21 世紀 COE プログラム：
特異性から見た非線形構造の数学

# 第 9 回 COE 研究員連続講演会

# ある束縛条件下における平面弾性閉曲線のダイナミクス

COE 研究員
岡部 真也

2006.6.13 (火), 6.14 (水), 6.15 (木), 6.16 (金)

Series #116. December, 2006

Publication of this series is partly supported by Grant-in-Aid for formation of COE.
'Mathematics of Nonlinear Structures via Singularities' (Hokkaido University)
URL:http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp

# HOKKAIDO UNIVERSITY
# TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#93 K. Arima, 第 2 回ＣＯＥ研究員連続講演会　極小モデルプログラムの入門およびその正標数への拡張, 25 pages. 2005.

#94 Y. Nakano, 学位論文 Doctoral thesis " OPTIMAL HEDGING IN THE PRESENCE OF SHORTFALL RISK " 43 pages. 2005.

#95 Keiji Matsumoto and Masao Jinzenji (Eds.), 2004 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 17 pages. 2005.

#96 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 30th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 83 pages. 2005.

#97 M. Watanabe, 第 5 回 COE 研究員連続講演会　『逆散乱法』入門, 52 pages. 2005.

#98 M. Takeda, T. Mikami (Eds.), Probability and PDE, 48 pages. 2005.

#99 M. Van Manen, The 6th COE Lecture Series " From the cut-locus via medial axis to the Voronoi diagram and back " 42 pages. 2005.

#100 K. Hayami, T. Nara, D. Furihata, T. Matsuo, T. Sakurai and T. Sakajo (Eds.), 応用数理サマーセミナー「逆問題」, 196 pages. 2005.

#101 B. Forbes, The 7th COE Lecture Series トーリックミラー対称性、56 pages. 2005.

#102 H. Kubo, T. Ozawa and K. Yamauchi, SAPPORO GUEST HOUSE SYMPOSIUM ON MATHEMATICS 20 "Nonlinear Wave Equations", 68 pages. 2005.

#103 A. Miyachi and K. Tachizawa, Proceedings of the Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, 107 pages. 2005.

#104 S. Izumiya (Ed), Y. Numata, J. Ishimoto, I. Sasaki, Y. Nagase and M. Yamamoto, 第 2 回数学総合若手研究集会 - The 2nd COE Conference for Young Researchers -, 274 pages. 2006.

#105 T. Yamamoto, O. Hatori, M. Hayashi and T. Nakazi (Eds.), 第 14 回関数空間セミナー, 112 pages. 2006.

#106 Y. Daido, 学位論文 Doctoral thesis "RECONSTRUCTION OF INCLUSIONS FOR THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT EQUATION USING PROBE METHOD", 68 pages. 2006.

#107 T. Yamamoto, 学位論文 Doctoral thesis "Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants", 333 pages. 2006.

#108 S. Izumiya, Singularity theory of smooth mappings and its applications: a survey for non-specialists, 41 pages. 2006.

#109 J. Cheng, B. Y. C. Hon, J. Y. Lee, G. Nakamura and M. Yamamoto, Inverse Problems in Applied Sciences - towards breakthrough - Organizing Committee, 96 pages. 2006.

#110 K. Matsumoto, 超幾何関数早春学校, 87 pages. 2006.

#111 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 31th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 91 pages. 2006.

#112 H. Okamoto, D. Sheen, Z. Shi, T. Ozawa, T. Sakajo and Y. Chen, Book of Abstracts of the First China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics & The Second East Asia SIAM Symposium, 78 pages. 2006.

#113 N. Ishimura, T. Ishiwata, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, K. Hayami, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー「確率微分方程式」, 116 pages. 2006.

#114 T. Abe, 第 8 回 COE 研究員連続講演会『超平面配置と対数的ベクトル場の幾何』, 23 pages. 2006.

#115 H. Kubo and T. Ozawa, Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 22 "Nonlinear Wave Equations", 67 pages. 2006.

21 世紀 COE プログラム:
特異性から見た非線形構造の数学

# 第 9 回 COE 研究員連続講演会

# ある束縛条件下における平面弾性閉曲線のダイナミクス

COE 研究員
岡部　真也

2006.6.13(火), 6.14(水)，6.15(木)，6.16(金)

北海道大学理学部 3 号館 512 室

# ある束縛条件下における<br>平面弾性閉曲線のダイナミクス

岡部真也

**概 要**

ピアノ線のような弾性体でできた曲線のダイナミクスを数学的に解析する. 具体的には, 曲線は弾性エネルギーを駆動力として運動すると考え, 次のように定式化し解析する: (i) 曲線の運動を記述する発展方程式を導出し, その解の大域的挙動を考察する; (ii) 曲線の最終的形状を決定する変分問題の解の性質を明らかにする. 本稿では, 特に, 弾性閉曲線に一様な圧力がかかっている場合のダイナミクスについて考察する.

## 1 序

18 世紀に Euler によって total squared curvature とよばれる, 曲率の二乗積分で定義される, 汎函数を長さ一定の曲線族の中で最小化せよという変分問題が提唱された. その解は elastica と呼ばれ, 以後, この分野で多くの研究がなされてきた. 例えば, elastica に関する研究 ([25]), 閉 elastica に関する研究 ([10], [11]), 面積一定という束縛条件を加えた area-preserving elastica に関する研究 ([3], [16], [28], [29]), などが挙げられる. さらに, 一様な圧力をうける弾性閉曲線の形状に関する研究も, 1884 年の Levy による研究 ([13]) 以降, 様々な研究がなされてきた ([2], [5], [6], [24], [30]). 以上に挙げたものだけではなく, 曲線の形状に関する研究はその他にも数多くなされている. 一方, 曲線の運動に関する研究も多様であり, 例えば, [12], [14], [15], [22], [26], [27] などが挙げられる. しかしこれらの研究は曲線の伸縮をゆるす場合に関するものである. 我々は曲線として, 例えば, ピアノ線を想定しているため, 曲線の伸縮をゆるさない運動を考察する必要がある. 非伸縮条件をみたす曲線の運動に関する研究としては N. Koiso ([9]) が挙げられる. 我々は [9] でなされた定式化を参考として曲線の運動を解析する.

本稿では, 特に次の問題について考察する:

**問題 1.1.** 平面内の弾性体でできた閉曲線 $\gamma$ を考える. $\gamma$ が囲む領域の内側とその外側から, それぞれ, 一様な圧力 $p_i$ と $p_o$ が $\gamma$ にかかっているとする. $p := p_o - p_i > 0$ の場合, つまり外側からかかる圧力が内側からかかる圧力よりも大きい場合を考える. $p$ が buckling load とよばれる値 $p^*$ 以下のときは円が安定であるが, $p$ が $p^*$ をこえると円は不安定となり, 座屈が生じる. このとき, $\gamma$ のダイナミクスはどのようなものか？

この問題における閉曲線の最終的形状を決定するとした変分問題を提唱したのが I. Tadjbakhsh と F. Odeh ([24]) であった. その変分問題は次のようなものである:

**問題 1.2.**

$$E(\gamma)=\frac{1}{2}\int_0^L \kappa^2(s)\,ds+p\mathcal{A}(\gamma) \tag{1.1}$$

を $\gamma\in S$ 上で最小化せよ. ただし, $p$ は正定数であり, $\kappa$ は $\gamma$ の曲率を, $\mathcal{A}(\gamma)$ は $\gamma$ が囲む面積を表す.

エネルギー汎函数 (1.1) 右辺第一項は $\gamma$ の弾性エネルギーを表し, total squared curvature としても知られるものである. そして, 第二項は圧力 $p$ が $\gamma$ になす仕事を表す. さらに $S$ は, 周長が $L$, 回転数が 1 であるような滑らかな平面閉曲線の集合である. ただし, 変分問題 1.2 における束縛条件は周長一定条件のみである. 何故なら, 回転数は曲線の連続的変形の下では不変だからである. ここで, 変分問題 1.2 について既知の結果を簡単に述べておく. まず, Tadjbakhsh-Odeh ([24]) によって, (i) 変分問題 1.2 は任意の $p>0$ に対して最小解をもつ, (ii) 円は, $p$ の大きさに関わらず, 変分問題 1.2 の臨界点である, (iii) 円は $p$ が buckling load と呼ばれるある臨界値 $p^*$ 未満では安定な臨界点であるが, $p^*\leq p$ では不安定となる, ということが示された. この結果から彼らは, 非自明な臨界点の存在を予想し, さらに, それらは 2 以上の対称軸をもつことを示唆していた. 対称性については, S. S. Antman ([1]) によって証明されたが, 非自明解に関する詳しい結果は得られていなかった. しかし, 近年になって K. Watanabe-I. Takagi ([30]) によって各 $n\geq 2$ に対して非自明解の表現公式が与えれ, さらに, 各 $n$ に関して非自明解は一意であることも証明された.

本稿は問題 1.1 における閉曲線のダイナミクスを考察することが目的であり, そのダイナミクスを次のように定式化し解析する:

(i) 閉曲線の運動はエネルギー汎函数 (1.1) の勾配に支配されると考え, 運動を記述する発展方程式を導出する. そしてその解の大域的挙動を解析する.

(ii) 閉曲線の最終的形状は変分問題 1.2 の解によって決定されるため, 臨界点の安定性および不安定性を明らかにする.

(i) については, まず, 第 2節においてその発展方程式系を導出する. そして, その系に関する初期値問題がすべての時間 $t>0$ に対して一意かつ滑らかな解をもつこと, さらには, その解の収束性を明らかにする (定理 2.1). (ii) についてであるが, 本稿では, 圧力差 $p>0$ が非常に大きい場合について考察する. そのために, まず, 第 3節において $p\to\infty$ とするときの非自明解の漸近形を求める (定理 3.1). そしてその漸近形を利用して, 第 4節において, 各 $n\geq 3$ に対する非自明解の不安定性を示す (定理 4.1).

# 2　閉曲線の運動

## 2.1　勾配流方程式の導出

まず, 閉曲線の運動を記述する発展方程式を導出する. 滑らかな閉曲線 $\gamma_0$ を与える. $\gamma_0$ の周長を $L$ で表す. また $\gamma_0$ は弧長パラメータ $x \in S^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ によって表示される, つまり, $|(\partial\gamma_0/\partial x)(x)| \equiv 1$ をみたすものとする. 初期状態において $\gamma_0(x)$ にあった点が時刻 $t > 0$ においては $\gamma(x,t)$ に移動しているものと考え, ベクトル値函数 $\gamma(x,t)$ を定義する. つまり, $\gamma(x,0) = \gamma_0(x)$ により初期条件を与える. 今, $\gamma$ はピアノ線のような弾性体でできているとしているため, $\gamma(x,t)$ に次の束縛条件を課す:

(C1) 閉曲線は非伸縮である.

この非伸縮性を表す束縛条件 (C1) は, $\gamma$ が常に弧長パラメータで表示されているとして定式化される. つまり,

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t)\right| \equiv 1 \tag{2.1}$$

によって束縛条件 (C1) を表す. $\gamma(x,t)$ が (2.1) をみたすとき, 明らかに, $\gamma(x,t)$ の周長は常に $L$ となる. ここで, 条件 (2.1) は周長一定条件に含まれることに注意されたい. この束縛条件 (2.1) 下において, エネルギー汎関数 (1.1) を

$$E(\gamma(x,t)) = \frac{1}{2}\int_0^L \left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}(x,t)\right|^2 dx - \frac{p}{2}\int_0^L \boldsymbol{n}(x,t)\cdot\gamma(x,t)\,dx \tag{2.2}$$

と書き換えることができる. ただし, $\boldsymbol{n}(x,t)$ は $\gamma(x,t)$ の内向き単位法線ベクトルを表し, $\boldsymbol{n} = -R(\partial\gamma/\partial x)$, $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ で与えられる. 従って, 問題 1.1 における閉曲線 $\gamma$ の運動は, 束縛条件 (2.1) に従う閉曲線のエネルギー (2.2) に対する勾配流方程式に支配されることになる. 以下, その勾配流方程式を求める. まず, 簡単な計算により

$$\frac{d}{dt}E(\gamma(x,t)) = \int_0^L \left\{\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}(x,t) - p\boldsymbol{n}\right\}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)\,dx$$

が得られ, この結果から $\partial\gamma/\partial t = -(\partial^4\gamma/\partial x^4) + p\boldsymbol{n}$ がエネルギーを最も効率よく減らす "方向" であることがわかる. しかし, この "方向" に変形した場合には, 当然, 束縛条件 (2.1) が常にみたされるとは限らない. そこで, 各時刻 $t$ において束縛条件 (2.1) がみたされるように, この "方向" を修正する. (2.1) より, $(\partial\gamma/\partial x)\cdot(\partial^2\gamma/\partial x\partial t) = 0$ であるから,

$$V = \left\{\eta(x,t) \;\middle|\; \frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0\right\}$$

とおくと, 束縛条件 (2.1) がみたされるならば, $\partial\gamma/\partial t \in V$ であることがわかる. ここで, 簡単な考察により, $V$ の $L^2$ 内積に関する直交補空間は

$$V^\perp = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi(x,t)\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t)\right) \;\middle|\; \xi(x,t)\text{ はスカラー函数}\right\}$$

により与えられることが従う．よって, あるスカラー函数 $\xi(x,t)$ が存在し次が成り立つ:

$$-\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}+p\,\boldsymbol{n}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\in V.$$

従って, 求める勾配流方程式は

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}=-\dfrac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\xi\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+p\,\boldsymbol{n},\\ \left\{-\dfrac{\partial^5\gamma}{\partial x^5}+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\xi\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+p\,\dfrac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial x}\right\}\cdot\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}=0,\\ \left|\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right|\equiv 1\end{cases}$$

と書くことができる．ただし, 第二式は $\partial\gamma/\partial t\in V$ を意味する方程式である．ここで, (2.1) から得られる $(\partial\gamma/\partial x)\cdot(\partial^2\gamma/\partial x^2)=0$ を $x$ に関して微分することで得られる関係式および $v=\xi+2\,|\partial^2\gamma/\partial x^2|^2$ なる変換を用いることにより, 第二式を

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2 v=2\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^4-\left|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right|^2-p\,\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}$$

と書き換えることができる．このようにして束縛条件 (2.1) に従う閉曲線のエネルギー (2.2) に対する勾配流方程式が得られる:

$$\text{(EQ)}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}=-\dfrac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left(v-2\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right\}+p\,\boldsymbol{n},\\ -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2 v=2\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^4-\left|\dfrac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right|^2-p\,\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}.\end{cases}$$

**注意 2.1.** $(\partial\gamma/\partial x)\cdot(\partial^2\gamma/\partial x\partial t)=0$ は非伸縮性を表す束縛条件 (2.1) の必要条件であるから, (EQ) の第二式も (2.1) の必要条件にすぎない．ゆえに, 方程式系 (EQ) の解が (2.1) をみたすことは確かめる必要がある．

## 2.2 主結果とその証明

この節の主結果は次のようなものである:

**定理 2.1.** 任意の正定数 $p$ と滑らかな閉曲線 $\gamma_0(x)$ を与える．$\gamma_0(x)$ は $|(\partial\gamma_0/\partial x)(x)|\equiv 1$ をみたすとする．このとき, 方程式系 (EQ) はすべての時刻 $t>0$ に対して古典解 $(\gamma(x,t),v(x,t))$ をもち, 解 $\gamma(x,t)$ は $|(\partial\gamma/\partial x)(x,t)|\equiv 1$ をみたす．さらに, $t\to\infty$ とするとき, 解 $(\gamma(x,t),v(x,t))$ は次の方程式系のある解 $(\hat\gamma(x),\hat v(x))$ に $C^\infty$ 位相で収束する:

$$
\text{(BE)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial^4 \hat{\gamma}}{\partial x^4} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left(v - 2\left|\dfrac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial x^2}\right|^2\right)\dfrac{\partial \hat{\gamma}}{\partial x}\right\} + p\,\hat{\boldsymbol{n}} = 0, \\ -\dfrac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \left|\dfrac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial x^2}\right|^2 v = 2\left|\dfrac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial x^2}\right|^4 - \left|\dfrac{\partial^3 \hat{\gamma}}{\partial x^3}\right|^2 - p\,\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \dfrac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial x^2}. \end{cases}
$$

以下, 定理 2.1 の証明について述べていく. その中で, 簡単のため, 以下のような記号を用いる:

$$
\text{(2.3)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dot{u}(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = u'(x,t), \quad \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = u^{(n)}(x,t).
$$

まずは方程式系 (EQ) の短時間解の存在についてであるが, これは解析的半群を用いた標準的手法によって証明される. 一般論については, 例えば, [7], [21] などを参照されたい. (EQ) におけるより詳細な議論については [18] を参考として戴きたい. [18] では, 非伸縮かつ囲む面積が一定であるという二つの束縛条件に従う弾性エネルギーに対する勾配流方程式

$$
\text{(GT)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = -\dfrac{\partial^4 \gamma}{\partial x^4} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left(v - 2\left|\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}\right\} + \lambda\,\boldsymbol{n}, \\ -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left|\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right|^2 v = 2\left|\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right|^4 - \left|\dfrac{\partial^3 \gamma}{\partial x^3}\right|^2 - \lambda\,\boldsymbol{n} \cdot \dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}, \\ \displaystyle\int_0^L \left\{\left(\boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right) v - \left(\boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right)^3 + \lambda\right\} dx = 0 \end{cases}
$$

について長時間解の存在および解の収束について考察している. 方程式系 (GT) に現れる $\lambda$ は $t$ のみに依存するスカラー函数である. ゆえに, 双方の方程式系が類似していることからも予想されるように, 実際, [18] における議論を辿ることで, [18] よりもより容易に, 短時間解の存在を証明することができる.

**注意 2.2.** 方程式系 (GT) は二つの束縛条件に従う閉曲線の運動を記述するものである. 二つの束縛条件を持つ問題として, 閉曲線に関しては第 1 節冒頭で述べた area-preserving elastica に関する研究などが挙げられる. また, 閉曲面に関しては, 赤血球の数理モデルに関する研究 (例えば, [4] や [8] など) があり, これらも大変興味深い.

以上で述べたような手順により方程式系 (EQ) の短時間解の存在が証明されるが, 注意 2.1 でも述べたように, (EQ) の第二式は非伸縮性を表す束縛条件 (2.1) の必要条件にすぎない. ゆえに, 短時間解の存在の証明を完了させるためには, 解 $\gamma$ が条件 (2.1) をみたすことを確かめねばならない:

**補題 2.1.** $|(\gamma_0{}'(x)| \equiv 1$ をみたす滑らかな初期閉曲線 $\gamma_0(x)$ を与える．このとき, (EQ) の解 $\gamma(x,t)$ は $|(\gamma'(x,t)| \equiv 1$ をみたす.

補題 2.1 は, 方程式系 (EQ) を用いて $|\gamma'(x,t)|$ に関する発展方程式を導出し, その方程式に関する初期値問題を考察することにより証明を得る．詳しくは [9] を参照されたい.

以上により非伸縮性をみたす短時間解の存在が証明されたので, 次に, 長時間解の存在をエネルギー法を用いて証明する．この手法自体は [9], [18], [22] などにおいて用いられているが, 短時間解の存在を示すときのようにそのまま証明を辿ることはできない．なぜなら, 問題 1.2 ではエネルギー汎函数が [9], [18], [22] などとは異なるからである．以下, その手順を述べる．まず, (EQ) の解の重心について次が従う:

**補題 2.2.** $\gamma(x,t)$ を (EQ) の解とする．このとき, $\gamma(x,t)$ の重心は不変である.

**証明.** $\gamma$ の重心は $(1/L)\int_0^L \gamma\,dx$ で定義される．(EQ) の解 $\gamma(x,t)$ の重心の不変性は次から従う:

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \gamma(x,t)\,dx = \int_0^L \left\{-\gamma^{(4)} + ((v-2\,|\gamma''|^2)\gamma')' + p\boldsymbol{n}\right\}\,dx = 0.$$

□

以下, $\gamma_0$ の重心は原点 $(0,0)$ とする．このとき, 補題 2.2 より, 解 $\gamma(x,t)$ の重心は原点となる．また, 回転数についてであるが, (EQ) による曲線の変形は連続的であるから, $\gamma(x,t)$ の回転数も保存されることを注意しておく．ただ, ここでは特に $\gamma_0$ の回転数を指定する必要はない．ここで, $v$ に関する評価を与えるときに有用な補題を述べておく.

**補題 2.3** (N. Koiso [9])**.** $a(x), f(x) \in C(S^1_L)$ とし, $a \geq 0$, $\|a\|_{L^1} > 0$ をみたすとする．このとき, $-v'' + av = f$ は一意解をもつ．さらに, 解 $v$ は

$$\max_{x\in S^1_L}|v| \leq \left(2L + \|a\|^{-1}_{L^1}\right)\|f\|_{L^1}\,, \tag{2.4}$$

$$\max_{x\in S^1_L}|v'| \leq 2\,(1 + L\,\|a\|_{L^1})\,\|f\|_{L^1} \tag{2.5}$$

をみたす.

この補題により, $\gamma$ に対して $v$ は一意に定まり, さらにその評価も得られる．以下, $(\gamma(x,t), v(x,t))$ を (EQ) の $[0,T)$ 上の解とする．まずは, 弾性エネルギーに対する評価を導く.

**補題 2.4.** $\gamma_0$ と $p > 0$ のみに依存する正定数 $C_1$, $C_2$ が存在して

$$C_1 \leq \|\gamma''\|^2_{L^2} \leq C_2 \tag{2.6}$$

が成り立つ.

**証明の概略.** まず,

$$\frac{d}{dt}E(\gamma(x,t)) = \left\langle \gamma^{(4)} - p\boldsymbol{n}, \dot{\gamma} \right\rangle_{L^2}$$
$$= \left\langle \gamma^{(4)} - \left( \left( v - 2\left|\gamma''\right|^2 \right) \gamma' \right)' - p\boldsymbol{n}, \dot{\gamma} \right\rangle_{L^2} = -\left\|\dot{\gamma}\right\|_{L^2}^2$$

より, $E(\gamma)$ は非増加である. さらに, 等周不等式から

$$-\frac{L^2}{4\pi} \leq \mathcal{A}(\gamma) \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

が得られ, $\|\gamma''\|_{L^2} \leq C_2$ が従う. また, Poincaré の不等式および $|\gamma'| \equiv 1$ より $\|\gamma''\|_{L^2} \geq C_1$ も従う. □

補題 2.3, 2.4 により, 次のように $v$ の評価を与えることができる.

**補題 2.5.** 正定数 $C$ が存在して

$$\max\left\{ \sup_{x \in S^1_L} |v|, \sup_{x \in S^1_L} |v'| \right\} \leq C\left(1 + \left\|\gamma^{(3)}\right\|_{L^2}^2\right) \tag{2.7}$$

が成り立つ.

長時間解の存在を示すために, まず, 次の補題からはじめる.

**補題 2.6.** $\gamma(x,t)$ を (EQ) の $[0,T)$ 上の古典解とし, $\left\|\gamma^{(3)}\right\|_{L^2} \leq C_3$ が $[0,T]$ 上で成り立つと仮定する. このとき, 任意の整数 $n > 3$ に対して $[0,T]$ 上 $\left\|\gamma^{(n)}\right\|_{L^2} \leq C_4$ が成り立つ. ただし, $C_4$ は $C_3$, $\gamma_0$, $T$ のみに依存する定数である.

この証明は帰納法による. 補題 2.5 と補題 2.6 からもわかるように, 大域解の存在を証明するためには $\left\|\gamma^{(3)}\right\|_{L^2}$ の任意有限時間での有界性を示せばよい. そのために, 次の補題を準備する.

**補題 2.7.** $\gamma(x,t)$ を (EQ) の $[0,T)$ 上の解とする. このとき, 正定数 $C_5$ と $C_6$ が存在して

$$\frac{d}{dt}E(\gamma(x,t)) \leq -C_5\left\|\gamma^{(4)}\right\|_{L^2}^2 + C_6 \tag{2.8}$$

が成り立つ. ただし, $C_5$ と $C_6$ は $\gamma_0$, $p$, $T$ のみに依存する定数である.

証明はエネルギー法を用いて行う. ただし, $v$ に対する評価を与える際には, 曲線の幾何的性質を利用している. その詳細については [9] または [18] を参照されたい. この補題を用いて次を証明する.

**補題 2.8.** $\gamma(x,t)$ を (EQ) の $[0,T)$ 上の解とする. このとき, 正定数 $C$ が存在して $\|\gamma^{(3)}\|_{L^2} \leq C$ が $[0,T]$ 上で成り立つ. ただし, $C$ は $\gamma_0$, $p$, $T$ のみに依存する定数である.

**証明.** Cauchy-Schwarz の不等式より,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|\gamma^{(3)}\right\|_{L^2}^2 &= 2\left\langle \gamma^{(5)}, -\gamma^{(5)} + \left(\left(v-2\left|\gamma''\right|^2\right)\gamma'\right)'' + \lambda \boldsymbol{n}'\right\rangle_{L^2} \\ &\leq -\left\|\gamma^{(5)}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\left(\left(v-2\left|\gamma''\right|^2\right)\gamma\right)'' + \lambda\boldsymbol{n}'\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{2.9}$$

が得られる. (2.9) の右辺を補題 2.5 などを用いて評価すると,

$$\frac{d}{dt}\left\|\gamma^{(3)}\right\|_{L^2}^2 \leq C\left(1+\left\|\gamma^{(3)}\right\|_{L^2}^2\left\|\gamma^{(4)}\right\|_{L^2}^2\right) \tag{2.10}$$

を得る. 補題 2.4 より $\left\|\gamma^{(3)}\right\|_{L^2} > C > 0$ であるから, (2.10) の両辺を $\left\|\gamma^{(3)}\right\|_{L^2}^2$ で割ることにより,

$$\frac{d}{dt}\log\left\|\gamma^{(3)}\right\|_{L^2}^2 \leq C\left(1+\left\|\gamma^{(4)}\right\|_{L^2}^2\right) \tag{2.11}$$

となる. ここで補題 2.7 を合わせれば,

$$C_5\frac{d}{dt}\log\left\|\gamma^{(3)}\right\|_{L^2}^2 + C\frac{d}{dt}E(\gamma(x,t)) \leq C_7$$

が得られる. これより結論が従う. □

以上により, 次のようにして長時間解の存在を示すことができる:

**補題 2.9.** 任意に正定数 $p$ を与える. $\gamma_0(x)$ を $|\gamma_0{}'(x)| \equiv 1$ をみたす滑らかな閉曲線 $\gamma_0(x)$ とし, その周長を $L$ とする. このとき, (EQ) はすべての時刻 $t > 0$ に対して一意な古典解 $(\gamma(x,t), v(x,t))$ をもつ. さらに 解 $\gamma(x,t)$ は $|\gamma'(x,t)| \equiv 1$ をみたす.

**証明.** 背理法により証明する. 結論を否定すると, 短時間解の存在の証明から, ある正定数 $\bar{T}$ が存在し $t \to \bar{T}$ とするとき $\|\gamma\|_{W^{(4,q)}} \to \infty$ が成り立つことが従う. ただし, $q \geq 3$ である. $\gamma(x,t)$ は $[0,\bar{T})$ 上において (EQ) の古典解であるから, 補題 2.6 および 補題 2.8 より, 任意の $n \geq 0$ に対して $[0,\bar{T}]$ 上 $\|\gamma^{(n)}\|_{L^2} < C$ が成り立つ. これは仮定に反することから結論が得られる. □

以上により, すべての時刻 $t > 0$ において (EQ) の一意な古典解が存在することが示されたわけだが, 次に, この解が (EQ) の定常方程式, つまり (BE) のある解に収束することを示す. 以下, その証明の流れを述べていく. まず, 補題 2.7 の証明において得られる評価 $\left\|\gamma^{(4)}\right\|_{L^2} \leq C_8\left\|\dot{\gamma}\right\|_{L^2} + C_9$ を用いて次の補題を示す.

**補題 2.10.** ある定数 $C_1, C_2$ が存在して

$$\max\left\{\sup_{x\in S^1_L}|v|,\ \sup_{x\in S^1_L}|v'|\right\} \le C_1\left(1+\|\dot\gamma\|_{L^2}\right), \tag{2.12}$$

$$\sup_{x\in S^1_L}|v''| \le C_2\left(1+\|\dot\gamma\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\right) \tag{2.13}$$

が成り立つ. ただし, $C_1$ と $C_2$ は $t$ によらない定数である.

さらに, この補題をもとにして帰納的に次の補題を証明する.

**補題 2.11.** 任意の非負整数 $n$ に対して, 正定数 $C$, $N$ が存在して

$$\|\gamma\|_{H^{n+4}},\ \|v\|_{H^{n+3}} \le C\left(1+\|\dot\gamma\|_{H^n}^N\right)$$

が成り立つ. ただし, $C$ と $N$ は $t$ によらない定数である.

さらに, 以下の議論により, $\partial v/\partial t$ に関する評価を与える. (EQ) の第二式を $t$ に関して形式的に微分すると

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)'' + |\gamma''|^2\frac{\partial v}{\partial t} &= -2\left(\gamma''\cdot\dot\gamma''\right)v + 8\,|\gamma''|^2\left(\gamma''\cdot\dot\gamma''\right) \\ &\quad - 2\gamma^{(3)}\cdot\dot\gamma^{(3)} - p\left(\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\gamma'' + \boldsymbol{n}\cdot\dot\gamma''\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

となる. 方程式 (2.14) に補題 2.3 を適用することにより, 次のように $\partial v/\partial t$ に関する評価を得る:

**補題 2.12.** 任意の整数 $n \ge 0$ に対して,

$$\max\left\{\sup_{x\in S^1_L}|\dot v|,\ \sup_{x\in S^1_L}\left|(\dot v)'\right|\right\} \le C\left(1+\|\dot\gamma\|_{L^2}\right)\|\dot\gamma\|_{H^3}, \tag{2.15}$$

$$\|\dot v\|_{H^{n+2}} \le C\left(1+\|\dot\gamma\|_{H^n}^N\right)\|\dot\gamma\|_{H^{n+3}} \tag{2.16}$$

が成り立つ. ただし, $C$ と $N$ は $t$ によらない定数である.

以上の補題を用いると, 定常解への収束を示すための鍵となる次の補題を示すことができる.

**補題 2.13.** 任意の整数 $n \ge 0$ に対して

$$\int_0^L \left\|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\|_{L^2}^2 dt < \infty$$

が成り立つ. さらに, $t\to\infty$ とするとき

$$\left\|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\|_{L^2} \to 0$$

が成り立つ.

ここまで述べた補題の証明の詳細については [9], [18] などを参照戴きたい．さらに, 定常解への収束を示す際に重要な役割を果たす次の命題を述べておく．

**命題 2.1** (L.Simon [23])**.** $\hat{\gamma}(x)$ を (BE) の解とする．このとき, ある定数 $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ と $\hat{\gamma}$ の $C_x^{4+4\alpha}$ 近傍 U が存在して, 任意の $\gamma \in U$ に対して

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{L^2} \geq |E(\gamma) - E(\hat{\gamma})|^{1-\theta}$$

が成り立つ．

この命題は, [23] における証明の手法を直接適用することにより示される．その際, 臨界点 $\hat{\gamma}$ における線形化作用素を導出する必要がある．その詳細については [18] を参考とされたい．以上で述べた補題および命題 2.1 により, 定常解への収束が証明される:

**補題 2.14.** (EQ) の解 $(\gamma(x,t), v(x,t))$ は, $t \to \infty$ とするとき, (BE) のある解 $(\hat{\gamma}(x), \hat{v}(x))$ に $C^\infty$ 位相で収束する．

**証明の概略.** 補題 2.11 と補題 2.13 より, $\|\gamma\|_{H^{n+4}} \leq C$ が従う．これより, Ascoli-Arzelá の定理および対角線論法を用いて, $C^\infty$ 位相で収束する部分列 $\{(\gamma_j, v_j)\}$ の存在を示すことができる．さらに, 補題 2.13 からその極限 $(\hat{\gamma}, \hat{v})$ が (BE) をみたすこともわかる．最後に $(\gamma, v)$ が $(\hat{\gamma}, \hat{v})$ に $C^\infty$ 位相で収束することを示せばよい．ここで, $\|\gamma\|_{H^{n+4}} \leq C$ であることから,

$$\|\gamma - \hat{\gamma}\|_{C^n} \leq C \sum_{k=0}^{n+1} \|\gamma - \hat{\gamma}\|_{L^2}^{1/(2k+2)} \tag{2.17}$$

が得られる．よって, 命題 2.1 を次のようにいいかえることができる: “ $T > 0$ と $r > 0$ が存在して $\|\gamma - \hat{\gamma}\|_{L^2} \leq r$ をみたす任意の $\gamma(x,t)$ と $t \geq T$ に対して

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{L^2} \geq |E(\gamma) - E(\hat{\gamma})|^{1-\theta}$$

が成り立つ.” 評価 (2.17) により, 結論を得るためには “任意の $r > 0$ に対して $T > 0$ が存在し $t \geq T$ である任意の $t$ に対して $\gamma(\cdot, t) \in U_r := \{\gamma \mid ||\gamma - \hat{\gamma}||_{L^2} < r\}$ が成り立つ” ということを示せばよい．これを背理法により証明し結論を得る．その中で, 上のようにいいかえた命題 2.1 が重要な役割を果たす．その詳細については [9] または [17] を参照されたい． □

最後に方程式系 (BE) について述べておく．まず, (BE) の第一式から次が従う:

$$0 = \left\{ -\hat{\gamma}^{(4)} + \left\{ \left( \hat{v} - 2\,|\hat{\gamma}''|^2 \right) \hat{\gamma}' \right\} + p\,\hat{\boldsymbol{n}} \right\} \cdot \hat{\gamma}' = \frac{3}{2} \left( |\hat{\gamma}''|^2 \right)' + \left( \hat{v} - 2\,|\hat{\gamma}''|^2 \right)'.$$

これより, (BE) の第一式は次のようになる:

$$-\hat{\gamma}^{(4)} + \left(\left(C - \frac{3}{2}\left|\hat{\gamma}''\right|^2\right)\hat{\gamma}'\right)' + p\,\hat{\boldsymbol{n}} = 0.$$

ただし, $C$ はある定数である. この方程式の法方向成分を求めると,

$$0 = \left\{-\hat{\gamma}^{(4)} + \left(\left(C - \frac{3}{2}\left|\hat{\gamma}''\right|^2\right)\hat{\gamma}'\right)' + p\,\hat{\boldsymbol{n}}\right\}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\kappa}'' - \frac{1}{2}\hat{\kappa}^3 + C\hat{\kappa} + p$$

が得られる. ただし, $\hat{\kappa}$ は $\hat{\gamma}$ の曲率を表す. この方程式は, 次節以降で扱う, 変分問題 1.2 における Euler-Lagrange 方程式に一致する. 従って, 方程式系 (EQ) の解は変分問題 1.2 のある解に収束することが示されたことになる.

# 3　$n$ モード解の漸近形

本節以降では, 閉曲線の最終的形状および, $t \to \infty$ とするときの解の挙動を考察するために, 変分問題 1.2 の解の性質について調べていく. その中で特に, $p$ が十分大きい場合に焦点をあてる.

第 1 節で述べたように, 円は, $p$ の値によらず, この変分問題の自明な臨界点であり, ある値 $p^*$ を境に安定から不安定へと切り替わることが知られている ([24]). 変分問題 1.2 における Euler-Lagrange 方程式は曲率 $\kappa$ に対する二階常微分方程式で与えられる. 解として閉曲線を考えていることから, 解は 1 以上の周期 $n$ をもつわけだが, $n \geq 2$ であることが, 実際に, S. S. Antman ([1]) により示されている. そして, 初期値問題の解の一意性から, $n \geq 2$ なる周期をもつ臨界点は次の境界値問題

$$\text{(P)}\qquad \begin{cases} \kappa''(s) + \dfrac{1}{2}\kappa^3(s) - \mu\kappa(s) - p = 0 \qquad \text{for} \quad s \in [0, L/(2n)]\,, \\ \displaystyle\int_0^{L/(2n)} \kappa(s)\,ds = \frac{\pi}{n}, \\ \kappa'(0) = \kappa'(L/(2n)) = 0 \end{cases}$$

の解によって構成されることが容易に従う. ここで, $'$ は弧長パラメータ $s$ に関する微分を表す. (P) の第一式は, 上で述べた, この変分問題における Euler-Lagrange 方程式であり, Lagrange 乗数 $\mu$ を含んでいる. つまり, 与えられた定数 $p > 0$ に対して, (P) の解として $(\kappa(s), \mu)$ を求めることになる. (P) の第二式は (P) の解から構成される閉曲線の回転数が 1 であることを意味している.

変分問題 1.2 の臨界点 $\gamma$ がモード $n$ をもつとは, $\gamma$ がちょうど $n$ 個の対称軸を持つことである. (P) の狭義単調な解は, Euler-Lagrange 方程式の, 全区間 $[0, L]$ 上の周期境界条件をみたす解へと自然に拡張される. このようにして構成された解は, 変分問題 1.2 のモード $n$ をもつ臨界点となる. よって, 以下では, (P) の狭義単調な解を $n$ モード解とよぶことにする.

近年になって, K. Watanabe and I. Takagi ([30]) により, (P) のすべての狭義単調な非自明解の表現公式が与えられた:

**命題 3.1** (K. Watanabe and I. Takagi ([30]))**.** (i) $n=1$ ならば, 任意の $p>0$ に対して, (P) の非自明解は存在しない. (ii) $n\geq 2$ および $0<p\leq 8\pi^3(n^2-1)/L^3$ ならば, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して, $n$ モード解は存在しない. (iii) $n\geq 2$ および $8\pi^3(n^2-1)/L^3<p$ ならば, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して, (P) の非自明解が存在する. さらに, その解は次のような構造をもつ:

(3.1)
$$\kappa_n(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{a_1\operatorname{cn}\left(\frac{4nK(m_1)s}{L},m_1\right)+b_1}+c_1 & \text{for} \quad \frac{8\pi^3(n^2-1)}{L^3}<p\leq\frac{8\pi^3(n-1)(2n-1)(3n-1)}{L^3},\\ \dfrac{1}{a_2\operatorname{dn}\left(\frac{2nK(m_2)s}{L},m_2\right)+b_2}+c_2 & \text{for} \quad \frac{8\pi^3(n-1)(2n-1)(3n-1)}{L^3}<p.\end{cases}$$

ただし, $\operatorname{cn}(\cdot,m)$ および $\operatorname{dn}(\cdot,m)$ は Jacobi の楕円函数であり, $K(m)$ は第一種完全楕円積分を表し, $\sqrt{m}$ $(0<m<1)$ は楕円函数の母数である. $(a_1,b_1,c_1,m_1)$ は次の方程式系の一意解 $(a,b,c,m)$ である:

$$\int_0^{L/(2n)}\kappa_n(s)\,ds=\frac{\pi}{n}, \tag{3.2}$$

$$a=-\sqrt{\frac{-1+4b^2g^2(1-2m)+\sqrt{(1-4b^2g^2(1-2m))^2+64b^4g^4m(1-m)}}{8g^2(1-m)}}, \tag{3.3}$$

$$c=-\frac{1+\sqrt{(1-4b^2g^2)^2+16b^2g^2m}}{2b}, \tag{3.4}$$

$$2bg^4\sqrt{(1-4b^2g^2)^2+16b^2g^2m}=p. \tag{3.5}$$

ただし, $g=8K(m)/L$ である. 一方, $(a_2,b_2,c_2,m_2)$ は (3.2) および次の方程式系の一意解 $(a,b,c,m)$ として与えられる:

$$a=-\sqrt{\frac{1+4b^2h^2(2-m)-\sqrt{1+8b^2h^2(2-m)+16b^4h^4m^2}}{8h^2(1-m)}}, \tag{3.6}$$

$$c=-\frac{1+\sqrt{1+8b^2h^2(2-m)+16b^4h^4m^2}}{2b}, \tag{3.7}$$

$$2bh^4m^2\sqrt{1+8b^2h^2(2-m)+16b^4h^4m^2}=p. \tag{3.8}$$

ここで $h=2nK(m)/L$ である.

この結果によって, 各 $n\geq 2$ に対して $n$ モード解は一意であることが証明された. しかし, 表現公式に含まれる $a$, $b$, $c$, $m$ および $p$ は非常に複雑な関係式をみたしており, $p\to\infty$ とするときの $n$ モード解の漸近形を (3.1), (3.2) および (3.6)–(3.8) から知ることは難しい. そこで, 特異摂動法を用いることにより次を得た:

**定理 3.1.** 各 $n \geq 2$ に対して十分大きい定数 $P_0$ と, (P) の解であり, 以下のような性質をもつ 1 パラメータ族 $\{(\kappa(s;p), \mu(p))\}_{p>P_0}$ が存在する: (i) $\kappa(s;p)$ は $s \in [0, L/(2n)]$ において狭義単調減少である; (ii) $p \to \infty$ とするとき,

$$\max_{s\in[0,L/(2n)]} \kappa(s;p) = \kappa(0;p) = A^* - \left(\frac{1}{4\sqrt{M_n}\sqrt{p}} + O(1/p)\right)\delta^2 + O(\delta^3), \tag{3.9}$$

$$\min_{s\in[0,L/(2n)]} \kappa(s;p) = \kappa(L/(2n);p) = B^* + \delta + O(\delta^2), \tag{3.10}$$

$$\mu(p) = M_n p - \frac{4n\sqrt{M_n}}{L}\sqrt{p} + O(p^{3/8}), \tag{3.11}$$

$$s_0(p) = \frac{1}{2\sqrt{M_n}}\frac{\log p}{\sqrt{p}} + \frac{\log(4{M_n}^{3/2})}{\sqrt{M_n}}\frac{1}{\sqrt{p}} + O(1/p^{5/8}) \tag{3.12}$$

が成り立つ. ここで, $s_0(p)$ は $\kappa(s;p) = 0$ となる点であり, $M_n$ は

$$M_n = \frac{L}{2(n-1)\pi} \tag{3.13}$$

で与えられる正定数である. また, $A^* = A^*(p)$, $B^* = B^*(p)$, $\delta = \delta(p)$ は, $p \to \infty$ とするとき, 次のように表される:

$$A^*(p) = 2\sqrt{M_n}\sqrt{p} - \frac{4n}{L} + \frac{1}{M_n} + O(1/p^{1/8}), \tag{3.14}$$

$$B^*(p) = -\frac{1}{M_n} - \frac{4n}{L{M_n}^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{p}} + O(1/p^{5/8}), \tag{3.15}$$

$$\delta(p) = 8e\sqrt{M_n}\sqrt{p}\exp\left[-\frac{L\sqrt{M_n}\sqrt{p}}{2n}\right](1 + O(1/p^{1/8})). \tag{3.16}$$

定理 3.1 の主張は, (P) の狭義単調減少する解で, $p \to \infty$ とするとき, (3.9)–(3.16) なる漸近形をもつものが存在するということである. つまり, この結果だけでは $n$ モード解の漸近形が与えられたということはできない. しかし, [30] により, 各 $n \geq 2$ に対して $n$ モード解は一意であることが示されているため, 命題 3.1 と定理 3.1 を合わせることにより, 直ちに次が従う:

**定理 3.2.** 各 $n \geq 2$ に対して, $p \to \infty$ とするとき, $n$ モード解の漸近形は (3.9)–(3.16) により与えられる.

$n$ モード解から構成される閉曲線を $\gamma_n$ で表す. 既に述べたように, 閉曲線 $\gamma_n$ は変分問題 1.2 のモード $n$ をもつ臨界点である. 定理 3.1 より, $p \to \infty$ とするときの $\gamma_n$ の形状を知ることができる. 十分大きな $p$ に対して, 定理 3.1 では次のようなことが示された: (i) $\gamma_n(s)$ の曲率は各点 $s = jL/n$ の近傍 $U_j$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$ においてのみ正であり, かつ, $s = jL/n$ では非常に大きい値をとる; (ii) $\gamma_n(s)$ の曲率は $\bigcup_{j=0}^{n-1} U_j$ の補集合上では $-2(n-1)\pi/L$ に非常に近い値をとる. $-2(n-1)\pi/L$ は周長が $L/(n-1)$ かつ負の面積

を囲む円の曲率であることに注意すると, $p$ が十分大きいとき, $\gamma_n$ は次のような形状であることがわかる: $\gamma_n(s)$ は各 $U_j$ 上では非常に小さな円状部分をもち, 一方で, それ以外の部分は半径が $L/(2(n-1)\pi)$ である円弧に非常に近い形状である. 以下, 定理 3.1 の証明について述べていく. まず, 考えるべき特異摂動問題を定式化する.

## 3.1 特異摂動問題

定理 3.1 を証明するために, (P) の解の族 $(\kappa(s;p), \mu(p))$ で, ある正定数 $\mu^*$ に対して $\lim_{p\to\infty} \mu(p)/p = \mu^*$ なる性質をみたすものを求めることにする. $\varepsilon = 1/\sqrt{p}$ とおき,

$$\mu_0(\varepsilon) = \varepsilon^2 \mu(1/\varepsilon^2) \tag{3.17}$$

と定義することにより, $(\kappa(s), \mu_0) = (\kappa(s;1/\varepsilon^2), \varepsilon^2\mu(1/\varepsilon^2))$ は

$$(\mathrm{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \varepsilon^2\kappa''(s) + \dfrac{\varepsilon^2}{2}\kappa^3(s) - \mu_0(\varepsilon)\kappa(s) - 1 = 0 \quad \text{for} \quad s \in [0, L/(2n)], \\ \displaystyle\int_0^{L/(2n)} \kappa(s)\, ds = \frac{\pi}{n}, \\ \kappa'(0) = \kappa'(L/(2n)) = 0 \end{cases}$$

をみたすことがわかる. よって, 十分小さな $\varepsilon$ に対して, $(\mathrm{P}_\varepsilon)$ の狭義単調減少する解 $(\kappa(s;\varepsilon), \mu_0(\varepsilon))$ を求めればよい. $\kappa'(0) = 0$ であるから, $(\mathrm{P}_\varepsilon)$ の第一式に $\kappa'(s)$ をかけて 0 から $s$ まで積分することにより,

$$\frac{d\kappa}{ds} = -\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{2\left(F_\varepsilon(A) - F_\varepsilon(\kappa)\right)} \tag{3.18}$$

が得られる. ここで, $A = \kappa(0)$ であり, $F$ は次のように与えられるものである:

$$F_\varepsilon(\kappa) = \frac{\varepsilon^2}{8}\kappa^4 - \frac{\mu_0}{2}\kappa^2 - \kappa. \tag{3.19}$$

$\kappa(s)$ は狭義単調減少, かつ, $(\mathrm{P}_\varepsilon)$ の第二式である積分条件をみたすから, $A = \kappa(0)$ は正でなければならない. (3.18) より,

$$\int_\kappa^A \frac{\varepsilon\, d\kappa}{\sqrt{2(F_\varepsilon(A) - F_\varepsilon(\kappa))}} = s \tag{3.20}$$

が従う. (3.20) の逆函数が $(\mathrm{P}_\varepsilon)$ の第一式の解である. $B = \kappa(L/(2n))$ とおくと, このとき, $\kappa'(L/(2n)) = 0$ および (3.18) より

$$(\mathrm{C1}_\varepsilon) \qquad F_\varepsilon(A) = F_\varepsilon(B)$$

であることがわかる. さらに, (3.20) から,

$$(\mathrm{I1}_\varepsilon) \qquad \int_B^A \frac{\varepsilon\, d\kappa}{\sqrt{2(F_\varepsilon(A) - F_\varepsilon(\kappa))}} = \frac{L}{2n}$$

を得る．一方で, $(\mathrm{P}_\varepsilon)$ の積分条件と (3.18) を用いると

$$(\mathrm{I2}_\varepsilon) \qquad \int_B^A \frac{\varepsilon\kappa\, d\kappa}{\sqrt{2(F_\varepsilon(A)-F_\varepsilon(\kappa))}} = \frac{\pi}{n}$$

が得られる．ゆえに, $(\mathrm{I1}_\varepsilon)$, $(\mathrm{I2}_\varepsilon)$ および $(\mathrm{C1}_\varepsilon)$ をみたす $(A(\varepsilon), B(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon))$ を求めることとなる．

**注意 3.1.** 命題 3.1 における表現公式 (3.1), (3.2) および (3.6)–(3.8) では, $p \to \infty$ とするとき, $\mu/p \to \mu^*$ が成り立つことは確かめられていない．ゆえに, $p \to \infty$ とするとき, $\mu/p \to \mu^*$ となることさえ自明ではない．定理 3.1 の目的は上記したような性質をもつ解 $(\kappa(s), \mu)$ の存在を示すことである．

## 3.2 定理 3.1 の証明の概略

初めに証明の方針を述べておく．まず, 函数 $F(\kappa, \varepsilon, \nu)$ を

$$F(\kappa, \varepsilon, \nu) = \frac{\varepsilon^2}{8}\kappa^4 - \frac{\nu}{2}\kappa^2 - \kappa$$

と定義する．ここで, $\varepsilon > 0$ と $\nu > 0$ は定数である．以下, 簡単のため, 混乱の心配がない場合には $F(\kappa, \varepsilon, \nu)$ を単に $F(\kappa)$ とかく．二つの数 $A$ と $B$ を

$$(\mathrm{C1}) \qquad F(A, \varepsilon, \nu) = F(B, \varepsilon, \nu)$$

をみたすものとする．また $0 < \lambda < 1$ なる数を任意にとり固定する．そして, 各 $B \in (B^*, 0)$ と $\nu \in [\lambda, 1/\lambda]$ に対し, $\varepsilon \downarrow 0$ における

$$(\mathrm{I1}) \qquad \int_B^A \frac{\varepsilon\, d\kappa}{\sqrt{2(F(B,\varepsilon,\nu) - F(\kappa,\varepsilon,\nu))}} = \frac{L}{2n}$$

および

$$(\mathrm{I2}) \qquad \int_B^A \frac{\varepsilon\kappa\, d\kappa}{\sqrt{2(F(B,\varepsilon,\nu) - F(\kappa,\varepsilon,\nu))}} = \frac{\pi}{n}$$

の左辺の積分の漸近的振る舞いを調べる．ただし, $B^*$ は $F(\kappa) = F(\kappa, \varepsilon, \nu)$ が極大値を達成する点である．次に, $B = B^* + \exp[(-d/\varepsilon)]$ とおくことにより, $(d, \nu)$ に対する方程式系を導出し, 積分 (I1) および (I2) の $\varepsilon \downarrow 0$ とするときの極限を計算することで, 一次近似解を求める．そして, 陰函数定理を適用することにより, 十分小さな $\varepsilon$ に対して解の族 $(d(\varepsilon), \nu(\varepsilon))$ が存在することを示す．最後に, 補題 3.5 で求める漸近展開を用いて定理 3.1 を証明する．

このような手順により定理 3.1 を証明するが, 積分の漸近展開の導出や陰函数定理が適用可能であることを確かめる議論においては煩雑な計算を要するため, その部分については [19] を参照されたい．

以下,

$$f(\kappa) = \frac{\varepsilon^2}{2}\kappa^3 - \nu\kappa - 1$$

とおく. これは $dF/d\kappa = f$ をみたす. また, 以下では, $F$ や $f$ の $\kappa$ に関する微分を $'$ で表す. まず, 以下の議論において重要な役割を果たす $\kappa$ の値を求める.

**補題 3.1.** $0 < \lambda < 1$ なる定数を任意に固定し, $\nu$ を区間 $[\lambda, 1/\lambda]$ 内に固定された数とする. $B^*$ を $F$ が極大値を達成する点とし, $A^* > 0$ を $F(A^*) = F(B^*)$ をみたすものとする. 正数 $A_0, A_1, A_2$ を, それぞれ, $F = 0$ となる点, 極小値を達成する点, $F'' = 0$ となる点とする. このとき, $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき,

$$A^* = \frac{2\sqrt{\nu}}{\varepsilon} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2\nu^2\sqrt{\nu}}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{3.21}$$

$$A_0 = \frac{2\sqrt{\nu}}{\varepsilon} + \frac{1}{\nu} - \frac{3}{4\nu^2\sqrt{\nu}}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{3.22}$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2\nu}}{\varepsilon} + \frac{1}{2\nu} - \frac{3\sqrt{2}}{16\nu^2\sqrt{\nu}}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{3.23}$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{2\nu}}{\sqrt{3}}\frac{1}{\varepsilon}, \tag{3.24}$$

$$B^* = -\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2\nu^4}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \tag{3.25}$$

が成り立つ. ただし, $O(\varepsilon^\beta)$ は $\nu \in [\lambda, 1/\lambda]$ に関して一様である.

まず, $A$ のあるべき範囲を確定させる. それは以下の三つの補題により結論が得られる.

**補題 3.2.** $\lambda$ と $\nu$ を補題 3.1 と同じ条件をみたす数とする. $A_1 < A \leq A_0$ と仮定する. このとき (I1) は十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して成立しない.

**補題 3.3.** $\nu$ を補題 3.1 と同じ条件をみたす数とする. $A$ は $A^* < A$ であり, かつ, $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき, $F(A) - F(B^*) = O(1)$ または $F(A) - F(B^*) \to \infty$ のいずれかをみたすと仮定する. このとき (I1) は十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して成立しない.

**補題 3.4.** $\nu$ を補題 3.1 と同じ条件をみたす数とする. $A$ は $A^* < A$ であり, かつ, $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき, $F(A) - F(B^*) \to 0$ をみたすと仮定する. このとき, (I2) は十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して成立しない.

補題 3.2, 3.3, 3.4 により, $A$ は $A_0 < A < A^*$ をみたすことがわかる. このとき, 条件 (C1) より, $B^* < B < 0$ であることも従う. なぜなら, $0 = F(A_0) < F(A) < F(A^*)$ は $F(0) < F(B) < F(B^*)$ を意味するからである. さらに, 補題 3.3, 3.4 の証明から, $B$ は $B^*$ に十分近くなければならないことも予測される ([19] 参照). よって, 以下では, $B$ は

$B^*$ に十分近く, かつ, $B^* < B < 0$ をみたすとする. つまり, $B = B^* + \delta$ とおき, 十分小さな $\delta > 0$ を決定することとする.

また, $f'(\kappa)$ は $\kappa = \pm A_2$ で 0 となり, かつ, 区間 $[-A_2, A_2]$ 上では負であることを注意しておく. $B \in (B^*, 0)$ であるとき, $f(B) < 0$ と $f'(B) < 0$ が成り立つ. なぜなら, $f(B^*) = 0$ であり $B \in (B^*, 0) \subset [-A_2, A_2]$ だからである. この事実は以下の補題の証明のなかで用いられている.

次に, 各 $B \in (B^*, 0)$ に対し, (I1) と (I2) の左辺に現れる積分の, $\varepsilon \downarrow 0$ とするときの漸近展開を求める.

**補題 3.5.** $\lambda \in (0,1)$ なる数を任意にとり固定する. 各 $B \in (B^*, 0)$ および $\nu \in [\lambda, 1/\lambda]$ に対し, $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき,

$$\begin{aligned}\int_B^A \frac{\varepsilon\, d\kappa}{\sqrt{2(F(A)-F(\kappa))}} &= \frac{\varepsilon \log \varphi(B)}{\sqrt{-f'(B)}}(1 + R_1(\varepsilon,\nu,B)) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\varepsilon \log\left(\psi_1\sqrt{\psi_2}\right) + R_2(\varepsilon,\nu,B),\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\int_B^A \frac{\varepsilon\kappa\, d\kappa}{\sqrt{2(F(A)-F(\kappa))}} &= \frac{\varepsilon \log \varphi(B)}{\sqrt{-f'(B)}}\left(B - \frac{f(B)}{f'(B)}\right)(1 + R_3(\varepsilon,\nu,B)) + \pi \\ &\quad + 2\left(\frac{A\nu^{1/4}}{f(A)} - \frac{1}{\nu^{3/4}}\right)\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{\nu^{3/2}}\varepsilon\log\left(\psi_1\sqrt{\psi_2}\right) + \frac{2}{\nu^{3/2}}\varepsilon + R_4(\varepsilon,\nu,B)\end{aligned} \tag{3.27}$$

が成り立つ. ただし, $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき, $B \in (B^*, 0)$ および $\nu \in [\lambda, 1/\lambda]$ に関して一様に $R_1 = O(\varepsilon^2)$, $R_2 = O(\varepsilon^{5/4})$, $R_3 = O(\varepsilon^2)$, $R_4 = O(\varepsilon^{5/4})$ である. ここで, $\psi_1$, $\psi_2$, $\varphi(B)$ は次のように与えられるものである:

$$\psi_1(\varepsilon, A, \nu) = \frac{2\nu\sqrt{\nu} + \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{4\nu^3 + 4\nu\sqrt{\nu}\sqrt{\varepsilon} + 2\nu F(A)\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}\left(1 + \sqrt{2\nu F(A)}\right)}, \tag{3.28}$$

$$\psi_2(\varepsilon) = \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{2\sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon} - 1\right)\frac{1 - \sqrt{2\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon}}{1 + \sqrt{2\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon}}, \tag{3.29}$$

$$\varphi(B) = -\frac{\sqrt{-2F(B)f'(B)}}{f(B)} + \sqrt{-\frac{2F(B)f'(B)}{f(B)^2} + 1}. \tag{3.30}$$

$B = B^* + \delta$ とおく. ここで, $(\delta, \nu)$ が与えられれば, (C1) から $A$ が $A = A(B) = A(\varepsilon, \delta, \nu)$ と決定されることを述べておく:

**補題 3.6.** 十分小さな数 $\varepsilon > 0$ を任意に固定する. $\nu$ を補題 3.1 と同じ条件をみたす数とする. $B = B^* + \delta$ とおく. このとき, $\delta \downarrow 0$ とするとき, $A$ は次のように展開される:

$$A = A^* + \frac{f'(B^*)}{2f(A^*)}\delta^2 + O(\delta^3). \tag{3.31}$$

**証明.** 以下, 定数 $\varepsilon$ を区間 $0 < \varepsilon \ll 1$ 内に任意にとり固定する. $\nu$ は区間 $[\lambda, 1/\lambda]$ に任意に固定された数であり, $\lambda \in (0,1)$ は任意の定数とする. まず, 次の方程式

$$F(A^* + \rho) - F(B^* + \delta) = 0 \tag{3.32}$$

が, 十分小さな $\delta > 0$ に対して, 解 $\rho = \phi(\delta)$ をもつことを示す. (3.32) の左辺を $\mathcal{F}(\rho, \delta)$ と表すことにより, 方程式 $\mathcal{F}(\rho, \delta) = 0$ を考える. まず, $F(A^*) = F(B^*)$ より, 明らかに $\mathcal{F}(0,0) = 0$ が成り立つ. ここで,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=\delta=0} = \frac{\partial F}{\partial \kappa}(A^* + \rho)\frac{\partial (A^* + \rho)}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=\delta=0} = f(A^* + \rho)\bigg|_{\rho=\delta=0} = f(A^*) \neq 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \delta}\bigg|_{\rho=\delta=0} = \frac{\partial F}{\partial \kappa}(B^* + \delta)\frac{\partial (B^* + \delta)}{\partial \delta}\bigg|_{\rho=\delta=0} = f(B^* + \delta)\bigg|_{\rho=\delta=0} = f(B^*) = 0$$

といった結果から, 陰函数定理を適用することにより次が従う: ある正数 $\delta_0$ と $C^1$ 函数 $\phi(\delta)$ が存在し, $\phi(0) = 0$, $(\partial\phi/\partial\delta)(0) = 0$ および, 任意の $0 \le \delta < \delta_0$ に対して $\mathcal{F}(\phi(\delta), \delta) = 0$ が成り立つ. 以上により方程式 (3.32) の解の存在が示されたので, 最後にその解 $\phi(\delta)$ の, $\delta \downarrow 0$ とするときの, 展開を求める. $F$ の Taylor 展開から, 十分小さな $\delta > 0$ に対して,

$$f(A^*)\phi + \frac{f'(A^*)}{2}\phi^2 + \frac{\varepsilon^2 A^*}{2}\phi^3 + \frac{\varepsilon^2}{8}\phi^4 = \frac{f'(B^*)}{2}\delta^2 + \frac{\varepsilon^2 B^*}{2}\delta^3 + \frac{\varepsilon^2}{8}\delta^4$$

が得られる. $\delta \downarrow 0$ とするとき $\phi(\delta) = O(\delta^2)$ となることが確かめられるので, $\delta \downarrow 0$ とするとき, $\phi(\delta)$ は

$$\phi(\delta) = \frac{f'(B^*)}{2f(A^*)}\delta^2 + r(\varepsilon, \delta, \nu)$$

と展開されることがわかる. ただし, $\delta \downarrow 0$ とするとき $\varepsilon$ と $\nu$ に関して一様に $r = O(\delta^3)$ である. 最後に $f'(B^*) < 0$ および $f(A^*) > 0$ から $\phi(\delta) \le 0$ が従うことを注意して, 証明を終了する. □

補題 3.6 より, $(\delta, \nu)$ を求めればよいことが従うわけだが, $B = B^* + \exp[-(d/\varepsilon)]$, つまり, $\delta = \exp[-(d/\varepsilon)]$ とおくことにより, 補題 3.5 のおける展開式 (3.26), (3.27) から $(d, \nu)$ に関する方程式系を導出する:

**補題 3.7.** 区間 $(0,1)$ 内の数 $\lambda_1$, $\lambda_2$ を任意にとり固定する. 各 $d \in [\lambda_1, 1/\lambda_1]$ および $\nu \in [\lambda_2, 1/\lambda_2]$ に対し, $B = B^* + \exp[-(d/\varepsilon)]$ とおく. このとき, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して, $(B, \nu)$ が方程式系 (I1)-(I2) の解であるための必要十分条件は, $(d, \nu)$ が次をみたすことである:

$$\frac{d}{\sqrt{-f'(B^*)}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\nu}}\log(\psi_1\sqrt{\psi_2}) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{-f'(B^*)}}\log\frac{2\sqrt{2F(B^*)}}{\sqrt{-f'(B^*)}} + R_5(\varepsilon, d, \nu) = \frac{L}{2n}, \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}\frac{B^* d}{\sqrt{-f'(B^*)}} - \frac{\varepsilon}{\nu^{3/2}}\log(\psi_1\sqrt{\psi_2}) + \frac{\varepsilon B^*}{\sqrt{-f'(B^*)}}\log\frac{2\sqrt{2F(B^*)}}{\sqrt{-f'(B^*)}}& \\ + \frac{2}{\nu^{3/2}}\varepsilon + R_6(\varepsilon, d, \nu) = -\frac{(n-1)\pi}{n}.&\end{aligned} \tag{3.34}$$

ただし, $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき, $d \in [\lambda_1, 1/\lambda_1]$ および $\nu \in [\lambda_2, 1/\lambda_2]$ に関して一様に $R_5 = O(\varepsilon^{5/4})$, $R_6 = O(\varepsilon^{5/4})$ である.

以下では, 方程式系 (3.33)-(3.34) が, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して, 解 $(d(\varepsilon), \nu(\varepsilon))$ をもつことを示していく. そのために, 次の形で述べられる陰函数定理を適用する.

**補題 3.8.** $U \subset \mathbb{R}^N$ を原点 0 の近傍とする. $(x, y) \in [0, 1) \times U$ に対して定義される $\mathbb{R}^N$ 値函数 $\mathcal{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y), \cdots, F_N(x, y))$ は次をみたすとする:

(i) $\mathcal{F}(x, y)$ は $[0, 1) \times U$ において一様連続である. さらに, 各 $x \in [0, 1)$ に対し, $\mathcal{F}(x, y)$ は $U$ 上 $y$ に関して偏微分可能であり, $\partial \mathcal{F}_l / \partial y_m$ は $[0, 1) \times U$ において連続である.

(ii) $\mathcal{F}(0, 0) = 0$.

(iii) 次で定義される $N \times N$ 行列は可逆である:

$$\mathcal{F}_y(0, 0) = \left( \frac{\partial F_l}{\partial y_m}(0, 0) \right)_{1 \le l, m \le N}.$$

このとき, 正数 $\rho$ および $r$ と, $[0, 1)$ から $B_r(0) = \{ y \in \mathbb{R}^N \mid |y| < r \}$ への函数 $\varphi$ が存在し, 任意の $x \in [0, \rho)$ に対して $\mathcal{F}(x, \varphi(x)) \equiv 0$, $\varphi(0) = 0$ が成り立つ. さらに $\varphi$ は $[0, \rho)$ において連続である.

補題 3.8 を用いることで次が従う:

**補題 3.9.** 正数 $\varepsilon_0$ と連続函数の組 $(d(\varepsilon), \nu(\varepsilon))$ が存在し, $(d(\varepsilon), \nu(\varepsilon))$ は任意の $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ に対して方程式系 (3.33)-(3.34) をみたす.

**証明.** まず, (3.33) と (3.34) において $\varepsilon = 0$ とすることで次を得る:

$$\frac{d}{\sqrt{\nu}} = \frac{L}{2n}, \qquad -\frac{d}{\nu^{3/2}} = -\frac{(n-1)\pi}{n}. \tag{3.35}$$

ここで, $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき $d \in [\lambda_1, 1/\lambda_1]$ と $\nu \in [\lambda_2, 1/\lambda_2]$ に関して一様に $\varepsilon \log(\psi_1 \sqrt{\psi_2}) = O(\varepsilon \log \varepsilon)$ であることに注意されたい. よって, $\varepsilon = 0$ のとき, 方程式系 (3.33)-(3.34) は解 $(d, \nu) = (d^*, \nu^*)$ をもつ:

$$d^* = \frac{L}{2n} \sqrt{\frac{L}{2(n-1)\pi}}, \qquad \nu^* = \frac{L}{2(n-1)\pi}. \tag{3.36}$$

十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して (3.33)-(3.34) の解が存在することを示すために, 補題 3.8 の形で述べた陰函数定理を用いる. そのために, (I1) と (I2) から次を定義する:

$$P_1(\varepsilon, B, \nu) = \int_B^{A(\varepsilon, B, \nu)} \frac{\varepsilon \, d\kappa}{\sqrt{2(F(\varepsilon, \nu, A(\varepsilon, B, \nu)) - F(\varepsilon, \nu, \kappa))}} - \frac{L}{2n},$$
$$P_2(\varepsilon, B, \nu) = \int_B^{A(\varepsilon, B, \nu)} \frac{\varepsilon \kappa \, d\kappa}{\sqrt{2(F(\varepsilon, \nu, A(\varepsilon, B, \nu)) - F(\varepsilon, \nu, \kappa))}} - \frac{\pi}{n}.$$

ここで, 条件 (C1) から $A = A(\varepsilon, B, \nu)$ が従うことに注意されたい (補題 3.6 参照). さらに, $B(\varepsilon, d, \nu) = B^*(\varepsilon, \nu) + \exp[-(d/\varepsilon)]$ と (3.35) を用いることにより, $Q_1(\varepsilon, d, \nu)$ と $Q_2(\varepsilon, d, \nu)$ を次のように定義する:

$$Q_1(\varepsilon, d, \nu) = \begin{cases} P_1(\varepsilon, B^*(\varepsilon, \nu) + \exp(-d/\varepsilon), \nu) & \text{if} \quad \varepsilon > 0, \\ \dfrac{d}{\sqrt{\nu}} - \dfrac{L}{2n} & \text{if} \quad \varepsilon = 0, \end{cases}$$

$$Q_2(\varepsilon, d, \nu) = \begin{cases} P_2(\varepsilon, B^*(\varepsilon, \nu) + \exp(-d/\varepsilon), \nu) & \text{if} \quad \varepsilon > 0, \\ -\dfrac{d}{\nu^{3/2}} + \dfrac{(n-1)\pi}{n} & \text{if} \quad \varepsilon = 0. \end{cases}$$

そして $Q_1$ と $Q_2$ から

$$\mathcal{F}(\varepsilon, d, \nu) = (Q_1(\varepsilon, d, \nu),\, Q_2(\varepsilon, d, \nu))$$

を定義する. 補題を証明するには, 方程式 $\mathcal{F}(\varepsilon, d, \nu) = 0$ に補題 3.8 を適用すればよい. $\mathcal{F}(0, d^*, \nu^*) = 0$ が成立することから, 方程式 $\mathcal{F}(\varepsilon, d, \nu) = 0$ を $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_1$, $d^* - \rho_1 \leq d \leq d^* + \rho_1$, $\nu^* - \rho_2 \leq \nu \leq \nu^* + \rho_2$ において考える. ただし, $\varepsilon_1$, $\rho_1$, $\rho_2$ は $0 < \varepsilon_1 \ll 1$, $0 < \rho_1 \ll d^*$, $0 < \rho_2 \ll \nu^*$ なるある定数である. $\mathcal{F}(\varepsilon, d, \nu)$ が $[0, \varepsilon_1) \times [d^* - \rho_1, d^* + \rho_1] \times [\nu^* - \rho_2, \nu^* + \rho_2]$ において一様連続であることは簡単に確かめることができる. 従って, 補題 3.8 を適用するためには, $Q_1(\varepsilon, d, \nu)$ および $Q_2(\varepsilon, d, \nu)$ が $d$ と $\nu$ に関して $[0, \varepsilon_1) \times [d^* - \rho_1, d^* + \rho_1] \times [\nu^* - \rho_2, \nu^* + \rho_2]$ において偏微分可能であること, そして, 補題 3.8 における条件 (iii) がみたされることを示せばよい. 結果として, $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき

$$\frac{\partial Q_1}{\partial d} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\nu}}, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial \nu} \longrightarrow -\frac{d}{2\nu^{3/2}},$$
$$\frac{\partial Q_2}{\partial d} \longrightarrow -\frac{1}{\nu^{3/2}}, \qquad \frac{\partial Q_2}{\partial \nu} \longrightarrow \frac{3d}{2\nu^{5/2}}$$

であることが従い, 直ちに

$$\left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial d} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial \nu} \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial d} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial \nu} \end{vmatrix}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{\nu^3} \neq 0$$

が得られる. 以上から $\mathcal{F}(\varepsilon, d, \nu)$ は補題 3.8 の条件 (i), (ii), (iii) をみたすことがわかる. $Q_1$ および $Q_2$ の各偏導関数に関する詳細な議論は [19] を参照されたい. (その中で, それぞれの計算における評価等は, $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき $d$ や $\nu$ に関して一様であるという点に留意されたい.) 以上から, 補題 3.8 を $\mathcal{F}(\varepsilon, d, \nu) = 0$ に適用することができ, 結論が得られる. □

以上により解の存在は証明されたので, 最後に $d(\varepsilon)$ と $\nu(\varepsilon)$ の $\varepsilon \downarrow 0$ とするときの漸近形を求める.

**補題 3.10.** $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき, 方程式系 (3.33)-(3.34) の解 $(d(\varepsilon), \nu(\varepsilon))$ は次をみたす:

$$d(\varepsilon) = \frac{L\sqrt{M_n}}{2n} + \varepsilon \log \varepsilon - (1 + \log(8\sqrt{M_n}))\varepsilon + O(\varepsilon^{5/4}), \tag{3.37}$$

$$\nu(\varepsilon) = M_n - \frac{4n\sqrt{M_n}}{L}\varepsilon + O(\varepsilon^{5/4}). \tag{3.38}$$

ただし, $M_n$ は (3.13) により与えられる正定数である.

$B = B^*(\varepsilon, \nu) + \exp[-(d/\varepsilon)]$ であるから, 補題 3.10 により, $\varepsilon \downarrow 0$ とするときの $B$ の漸近形が得られる. さらに, 補題 3.6 をあわせることにより $A$ の漸近形も従う.

この節の最後に $s_0$ の漸近形について述べておく. $s_0$ は $\kappa(s_0) = 0$ なるものである (定理 3.1 参照). 補題 3.5 の証明および補題 3.10 により, $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき,

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{\varepsilon\, d\kappa}{\sqrt{2(F(A) - F(\kappa))}} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\nu}} \log(\psi_1\sqrt{\psi_2}) + O(\varepsilon^{5/4}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{M_n}}\varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\log(4{M_n}^{3/2})}{\sqrt{M_n}}\varepsilon + O(\varepsilon^{5/4})\end{aligned}$$

が成り立つことが従う. この等式は次と同値である: $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき,

$$s_0(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{M_n}}\varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\log(4{M_n}^{3/2})}{\sqrt{M_n}}\varepsilon + O(\varepsilon^{5/4}). \tag{3.39}$$

これにより定理 3.1 の証明が完了する.

# 4　$n$ モード解の不安定性

本節では, 第 3 節で求めた $p \to \infty$ とするときの $n$ モード解の漸近形を利用して, $p$ が十分大きい場合の $n$ モード解の不安定性について述べる. はじめに, 本節での主結果をより正確に述べるために, エネルギー汎函数 (1.1) に対する第二変分公式および不安定指数の定義を与える.

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ を閉曲線とする. また, 以下では, 区間 $[a, b]$ 上で定義された函数は周期境界条件をみたすものとする. まず, 幾つか記号を準備するとともに, 基本的な事項を述べておく. $\gamma$ の単位接ベクトル $\boldsymbol{t}$ と単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ は, それぞれ, 次のように表される:

$$\boldsymbol{t}(\xi) = \frac{\dot\gamma(\xi)}{|\dot\gamma(\xi)|}, \qquad \boldsymbol{n}(\xi) = R\boldsymbol{t}(\xi). \tag{4.1}$$

ただし, $R$ は $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なる行列を表し,「 $\dot{}$ 」はパラメータ $\xi$ に関する微分を表すとする. $\gamma(\xi)$ の弧長 $s(\xi)$ は

$$s(\xi) = \int_a^\xi |\dot\gamma(\zeta)|\, d\zeta \tag{4.2}$$

により定義され, このとき, $\gamma(\xi)$ の周長 $\mathcal{L}(\gamma)$ は $s(b)$ に等しい. $\gamma(\xi)$ が囲む符号付き面積は

$$\mathcal{A}(\gamma) = -\frac{1}{2}\int_a^b \boldsymbol{n}(\xi)\cdot\gamma(\xi)\,|\dot{\gamma}(\xi)|\,d\xi \tag{4.3}$$

により与えられる. $ds/d\xi = |\dot{\gamma}|$ と Frenet-Serret の公式 $\boldsymbol{t}' = \kappa\boldsymbol{n}$（「 $'$ 」は $s$ に関する微分を表す）により, $\gamma(\xi)$ の曲率 $\kappa(\xi)$ は次のように表される:

$$\kappa(\xi) = \frac{\boldsymbol{n}(\xi)\cdot\dot{\boldsymbol{t}}(\xi)}{|\dot{\gamma}(\xi)|} = \frac{\boldsymbol{n}(\xi)\cdot\ddot{\gamma}(\xi)}{|\dot{\gamma}(\xi)|^2}. \tag{4.4}$$

このとき, $\gamma(\xi)$ の弾性エネルギーは

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \left\{\frac{\boldsymbol{n}(\xi)\cdot\ddot{\gamma}(\xi)}{|\dot{\gamma}(\xi)|^2}\right\}^2 |\dot{\gamma}(\xi)|\,d\xi \tag{4.5}$$

となるから, エネルギー汎函数 (1.1) は

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \left\{\frac{\boldsymbol{n}(\xi)\cdot\ddot{\gamma}(\xi)}{|\dot{\gamma}(\xi)|^2}\right\}^2 |\dot{\gamma}(\xi)|\,d\xi - \frac{p}{2}\int_a^b \boldsymbol{n}(\xi)\cdot\gamma(\xi)\,|\dot{\gamma}(\xi)|\,d\xi \tag{4.6}$$

と表される. 以下, $\gamma(\xi)\in S$ は変分問題 1.2 の, つまり, エネルギー汎函数 (4.6) に対する束縛条件 $\mathcal{L}(\gamma)\equiv L$ 付き変分問題の, 臨界点であるとする. $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ と $\phi(\xi,0)\equiv 0$ なるベクトル値函数 $\phi\in C^\infty((-\varepsilon_0,\varepsilon_0);(C^1[a,b])^2)$ に対して, 変分

$$\gamma(\phi(\varepsilon)) := \gamma(\xi) + \phi(\xi,\varepsilon) \tag{4.7}$$

を考える. ただし, $\varepsilon_0$ は十分小さな正数である. ここで (4.1) を用いると, $\phi$ は

$$\phi(\xi,\varepsilon) = T(\xi,\varepsilon)\boldsymbol{t}(\xi) + N(\xi,\varepsilon)\boldsymbol{n}(\xi) \tag{4.8}$$

と表示される. ただし, $T=\phi\cdot\boldsymbol{t}$, $N=\phi\cdot\boldsymbol{n}$ である. $\phi$ が admissible variation であるとは

$$\mathcal{L}(\gamma(\phi(\varepsilon)))\equiv L \tag{4.9}$$

が成り立つことをいう. 次の等式

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(\gamma(\phi(\varepsilon)))\bigg|_{\varepsilon=0} &= \int_a^b \boldsymbol{t}(\xi)\cdot\dot{\phi}(\xi,0)\,d\xi \\ &= \int_a^b \left\{\dot{T}(\xi,0) + N(\xi,0)(\boldsymbol{t}(\xi)\cdot\dot{\boldsymbol{n}}(\xi))\right\}d\xi = -\int_a^b \kappa(\xi)\,|\dot{\gamma}(\xi)|\,N(\xi,0)\,d\xi\end{aligned} \tag{4.10}$$

により, addmissible variation の主要部からなる空間 $\mathfrak{A}$ は

$$\mathfrak{A} = \left\{\eta\in H^2[a,b]\;\Big|\;\int_a^b \kappa(\xi)\eta(\xi)\,|\dot{\gamma}(\xi)|\,d\xi = 0\right\} \tag{4.11}$$

により与えられることがわかる. ここで次を確かめることができる:

**補題 4.1.** $\varphi(\xi) = \phi_\varepsilon(\xi, 0) \cdot \boldsymbol{n}(\xi)$ とおく. ただし, $\phi_\varepsilon = \partial\phi/\partial\varepsilon$ である. もし変分 $\gamma(\phi(\varepsilon))$ が周長を保つならば,

$$\int_a^b \kappa(\xi)\varphi(\xi) \left|\dot{\gamma}(\xi)\right| d\xi = 0 \tag{4.12}$$

が成り立つ. 逆に, $\varphi(\xi)$ が (4.12) をみたすならば, ある十分小さな正数 $\varepsilon_0$ と $\phi(0) = 0$, $\varphi(\xi) = \phi_\varepsilon(\xi, 0) \cdot \boldsymbol{n}(\xi)$ なる $\phi \in C^\infty\left((-\varepsilon_0, \varepsilon_0); (C^1[a, b])^2\right)$ が存在して変分 $\gamma(\phi(\varepsilon))$ は周長を保つ.

**証明.** 変分 $\gamma(\phi(\varepsilon))$ が周長を保存するならば, 等式 (4.10) により (4.12) が成り立つことは明らかである. 逆に, $\varphi(\xi)$ は (4.12) をみたすとする. まず, $\gamma(\xi)$ の変分

$$\gamma(\xi, \rho) := (1 + \rho)\gamma(\xi)$$

に対して

$$\left.\frac{d}{d\rho} \int_a^b \left|\dot{\gamma}(\xi, \rho)\right| d\xi \right|_{\rho=0} = \mathcal{L}(\gamma(\xi)) \neq 0 \tag{4.13}$$

が成り立つ. 一方で, $\gamma(\xi)$ の次のような変分について考える:

$$\zeta(\rho, \varepsilon, \xi) := \gamma(\xi, \rho) + \varepsilon\varphi(\xi)\boldsymbol{n}(\xi).$$

$\zeta(\rho, \varepsilon, \xi)$ の周長は

$$\Phi(\rho, \varepsilon) := \int_a^b \left|\dot{\zeta}(\rho, \varepsilon, \xi)\right| d\xi$$

により与えられるので, 方程式 $\Phi(\rho, \varepsilon) = L$ の解 $\rho = \psi(\varepsilon)$ を求める. まず, 明らかに, $\Phi(0, 0) = L$ が成立する. さらに, (4.10) および (4.13) から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}(0, 0) &= \mathcal{L}(\gamma(\xi)) = L \neq 0, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}(0, 0) &= -\int_a^b \kappa(\xi)\varphi(\xi) \left|\dot{\gamma}(\xi)\right| d\xi = 0
\end{aligned}$$

が得られる. よって, 陰函数定理により, $\psi(0) = 0$ なる $C^1$ 級函数 $\psi(\varepsilon)$ と正数 $\varepsilon_0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ に対して $\Phi(\psi(\varepsilon), \varepsilon) = L$ が成り立つことが従う. さらに,

$$\frac{d\psi}{d\varepsilon}(0) = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}(0, 0) \Bigg/ \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}(0, 0) = 0$$

が成り立つことから, $\phi(\xi, \varepsilon) := \psi(\varepsilon)\gamma(\xi) + \varepsilon\varphi(\xi)\boldsymbol{n}(\xi)$ とおくことによりこの $\phi$ が admissible であり ( つまり $\mathcal{L}(\gamma(\phi(\varepsilon))) \equiv L$ ), かつ, $\phi_\varepsilon(\xi, 0) \cdot \boldsymbol{n} = \varphi(\xi)$ をみたすことがわかる. 以上により証明が完了する. □

$S^1_L = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ とおく. 以下では $\gamma$ は $\varepsilon = 0$ のとき弧長 $s$ で表示されているとする. このとき, (4.11) によって定義された $\mathfrak{A}$ は

$$\mathfrak{A} = \left\{ \varphi \in H^2(S^1_L) \;\middle|\; \int_0^L \kappa(s)\varphi(s)\,ds = 0 \right\} \tag{4.14}$$

と書かれる. エネルギー汎函数 $E(\gamma)$ に対する第二変分公式 $(d^2/d\varepsilon^2)E(\gamma(\phi(\varepsilon)))|_{\varepsilon=0}$ は $\gamma$ の曲率 $\kappa$ を用いて次のように表すことができる:

$$\begin{aligned}\mathrm{II}(\kappa)[\varphi] = \frac{1}{2}\int_0^L \Big[ &\left\{ -\kappa^4 + 6\mu\kappa^2 + 8p\kappa + 6(\kappa')^2 \right\} \varphi^2 \\ &+ \left\{ -5\kappa^2 + 2\mu \right\} (\varphi')^2 + 2(\varphi'')^2 \Big]\, ds.\end{aligned} \tag{4.15}$$

ただし, $\varphi \in \mathfrak{A}$ に限る. (4.15) の導出計算の詳細は [20] を参照されたい. この第二変分の符号により, 変分問題の臨界点の安定性および不安定性を決定することができる. つまり, もし任意の $\varphi \in \mathfrak{A}$ に対して $\mathrm{II}(\kappa)[\varphi] > 0$ ならば, その臨界点 $\gamma$ は安定であるといわれ, 一方で, もし $\mathrm{II}(\kappa)[\varphi] < 0$ となる $\varphi \in \mathfrak{A}$ が存在するならば, その臨界点 $\gamma$ は不安定であるといわれる. また, 第二変分公式を用いて, 不安定指数は次のように定義される:

$$\mathrm{Ind}(\kappa) = \max\left\{ \dim V \mid V \subset \mathfrak{A},\ \mathrm{II}(\kappa)[\varphi] < 0 \text{ for any } \varphi \in V \setminus \{0\} \right\}. \tag{4.16}$$

以上の準備のもと, 本節での主結果は次のように述べることができる:

**定理 4.1.** 各 $n \geq 3$ に対して, ある十分大きな正定数 $P_n$ が存在し, 任意の $p > P_n$ に対して $n$ モード解 $\kappa_n$ は不安定である. さらに各 $n \geq 3$ と任意の $p > P_n$ に対して

$$\mathrm{Ind}(\kappa_n) \geq n - 1 \tag{4.17}$$

が成り立つ.

以下, 定理 4.1 の証明の概略を述べていく.

## 4.1 定理 4.1 の証明の概略

証明の方針としては, 第 3 節で求めた漸近形を利用して第二変分の符号の決定を目指す. 定理 3.1 からわかるように, $n$ モード解 $\kappa_n$ は, $p \to \infty$ とするとき, 定数 $-1/M_n$ に非常に近い部分をもつ. 特に, この事実に注目して証明を行う.

以下, $p > 0$ は十分大きいものとする. 定理 3.1 から, 十分大きな $p > 0$ に対して, ある正定数 $d$ が存在し, $s \in \bigcup_{m=0}^{n-1} U_m \subset S^1_L$ に対して $\kappa_n(s)$ は負の定数 $-1/M_n$ に非常に近い値をもつことがわかる. ただし, $U_m := [mL/n + d, (m+1)L/n - d]$ である. これは $\gamma_n(s)$ は, $s \in \bigcup_{m=0}^{n-1} U_m$ において, 半径が $L/(2(n-1)\pi)$ である円弧に非常に近い形状であることを意味している.

まず, $\mathrm{supp}(\varphi)=U_1=[d,L/n-d]$ なる函数 $\varphi\in C^2(S^1_L)$ を考える. 実際, このような函数 $\varphi$ は次のように構成することができる:

$$\varphi(s)=\psi(s)\eta_\rho(s). \tag{4.18}$$

ここで, $\psi\in C^2(S^1_L)$ であり, $\eta_\rho$ は $\mathrm{supp}(\eta_\rho)=U_1$, $0\le\eta_\rho\le 1$, $\eta_\rho(s)\equiv 1$ $(s\in[d+\rho,L/n-d-\rho])$ なる函数である. このような $\eta_\rho$ は $\rho>0$ に対して

$$\eta_\rho(s):=g\left(\frac{s-d}{\rho}\right)g\left(\frac{L/n-d-s}{\rho}\right), \tag{4.19}$$

$$g(s):=\frac{f(s)}{f(s)+f(1-s)}, \tag{4.20}$$

$$f(s):=\begin{cases}\exp[-1/s] & \text{for}\quad s>0,\\ 0 & \text{for}\quad s\le 0\end{cases} \tag{4.21}$$

により与えられる. ここで, $[d,d+\rho]\cup[L/n-d-\rho,L/n-d]$ における $\eta_\rho'$ および $\eta_\rho''$ に関して次のような評価が得られる:

**補題 4.2.** 正定数 $\rho>0$ を与える. このとき, 正定数 $C_1$ と $C_2$ が存在して, 任意の $s\in[d,d+\rho]\cup[L/n-d-\rho,L/n-d]$ に対して

$$\left|\eta_\rho'(s)\right|\le\frac{C_1}{\rho}, \tag{4.22}$$

$$\left|\eta_\rho''(s)\right|\le\frac{C_2}{\rho^2} \tag{4.23}$$

が成り立つ.

はじめに, $\mathrm{supp}(\varphi)=U_1=[d,L/n-d]$ なる $\varphi$ に対して, 第二変分 $\mathrm{II}(\kappa_n)[\varphi]$ を考える. ただし, ここでは $\varphi\in\mathfrak{A}$ である必要はない.

**補題 4.3.** $\mathrm{supp}(\varphi)=U_1$ なる $\varphi\in C^2(S^1_L)$ を任意に与える. このとき, 第二変分 $\mathrm{II}(\kappa_n)[\varphi]$ は次のように表される:

$$\begin{aligned}\mathrm{II}(\kappa_n)[\varphi]=\frac{p}{2}\int_{U_1}\Bigg[&\left\{-\frac{2}{M_n}\varphi(s)^2+2M_n\varphi'(s)^2\right\}\\ &+R_1(s,L,n,p)\varphi(s)^2+R_2(s,L,n,p)\varphi'(s)^2+\frac{2}{p}\varphi''(s)^2\Bigg]\,ds.\end{aligned} \tag{4.24}$$

ただし, $p\to\infty$ とするとき, $s\in U_1$ に関して一様に $R_1=O(1/\sqrt{p})$, $R_2=O(1/\sqrt{p})$ である.

**証明.** $\kappa'(0)=0$ であるから, Euler-Lagrange 方程式に $\kappa'(s)$ をかけて $0$ から $s$ まで積分することにより,

$$\frac{1}{2}(\kappa'(s))^2=-\frac{1}{8}\kappa^4(s)+\frac{1}{2}\mu\kappa^2(s)+p\kappa(s)+F(\kappa(0)) \tag{4.25}$$

が得られる. ただし, $F$ は次のようなものである:

$$F(\kappa) := \frac{1}{8}\kappa^4 - \frac{1}{2}\mu\kappa^2 - p\kappa. \tag{4.26}$$

このとき, (4.25) から, 第二変分公式 $\mathrm{II}(\kappa)[\varphi]$ は

$$\begin{aligned}\mathrm{II}[\varphi] = \frac{1}{2}\int_{U_1} \Bigg[\left\{-\frac{5}{2}\kappa^4 + 12\mu\kappa^2 + 20p\kappa + 12F(\kappa(0))\right\}\varphi^2 \\ + \left\{-5\kappa^2 + 2\mu\right\}(\varphi')^2 + 2(\varphi'')^2\Bigg]\, ds\end{aligned} \tag{4.27}$$

と変形される. 各 $n \geq 2$ に対して, 定理 3.1 から, $p \to \infty$ とするとき

$$\kappa_n(s) = -\frac{1}{M_n} + r_1, \quad \frac{\mu}{p} = M_n + O(1/\sqrt{p}), \quad \frac{F(\kappa_n(0))}{p} = \frac{1}{2M_n} + O(1/\sqrt{p}) \tag{4.28}$$

といった関係式が成立することがわかる. ただし $r_1 = r_1(s, n, L, p)$ は, $p \to \infty$ とするとき $s \in U_1$ に関して一様に $r_1 = O(1/\sqrt{p})$ となる函数である. (4.27) と (4.28) をあわせることにより (4.24) が従う. $\square$

ここで,

$$\mathrm{II}_{0,n}[\varphi] := 2M_n \int_{U_1} \left\{-\frac{1}{{M_n}^2}\varphi(s)^2 + \varphi'(s)^2\right\} ds \tag{4.29}$$

と定義する. このとき, $\mathrm{II}_{0,n}$ に関して次が従う:

**補題 4.4.** $n \geq 3$ とする. このとき, $\varphi(s) = \psi_1(s)\eta_\rho(s)$ に対して $\mathrm{II}_{0,n}[\varphi] < 0$ が成り立つ. ただし, $\psi_1(s)$ は

$$\psi_1(s) = \sin\left(\frac{\pi}{L/n - 2d}(s - d)\right) \tag{4.30}$$

により与えられる函数である.

**証明.** はじめに, 次の固有値問題を考える:

$$\begin{cases} -\psi''(s) - \dfrac{1}{{M_n}^2}\psi(s) = \lambda\psi(s) \qquad \text{for} \quad s \in [d, L/n - d], \\ \psi(d) = \psi(L/n - d) = 0. \end{cases} \tag{4.31}$$

問題 (4.31) の解 $(\psi_m, \lambda_m)$ は

$$\psi_m(s) = \sin\left(\frac{m\pi}{L/n - 2d}(s - d)\right), \tag{4.32}$$

$$\lambda_m = \left(\frac{m\pi}{L/n - 2d}\right)^2 - \left(\frac{2(n-1)\pi}{L}\right)^2 \tag{4.33}$$

と求められる. ただし, $m$ は正整数である. もし $\lambda_m < 0$ ならば, (4.33) により $m$ は

$$m < \frac{2(n-1)}{L}\left(\frac{L}{n} - 2d\right) \tag{4.34}$$

をみたすものでなければならない. ここで

$$\frac{2(n-1)}{L}\left(\frac{L}{n} - 2d\right) < 2 \tag{4.35}$$

であることに注意すれば, $\lambda_m < 0$ は $m = 1$ のときしか成り立ち得ないことがわかる. $m = 1$ とすると, 不等式 (4.34) より, 正数 $d$ は次をみたさねばならない:

$$0 < d < \frac{n-2}{4n(n-1)}L. \tag{4.36}$$

(4.36) より, $n = 2$ に対しては $\lambda_1 < 0$ とならないことがわかる. 一方, 各 $n \geq 3$ に対しては, $p$ に依らない正数 $d > 0$ を $\lambda_1 < 0$ が成り立つようにとることができる. 以下,

$$\Lambda_1 = \frac{\pi}{L/n - 2d}, \qquad \varphi(s) = \psi_1(s)\eta(s)$$

とおき, $\mathrm{II}_{0,n}[\varphi]$ を評価していく. まず,

$$I_1 := \int_d^{d+\rho} \left\{ -\frac{1}{{M_n}^2}\varphi(s)^2 + \varphi'(s)^2 \right\} ds \tag{4.37}$$

についてであるが, 直接 $\varphi(s) = \psi_1(s)\eta_\rho(s)$ を代入し計算することで, $\rho \downarrow 0$ とするとき $I_1 = O(\rho)$ であることがわかる. まったく同様にして, 区間 $[L/n - d - \rho, L/n - d]$ 上での積分 $I_3$ についても $\rho \downarrow 0$ とするとき $I_3 = O(\rho)$ となる. 最後に

$$I_2 := \int_{d+\rho}^{\frac{L}{n}-d-\rho} \left\{ -\frac{1}{{M_n}^2}\varphi(s)^2 + \varphi'(s)^2 \right\} ds \tag{4.38}$$

についてであるが, 任意の $s \in [L/n - d - \rho, d + \rho]$ に対して $\eta_\rho \equiv 1$ であることに注意すれば, $\rho \downarrow 0$ とするとき,

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{n} - 2d\right)\lambda_1 + O(\rho)$$

を得る. $\lambda_1 = {\Lambda_1}^2 - (1/{M_n}^2) < 0$ であるから, 十分小さな $\rho > 0$ と各 $n \geq 3$ および $\varphi = \psi_1\eta_\rho$ に対して

$$\mathrm{II}_{0,n}[\varphi] = M_n\left(\frac{L}{n} - 2d\right)\lambda_1 + O(\rho) < 0 \tag{4.39}$$

が成立する. 以上により証明が完了した. □

ただし, $\varphi = \psi_1\eta_\rho$ は $\mathfrak{A}$ に属さないことに注意されたい ( (4.14) 参照). 以上の準備のもとで, 十分大きな $p > 0$ と 各 $n \geq 3$ に対して, $n$ モード解の不安定性を証明する.

**補題 4.5.** 各 $n \geq 3$ に対して十分大きな正定数 $P_n$ が存在し, 任意の $p > P_n$ に対して $n$ モード解は不安定である.

**証明.** 以下, $\varphi(s) = \psi_1(s)\eta_\rho(s)$ $(s \in [0, L/n])$ とする. さらに, 整数 $l \in [0, n-1]$ と $m \in [0, n-1]$ に対して, 区間 $[0, L]$ 上の函数 $\varphi_{(l,m)}(s)$ を次のように定義する:

$$\varphi_{(l,m)}(s) = \begin{cases} \varphi\left(s - \dfrac{lL}{n}\right) & \text{for} \quad s \in [lL/n, (l+1)L/n], \\ -\varphi\left(s - \dfrac{mL}{n}\right) & \text{for} \quad s \in [mL/n, (m+1)L/n], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.40}$$

ただし, $l \neq m$ とする. まず, $\varphi_{(l,m)} \in \mathfrak{A}$ であることを確かめる. 実際に, $n$ モード解 $\kappa_n$ の周期性から,

$$\begin{aligned} \int_0^L \kappa_n(s)\varphi_{(l,m)}(s)\,ds &= \int_{lL/n}^{(l+1)L/n} \kappa_n(s)\varphi\left(s - \frac{lL}{n}\right) ds - \int_{mL/n}^{(m+1)L/n} \kappa_n(s)\varphi\left(s - \frac{mL}{n}\right) ds \\ &= \int_0^{L/n} \kappa_n\left(s + \frac{lL}{n}\right)\varphi(s)\,ds - \int_0^{L/n} \kappa_n\left(s + \frac{mL}{n}\right)\varphi(s)\,ds \\ &= \int_0^{L/n} \kappa_n(s)\varphi(s)\,ds - \int_0^{L/n} \kappa_n(s)\varphi(s)\,ds = 0 \end{aligned}$$

が従う. さらに, 補題 4.4 より明らかに, 各 $n \geq 3$ に対して $\mathrm{II}_{0,n}(\varphi_{(l,m)}) < 0$ が成り立つこともわかる. 第二変分 $\mathrm{II}(\kappa_n)[\varphi_{(l,m)}]$ の符号を決定するためには, 次の積分を評価すればよい:

$$\int_0^{L/n} \varphi''(s)^2\,ds. \tag{4.41}$$

ただし, $\varphi(s) = \psi_1(s)\eta_\rho(s)$ である. 簡単な計算により, (4.41) は, $\rho \downarrow 0$ とするとき,

$$\int_0^{L/n} \varphi''(s)^2\,ds = O(1/\rho)$$

となることがわかる (計算の詳細は [20] 参照). 補題 4.3 および 4.4 により, ある正定数 $C$ に対して $\rho = C/\sqrt{p}$ とおくことにより, $p \to \infty$ とするとき各 $n \geq 3$ に対して,

$$\mathrm{II}(\kappa_n)[\varphi_{(l,m)}] = pM_n\left(\frac{L}{n} - 2d\right)\lambda_1 + O(\sqrt{p}) < 0 \tag{4.42}$$

が成り立つ. 以上により証明が完了する. □

最後に, 各 $n \geq 3$ と任意の $p > P_n$ に対する $n$ モード解の不安定指数について述べる.

**補題 4.6.** $n \geq 3$ とする．このとき, 任意の $p > P_n$ に対して

$$\mathrm{Ind}(\kappa_n) \geq n-1 \tag{4.43}$$

が成り立つ.

**証明.** 集合 $W \subset \mathfrak{A}$ を次のように定義する:

$$W := \left\{\varphi_{(0,1)}, \varphi_{(0,2)}, \cdots, \varphi_{(0,n-1)}\right\}.$$

この集合 $W$ が線形独立であることを示す．つまり, 方程式

$$C_1\varphi_{(0,1)}(s) + C_2\varphi_{(0,2)}(s) + \cdots + C_{n-1}\varphi_{(0,n-1)}(s) = 0 \tag{4.44}$$

が任意の $s \in [0, L]$ に対して成り立つための必要十分条件は, 全ての整数 $j \in [0, n-1]$ に対して $C_j = 0$ であることを証明する．ただし, $C_j$ は定数である．もし任意の $0 \leq j \leq n-1$ に対して $C_j = 0$ が成り立つならば, 明らかに (4.44) は成立する．逆に, 任意の $s \in [0, L]$ とある $C_j$ に対して (4.44) が成立すると仮定する．任意に整数 $1 \leq j \leq n-1$ を固定すると, $\mathrm{supp}(\varphi_{(l,m)}) = U_l \cup U_m$ であるから, 任意の $s \in [jL/n, (j+1)L/n]$ に対して,

$$C_1\varphi_{(0,1)}(s) + C_2\varphi_{(0,2)}(s) + \cdots + C_{n-1}\varphi_{(0,n-1)}(s) = C_j\varphi_{(0,j)}(s).$$

が得られる．ここで, $[jL/n, (j+1)L/n]$ において $\varphi_{(0,j)}(s) \not\equiv 0$ であるから, (4.44) から $C_j = 0$ が従う．よって 任意の $1 \leq j \leq n-1$ に対して $C_j = 0$ となることがわかり, 集合 $W$ が線形独立であることが証明された．さらに, $\varphi_{(l,m)} \notin W$ なる整数 $l \in [1, n-1]$, $m \in [0, n-1]$ に対して, 集合

$$\tilde{W} := \left\{W, \varphi_{(l,m)}\right\}$$

は線形従属である．なぜなら, $\varphi_{(l,m)} \notin W$ は $W$ の元を用いて次のように表されるからである:

$$\varphi_{(l,m)} = \varphi_{(0,m)} - \varphi_{(0,l)}.$$

以上により証明が完了する. □

以上により, 十分大きな $p > 0$ に対して, $n \geq 3$ なる $n$ モード解は不安定であることが証明された. 最後に, 本講演ではふれなかった 2 モード解の安定性および勾配流方程式 (EQ) の解のダイナミクスについてであるが, それらについては [20] を参照されたい.

# 参考文献


[1] S. S. Antman, *A note on a paper of Tadjbakhsh and Odeh*, J. Math. Anal. Appl., **21** (1968), 132-135.

[2] S. S. Antman, *The shape of buckled nonlinearly elastic rings*, Z. Angew. Math. Phys., **21** (1970), 422-438.

[3] G. Arreaga, R. Capovilla, C. Chryssomalakos, J. Guven, *Area-constrained planar elastica*, Physical Review E, **65**, 3, (2002), 031801.

[4] P. B. Canham, *The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the red blood cell*, J. Theor. Biol. **26** (1970), 61-81.

[5] G. F. Carrier, *On the buckling of elastic rings*, J. Math. and Phys., **26** (1947), 94-103.

[6] J. E. Flaherty, J. B. Keller, and S. I. Rubinow, *Post buckling behavior of elastic tubes and rings with opposite sides in contact*, SIAM J. Appl. Math. **23** (1972), 446-455.

[7] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, New York (1981).

[8] Y. Kohsaka, T. Nagasawa, *On the existence of the Helfrich flow and its center manifold near spheres*, Differential Integral Equation **19**, no. 2, 121-142.

[9] N. Koiso, *On the motion of a curve towards elastica*, in Actes da la Table Ronde de Géometrie Différentielle (Luminy 1992), Sémin Congr. 1, Soc. Math. France, Paris, 1996, 403-436.

[10] J. Langer and D.A. Singer, *Knotted elastic curve in* $\mathbb{R}^3$, J. London Math. Soc. **30** (1984), 512-520.

[11] J. Langer and D.A. Singer, *The total squared curvature of closed curves*, J. Diff. Geom. **20** (1984), 1-22.

[12] J. Langer and D.A. Singer, *Curve straightening and a minimax argument for closed elastic curves*, Topology **24** (1985), 75-88.

[13] M. Levy, *Mémorire sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ces applications*, J. de Math. (Liouville) Ser. 3, 7, (1884).

[14] A. Linnér, *Some properties of the curve straightening flow in the plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), 605-618.

[15] A. Linnér, *Symmetrized curve-straightening*, Differential Geometry and its Applications **18** (2003), 119-146.

[16] W. Matsumoto, M. Murai, S. Yotsutani, *By which kind of sound, can one hear the shape of drum?*, RIMS Kokyuroku **1315** (2003), 156-175.

[17] S. Okabe, *The motion of an elastic closed curve with constant enclosed area*, RIMS Kokyuroku **1405** (2004), 197-213.

[18] S. Okabe, *The motion of elastic planar closed curves under the area-preserving condition*, Indiana Univ. Math. J., to appear.

[19] S. Okabe, *Asymptotic form of elastic planar closed curves as uniform pressure tends to infinity*, preprint.

[20] S. Okabe, *The dynamics of an elastic closed curve under uniform high pressure*, preprint.

[21] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer - Verlag, New York (1983).

[22] A. Polden, *Closed curves of least total curvature*, preprint, Tübingen, 16 pages.

[23] L. Simon, *Asymptotics for a class of non-linear evolution equations, with applications to geometric problems*, Ann. Math. **118** (1983), 525-571.

[24] I. Tadjbakhsh and F. Odeh, *Equilibrium states of elastic rings*, J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), 59-74.

[25] C. Truesdell, *The influence of elasticity on analysis: the classic heritage*, Bull. Amer. Math. Soc., **9** (1983), 293-310.

[26] Y. Wen, *$L^2$ flow of curve straightening in the plane*, Duke Math. J. **70** (1993), 683-698.

[27] Y. Wen, *Curve straightening flow deforms closed plane curves with nonzero rotation number to circles*, J. Diff. Equ. **120** (1995), 89-107.

[28] K. Watanabe, *Plane domains which are spectrally determined*, Annals of Global Analysis and Geometry **18** (2000), 447-475.

[29] K. Watanabe, *Plane domains which are spectrally determined II*, J. Inequal. Appl. **7** (2002), 25-47.

[30] K. Watanabe and I. Takagi, *On the uniqueness of the minimizer for the Tadjbakhsh-Odeh functional*, preprint.