アダマール積と Golden-Thompson 型不等式

情報数理研究分野　安　藤　　　毅

「電子科学研究」1号で Golden-Thompson の不等式が成立する背景について考察し，併せて下からの評価も確立した。しかし，これらはあくまでも2個のエルミート行列の場合の話で，それ以上の個数の場合にはどのような合理的な評価があるかは研究されていなかった。ここではそれへの一つの回答を与える。

1. 問　　題

一般化された Golden-Thompson の不等式とはどの $n\times n$ エルミート行列の対 H, K 及びどの unitarily invariant なノルム $\|\cdot\|$ についても

$$\|e^{H+K}\| \le \|e^{H/2}e^{K}e^{H/2}\| \le \|e^{H}e^{K}\|$$

なる不等式が成り立つことをいう([2],[3],[4]参照)。

当然3個以上についてはどうなるかということが問題となるが，対応する不等式はノルムとして一番簡単なトレース（Trace）を採った場合でも成り立たない。

m 個のエルミート行列 $H_1, \cdots, H_m$ と *unitarily invariant* なノルム $\|\cdot\|$ が与えられたときに $\|e^{H_1+\cdots+H_m}\|$ の Golden-Thompson の形に類似した上限（及び下限）を与えることを我々の目標とする。

2. 方　　法

全ての困難はこれらの行列の相互の非可換性に由来するわけであるから，これらを仮想的に可換化するためテンソル積（Kronecker 積）を考えるのが自然であろう。すなわち e^{H_j} の代わりに $I\otimes\cdots I\otimes \underset{(j)}{e^{H_j}}\otimes I\otimes\cdots\otimes I$ を考えると，可換な対象となり

$$e^{H_1}\otimes\cdots\otimes e^{H_m} = \prod_{j=1}^{m} I\otimes\cdots I\otimes \underset{(j)}{e^{H_j}}\otimes\cdots\otimes I.$$

これを log で変形すると

$$\log(e^{H_1}\otimes\cdots\otimes e^{H_m}) = \sum_{j=1}^{m} I\otimes\cdots I\otimes \underset{(j)}{H_j}\otimes\cdots\otimes I \quad (1)$$

となるが，可換性より先ず算術幾何平均不等式が成ち立つ：

$$e^{H_1}\otimes\cdots\otimes e^{H_m} \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} I\otimes\cdots I\otimes \underset{(j)}{e^{mH_j}}\otimes\cdots\otimes I. \quad (2)$$

仮想の世界を現実に戻すために，ある基底（直交座標系）を固定して，行列のアダマール(Hadamard)積○（各座標毎の積）

$$X_1\otimes\cdots\otimes X_m \mapsto X_1\circ\cdots\circ X_m$$

を考える。

ここで基本的なのは，この対応は行列の空間のテンソル積 $\mathbf{M}_n\otimes\cdots\otimes\mathbf{M}_n \equiv \mathbf{M}_{n^m}$ から $\mathbf{M}_n$ への unital, positive な線形写像 $\Phi(\cdot)$ に拡大されることである：

$$\Phi(X_1\otimes\cdots\otimes X_m) = X_1\circ\cdots\circ X_m$$

unital, positive な線形写像の一般的な性質から

$$\Phi(X)^p \ge (X^p) \quad (X>0\,;\,0<p\le 1) \quad (3)$$

および

$$\log\Phi(X) \ge \Phi(\log X) \quad (X>0)$$

が導かれるから（[1]参照），(1)から直ちに次が出る：

$$\log(e^{H_1}\circ\cdots\circ e^{H_m}) \ge \left\{\sum_{j=1}^{m} H_j\right\}\circ I. \quad (4)$$

同様に次をうる：

$$\log(e^{-H_1}\circ\cdots\circ e^{-H_m})^{-1} \le \left\{\sum_{j=1}^{m} H_j\right\}\circ I. \quad (5)$$

また(2)からは次が導かれる：

$$e^{H_1}\circ\cdots\circ e^{H_m} \le \left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{mH_j}\right\}\circ I. \quad (6)$$

3．上下からのノルムの評価

基底を固定することはユニタリ行列を選ぶことに対応するから，座標系への依存から解放されるため，$\mathcal{U}=\{$ユニタリ行列の全体$\}$とし，各行列 X に $X(U)\equiv U^*XU\,(U\in\mathcal{U})$を考える。$U$ を動かすことが別の座標系に移ることに対応する。$X\mapsto X(U)$は代数演算及びノルムを保存する。

ある $V\in\mathcal{U}$ でエルミート行列 $\sum_{j=1}^{n} H_j$ を対角化できる（主軸変換），すなわち

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} H_j(V)\right\}\circ I=\sum_{j=1}^{m} H_j(V)$$

したがって(4)と(6)から

$$\log(e^{H_1(V)}\circ\cdots\circ e^{H_m(V)})\geq\sum_{j=1}^{m} H_j(V), \qquad (7)$$

および次をうる：

$$\{e^{-H_1(V)}\circ\cdots\circ e^{-H_m(V)}\}^{-1}\geq\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-H_j(V)}\right\}^{-1}. \qquad (8)$$

(5), (7), (8)と，エルミート行列の固有値（の列）は対角要素の（列）を majorize するという Schur の定理から，majorization に関して知られた基本定理を援用して次の結果に達する。

Theorem 1. どのエルミート行列 $H_1,\cdots,H_m$ およびどの *unitarily invariant* なノルム$\|\cdot\|$に対しても不等式

$$\max_{U\in\mathcal{U}}\|e^{H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{H_m(U)}\|\geq\|e^{H_1+\cdots+H_m}\|,$$

および

$$\|e^{H_1+\cdots+H_m}\|\geq\max_{U\in\mathcal{U}}\|\{e^{-H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{-m_m(U)}\}^{-1}\|$$

が成り立つ。

4．収束定理

上の定理は $0<\alpha\leq 1$ をパラメータとして，次のように精密化できる。

$$\begin{aligned}\left\|\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{\alpha H_j}\right\}^{1/\alpha}\right\|&\geq\\ &\geq\max_{U\in\mathcal{U}}\|\{e^{\alpha H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{\alpha H_m(U)}\}^{1/\alpha}\|\\ &\geq\|e^{H_1+\cdots+H_m}\|,\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\|e^{H_1+\cdots+H_m}\|&\geq\max_{U\in\mathcal{U}}\|\{e^{-\alpha H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{-\alpha H_m(U)}\}^{-1/\alpha}\|\\ &\geq\left\|\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-\alpha H_j}\right\}^{-1/\alpha}\right\|.\end{aligned}$$

一方われわれは既に $\alpha\downarrow 0$ のとき

$$\left\|\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{\alpha H_j}\right\}^{1/\alpha}\right\| \text{および} \left\|\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-\alpha H_j}\right\}^{-1/\alpha}\right\|$$

はそれぞれ減少および増加しながら$\|e^{H_1+\cdots+H_m}\|$に収束することを知っている。また基本的な不等式(3)から，$0<\alpha\leq\beta$ のとき

$$\begin{aligned}\|\{e^{\alpha H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{\alpha H_m(U)}\}^{1/\alpha}\|&\leq\\ &\leq\|\{e^{\beta H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{\beta H_m(U)}\}^{1/\beta}\|\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\|\{e^{-\alpha H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{-\alpha H_m(U)}\}^{-1/\alpha}\|&\geq\\ &\geq\|\{e^{-\beta H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{-\beta H_m(U)}\}^{-1/\beta}\|\end{aligned}$$

がでるから，上記のことと合わせると次の収束定理をうる。

Theorem 2. $1\geq\alpha\downarrow 0$ のとき

$$\max_{U\in\mathcal{U}}\|\{e^{\alpha H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{\alpha H_m(U)}\}^{1/\alpha}\|$$

は減少しながら$\|e^{H_1+\cdots+H_m}\|$に収束し，

$$\max_{U\in\mathcal{U}}\|\{e^{-\alpha H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{-\alpha H_m(U)}\}^{-1/\alpha}\|$$

は増加しながら$\|e^{H_1+\cdots+H_m}\|$に収束する。

【参考文献】

[1] T. Ando, Linear Algebra Appl. 26, 203 (1979).

[2] T. Ando, 電子科学研究 1， 1 (1993).

[3] T. Ando and F. Hiai, Linear Algebra Appl. 197/198, 113 (1994).

[4] F. Hiai and D.Petz, Linear Algebra Appl. 181, 153 (1993).