq 0$ ($\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$),
- (2) $\|\gamma A\| = |\gamma| \cdot \|A\|$,
- (3) $\|A\| + \|B\| \geq \|A + B\|$.

更に、どのユニタリ行列 U, V に対しても次の条件を満たすときユニタリ不変なノルム (unitarily invariant norm) とよぶ：

- (4) $\|UAV\| = \|A\|$.

定義から当然ではあるが、最初の基本的な結果は、ユニタリ不変なノルムの値 $\|A\|$ は A の特異値だけで決まることである：

$$\|A\| = \|\text{diag}(\sigma_1(A), \dots, \sigma_n(A))\|.$$

ユニタリ不変なノルムの典型的な例としては

$$\|A\|_1 \equiv \sum_{i=1}^n \sigma_i(A) = \text{Tr}(|A|)$$

(トレース・ノルム),

$$\|A\|_2 \equiv \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma_i(A)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \{\text{Tr}(A^*A)\}^{1/2} = \left\{ \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right\}^{1/2}$$

(フロベニウス・ノルム),

$$\|A\|_\infty \equiv \sigma_1(A)$$

$$= \max\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$$

(スペクトル・ノルム),

があるが、これらを統一して

$$\|A\|_p \equiv \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma_i(A)^p \right\}^{1/p}$$

$$= \{\text{Tr}(|A|^p)\}^{1/p} (1 \leq p < \infty)$$

(p -ノルム)。

majorization がノルムの比較に有効に働くのは次の Ky Fan[6] の定理に基づいている：すべてのユニタリ不変なノルムに関して

$$|A| \succ_w |B| \Rightarrow \|A\| \geq \|B\|, \quad (21)$$

特に

$$A \underset{(\log)}{\succ} B \Rightarrow \|A\| \geq \|B\| \quad (22)$$

が有効にはたらく。

7. GT 型不等式(上からの評価)

本題の GT 不等式にもどろう。 H, K が非可換なエルミート行列の対のとき、 e^{H+K}, e^H, e^K の間には代数的な関係はないと述べたが、分数巾 (fractional

power) を使うことにより limit として関係付けるのが Lie-Trotter の公式である：

$$e^{H+K} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \{e^{\alpha H/2} e^{\alpha K} e^{\alpha H/2}\}^{1/\alpha}.$$

いま $A \equiv e^{H/2}$ 及び $B \equiv e^K$ と置くと、 $A, B > 0$ となる。 $e^{\alpha H/2} = A^\alpha$, $e^{\alpha K} = B^\alpha$ であるから、上で limit をとる前の $0 < \alpha < \beta$ のときの $(A^\alpha B^\alpha A^\alpha)^{1/\alpha}$ と $(A^\beta B^\beta A^\beta)^{1/\beta}$ との比較が GT 不等式の背景の解明となるであろうというのが Thompson[4] や Hiai-Petz[7] の発想である。

どの正定値行列 C も $C = e^L$ と書かれるので、以下では A, B が一般の正定値行列として議論を進める。次の結果が基本となる： $0 < \alpha < 1$ のとき

$$ABA \underset{(\log)}{\succ} (A^\alpha B^\alpha A^\alpha)^{1/\alpha}. \quad (23)$$

これは Araki[8] によるものであるが、この証明には §2 の魔術が使え、

$$\lambda_1(ABA)^\alpha \geq \lambda_1(A^\alpha B^\alpha A^\alpha)$$

の証明に帰着される。それはさらに命題

$$I \geq ABA \Rightarrow I \geq A^\alpha B^\alpha A^\alpha$$

に、そしてついには

$$A^{-2} \geq B \Rightarrow A^{-2\alpha} \geq B^\alpha$$

なる命題と同値となるが、これは古典的な Loewner の定理(1933)： $0 < \alpha < 1$ のとき

$$X \geq Y \geq 0 \Rightarrow X^\alpha \geq Y^\alpha$$

により保証される。実際、命題 (23) と Loewner の定理とは同値なのである。

GT 不等式に戻って、(23) と Lie-Trotter の公式から次が得られる。

定理 1.

$$e^{H/2} e^K e^{H/2} \underset{(\log)}{\succ} e^{H+K}.$$

これから一般原理 (22) に支えられて、どんなユニタリ不変なノルム $\|\cdot\|$ についても

$$\|e^{H/2} e^K e^{H/2}\| \geq \|e^{H+K}\| \quad (24)$$

という GT 不等式の一般化が得られる。ここで特にトレース・ノルムを考えたときが元々の Golden-Thompson 不等式である。

このように Hiai-Petz[7] では、(23) を (24) の背後にある原理として確立した。

8. GT型不等式(下からの評価)

Ando-Kubo[9]は非可換な $A, B > 0$ の平均(mean)をどのように定義すべきかを行列の順序関係の立場から考察した。特に幾何平均(geometric mean)の合理的な定義がなにかを一般論の中で検討し、その結果 A, B の幾何平均 $A\#B$ としては

$$A\#B \equiv A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$$

をとるのが適当であるとの結論に達した。この定義は一見 A と B とで非対称に見えるが、実際には $A\#B = B\#A$ となるし、ユニタリ行列 U を選ぶと $A\#B = A^{1/2}UB^{1/2}$ と表示され、 A, B が可換のときは当然 $(AB)^{1/2}$ と一致する。最も重要な点は $(A, B) \rightarrow A\#B$ なる写像が各変数 A, B に関して単調(増加)写像となっていることにある。この点からいって、幾何平均の一つの候補である $e^{(\log A + \log B)/2}$ はこの単調性を欠いており適当ではない。

GT型の不等式で上からの評価のためには、 e^{H+K} と $e^{H/2}e^Ke^{H/2}$ とを比較したが、下からの評価を得るために e^{H+K} と $e^{2H}\#e^{2K}$ を比較するというのがHiai-Petz[7], Ando-Hiai[10]の発想である。

まずここでもLie-Trotter型の公式が成り立つことが判る：

$$e^{H+K} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{e^{2\alpha H}\#e^{2\alpha K}\}^{1/\alpha}.$$

したがって§7でと同じように、 $A, B > 0$ に対して $0 < \alpha < \beta$ のときの $(A^\alpha\#B^\alpha)^{1/\alpha}$ と $(A^\beta\#B^\beta)^{1/\beta}$ の比較の問題となる。これに関しての基本的な結果： $0 < \alpha < 1$ のとき

$$(A^\alpha\#B^\alpha)^{1/\alpha} \underset{(\log)}{>} A\#B \quad (25)$$

がAndo-Hiai[10]により確立された。ここでもまた§2の魔術が使えるので、結局は

$$X^{2\alpha} \geq (X^\alpha Y^\alpha X^\alpha)^{1/2} \Rightarrow X^2 \geq (XYX)^{1/2}$$

を証明することに帰着される。これに対応する古典的な結果はない。(25)とLie-Trotterの公式を合わせると次が得られる。

定理 2.

$$e^{H+K} \underset{(\log)}{>} e^{2H}\#e^{2K}.$$

これから一般原理(22)に支えられて、どんなユニタリ不変なノルム $\|\cdot\|$ に対しても

$$\|e^{H+K}\| \geq \|e^{2H}\#e^{2K}\| \quad (26)$$

が出る。特に

$$\text{Tr}(e^{H+K}) \geq \text{Tr}(e^{2H}\#e^{2K})$$

が得られる。

このように(26)の背後にある原理が(25)というのがAndo-Hiai[10]の要点である。

9. 結果の検討

Hiai-Petz[7]及びAndo-Hiai[10]ではこの他に、エントロピーに関連した種々の不等式を導いているが、もっとも期待されるのは非古典的な行列不等式の導出であろう。この方向ではFuruta[11]も研究を進めている。

【参考文献】

- [1] S. Golden, Phys. Rev. 137, B1127 (1965).
- [2] C.J. Thompson, J. Math. Phys. 6, 1812 (1965).
- [3] A. Lenard, Indiana Univ. Math. J. 21, 457 (1971).
- [4] C.J. Thompson, Indiana Univ. Math. J. 21, 469(1971).
- [5] H. Weyl, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36, 408 (1949).
- [6] Ky Fan, Proc. Nat. Acad. Sci. 37, 760 (1957).
- [7] F. Hiai-D. Petz, Linear Alg. Appl. 181, 153 (1993).
- [8] H. Araki, Lett. Math. Phys. 19, 1167 (1990).
- [9] F. Kubo-T. Ando, Math. Ann. 249, 205 (1979).
- [10] T. Ando-F. Hiai, Linear Alg. Appl.(印刷中)
- [11] T. Furuta, Linear Alg. Appl.(印刷中)