Riccati 方程式と行列のノルム不等式

情報数理研究分野　中 村 美 浩

行列のユニタリ不変ノルムについて知られている Bhatia-Davis の不等式を，代数的 Riccati 方程式の解の表示式を利用した新しい方法で証明する。これによって，一般の von Neumann 環の場合にも Bhatia-Davis の不等式が成立することがわかる。さらに，これと関連した行列の写像のノルムの上と下からの評価を行う。

1．はじめに

線形あるいは非線形システムの安定性を問題にするとき，行列のある種のノルム不等式によってそれを保証したり評価したりすることがしばしばある。もちろん固有値の分布全体の挙動が重要な場合もあるが，ここでは計量としてユニタリ不変ノルム，すなわち行列の絶対値の固有値（特異値）にだけ依存するノルムを考える。たとえば，n 次行列 A に対してその絶対値の固有値を $s_1(A) \geq s_2(A) \geq \cdots \geq s_n(A)$ のように大きい順に並べたとき，絶対値の最大固有値 $\|A\|_\infty = s_1(A)$ や絶対値の固有値の総和 $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n s_i(A)$ などがユニタリ不変ノルムの典型的な例である。また，ノルム不等式の簡単な基本的な例は，$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$（このノルムが計量・距離であることを示す）と $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ である。

2．問題

2つの n 次行列 A, B に対して次のような特異値の関係が知られている（[1]）：

$$2\,s_i(A^*B) \leq s_i(AA^* + BB^*),\quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

これから，どんなユニタリ不変ノルム $\|\cdot\|$ についても

$$2\|A^*B\| \leq \|AA^* + BB^*\|$$

が成り立つことがわかる。このノルム不等式をもう少し拡張したものとして次も知られている（[2]）：

$$2\|A^*CB\| \leq \|AA^*C + CBB^*\|. \qquad (*)$$

この不等式はよく知られた Golden-Thompson の不等式（[3,4]）の部分的な精密化にも当たっていることも注意して置きたい。発見者の証明は行列の固有値の特質をうまく用いたものであるが，もっと広い設定（具体的には一般のフォン・ノイマン環）でもこういった不等式は成り立つはずだとの信念のもとに，ここではこの不等式の持つ意味をもう少し掘り下げて調べる。さらに，この不等式に関連した行列の写像 $X \mapsto SXS^{-1} + S^{-1}XS$（$S$ は固定された可逆な行列）についても考察する。

3．考察

まずはじめに，式（$*$）は A，B が非負のときに成り立てば一般に成り立つことに注意する。さらに，よく使われるテクニックによって $A = B$ の場合に帰着されることもわかる。すなわち問題とすべき不等式は，$A \geq 0$ のときすべての C に対して

$$2\|ACA\| \geq \|A^2C + CA^2\| \qquad (**)$$

というものである。

次に，式（$**$）の意味するところは行列の対応 Ψ：$A^2C + CA^2 \mapsto 2\,ACA$ が縮小的であるという点が重要な観察になる。この対応は，実際明確に式で書き表すことができる：

$$ACA = \int_0^\infty e^{-tA^2} A(A^2C + CA^2)Ae^{-tA^2}dt. \qquad (\sharp)$$

この等式から直ちに2つのことが導かれる。すなわち，ベクトルを関数に対応させる写像 $\xi \mapsto \sqrt{2}\,Ae^{-tA^2}\xi$ がユニタリであることが第一。これは，仮想的に $C = A^{-2}$ と置いて得られる。第二に，$2\,ACA$ は $A^2C + CA^2$ のコピーの直和の一部と見做せるということである。したがってこれらから，不等式（$**$）は自明の帰結となる。

さて，行列の写像Ψを逆向きにΦ：$2ACA \mapsto A^2C + CA^2$と見ると，これはAが可逆のときには$\Phi(X) = (AXA^{-1} + A^{-1}XA)/2$である。したがって，式（♯）は方程式$\Phi(X) = A^2C + CA^2$の解を書き表していると見ることもできる。与えられたデータDに対して方程式$\Phi(X) = D$を解くことは，Riccatiの行列微分方程式に関連した代数的Riccati方程式の特別な場合を扱うことに相当する。この観点から，可逆なSに対する写像Φ：$X \mapsto SXS^{-1} + S^{-1}XS$に関してのノルム不等式も得られる：$S^2$のスペクトルが右半平面に入るならば，

$$\|SXS^{-1} + S^{-1}XS\| \geq K\|X\|.$$

ここで，定数Kは方程式$SZS^{*-1} + S^{-1}ZS^* = I$の解$Z_2$と$S^*ZS^{-1} + S^{*-1}ZS = I$の解$Z_2$から$K^{-2} = \|Z_1\|_\infty\|Z_2\|_\infty$で定まり，$S$がエルミートの場合には$K = 2$である（[5]）。

4．補足

$X \mapsto AX - XB$の形の写像については上からのノルムの評価が既に知られている。$\phi(X) = S^{-1}(S^2X + XS^2)S^{-1}$と見ることによって$\phi$のノルムの上からの評価も得られるが，これはあまり精密ではない。若干の考察により，Sがエルミートの場合には最良であるようなもう少し精密な評価を得ることができる。

【参考文献】

[1] R. Bhatia and F. Kittaneh: SIMAX 11, 272 (1990)

[2] R. Bhatia and C. Davis: SIMAX 14, 132 (1993)

[3] S. Golden: Phys. Rev. 137B, 1127 (1965)

[4] C.J. Thompson: J. Math. Phys. 6, 1812 (1965)

[5] G. Corach, H. Porta and L. Recht: LAA 142, 153 (1990)