第 15 回　関数空間セミナー報告集

（北大 21 世紀ＣＯＥプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」協賛）

2006 年 12 月 23 日(土)～ 12 月 25 日(月)

（会場：北海道大学理学部）

代表者：山　本　隆　範（北海学園大・工）
中　路　貴　彦（北　　大・理）

Series #119. February, 2007

Publication of this series is partly supported by Grant-in-Aid for formation of COE.
‘Mathematics of Nonlinear Structures via Singularities’（Hokkaido University）
URL:http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #96 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 30th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 83 pages. 2005.
- #97 M. Watanabe, 第 5 回 COE 研究員連続講演会 『逆散乱法』入門, 52 pages. 2005.
- #98 M. Takeda, T. Mikami (Eds.), Probability and PDE, 48 pages. 2005.
- #99 M. Van Manen, The 6th COE Lecture Series "From the cut-locus via medial axis to the Voronoi diagram and back " 42 pages. 2005.
- #100 K. Hayami, T. Nara, D. Furihata, T. Matsuo, T. Sakurai and T. Sakajo (Eds.), 応用数理サマーセミナー「逆問題」, 196 pages. 2005.
- #101 B. Forbes, The 7th COE Lecture Series トーリックミラー対称性、56 pages. 2005.
- #102 H. Kubo, T. Ozawa and K. Yamauchi, SAPPORO GUEST HOUSE SYMPOSIUM ON MATHEMATICS 20 "Nonlinear Wave Equations", 68 pages. 2005.
- #103 A. Miyachi and K. Tachizawa, Proceedings of the Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, 107 pages. 2005.
- #104 S. Izumiya (Ed), Y. Numata, J. Ishimoto, I. Sasaki, Y. Nagase and M. Yamamoto, 第 2 回数学総合若手研究集会 - The 2nd COE Conference for Young Researchers -, 274 pages. 2006.
- #105 T. Yamamoto, O. Hatori, M. Hayashi and T. Nakazi (Eds.), 第 14 回関数空間セミナー, 112 pages. 2006.
- #106 Y. Daido, 学位論文 Doctoral thesis "RECONSTRUCTION OF INCLUSIONS FOR THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT EQUATION USING PROBE METHOD", 68 pages. 2006.
- #107 T. Yamamoto, 学位論文 Doctoral thesis "Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants", 333 pages. 2006.
- #108 S. Izumiya, Singularity theory of smooth mappings and its applications: a survey for non-specialists, 41 pages. 2006.
- #109 J. Cheng, B. Y. C. Hon, J. Y. Lee, G. Nakamura and M. Yamamoto, Inverse Problems in Applied Sciences - towards breakthrough - Organizing Committee, 96 pages. 2006.
- #110 K. Matsumoto, 超幾何関数早春学校, 87 pages. 2006.
- #111 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 31th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 91 pages. 2006.
- #112 H. Okamoto, D. Sheen, Z. Shi, T. Ozawa, T. Sakajo and Y. Chen, Book of Abstracts of the First China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics & The Second East Asia SIAM Symposium, 78 pages. 2006.
- #113 N. Ishimura, T. Ishiwata, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, K. Hayami, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー「確率微分方程式」, 116 pages. 2006.
- #114 T. Abe, 第 8 回 COE 研究員連続講演会『超平面配置と対数的ベクトル場の幾何』, 23 pages. 2006.
- #115 H. Kubo and T. Ozawa, Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 22 "Nonlinear Wave Equations", 67 pages. 2006.
- #116 S. Okabe, 第 9 回 COE 研究員連続講演会『ある束縛条件下における平面弾性閉曲線のダイナミクス』, 31 pages. 2006.
- #117 A. Suzuki, T. Ito, N. Sato, K. Shibuya, D. Hirose, Y. Maekawa and K. Matsumoto, 第 3 回数学総合若手研究集会 –他分野との学際的交流を目指して, 264 pages. 2007.
- #118 T. Yamamoto, Y. Sato, N. Kataoka and H. Takagi, Proceedings of the conference on New Aspects of High-dimensional Nonlinear Dynamics, 73 pages. 2007.

第15回　関数空間セミナー報告集

（北大21世紀COEプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」協賛）

2006年12月23日（土）～12月25日（月）

（会場：北海道大学理学部）

代表者：山本　隆範（北海学園大・工）
中路　貴彦　（北　大・理）

Seminar on Function Spaces, 2006

CONTENTS

Hyponormal Toeplitz Operators And Zeros Of Polynomials

Takahiko Nakazi (Hokkaido University)

Abstract. The problem of hyponormality for Toeplitz operators with (trigonometric) polynomial symbols is studied. We give a necessary and sufficient condition using the zeros of the analytic polynomial induced by the Fourier coefficients of the symbol. For example, if the symbol $\phi = \bar{z}\prod_{j=1}^{t}(z-\alpha_j)\prod_{j=1}^{s}(z-\beta_j)$, $|\alpha_j| < 1$, $|\beta_j| \geq 1$ and T_ϕ is hyponormal then $\prod_{j=1}^{t}|\alpha_j| \times \prod_{j=1}^{s}|\beta_j| \leq 1$.

§1. 定義

Γ を $\mathbb{C}$ の単位円板とする。$1 \leq p \leq \infty$ のとき、 L^p は Γ 上の Lebesgue 空間、H^p は Γ 上の普通の Hardy 空間を示すとする。P を L^2 から H^2 への直交射影とする。$\phi \in L^\infty$ に対して H^2 上の Toeplitz 作用素 T_ϕ は

$$T_\phi f = P(\phi f) \quad (f \in H^2)$$

として定義する。このとき T_ϕ は明らかに有界作用素となる。

T_ϕ が normal 作用素とは $T_\phi^* T_\phi = T_\phi T_\phi^*$ が成立することであり、T_ϕ が hypomormal 作用素とは、$T_\phi^* T_\phi \geq T_\phi T_\phi^*$ が成立することである。よって normal 作用素は hyponormal 作用素である。T_ϕ が H^2 上で subnormal 作用素とは、H^2 を含む Hilbert 空間上の normal 作用素 N があって、N は H^2 を不変部分空間として持ち、T_ϕ は N の H^2 への制限となることである。normal 作用素は subnormal 作用素であることは明らかであるが、subnormal 作用素が hyponormal 作用素となることもよく知られている。

T_ϕ が normal, subnormal または hyponormal のときに、我々はその symbol ϕ を描くことに興味を持つ。

§2. Toeplitz 作用素の symbol による特徴付け

この § では一般的な symbol に対しての Toeplitz 作用素が subnoromal または hyponormal であるときの symbol の知られた特徴付けそ与える。

[1]
T_ϕ が nonnegative である必要十分条件は $\phi \geq 0$ である。

[2]
T_ϕ が selfadjoint である必要十分条件は ϕ が実数値関数である。

[3] (Brown-Halmos, 1963)
T_ϕ が normal である必要十分条件は $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と実数値関数 u が存在して $\phi = \alpha u + \beta$ と書けることである。

[4] (Cowen, 1988)
T_ϕ が hyponormal である必要十分条件は $\phi = \phi_1 + \bar{\phi}_2$、$\phi_j \in H^2$ $(j = 1, 2)$ かつ $\phi_2 = c + T_{\bar{k}}\phi_1$ と書けることである。ここで $k \in H^\infty, c \in \mathbb{C}$ かつ $\|k\|_\infty \leq 1$ である。

[5] (Nakazi-Takahashi, 1993)
T_ϕ が hyponormal である必要十分条件は $\phi = k\bar{\phi} + g$ と書けることである。ここで $k, g \in H^\infty$ かつ $\|k\|_\infty \leq 1$ である。

証明 [4] を用いよ。

[6] (Nakazi-Takahashi, 1993)
- $\phi = q^{1/2}u + g$、q は inner 関数、u は実関数かつ g は $q\bar{g} \in H^\infty$ となる H^∞ の関数とすると T_ϕ は hyponormal となる。
- $\phi = (k\bar{g} + g)(/(1 - |k|^2)$、$k, g \in H^\infty$ かつ $|k| < 1$ $a.e.$ ならば T_ϕ は hyponormal となる。

証明 [5] を用いよ。

[6] の逆はある意味で成立する。

§3. symbol が多項式の場合

この § では symbol が多項式の場合に Toeplitz 作用素が subnormal または hyponormal であるときの symbol の知られた特徴付けを与える。

[7] (Abrahamse, 1976)
$\phi = \sum_{j=-n}^{m} a_j e^{ij\theta}$ のとき、T_ϕ が subnormal である必要十分条件は $n = 0$ または $a_0 = \alpha b_0 + \beta, a_j = \alpha b_j$ かつ $b_{-j} = \bar{b}_j$ となることである。ここで $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ である。

[8] (Nakazi-takahashi, 1993)
$\phi = \sum_{j=-n}^{m} a_j e^{ij\theta}$ とするとき、次の $(i) \sim (iii)$ が成立する。
$(i) T_\phi$ が hyponormal ならば $m \geq n$ 。
$(ii) m \geq n$ とする。$z^n\phi$ が $|z_0| > 1$ となる z_0 を零点としてもつならば、$z^n\phi$ は $1/\bar{z}_0$ でより高い重複度で零点をもつとすると、T_ϕ は hyponormal となる。
$(iii) m = n$ とする。$z^n\phi$ の零点は Γ 上にのみあるならば、T_ϕ は normal であるか、そうでなければ hyponormal ではない。

§4. Carathéodory-Schur の補間定理

$k=\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in H^\infty$ かつ $\|k\|_\infty \leq 1$ とする。$k_0 := k$ かつ $n \geq 0$ に対して

$$k_{n+1}(z) := \frac{k_n(z)-k_n(0)}{z(1-\overline{k_n(0)}k_n(z))} \quad (|z|<1)$$

ならば $k_n \in H^\infty$、$\|k_n\|_\infty \leq 1$ かつ

$$k_n(0)=\Phi_n(c_0,\cdots,c_n) \quad (n \geq 0)$$

である。ここで Φ_n は Schur 関数である。 Schur 関数の最初の3つの値は次で与えられる。

$$\Phi_0(z_0)=z_0, \Phi_1(z_0,z_1)=z_1/(1-|z_0|^2)、\Phi_2(z_0,z_1,z_2)=\frac{z_2(1-|z_0|^2)+\bar{z}_0 z_1^2}{(1-|z_0|^2)^2-|z_1|^2}\ 。$$

$$T(c_0,\cdots,c_n)=\begin{bmatrix} c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$$

は Carathéodory 行列と呼ばれる。

[**9**] (Schur, Carthéodory, 1917?)
次の $(i) \sim (iii)$ は同値である。
(i) 任意の $c_0, c_1, \cdots c_n \in \mathbb{C}$ に対して、$g=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+z^{n+1}G$ となる $g \in H^\infty$ で、$\|g\|_\infty \leq 1$ が存在する。
$(ii)|\Phi_k(c_0,c_1,\cdots,c_k)| \leq 1 \quad 0 \leq k \leq n$ 。
$(iii)\|T(c_0,\cdots,c_n)\| \leq 1$ 。

§5. 多項式の係数と hyponormal 作用素

この§では Zhu[5] の結果を述べる。

定理 1

$\phi=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j + \overline{\sum_{j=0}^{n} b_j z^j},\ a_n \neq 0$
かつ

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_0 \\ \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 \\ & & & & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

のとき
T_ϕ が hyponormal である必要十分条件は $|\Phi_k(c_0,\cdots,c_k)| \leq 1, 0 \leq k \leq n-1$ となることである。

$\boxed{\text{系 1}}$

$\phi = a_0 + a_1 z + \bar{b}_1 \bar{z},\ a_1 \neq 0$
のとき
T_ϕ が hyponormal である必要十分条件は $|b_1| \leq |a_1|$ となることである。

$\boxed{\text{系 2}}$

$\phi = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \overline{b_1 z + b_2 z^2},\ a_2 \neq 0$
のとき
T_ϕ が hyponormal である必要十分条件は $|b_2|^2 + |a_0 b_1 - a_1 b_2| \leq |a_2|^2$ となることである。

§6. 多項式の零点と hyponormal 作用素

この § で新しい結果 [4] を述べる。

$\boxed{\text{定理 2}}$

$\phi = \bar{z}^\ell \prod_{j=1}^t (z - \alpha_j) \prod_{j=1}^s (z - \beta_j); \ell \geq 1, |\alpha_j| < 1, |\beta_j| \geq 1$ とする。
(ここで、$t = 0$ なら $\prod_{j=1}^t (z - \alpha_j) = 1$、$s = 0$ なら $\prod_{j=1}^s (z - \beta_j) = 1$。)

$f = \prod_{j=1}^t \dfrac{z - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z}$、$h = \prod_{j=1}^s \dfrac{1 - \bar{\beta}_j z}{z - \beta_j}$ とする。
そのとき、
T_ϕ が hyponormal 作用素であつ必要十分条件は $2\ell \leq t + s$ かつ

$$f^{(i)}(0) = \sum_{j=0}^{i} i(i-1)\cdots(i-j+1) c_j h^{i-j)}(0) \quad (0 \leq i \leq \ell - 1)、$$
$$\|T(c_0, \cdots, c_{\ell-1)}\| \leq 1$$

となる $c_0, \cdots, c_{\ell-1} \in \mathbb{C}$ が存在することである。

$\boxed{\text{系 3}}$

定理 2 で $\ell = 1$ とする。
T_ϕ が hyponormal である必要十分条件は $\prod_{j=1}^t |\alpha_j| \times \prod_{j=1}^s |\beta_j| \leq 1$ である。

$\boxed{\text{系 4}}$

定理 2 で $\ell = 2$ とする。
T_ϕ が hyponormal である必要十分条件は $\prod_{j=1}^t |\alpha_j| \times \prod_{j=1}^s |\beta_j| \leq 1$
かつ

$|c_1| \leq 1 - |c_0|^2$、

$$\sum_{k=1}^{t} \left\{ (1 - |\alpha_k|^2) \prod_{j \neq k}^{t} (-\alpha_j) \right\} = c_0 \sum_{k=1}^{s} (|\beta_k|^2 - 1) \prod_{j \neq k}^{s} \left(-\frac{1}{\beta_j} \right) + c_1 \prod_{j=1}^{s} \left(-\frac{1}{\beta_j} \right)$$

となる c_0, c_1 が存在することである。

参考文献

1. C.C.Cowen : Hyponormality of Toeplitz operators, Proc.Amer.Math.Soc. 103(1988). 809-812.

2. I.S.Hwang and W.I.Lee : Hyponormality of trigonometric Toeplitz operators, Trans. Amer.Math.Soc. 354(2002). 2461-2474.

3. T.Nakazi and K.Takahashi : Hyponormality of Toeplitz operators and extremal problems of Hardy spaces, Trans.Amer.Math.Soc. 388(1993). 753-767.

4. T.Nakazi : Hyponormal Toeplitz operators and zeros of polynomials, to appear in Proc.Amer.Math.Soc.

5. K.Zhu : Hyponormal of Toeplitz operators with polynomial symbols, Integr.Equat. Oper.Th. 21(1993). 376-381.

The characterizations of the composition operators on BMOA with closed range

Rikio Yoneda

Otaru University of Commerce

Abstract

We study the composition operators C_φ with closed range on the weighted Bloch spaces, the weighted Dirichlet spaces, the Bergman spaces and the Hardy space. In particular, we study the relationship between C_φ with closed range on the weighted Bloch spaces and C_φ with closed range on the weighted Dirichlet spaces.

Key Words and Phrases : composition operator, the weighted Dirichlet spaces, $BMOA$, Bloch space, Bergman space, Hardy space, closed range, bounded below, the operator infimum norm.

For φ holomorphic self-map of the open unit disk D, the composition operator C_φ is defined by $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$. For $z, w \in D$, $0 < r < 1$, let $\varphi_z(w) = \dfrac{z - w}{1 - \bar{z}w}$ and let $\rho(z, w) = \left|\dfrac{z - w}{1 - \bar{z}w}\right|$ and $D(w, r) = \{z \in D, \rho(w, z) < r\}$.

The space $\mathcal{B}_\alpha$ of D is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$\| f \|_{\mathcal{B}_\alpha} = |f(0)| + \sup_{z \in D}(1 - |z|^2)^\alpha \, |f'(z)| < +\infty \ .$$

Note that $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ is the Bloch space .

The little Bloch space $\mathcal{B}_0$ is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$(1 - |z|^2) \, |f'(z)| \to 0 \qquad (|z| \to 1^-).$$

$\sup_{z \in D}(1 - |z|^2)^\alpha \, |f'(z)|$ is a pseudonorm, which coincides with the Bloch-norm on the closed subspace of functions that vanish at the origin. So it coincides with the quotient norm on $\mathcal{B}_\alpha/\mathcal{C}$ where $\mathcal{C}$ denotes the closed subspace of constant functions. The space $BMOA$ is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$\sup_{a \in D} \int_D (1 - |\varphi_a(z)|^2) |f'(z)|^2 dA(z) < +\infty.$$

For $\alpha > -1$, the weighted Dirichret space D^α is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$\int_D |f'(z)|^2(\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z) < +\infty,$$

where $dA(z)$ denote the area measure on D. In the case of $\alpha = 1$, then $D^1 = H^2$ is the Hardy space. In the case of $\alpha = 2$, then $D^2 = L^2_a$ is the Bergman space.

Let X be Banach spaces and let T be a linear operator from X into X. Then T is called to be bounded below on X if there exist a positive constant $C > 0 \parallel Tf \parallel \geq C \parallel f \parallel$ for all $f \in X$. And the operator norm is defined by the following:

$$\parallel T \parallel_{\sup,X} = \sup_{\|x\|_X=1} \parallel Tx \parallel_X .$$

And we also define the operator infimum norm by the following:

$$\parallel T \parallel_{\inf,X} = \inf_{\|x\|_X=1} \parallel Tx \parallel_X .$$

Let $G_\epsilon = \varphi\left(\{z \in D, \frac{(1-|z|^2)|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} \geq \epsilon\}\right)$. By Schwarz-Pick lemma, the operator C_φ is bounded on the Bloch space $\mathcal{B}$. And C_φ is also bounded on the space $BMOA$. See [3]. In [3] P.S.Bourdon and J.A.Cima and A.L.Matheson have obtained a necessary and sufficient condition for compactness of C_φ on $BMOA$. It follows from Littlewood's subordination theorem that C_φ is bounded on all the Bergman spaces. In [5], P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska determined the composition operators on the Bloch space with closed range using a sampling set G_ϵ for the Bloch space. In [18] Nina Zorboska study the closed range composition operators on the Bergman spaces. H.Chen and P.Gauthier study the boundedness from below of composition operators on Bloch space in [4]. In this paper we study when the composition operators are bounded below on the the weighted Dirichlet space D^α, the weighted Bloch spaces $\mathcal{B}_\alpha$ and $BMOA$. In particular we study the relationship of C_φ with the closed range on $\mathcal{B}_\alpha$ and C_φ with the closed range on D^α.

Theorem A. ([5]) *Suppose φ is a univalent self-map of the open unit disk D. Then the following are equivalent.*

(1) *C_φ is bounded below on $\mathcal{B}$.*
(2) *$\parallel \varphi_w \circ \varphi \parallel_{\mathcal{B}/C} \geq k$ for all $w \in D$.*
(3) *For any $\epsilon < k$, $\rho(G_\epsilon, z) \leq r < 1$ for all $z \in D$, r depending only on ϵ*
(4) *For any $\epsilon < k$, for some r, G_ϵ satisfying $|G_\epsilon \cap D(w,r)| \geq C|D(w,r)|$ for all $w \in D$.*

Theorem B.([5]) *The composition operator C_φ is bounded below on $\mathcal{B}$ if and only if there exists some $\epsilon > 0$ such that G_ϵ is a sampling set for $\mathcal{B}$.*

Theorem C.([5]) *If φ is univalent and C_φ is bounded below on $BMOA$, then it is bounded below on the Bloch space.*

Theorem D.([18]) *Suppose φ is univalent self-map of the open unit disk D. Suppose φ is a univalent self-map of D. Then the following are equivalent.*

(1) *$C_\varphi : L^2_a \to L^2_a$ is bounded below.*

(2) $C_\varphi : H^2 \to H^2$ *is bounded below.*
(3) $C_\varphi : D^\alpha \to D^\alpha$ *is bounded below for some* α, $\alpha > 1$.
(4) $C_\varphi : D^\alpha \to D^\alpha$ *is bounded below for all* α, $\alpha > 1$.

In [15] R.Zhao proved the following lemma :

Lemma E. *Let* $\alpha \geq 1$. *Let* f *be an analytic function on* D. *Then* $f \in \mathcal{B}_\alpha$ *if and only if* $\sup_{a\in D} \int_D (1-|z|^2)^{2(\alpha-1)}(1-|\varphi_a(z)|^2)^2|f'(z)|^2 dA(z) < +\infty$.

In [7] D.Leucking proved the following result:

Theorem F. ([7]) *Let* $\alpha > -1$. *There is a constant* $C > 0$ *such that*

$$\int_D |f'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dA(z) \leq C \int_G |f'(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$$

for all $f \in D_2^\alpha$ *if and only if a subset* G *of* D *satisfy the condition that there exist* $\delta > 0$ *and* $r > 0$ *such that* $\delta|D(a,r)| \leq |D(a,r) \cap G|$, *where* $|D(a,r)|$ *is the (normalized) area of* $D(a,r)$.

If $\varphi(0) = a$ and $\psi = \varphi_a \circ \varphi$, then C_φ is bounded below on $\mathcal{B}_\alpha$ (or D^α) if and only if C_ψ is bounded below on $\mathcal{B}_\alpha$ (or D^α). So we assume from now on that $\varphi(0) = 0$ and that C_φ is acting on the subspace of functions that vanish at the origin.

Theorem 2.1. *If* $C_\varphi : L_a^2 \to L_a^2$ *is bounded below, then* $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *is bounded below.* Moreover

$$\| C_\varphi \|_{\inf, L_a^2} \leq K \| C_\varphi \|_{\sup, L_a^2} \| C_\varphi \|_{\inf, \mathcal{B}} .$$

In [3] P.S.Bourdon and J.A.Cima and A.L.Matheson have shown that compactness of C_φ on $BMOA$ implies its compactness on the Hardy space H^2. Since the operator C_φ is bounded on the Hardy space, we can prove the following result :

Theorem 2.2. *If* $C_\varphi : H^2 \to H^2$ *is bounded below, then* $C_\varphi : BMOA \to BMOA$ *is bounded below.* Moreover there exists a constant $K > 0$ such that

$$\| C_\varphi \|_{\inf, H^2} \leq K \| C_\varphi \|_{\sup, H^2} \| C_\varphi \|_{\inf, BMOA} .$$

Theorem 3.1. *Let* $\alpha \geq 1$. *Suppose* φ *is a univalent self-map of* D. *If for sufficiently small* $\epsilon > 0$, $\exists r' > 0$ *and some constant* $K > 0$ *such that*

$$|D(w,r') \cap E_\epsilon| \geq K\,|D(w,r')|$$

for all $w \in D$, where $E_\epsilon = \varphi\left(\{z \in D, \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \geq \epsilon\}\right)$, *then* C_φ *is bounded below on* D^α.

Lemma 3.2. *Let* $\alpha \geq 1$. *Let* φ *be a holomorphic self-map of* D. *Then*

$$\left|\frac{(1-|z|^2)^\alpha \varphi'(z)}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha} - \frac{(1-|w|^2)^\alpha \varphi'(w)}{(1-|\varphi(w)|^2)^\alpha}\right| \leq C\rho(z,w)$$

for any $z, w \in D$.

Lemma 3.3. *Let* $\alpha > 1$ *and some constant* $k > 0$. *Suppose* $\| \varphi_w \circ \varphi \|_{\mathcal{B}_\alpha/C} \geq k$ *for any* $w \in D$. *Then the following conditions hold.*
(1) *Whenever* $\epsilon < k$, $\rho(z, F_\epsilon) \leq \sqrt{1-\epsilon} = r$, *for any* $z \in D$,
where $F_\epsilon = \varphi\left(\{z \in D, \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^\alpha |\varphi'(z)| \geq \epsilon\}\right)$.
(2) *Moreover there exist constants* s *and* r', $0 < s < 1$ *and* $r' \in [r, 1)$ *such that given* $w \in D$ $\exists z_w \in D$ *such that* $\varphi(D(z_w, s)) \subset D(w, r') \cap F_\epsilon$.

Lemma 3.4. *Let* $\alpha > 1$. *If* φ *is a univalent self-map of* D *and* $\| \varphi_w \circ \varphi \|_{\mathcal{B}_\alpha/C} \geq k$ *for any* $w \in D$, *then for any* $\epsilon < k$, $\exists r' > 0$ *and some constant* $K > 0$ *such that*

$$|D(w, r') \cap F_\epsilon| \geq K\, |D(w, r')|$$

for all $w \in D$, *where* $F_\epsilon = \varphi\left(\{z \in D, \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^\alpha |\varphi'(z)| \geq \epsilon\}\right)$.

Proposition 3.5. *Let* $\alpha > 1$. *The composition operator* C_φ *is bounded below on* $\mathcal{B}_\alpha$ *if and only if there exists some* $\epsilon > 0$ *such that* $F_\epsilon = \varphi\left(\{z \in D, \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^\alpha |\varphi'(z)| \geq \epsilon\}\right)$ *is a sampling set for* $\mathcal{B}_\alpha$.

Proposition 3.6. *Let* $\alpha > 1$. *Suppose* φ *is a univalent self-map of* D. *Then the following are equivalent.*

(1) $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ *is bounded below.*
(2) $\| \varphi_w \circ \varphi \|_{\mathcal{B}_\alpha/C} \geq k$ *for any* $w \in D$.
(3) *For any* $\epsilon < k$, $\rho(z, F_\epsilon) \leq \sqrt{1-\epsilon} = r$, *for any* $z \in D$.
(4) *For any* $\epsilon < k$, $\exists r' > 0$ *and some constant* $K > 0$ *such that*

$$|D(w, r') \cap F_\epsilon| \geq K\, |D(w, r')|$$

for all $w \in D$, *where* $F_\epsilon = \varphi\left(\{z \in D, \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^\alpha |\varphi'(z)| \geq \epsilon\}\right)$. Moreover

$$\| C_\varphi \|_{\inf, \mathcal{B}_\alpha} \approx \inf_{w \in D} \| \varphi_w \circ \varphi \|_{\mathcal{B}_\alpha/C} \qquad (\alpha > 1).$$

Theorem 3.7. *Let $1 \leq \alpha \leq \beta$. Suppose φ is a univalent self-map of the open unit disk D. If $C_\varphi : \mathcal{B}_\beta \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded below, then $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ is bounded below.*

Theorem 3.8. *Let $\alpha > 1$. Suppose φ is a univalent self-map of the open unit disk D. If $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ is bounded below, then $C_\varphi : D^\alpha \to D^\alpha$ is bounded below. Moreover for some constants $C > 0$,*

$$\| C_\varphi \|_{\inf,\mathcal{B}_\alpha} \leq C \| C_\varphi \|_{\inf,D^\alpha} .$$

Theorem 3.9. *Let $\alpha > 1$. Suppose φ is a univalent self-map of D. That the following are equivalent follows from Theorem D.*

(1) $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ *is bounded below.*

(2) $C_\varphi : L^2_a(= D^2) \to L^2_a(= D^2)$ *is bounded below.*

(3) $C_\varphi : H^2(= D^1) \to H^2(= D^1)$ *is bounded below.*

(4) $C_\varphi : D^\alpha \to D^\alpha$ *is bounded below.*

$$\| C_\varphi \|_{\inf,L^2_a} \approx \| C_\varphi \|_{\inf,H^2} \approx \| C_\varphi \|_{\inf,D^\alpha} \approx \| C_\varphi \|_{\inf,\mathcal{B}_\alpha} \approx \inf_{w \in D} \| \varphi_w \circ \varphi \|_{\mathcal{B}_\alpha / C} \qquad (\alpha > 1).$$

References

[1] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p, Complex Variables, 28(1995),149-158.

[2] A.Aleman and A.G.Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, Indiana Univ. Math.J.46(1999),337-356.

[3] P.S.Bourdon and J.A.Cima and A.L.Matheson, Compact composition operators on BMOA, Trans.Amer.Math.Soc.344(1994), 2183-2196.

[4] H.Chen and P.Gauthier, Boundedness From Below of Composition Operators on Bloch spaces, in preprint.

[5] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of the Amer.Math.Soc.133,5(2004), 1371-1377.

[6] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Hyperbolic derivatives and generalized schwartz-Pick estimates, Proceedings of the Amer.Math.Soc.132,11(2004), 3309-3318.

[7] D.Leucking, Inequalities on Bergman spaces, Illinois J.Math.25(1981), 1-11.

[8] D.Leucking, Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives, Amer.J.Math.107(1985), 85-111.

[9] G.McDonald and C.Sundberg, Toeplitz operators on the disc, indiana Univ.Math.J.28(1979) ,595-611.

[10] Ch.Pommerenke, Schlichte Funktionen und analytische Functionen von beschrankter mittlerer Oszillation, Comment.Math.Helv.52(1977),591-602.

[11] R.Yoneda, Integration Operators On Weighted Bloch Spaces, Nihonkai Math.Journal (2001)Vol.12,No.2, 1-11.

[12] R.Yoneda, Closed Range Multiplication, Integration and Composition Operators on the Bloch and Bergman Spaces, in preprint.

[13] R.Yoneda, Pointwise multipliers from $BMOA^{\alpha}$ to the α-Bloch space, Complex Variables Vol.49,No.14, pp1045-1061.
[14] R.Yoneda, Essential norms of Integration operators and Multipliers on weighted Bloch spaces, in preprint.
[15] R.Zhao, On α-Bloch functions and VMOA, Acta Math.Sci.16(1996), 349-360.
[16] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.
[17] K.Zhu, Bloch type spaces of analytic functions, Rocky Mout.J.Math.23(1993), 1143-1177.
[18] N.Zorboska, Composition operators With Closed Range,Trans.Amer.Math.Soc.344(1994), 791-801.

Department of Mathematics
Otaru University of Commerce
3-5-21, Midori, Otaru, 047-8501, Japan

ryoneda@res.otaru-uc.ac.jp

Isometries of Nevanlinna-type spaces $N^p(D)$

(上半平面での Nevanlinna 型空間 $N^p(D)$ における等長写像について)

岩手医科大学教養部　　飯田安保、高橋　敬 (Yasuo IIDA and Kei TAKAHASHI)

Abstract. Linear isometries of $N^p(D)$ onto $N^p(D)$ will be described, where $N^p(D)$, $p > 1$, is the set of all holomorphic functions f on $D = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Im} z > 0\}$ such that $\sup\limits_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \Big(\log(1 + |f(x+iy)|)\Big)^p dx < +\infty$.

1. 準備

まず、単位円板 $U = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < 1\}$ 上の Nevanlinna 型空間の定義を与える。

定義 1-1

f を U 上の正則関数とする。また $T = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| = 1\}$ とする。

1. $\sup\limits_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log(1 + |f(re^{i\theta})|) d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in N$ とする。

（注意） $f \in N$ のとき、$f^*(e^{i\theta}) := \lim\limits_{r \to 1^-} f(re^{i\theta})$ が a.e. $e^{i\theta} \in T$ で存在する。

2. ある $\phi \in L^1(T)$, $\phi \geqq 0$ に対し $\log(1 + |f(z)|) \leqq Q[\phi](z)$ $(z \in U)$ を満たすとき、$f \in N_*$ とする。ここで右辺は U 上の Poisson 積分を表す。

3. $p > 1$ とする。$\sup\limits_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \Big(\log(1 + f(re^{i\theta})|)\Big)^p d\theta < +\infty$ を満たすとき、$f \in N^p$ とする。

4. $0 < q < \infty$ とする。$\sup\limits_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in H^q$ とする。

N を Nevanlinna class, N_* を Smirnov class, N^p を Privalov space, H^q を Hardy space と呼ぶ。これらの空間のあいだには、包含関係 $H^q \subset N^p \subset N_* \subset N$ $(p > 1\,, 0 < q < \infty)$ が成り立つ。N とその部分空間 N_* , N^p , H^q 等を総称して **Nevanlinna 型空間**と呼ぶ。

一方、上半平面 $D = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Im} z > 0\}$ での Nevanlinna 型空間については Krylov の結果をはじめいろいろ知られている ([3, 5]) が、望月望先生は D 上の Nevanlinna class $N_0(D)$, Smirnov class $N_*(D)$ を次のように定義された ([6])：

The authors are supported in part by the Grant from Keiryokai Research Foundation No.91.

定義 1-2
f を D 上の正則関数とする。

1. $\displaystyle\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}}\log(1+|f(x+iy)|)\,dx<+\infty$ を満たすとき、 $f\in N_0(D)$ とする。
2. ある $\phi\in L^1(\mathbf{R})$, $\phi\geqq 0$ に対し $\log(1+|f(z)|)\leqq P[\phi](z)$　$(z\in D)$ を満たすとき、 $f\in N_*(D)$ とする。ここで右辺は D 上の Poisson 積分を表す。

ここでは N^p に対応する D 上の空間として、$N^p(D)$ を新たに導入する ([4])。

定義 1-3
$p>1$ とする。D 上の正則関数 f が $\displaystyle\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}}\Big(\log(1+|f(x+iy)|)\Big)^p\,dx<+\infty$ を満たすとき、 $f\in N^p(D)$ とする。

N^p に属する関数について、以下の２つの定理が成り立つ：

定理 1-4([4])
$p>1$ とし、$f\in N^p(D)$ とする。このとき、以下が成り立つ：
(i)　$f\circ\Psi^{-1}\in N^p$. ここで $\Psi(z)=(z-i)/(z+i)$　$(z\in\overline{D})$ である.
(ii)　$f^*(x):=\displaystyle\lim_{y\to 0+}f(x+iy)$ が a.e. $x\in\mathbf{R}$ で存在する.
(iii)

$$\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}}\Big(\log(1+|f(x+iy)|)\Big)^p\,dx=\lim_{y\to 0+}\int_{\mathbf{R}}\Big(\log(1+|f(x+iy)|)\Big)^p\,dx=\int_{\mathbf{R}}\Big(\log(1+|f^*(x)|)\Big)^p\,dx.$$

定理 1-5([4])
$p>1$ とする。$d_p(f\,,\,g):=\left\{\displaystyle\int_{\mathbf{R}}\Big(\log(1+|f^*(x)-g^*(x)|)\Big)^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$　$(f\,,\,g\in N^p(D))$ は $N^p(D)$ 上の距離であり、距離空間 $(N^p(D)\,,\,d_p)$ は F-algebra（積について連続である、線形完備距離空間）である。

2. Nevanlinna 型空間における線形等長写像について

①　H^q における線形等長写像

H^q 上の距離は次のように定義される：

・$q\geqq 1$ の場合：　$r_q(f\,,\,g)=\left\{\displaystyle\int_0^{2\pi}|f^*(e^{i\theta})-g^*(e^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{\frac{1}{q}}$　$(f,g\in H^q)$.

・$0<q<1$ の場合：　$r_q(f\,,\,g)=\displaystyle\int_0^{2\pi}|f^*(e^{i\theta})-g^*(e^{i\theta})|^q d\theta$　$(f,g\in H^q)$.

定義 2-1
$0<q<\infty$ とする。H^q から H^q への線形写像 A が任意の $f\in H^q$ について

$$\int_0^{2\pi}|(Af)^*(e^{i\theta})|^q\,d\theta=\int_0^{2\pi}|f^*(e^{i\theta})|^q\,d\theta$$

を満たすとき、A を H^q-等長写像と呼ぶ。

H^q における線形等長写像については、以下の結果が知られている：

定理 2-2([1])

$0 < q < \infty\,,\, q \neq 2$ とする。$A : H^q \to H^q$ が上への線形等長写像であるとき、$c \in T\,,\, \varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}b \quad (a \in U\,,\, b \in T)$ が存在して

$$(Af)(z) = c\,\{\varphi'(z)\}^{\frac{1}{q}}\, f(\varphi(z)) \quad (z \in U\,,\, f \in H^q)$$

が成り立つ。

② $N_*\,,\, N^p$ における線形等長写像

$N_*\,,\, N^p$ 上の距離は次のように定義される（ただし $N^1 = N_*$ とする）：

$$\rho_p(f\,,\, g) := \sup_{0<r<1} \left\{ \int_0^{2\pi} \Big(\log(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|) \Big)^p\, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (f\,,\, g \in N^p).$$

定義 2-3

$p \geqq 1$ とする。N^p から N^p への線形写像 A が任意の $f \in N^p$ について

$$\int_0^{2\pi} \Big(\log(1 + |(Af)^*(e^{i\theta})|) \Big)^p\, d\theta = \int_0^{2\pi} \Big(\log(1 + |f^*(e^{i\theta})|) \Big)^p\, d\theta$$

を満たすとき、 A を N^p-等長写像と呼ぶ。

定理 2-4([2, 7])

$p \geqq 1$ とし、$A : N^p \to N^p$ が上への線形等長写像であるとする。このとき絶対値 1 の複素数 $a\,,\, b$ が存在して

$$(Af)(z) = af(bz) \quad (z \in U\,,\, f \in N^p)$$

となる。

③ $N_*(D)$ における線形等長写像

$N_*(D)$ 上の距離は次のように定義される：

$$d(f\,,\, g) := \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \log(1 + |f(x+iy) - g(x+iy)|)\, dx \quad (f\,,\, g \in N_*(D)).$$

定理 2-5([6])

$A : N_*(D) \to N_*(D)$ が上への線形等長写像であるとする。このとき絶対値 1 の複素数 c と $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在して

$$(Af)(z) = cf(z+\alpha) \quad (z \in D\,,\, f \in N_*(D))$$

となる。

さて、$N^p(D)$ 上の距離は定理 1-5 で与えられたが、この距離に関しての上への線形等長写像について以下の結果を得た：

定理 2-6

$p>1$ とし、$A:N^p(D)\to N^p(D)$ が上への線形等長写像であるとする。このとき絶対値 1 の複素数 c と $\alpha\in\mathbf{R}$ が存在して

$$(Af)(z)=cf(z+\alpha)\quad(z\in D\,,\ f\in N^p(D))$$

となる。

3. 定理 2-6 の証明

定理 2-6 の証明のために、いくつかの補題を必要とする。

まず、$H^p(D)$ $(0<p<\infty)$ は $\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}}|f(x+iy)|^p\,dx<+\infty$ を満たす D 上の正則関数 f の集合で、D 上の Hardy 空間を表す。

補題 3-1([6])
$p>0\,,p\neq 2$ とする。A が $H^p(D)$ から $H^p(D)$ への上への線形等長写像であるとき、A は次式で表される：

$$(Af)(z)=c(\psi'(\Psi(z)))^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{1}{z+i}\right)^{\frac{2}{p}}\left(\tfrac{2i}{1-(\psi\circ\Psi)(z)}\right)^{\frac{2}{p}}f((\Psi^{-1}\circ\psi\circ\Psi)(z))\quad(z\in D\,,\ f\in H^p(D)),$$

ここで $c\in T\,,\ \Psi(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$, ψ は U から U への conformal map である。

（注意）$\phi=\Psi^{-1}\circ\psi\circ\Psi$ とおくと、この式は $(Af)(z)=c(\phi'(z))^{\frac{1}{p}}f(\phi(z))$ $(z\in D)$ と表される。

補題 3-2([6])
D 上の正則関数 f で、$|f(z)||z+i|^2$ が有界となるようなもの全体の集合を V とする。
(i) V は $H^p(D)\,(1\leqq p<\infty)$ で dense である。
(ii) V は $N_*(D)$ で dense である。
(iii) V は $N^p(D)\,(p>1)$ で dense である。

補題 3-3
$p>1$ とする。A が $N^p(D)$ から $N^p(D)$ への上への線形等長写像であるとき、A は V を V に $H^p(D)$-等長写像として写す。

補題 3-4
$p>1\,,p\neq 2$ とする。A が $N^p(D)$ から $N^p(D)$ への上への線形等長写像であるとき、A は V を V に $H^{p+1}(D)$-等長写像として写す。

補題 3-5

A が $N^2(D)$ から $N^2(D)$ への上への線形等長写像であるとき、

(i) A は V を V に $H^3(D)$-等長写像として写す。

(ii) A は V を V に $H^4(D)$-等長写像として写す。

（証明の概略）

（I） $p>1, p\neq 2$ の場合

$f\in V$ とすると、補題 3-1, 3-3, 3-4 を用いて

$$(Af)(z)=c_p(\phi_p'(z))^{\frac{1}{p}}f(\phi_p(z))=c_{p+1}(\phi_{p+1}'(z))^{\frac{1}{p+1}}f(\phi_{p+1}(z)) \quad (z\in D)$$

と表される。ここで $\phi_j\,(j=p,p+1)$ は D から D への conformal map、すなわち

$$\phi_j(z)=\frac{\alpha_j z+\beta_j}{\gamma_j z+\delta_j} \quad (z\in D) \text{ で } \alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\delta_j\in\mathbf{R} \text{ かつ } D_j:=\alpha_j\delta_j-\beta_j\gamma_j>0$$

の形のものである。

これより $\dfrac{D_{p+1}^p}{D_p^{p+1}}\left|\dfrac{f(\phi_{p+1}(z))}{f(\phi_p(z))}\right|^{p(p+1)}\dfrac{|\gamma_p z+\delta_p|^{2p+2}}{|\gamma_{p+1}z+\delta_{p+1}|^{2p}}=1$ となり、f として V に属する具体的な関数（例えば $f(z)=(z+i)^{-3}$）を代入して $\phi_j(z)$ の係数を決定させると

$$(Af)(z)=cf(\beta z+\alpha) \quad (c\in\mathbf{C},\beta>0,\alpha\in\mathbf{R})$$

を得る。また $||Af||_{H^j}=||f||_{H^j}\quad(j=p,p+1)$ より $|c|=\beta=1$ を得る。最後に、補題 3-2 より V は N^p で dense なので $f\in N^p(D)$ に対して $(Af)(z)=cf(z+\alpha)\quad(z\in D)$ が成り立つ。

（II） $p=2$ のとき

補題 3-5 を用いれば、(I) の場合と同様に求められる。

References

[1] F. Forelli, *The isometries of H^p*, Can. J. Math. **16** (1964), 721-728.

[2] Y. Iida and N. Mochizuki, *Isometries of some F-algebras of holomorphic functions,* Arch.Math. **71** (1998), 297-300.

[3] Y. Iida, *Nevanlinna-type spaces on the upper half plane,* Nihonkai Math. J. **12** (2001), 113-121.

[4] Y. Iida, *On an F-algebra of holomorphic functions on the upper half plane,* Hokkaido Math. J. **35** (2006), 487-495.

[5] V. I. Krylov, *On functions regular in a half-plane,* Mat. Sb. **6** (48) (1939); Amer. Math. Soc. Transl. (2) **32** (1963), 37-81.

[6] N. Mochizuki, *Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half plane,* Hokkaido Math. J. **20** (1991), 609-620.

[7] K. Stephenson, *Isometries of the Nevanlinna class,* Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 307-324.

Yasuo Iida and Kei Takahashi
Department of Mathematics
School of Liberal Arts and Sciences
Iwate Medical University
Morioka 020-0015
Japan
E-mail: yiida@iwate-med.ac.jp

Inversion formulas for a linear system determined by input and response relations, by using suitable function spaces

Saburou Saitoh and Masato Yamada

Department of Mathematics, Faculty of Engineering, Gunma University,
Kiryu 376-8515 Japan
e-mail: ssaitoh@math.sci.gunma-u.ac.jp; kbdmm360@yahoo.co.jp

1 Introduction

Inverse problems in mathematics which are expected to be applied to practical problems will, sometimes, have weak points in the viewpoint that the background theories are not faithful for practical and physical problems. For example, equations are the representations of some ideal models and are not those of faithful models in the real physical world. Sometimes, boundary conditions for the equations are involved in physical units and sometimes their physical realizations and observations are very difficult. Here, we shall give a new inversion formula for a linear system based on physical experimental data and by using reproducing kernels and the Tikhonov regularization. In particular, we will not assume any analytical assumption on the linear system, but we use physical experimental data for obtaining an approximate inversion formula for the linear system L. We shall apply the following fundamental theory for this purpose:

Let E be an arbitrary set, and let H_K be a reproducing kernel Hilbert space (RKHS) admitting the reproducing kernel $K(p,q)$ on E. For any Hilbert space $\mathcal{H}$ we consider a bounded linear operator L from H_K into $\mathcal{H}$. We are generally interested in the best approximate problem

$$\inf_{f \in H_K} \|Lf - \mathbf{d}\|_{\mathcal{H}} \tag{1}$$

for a vector $\mathbf{d}$ in $\mathcal{H}$. However, this extremal problem is involved in the both senses of the existence of the extremal functions in (1) and their representations. See [7] for the details. So, we shall apply its Tikhonov regularization.

For any fixed positive $\alpha > 0$, by introducing the inner product

$$(f,g)_{H_K(L;\alpha)} = \alpha (f,g)_{H_K} + (Lf, Lg)_{\mathcal{H}}, \tag{2}$$

we shall construct the Hilbert space $H_K(L;\alpha)$ comprising functions of H_K. This space, of course, admits a reproducing kernel. Furthermore, we obtain the fundamental

Proposition 1.1 *([8,5,6]) The extremal function $f_{\mathbf{d},\alpha}(p)$ in the Tikhonov regularization*

$$\inf_{f \in H_K} \{\alpha \|f\|^2_{H_K} + \|\mathbf{d} - Lf\|^2_{\mathcal{H}}\} \tag{3}$$

exists uniquely and it is represented in terms of the kernel $K_L(p,q;\alpha)$ as follows:

$$f_{\mathbf{d},\alpha}(p) = (\mathbf{d}, LK_L(\cdot, p; \alpha))_{\mathcal{H}} \tag{4}$$

where the kernel $K_L(p,q;\alpha)$ is the reproducing kernel for the Hilbert space $H_K(L;\alpha)$ and it is determined as the unique solution $\tilde{K}(p,q;\alpha)$ of the equation:

$$\tilde{K}(p,q;\alpha) + \frac{1}{\alpha}(L\tilde{K}_q, LK_p)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\alpha}K(p,q) \tag{5}$$

with

$$\tilde{K}_q = \tilde{K}(\cdot, q; \alpha) \in H_K \quad \textit{for} \quad q \in E, \tag{6}$$

and

$$K_p = K(\cdot, p) \in H_K \quad \textit{for} \quad p \in E.$$

The reproducing kernel K_L is, of course, represented in the operator form as follows:

$$K_L(\cdot, p; \alpha) = (L^*L + \alpha I)^{-1} K(\cdot, p),$$

where L^* is the adjoint operator of L.

In (4), when $\mathbf{d}$ contains errors or noises, we need its error estimate. For this, we can obtain the general result:

Proposition 1.2 *([4],[5]). In* (4)*, we have the estimate*

$$|f_{\mathbf{d},\alpha}(p)| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{K(p,p)} \|\mathbf{d}\|_{\mathcal{H}}.$$

Following Proposition 1.1, we shall look for the approximate inversion $f_{\mathbf{d},\alpha}(p)$ of the linear system

$$Lf = \mathbf{d}$$

for the bounded linear operator L from H_K into $\mathcal{H}$. Here, when α tends to zero, the approximate inversion $f_{\mathbf{d},\alpha}(p)$ tends to the Moore-Penrose generalized inverse of the operator equation in a good way, when it exists, and some detailed behaviour of the convergence is examined. More in details, for the convergence rate or the results for noisy data, see, ([2],[3]).

2 Approach looking for the inversion

Physically or by computers we can observe only discrete data, so, as a very general algorithm, we shall consider the discrete point data case such that: In (3), we shall consider the corresponding problem:

$$\inf_{f \in H_K} \left\{ \alpha \|f\|^2_{H_K} + \sum_{j=1}^{N} |(Lf)(P_j) - d_j|^2 \right\}, \tag{7}$$

for fixed discrete points $\{P_j\}_j$ of the set E and for given values $\mathbf{d} = \{d_j\}_j$; that is, $\mathcal{H}$ is the usual Euclidean space $\mathbf{R}^N$.

In order to use the representation (4), we need $LK_L(\cdot, p; \alpha))$ and it is determined by (5). In (5), we operate L as functions in p and we have

$$\alpha L_p \tilde{K}(p, q; \alpha) + L_p(L\tilde{K}_q, LK_p)_{\mathcal{H}} = L_p K(p, q). \tag{8}$$

Here, when we can take $\alpha = 0$ in the sense of numerical, we can take, of course, $\alpha = 0$ in those arguments.

As stated in Introduction, in many practical problems for the linear system, L is not given analytically and so, here, we shall assume that the system may be used many times, experimentally.

However, in order to use the previous section method, we must realize some physical objects as the N data $\mathbf{d} = \{d_j\}_j$, $N \times N$ values $L_p K(p, q)$ and $N \times N$ values $L_p L K_p$ of real values; that is, f and $\mathbf{d} = \{d_j\}_j$ are numerical representations of some physical objects in the system $Lf = \mathbf{d}$.

Since the reproducing kernel Hilbert space H_K is the function space approximating the solution of the operator equation $Lf = \mathbf{d}$, we can take many simple reproducing kernel Hilbert spaces as in ([7]), however, from the present situation, the reproducing kernel $K(p, q)$ must be realized as the physical object for the present system.

3 Physical viewpoints

We see in our inversion formula (4), we use a concrete reproducing kernel $K(p, q)$ through (5), but we do not use any Hilbert space structure of the reproducing kernel $K(p, q)$. By the theory of reproducing kernels, for any positive matrix there exists a uniuely determined reproducing kernel Hilbert space ([1,7]).

Furthermore, in our inversion formula (4), we are looking for approximations of the inversion in the function space H_K, so, in general, the space H_K is a sufficient large class of functions in the sense that we can approximate the inverse by the functions in H_K. For example, for any characteristic function on any interval, we can approximate it by the Sobolev Hilbert space of 1 dimension uniformly. This will mean that for the input, we can consider a suitable positive matrix, here, by a suitable positive matrix, we mean that the positive matrix may be realized as the physical data and it will also depend on its physical system.

In connection with these points of view, for example, for the 2 dimensional Sobolev space in ([7]), we shall use the more simple reproducing kernel

$$K(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{4} \exp(-|x_1 - y_1|) \exp(-|x_2 - y_2|), \tag{9}$$

which is the usual product of the 1 dimensional Sobolev reproducing kernels and its reproducing kernel Hilbert space is the tensor product of the two Hilbert spaces of the one dimensional Sobolev Hilbert space (see [1,7] for this structure).

We shall introduce several simple reproducing kernels on the whole real line space. Note here that for multidimensional spaces, we can consider the products as in (9). Furthermore, the restriction of a reproducing kernel to any subset is again a reproducing kernel. The sum and the usual product of two reproducing kernels on a same set are again reproducing kernels. For these elementary facts, see, ([1,7]). On the whole real space $\mathbf{R}$, the followings are reproducing kernels:

(1) Any positive semidefinite matrix.
(2) $\delta(x-y)$ ($\delta(0) = 1$ and $\delta(x) = 0$ for $x \neq 0$).
(3) For any $\alpha > 0$, $\exp(-\alpha|x-y|)$.
(4) $\exp(\alpha xy)$ $\quad$ ($\alpha > 0$).
(5) $\exp(-\alpha(x-y)^2)$ $\quad$ ($\alpha > 0$).
(6) $\exp(-|x-y|)(1+|x-y|)$.
(7) $\min(x, y)$.
(8) For any $\alpha > 0$, $\frac{\sin(\alpha(x-y))}{x-y}$.

On the half space $\{x > 0\}$, the followings are reproducing kernels:

(1) $\frac{1}{(x+y)^{2q}}$ $\quad$ $(q \geq \frac{1}{2})$.
(2) $\frac{1}{(x^2+y^2)^{2q}}$ $\quad$ $(q \geq \frac{1}{2})$.
(3) $\exp\{\min(x, y)\}$.

On the interval $\{-1 < x < 1\}$, the followings are reproducing kernels:

(1) $\frac{1}{(1-xy)^{2q}}$ $\quad$ $(q \geq \frac{1}{2})$.
(2) $\log \frac{1}{1-xy}$.

Furthermore, note that any reproducing kernel $K(p, q)$ on an arbitrary set E for a separable reproducing kernel Hilbert space is represented in the form, for some functions $\{\varphi_j(p)\}$ on E

$$K(p, q) = \sum_j \varphi_j(p)\overline{\varphi_j(q)},$$

that converges absolutely on $E \times E$. Conversely, any function $K(p, q)$ which is represented in this way for arbitrary complex-valued functions $\{\varphi_j(p)\}$ on E is a reproducing kernel.

4 Exact algorithm

We shall state the exact algorithm looking for the extremal function $f_{\mathbf{d},\alpha}(p)$ in (4), clearly in the setting (7).

1) We set

$$\begin{aligned} X(P, q) &= (L_p\tilde{K}(p, q; \alpha))(P), \\ k(P, q) &= (L_p K(p, q))(P) \end{aligned} \tag{10}$$

and

$$\kappa(P, Q) = (L_q L_p K(p, q))(P, Q). \tag{11}$$

2) As the solution of the regular linear equations (8)

$$\alpha X(P_j, q) + \sum_{j'=1}^{N} X(P_{j'}, q)\kappa(P_j, P_{j'}) = k(P_j, q); j = 1, 2, ..., N, \tag{12}$$

we determine $X(P_j, q)$. Then we obtain the approximate inverse

$$f_{\mathbf{d},\alpha}(p) = \sum_{j=1}^{N} d_j X(P_j, p). \tag{13}$$

Therefore, for some concrete problem for its inversion, we need the experimental data (10) and (11) of the two types in 1) and the procedure 2) is a mathematical problem.

By Proposition 1.2, we note that in (13), the following estimate holds:

$$|f_{\mathbf{d},\alpha}(p)| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{K(p,p)}\left(\sum_{j=1}^{N} d_j^2\right)^{1/2}.$$

The simplest and the most typical case of the above algorithm is that the system L is any type matrix of type m and n (without loss of generality we assume that $n \geq m$), and the positive matrix is the identity matrix of size n.

Acknowledgements This research is supported in part by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C)(2)(No. 16540137) from the Japan Society for the Promotion Science and the Mitsubishi Foundation, the 36th, Natural Sciences, No. 20 (2005-2006).

References

[1] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc., **68**(1950), 337-404.

[2] H. W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Mathematics and Its Applications **376**(2000), Kluwer Academic Publishers.

[3] C. W. Groetsch, *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden (1993).

[4] H. Itou and S. Saitoh, *Analytical and numerical solutions of linear singular integral equations*, Functional Equations, Integral Equations and Differential Equations with Applications (The Tricentennial Birthday Anniversary of Leonhard EULER), Taylor & Francis Books, US (to appear).

[5] T. Matsuura and S. Saitoh, *Analytical and numerical inversion formulas in the Gaussian convolution by using the Paley-Wiener spaces*, Applicable Analysis, **85**(2006), 901-915.

[6] T. Matsuura, S. Saitoh and D.D. Trong, *Approximate and analytical inversion formulas in heat conduction on multidimensional spaces*, J. of Inverse and Ill-posed Problems, **13** (2005), 479-493.

[7] S. Saitoh, *Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications*, Pitman Res. Notes in Math. Series **369**, Addison Wesley Longman Ltd (1997), UK.

[8] S. Saitoh, *Approximate Real Inversion Formulas of the Gaussian Convolution*, Applicable Analysis, **83**(2004), 727-733.

Complements of Sobolev spaces

Go Hirasawa (Tokyo Denki University)

Abstract

We will determine (de Branges) complementary spaces of Sobolev spaces $H^m(\mathbf{R})$ in $L^2(\mathbf{R})$. $(m \geq 1)$

1 De Branges 空間について

- $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$: Hilbert 空間.
- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: 有界線形作用素の全体.
- $A\mathcal{H}$: operator range $(A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

Operator range $A\mathcal{H}$ に内積 $(\ ,\ )_A$ を導入する:

$$(Au, Av)_A := (Pu, Pv), \quad u, v \in \mathcal{H}.$$

ただし, P は $(\ker A)^\perp$ への直交射影である. すると,

$$(A\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_A) \hookrightarrow \mathcal{H} \quad (\text{埋め込まれたヒルベルト空間}).$$

これを A による de Branges 空間 $\mathcal{M}(A) := (A\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_A)$ と言う. 逆な結果として次が知られている. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{M}$ が, あるノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ に関して連続的に埋め込まれた Hilbert 空間になっていたら, ある $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(A) \quad (\text{等距離同型})$$

を満たす. このとき AA^* は一意に決まる. 従って, $A \geq 0$ のように選んでおけば一意的に成り立つ.

2 Complement について

De Branges 空間が面白くなるのは, A として contraction が採用できるときである. すなわち,

$$(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}}) \hookrightarrow \mathcal{H} \quad (\text{contraction})$$

のケースを考える.

このとき, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$ (等距離同型 $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} = \|\cdot\|_A$), AA^* は一意に決まるので, complement $\mathcal{M}'$ を次で定義する.

$$\boxed{\mathcal{M}' := \mathcal{M}((I - AA^*)^{1/2}).}$$

- complement $\mathcal{M}'$ は $\mathcal{M}$ に付随しているノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ に依存している.
- $\mathcal{M}$ が閉部分空間のとき, $\mathcal{M}' = \mathcal{M}^{\perp}$ となる.

3 Sobolev 空間の complement について

$\mathbf{R}$ 上で定義された (複素数値) L^2-関数でその m $(m \geq 1)$ 階までのすべての (弱) 導関数がまた L^2-関数になっているような部分空間を考える:

$$\{f \in L^2(\mathbf{R}) : D^k f \in L^2(\mathbf{R})\ 1 \leq k \leq m\}.$$

ここで, $Df := \frac{1}{i}\partial f$. さらに, 次のような内積を与えます.

$$(f,g)_{H^m} := \sum_{k=0}^{m}(D^k f, D^k g)_{L^2} = (f,g)_{L^2} + \sum_{k=1}^{m}(D^k f, D^k g)_{L^2}.$$

すると, この部分空間は Hilbert 空間となり, これを m 次の Sobolev 空間と言い, $H^m(\mathbf{R})$ と表す.

$$\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^m}, \quad f \in H^m$$

が成立するので $H^m(\mathbf{R})$ は $L^2(\mathbf{R})$ の中に contractively に埋め込まれている. 従って, $H^m(\mathbf{R})$ は de Branges 空間 として実現できる (はず). そこで,

> Question 1. $H^m(\mathbf{R}) = \mathcal{M}(A)$ (等距離同型) となる contraction $A \in \mathcal{B}(L^2)$ は何か? AA^* は何か? または $A \geq 0$ は何か?

> Question 2. Sobolev 空間 $H^m(\mathbf{R})$ の complement $H^m(\mathbf{R})'$ は何か?

つまり,

$$H^m(\mathbf{R})' = \mathcal{M}(A)' = \mathcal{M}((I - AA^*)^{1/2})$$

を満たす AA^* は何か?

4 考察

Question 1, Question 2 を考えるためにまず作用素商の説明をする. $\ker A \subseteq \ker B$ を満たす $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して, 作用素商 B/A を次で定義する.

$$B/A : Au \to Bu, \quad u \in \mathcal{H}.$$

- 定義域は $A\mathcal{H}$, 値域は $B\mathcal{H}$ である.

- 閉作用素は作用素商のクラスに属す.

特に, $\mathcal{H}$ で稠密に定義された閉作用素のときは次の Kaufman の表現定理が知られている.

Lemma 4.1 ([3]) *T を $\mathcal{H}$ で稠密に定義された閉作用素とする. このとき, 一意に contraction B が存在して次のように書ける.*

$$T = B/(I - B^*B)^{1/2}.$$

さらに, T が自己共役であることと, B が自己共役であることは同値である.

Remark 4.1 T と B の関係は次のようにもなっている.

$$B = T(I + T^*T)^{-1/2}.$$

次の補題は本論のキーとなるものです. T を上と同様なとき, 以下が成り立ちます.

Lemma 4.2 Kaufman 表現 $T = B/(I - B^*B)^{1/2}$ において, T の定義域上に与えられるグラフノルムと de Branges ノルムは等しい:

$$\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{(I-B^*B)^{1/2}}.$$

T のグラフノルムとは, $\|u\|_T^2 = \|u\|^2 + \|Tu\|^2$, $(u \in \mathrm{dom}(T))$ です. $(\mathrm{dom}(T), \|\cdot\|_T)$ は contractively に埋め込まれたヒルベルト空間になります. 従って, このヒルベルト空間は de Branges 空間として実現できるわけですが, その答えが

$$(\mathrm{dom}(T), \|\cdot\|_T) = \mathcal{M}((I - B^*B)^{1/2}) \quad (\text{等距離同型})$$

ということなわけです.

証明. $u \in \mathrm{dom}(T)$ に対して, $u = (I - B^*B)^{1/2}v$, $v \in \mathcal{H}$ とおく.

$$\begin{aligned}
\|u\|_T^2 &= \|u\|^2 + \|Tu\|^2 \\
&= \|(I - B^*B)^{1/2}v\|^2 + \|Bv\|^2 \\
&= \|v\|^2 \\
&= \|(I - B^*B)^{1/2}v\|_{(I-B^*B)^{1/2}}^2 \\
&= \|u\|_{(I-B^*B)^{1/2}}^2
\end{aligned}$$

この補題を利用して Sobolev 空間の complement を考えていこう.

- $m=1$ のケース.

以前に中沢秀夫氏と考察した結果が次である.

Theorem 4.3 (cf.[4]) Sobolev 空間 $H^1(\mathbf{R})$ とそれを定義域とする $L^2(\mathbf{R})$ 上の閉作用素 $(T=)D := \frac{1}{i}\partial$ (自己共役) を考えます. これに一意対応する contraction を B (自己共役) とすると, 以下が成立する.

(1) $H^1(\mathbf{R}) = \mathcal{M}((I-B^2)^{1/2})$. (等距離同型)

(2) $H^1(\mathbf{R})' = \mathcal{M}(B)$. $(=\mathrm{ran}(D))$

(3) $D : H^1(\mathbf{R}) \to H^1(\mathbf{R})'$. (*onto*)

証明. $f \in H^1(\mathbf{R})$ に対して, Sobolev ノルムと D のグラフノルムは等しい:

$$\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|Df\|_{L^2}^2 = \|f\|_D^2.$$

従って, 補題より $\|f\|_D = \|f\|_{(I-B^2)^{1/2}}$ が従い, よって $\|f\|_{H^1} = \|f\|_{(I-B^2)^{1/2}}$ となるので主張が示せた. このとき

$$\begin{aligned} H^1(\mathbf{R})' &= \mathcal{M}((I-(I-B^2)^{1/2}(I-B^2)^{1/2})^{1/2}) \\ &= \mathcal{M}((B^2)^{1/2}) \\ &= \mathcal{M}((BB^*)^{1/2}) \\ &= \mathcal{M}(B). \end{aligned}$$

Contraction $B \in \mathcal{B}(L^2)$ は以下のようになる. $B = T(I+T^*T)^{-1/2}$, $(T = \frac{1}{i}\partial)$ より, $h \in L^2(\mathbf{R})$ に対して,

$$(I+T^*T)^{-1/2}h(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(I+\lambda+T^*T)^{-1}h(t)\,d\lambda$$

が成立する, (cf. [2] 公式より). $g(t) := (I+\lambda+T^*T)^{-1}h(t)$ とおいて, 両辺フーリエ変換すると

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= (1+\lambda+\xi^2)^{-1}\hat{h}(\xi) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2a}{a^2+\xi^2}\right)\hat{h}(\xi), \quad a := (1+\lambda)^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\hat{k_\lambda}(\xi)\hat{h}(\xi), \quad k_\lambda(t) = e^{-a|t|} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\widehat{k_\lambda * h}(\xi), \quad (k_\lambda * h)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty k_\lambda(t-y)h(y)\,dy \end{aligned}$$

よって, $g(t) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2a}(k_\lambda * h)(t)$. 以上より

$$\begin{aligned}
(Bh)(t) &= T(I+T^*T)^{-1/2}h(t) \\
&= \frac{T}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(I+\lambda+T^*T)^{-1}h(t)\ d\lambda \\
&= \frac{T}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}(k_\lambda * h)(t)\ d\lambda \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{T}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda)^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty k_\lambda(t-y)h(y)\ dy\ d\lambda \\
&= \frac{T}{2\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda)^{-1/2}\int_{-\infty}^\infty e^{-(1+\lambda)^{1/2}|t-y|}h(y)\ dy\ d\lambda \\
&= \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(1+\lambda)^{-1/2}e^{-(1+\lambda)^{1/2}|t-y|}\ d\lambda\}\ h(y)\ dy \\
&= \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty G(t-y)h(y)\ dy = T(G*h)(t)
\end{aligned}$$

ちなみに, $G(\cdot) \in L^1(\mathbf{R})$ は 0 次の変形ベッセル関数である.

- $m \geq 2$ のケース.

任意の $f \in H^m(\mathbf{R})$ に対して,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^m}^2 &= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^m \|D^k f\|_{L^2}^2 \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^m \|\mathcal{F}D^k f\|_{L^2}^2 \quad (\mathcal{F}: \text{フーリエ変換}) \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^m \|M_k\mathcal{F}f\|_{L^2}^2, \quad (M_k\mathcal{F}f = \xi^k\mathcal{F}f) \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^m \int |\xi^k\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \int \sum_{k=1}^m \xi^{2k}\cdot|\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi, \quad Q_{2m}(\xi) := \sum_{k=1}^m \xi^{2k} \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \int |M_{Q_{2m}^{1/2}}\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \|M_{Q_{2m}^{1/2}}\mathcal{F}f\|_{L^2}^2, \quad T_m := \mathcal{F}^{-1}M_{Q_{2m}^{1/2}}\mathcal{F}\ (\text{自己共役}) \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \|\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}M_{Q_{2m}^{1/2}}\mathcal{F}f\|^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\mathcal{F}T_m f\|_{L^2}^2 \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \|T_m f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

$$= \|f\|_{T_m}^2, \quad T_m = B_m/(I - B_m^2)^{1/2}$$
$$= \|f\|_{(I-B_m^2)^{1/2}}^2 \quad (\text{補題より}).$$

よって, $H^m(\mathbf{R}) = \mathcal{M}((I - B_m^2)^{1/2})$ (等距離同型) となる. 以上まとめると,

Theorem 4.4 Sobolev 空間 $H^m(\mathbf{R})$ $(m \geq 2)$ に対して,

$$T_m := Q_{2m}(D)^{1/2} = (D^2 + D^4 + \cdots + D^{2m})^{1/2} \quad (\text{自己共役})$$

とおくと, $\mathrm{dom}(T_m) = H^m(\mathbf{R})$ となり, この T_m に Kaufman の意味で 1 対 1 対応するある contraction B_m (自己共役) が存在して以下が成立する.

(1) $H^m(\mathbf{R}) = \mathcal{M}((I - B_m^2)^{1/2})$. (等距離同型)

(2) $H^m(\mathbf{R})' = \mathcal{M}(B_m)$. $(= \mathrm{ran}(T_m))$

(3) $T_m : H^m(\mathbf{R}) \to H^m(\mathbf{R})'$. (onto)

せめて $m = 2$ のときの complement $H^2(\mathbf{R})' = \mathcal{M}(B_2)$ を求めてみたいものです. $B_2 = T_2(I + T_2^* T_2)^{-1/2}$, $(T_2 = (D^2 + D^4)^{1/2})$ より, $h \in L^2(\mathbf{R})$ に対して,

$$(I + T_2^2)^{-1/2} h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} (I + \lambda + T_2^2)^{-1} h(t)\, d\lambda.$$

$g(t) := (I + \lambda + T_2^2)^{-1} h(t)$ とおいて, 両辺フーリエ変換すると

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= (1 + \lambda + \xi^2 + \xi^4)^{-1} \hat{h}(\xi) \\ &= \widehat{k_\lambda}(\xi) \hat{h}(\xi) \\ &= (\widehat{k_\lambda * h})(\xi) \end{aligned}$$

となるような関数 $k_\lambda(t)$ が知りたいわけである. そこで, 計算をしてみると $k_\lambda(t)$ は次のようになった.

$$k_\lambda(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi}} (\lambda + \frac{3}{4})^{-\frac{1}{2}} (\frac{1}{\xi_0(\lambda)} e^{i\xi_0(\lambda)|t|} - \frac{1}{\xi_1(\lambda)} e^{i\xi_1(\lambda)|t|}).$$

ただし, $\xi_0(\lambda)$ と $\xi_1(\lambda)$ はそれぞれ次の方程式の解のうち imaginary part が正のものである.

$$\xi^2 + w_0 = 0, \quad w_0 = \frac{1}{2} - i\sqrt{\lambda + \frac{3}{4}}$$

$$\xi^2 + w_1 = 0, \quad w_1 = \frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda + \frac{3}{4}}$$

この計算は, $(1+\lambda+\xi^2+\xi^4)^{-1}$ を分母を平方完成して部分分数分解したときに現れる関数の分母が上記の 2 つの関数というわけです. 後は, フーリエ逆変換を留数定理などを使って計算をしました.

結論としては, contraction B_2 は次のようになります.

$$B_2 h = T_2(K_2 * h), \quad h \in L^2(\mathbf{R}). \qquad (T_2 = (D^2 + D^4)^{1/2})$$

ただし,

- $K_2(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}}(\lambda + \frac{3}{4})^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{\xi_0(\lambda)}e^{i\xi_0(\lambda)|t|} - \frac{1}{\xi_1(\lambda)}e^{i\xi_1(\lambda)|t|})d\lambda.$
- $K_2(t) \in L^1(\mathbf{R})$.
- $\widehat{K_2}(\xi) = (1+\xi^2+\xi^4)^{-\frac{1}{2}}$.

ちなみにこれらから次がわかる.

$$\mathrm{dom}(T_2) = H^2(\mathbf{R}) = \{K_2 * h : h \in L^2(\mathbf{R})\}$$

このとき, $\|K_2 * h\|_{H^2} = \|h\|_{L^2}$ である. つまり, 関数 K_2 のことを, K_2 を合成させる有界作用素と考えると, 上の集合は K_2 の operator range を意味する. 従って, そこでの Sobolev ノルムは K_2 による de Branges ノルムになっているわけです.

5 Overlapping subspace について

最後に overlapping subspace に触れておきます.

Question 3. $H^m(\mathbf{R}) \cap H^m(\mathbf{R})'$ は何か? (集合として)

- $m=1$ のケース $\quad (D = \frac{1}{i}\partial)$

$$\begin{aligned} & f \in H^1(\mathbf{R}) \cap H^1(\mathbf{R})' \\ \Longleftrightarrow & f \in \mathrm{dom}(D) \cap \mathrm{ran}(D) \\ \Longleftrightarrow & f \in H^1(\mathbf{R}) \text{ かつ } f = Dg \text{ for some } g \in H^1(\mathbf{R}) \\ \Longleftrightarrow & f \in DH^2(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

よって,

$$H^1(\mathbf{R}) \cap H^1(\mathbf{R})' = DH^2(\mathbf{R}).$$

- $m = 2$ のケース　$(T_2 = (D^2 + D^4)^{1/2})$

$H^2(\mathbf{R}) \cap H^2(\mathbf{R})' = \mathrm{dom}(T_2) \cap \mathrm{ran}(T_2)$ より，上と同様に考えて

$$H^2(\mathbf{R}) \cap H^2(\mathbf{R})' = T_2 H^4(\mathbf{R})$$

References

[1] T. Ando, *De Branges Spaces and Analytic Operator Functions*, Lecture note, Hokkaido University, Sapporo, Japan, 1990.

[2] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[3] W. E. Kaufman, *Representing a closed operator as a quotient of continuous operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 72 (1978), 531-534.

[4] H. Nakazawa and G. Hirasawa, *The bounded operator which corresponds to a differential operator in* $L^2(\mathbf{R}^N)$, Proc. Sch. Sci. Tokai Univ. 39 (2004), 17-27.

[5] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk*, Wiley, New York, 1994.

Hyers-Ulam stability problem and Cauchy-Euler type factorization

Sin-Ei Takahasi, Hirokazu Oka, Takeshi Miura and Hiroyuki Takagi

Abstract. A strategy for solving the Hyers-Ulam stability problem is to factorize the operator, that is, to change the representation of the operator from the summation form to the product form. This idea of factorization was employed in the research of the Hyers-Ulam stability of Cauchy-Euler differential equation. In this paper, we study the possibility of such Cauchy-Euler type factorization for some other operators. This study will open the door to solving the Hyers-Ulam stability problem for many operators.

１．動機

１９４０年、S. M. Ulam は近似的線形写像の近くには（真の）線形写像が存在するかと言う問題を提起し、翌年 D. H. Hyers が Banach 空間上の加法的写像に関してこの問題を解いた。それ故この問題を Hyers-Ulam stability problem と言い、その後多くの数学者によってこの問題が研究されて来た。

一般に距離もどき空間 (X, d_X) から他の距離もどき空間 (Y, d_Y) への写像 T 及び $y_0 \in T(X)$ とする。このときもし方程式 $Tx = y_0$ が次の条件を満たすならば、Hyers-Ulam stability (HUS) を持つと言う：

$$\exists K \geq 0 : \varepsilon > 0, x \in X \ s.\ t.\ d_Y(Tx, y_0) < \varepsilon \Rightarrow \exists x_0 \in X \ s.\ t.\ Tx_0 = y_0, d_X(x, x_0) < K\varepsilon .$$

特に微分方程式に関する Hyers-Ulam stability problem が１９９８年、C. Alsina & R. Ger によって初めて研究された。その後、高橋、三浦、宮島等によってこの方面の研究が引き継がれ、特に２００３年、彼等によって次の結果が示された ([2]).

Let $P(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k z^k$ be a polynomial and $D = \frac{d}{dt}$. Then the differential equation $P(D)f = 0$ on $\boldsymbol{R}$ has the Hyers-Ulam stability if and only if the equation $P(z) = 0$ has no purely imaginary solution.

最近 J.-H. Kim & S.-Y. Chung [1] によって次の結果が示された。

Any Cauchy-Euler differential equation $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k f^{(k)}(t) = 0$ has the Hyers-Ulam stability on an arbitrary finite interval in $\boldsymbol{R}^+$.

これらの結果を証明する本質的な部分は微分作用素が resonable に因数分解出来るかと言うところにある。前者は代数学の基本定理 (FTA) によって

$$P(D) = \lambda_n (D - \alpha_1 I) \cdots (D - \alpha_n I)$$

と因数分解でき、後者は

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k D^k = \lambda_n (tD - \alpha_1 I) \cdots (tD - \alpha_n I)$$

と因数分解できる。ここに $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ はそれぞれの特性方程式の解である。そこでどんな作用素は上のような因数分解が出来るか？と言う疑問を持つ。

一般に写像に対しても Hyers-Ulam stability が定義でき、写像の合成に関して安定性は高い (cf. [2, Lemma 2. 1]). しかし写像の和に対しては一般に不安定である。そこで和を積に変換する手だてがあれば不安定性が解消されると考える。Cauchy-Euler 型因数分解はその一つの例であり、しかもこの変換は和に対して比較的積に変換してくれる。それが３節の Lemma 2 である。

2．問題と願望

A を順序を持たない複素多元環、$L(A)$ をその上の線型自己写像の全体とする。このとき次のような問題を考える。

問題。与えられた $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{C}$, $a \in A$, $T \in L(A)$ に対して、
$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k T^k = \lambda(aT - \alpha_1 I)\cdots(aT - \alpha_n I)$$
を満たす $\lambda, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \boldsymbol{C}$ を見つける事ができるか？

我々は任意の $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{C}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ について常に $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k T^k$ が上の形で因数分解出来るとき、「組 (a, T) は Cauchy-Euler type factorization 可能である」と呼ぼう。我々はそのような組の全体を決定することが願望である。

3．基本補題

Lemma 1. Let $n \geq 2$, $a \in A$ and $T \in L(A)$ be such that

$$(\#) \qquad a^{k+1}Tx = aT(a^k x) + (\beta_1 - \beta_{k+1})a^k x \ (1 \leq k \leq n-1)$$

for all $x \in A$ and some $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \boldsymbol{C}$. Then for each $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{C}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k T^k = \lambda_n(\tilde{T} - \alpha_1 I)\cdots(\tilde{T} - \alpha_n I)$$
holds, where $\tilde{T} = aT + \beta_1 I$ and $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \boldsymbol{C}$ are the roots of the characteristic equation $\lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t - \beta_1)\cdots(t - \beta_k) = 0$.

Proof. Suppose that $1 \leq k \leq n-1$ and $a^k T^k = (\tilde{T} - \beta_1 I)\cdots(\tilde{T} - \beta_k I)$. Then
$$\begin{aligned}
(\tilde{T} - \beta_1 I)\cdots(\tilde{T} - \beta_{k+1} I)x &= (\tilde{T} - \beta_{k+1} I)(\tilde{T} - \beta_1 I)\cdots(\tilde{T} - \beta_k I)x \\
&= (\tilde{T} - \beta_{k+1} I)(a^k T^k x) \\
&= \tilde{T}(a^k T^k x) - \beta_{k+1} a^k T^k x \\
&= aT(a^k T^k x) + \beta_1 a^k T^k x - \beta_{k+1} a^k T^k x \\
&= aT(a^k T^k x) + (\beta_1 - \beta_{k+1}) a^k T^k x \\
&= a^{k+1} T T^k x \ \text{(by (\#))} \\
&= a^{k+1} T^{k+1} x
\end{aligned}$$
for all $x \in A$. Therefore we have $a^k T^k = (\tilde{T} - \beta_1 I)\cdots(\tilde{T} - \beta_k I)$ for all $1 \leq k \leq n$ and then
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k T^k &= \lambda_0 I + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a^k T^k \\
&= \lambda_0 I + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\tilde{T} - \beta_1 I)\cdots(\tilde{T} - \beta_k I) \\
&= \lambda_n(\tilde{T} - \alpha_1 I)\cdots(\tilde{T} - \alpha_n I)
\end{aligned}$$
which completes the proof. Q. E. D.

Lemma 2. Let $n \geq 2$, $a \in A$ and $S, T \in L(A)$ such that both (a, S) and (a, T) satisfy the condition (#). Then $(a, \lambda S + \mu T)$ also satisfies the condition (#) for each $\lambda, \mu \in \boldsymbol{C}$.

Proof. Immediately.

4．結果

(1) Let M be a multiplier on A and $a \in A$. Let $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \boldsymbol{C}$ be the roots of the characteristic equation $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k = 0$. Then we have

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k M^k = \lambda_n (aM - \alpha_1 I) \cdots (aM - \alpha_n I).$$

Therefore (a, M) is Cauchy-Euler type factorable.

∵ Take $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$ in Lemma 1. In this case, it is obvious that (#) holds and then the desired result is obtained from Lemma 1. Q . E. D.

(2) Suppose that A has an identity element e. Let D be a derivation on A with $D(a) = e$ for some $a \in A$. Let $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \boldsymbol{C}$ be the roots of the characteristic equation $\lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k t(t-1) \cdots (t-k+1) = 0$. Then

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k D^k = \lambda_n (aD - \alpha_1 I) \cdots (aD - \alpha_n I).$$

Therefore (a, M) is Cauchy-Euler type factorable.

∵ Take $\beta_k = k - 1$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ in Lemma 1. Since

$$\begin{aligned} aD(a^k x) + (\beta_1 - \beta_{k+1}) a^k x &= aD(a^k x) - k a^k x \\ &= a(k a^{k-1} x + a^k D x) - k a^k x \\ &= a^{k+1} D x, \end{aligned}$$

it follows that (#) holds and then the desired result is obtained from Lemma 1. Q . E. D.

(3) Let H be a homomorphism on A such that $H(a) = a$ for some $a \in A$. Then (a, bH) is Cauchy-Euler type factorable for each $b \in A \cup \boldsymbol{C}$.

∵ Put $T = bH$ and take $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$ in Lemma 1. Since

$$\begin{aligned} aT(a^k x) + (\beta_1 - \beta_{k+1}) a^k x &= a(bH + M)(a^k x) = baH(a^k x) = baH(a^k) H(x) \\ &= a^{k+1} b H(x) = a^{k+1} T(x) \end{aligned}$$

it follows that (#) holds and then the desired result is obtained from Lemma 1. Q . E. D.

Example. Let $A = C^{\infty}(\boldsymbol{R})$, $\varphi(t) = 1 - t$ $(t \in \boldsymbol{R})$ and $Hf = f \circ \varphi$ $(f \in A)$. Then H is a homomorphism of A into itself. Put $f(t) = (t - \frac{1}{2})^2$ $(t \in \boldsymbol{R})$. Then f is a fixed point of H.

Proposition 3. Let A be a unital complex algebra with identity e and $a \in D$. Let M be a multiplier on A, D a derivation on A with $D(a) = e$ and H a homomorphism on A such that $H(a) = a$. Then $(a, M + \lambda D + bH)$ is Cauchy-Euler type factorable for each $\lambda \in \boldsymbol{C}$ and $b \in A \cup \boldsymbol{C}$.

Proof. This follows from (1), (2), (3) and Lemma 2. In fact, let $T = M + \lambda D + bH$ and then

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k T^k = \lambda_n (aT - \alpha_1 I) \cdots (aT - \alpha_n I),$$

where $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ are the roots of the characteristic equation

$$\lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k t(t-1) \cdots (t-k+1) = 0.$$

References

1. Jong-Ho Kim and Soon-Yeong Chung, The stability for the Caucy-Euler differential equations, submitted.

2. T. Miura, S. Miyajima and S.-E. Takahasi, Hyers-Ulam stability of linear diffrential operator with constant coefficients, Math. Nachr., 258(2003), 90-96.

Sin-Ei Takahasi
Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University, Yonezawa, 992-8510, Japan.
E-mail address: sin-ei@emperor.yz.yamagata-u.ac.jp

Hirokazu, Oka
Faculty of Engineering, Ibaraki University 316-8511, Japan.
E-mail address: oka@mx.ibaraki.ac.jp

Takeshi Miura
Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University, Yonezawa, 992-8510, Japan.
E-mail address: miura@yz.yamagata-u.ac.jp

Hiroyuki Takagi
Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Shinshu University, Matsumoto 390-8621, Japan.
E-mail address: takagi@math.shinshu-u.ac.jp

Some constants related with uniform non-squareness of Banach spaces

Yasuji Takahashi and Mikio Kato

Abstract. We shall discuss James type and von Neumann-Jordan type constants of a Banach space in connection with uniform non-squareness and investigate relations among these constants and some other geometric constants.

Let X be a Banach space with $\dim X \geq 2$ and let $-\infty \leq t < \infty$.
(i) The *James type constant* $J_{X,t}(\tau)$ $(\tau \geq 0)$ is defined by

$$J_{X,t}(\tau) = \begin{cases} \sup\left\{\left(\dfrac{\|x+\tau y\|^t + \|x-\tau y\|^t}{2}\right)^{1/t} : \ \|x\| = \|y\| = 1\right\} & \text{if} -\infty < t < \infty, \\ \sup\left\{\min(\|x+\tau y\|, \|x-\tau y\|) : \ \|x\| = \|y\| = 1\right\} & \text{if } t = -\infty. \end{cases}$$

(ii) The *von Neumann-Jordan type constant* $C_t(X)$ is defined by

$$C_t(X) = \sup\left\{J_{X,t}(\tau)^2/(1+\tau^2) : \ 0 \leq \tau \leq 1\right\}.$$

(iii) The constant $C_t'(X)$ is defined by $C_t'(X) = J_{X,t}(1)^2/2$.

The following well-known constants are expressed by these constants.
James contant: $J(X) = J_{X,-\infty}(1)$
von Neumann-Jordan constant: $C_{NJ}(X) = C_2(X)$
Zbăganu constant: $C_Z(X) = C_0(X)$
modulus of smoothness: $\rho_X(\tau) = J_{X,1}(\tau) - 1$
Recently Gao [2] and Yang-Wang [9] introduced the constants $E(X)$ and $\gamma_X(\tau)$ and investigated the normal structure of X. Their constants are also expressed by our James type constant: $E(X) = 2J_{X,2}(1)^2 = 4C_2'(X)$, $\gamma_X(\tau) = J_{X,2}(\tau)^2$.

If $-\infty \leq t \leq s < \infty$, then $J_{X,t}(\tau) \leq J_{X,s}(\tau)$ $(\tau \geq 0), C_t(X) \leq C_s(X)$ and $J(X)^2/2 \leq C_t'(X) \leq C_t(X)$. As is well known, if X is an L_p-space with $1 \leq p \leq \infty$ and $\dim X \geq 2$, $C_{NJ}(X) = J(X)^2/2 = 2^{2/r-1}$, where $r = \min\{p, p'\}$ and $1/p + 1/p' = 1$ (cf. [6]). Thus we have $C_t'(L_p) = C_t(L_p) = 2^{2/r-1}$ for all

$-\infty \leq t \leq 2$, where $r = \min\{p, p'\}$.

The uniform non-squareness is characterized with these constants. Recall that X is called *uniformly non-square* if $J(X) < 2$ (cf. [3]).

Theorem 1. *Let $-\infty \leq t < \infty$. Then the following are equivalent.*
(i) *X is uniformly non-square.*
(ii) $J_{X,t}(1) < 2$.
(iii) $J_{X,t}(\tau) < 1 + \tau$ for some $0 < \tau < 1$.
(iv) $C_t(X) < 2$.
(v) $C'_t(X) < 2$.

Remark 1. If X is a Hilbert space, then $C_t(X) = C'_t(X) = 1$ for all $-\infty \leq t \leq 2$, and conversely, if $C_t(X) = 1$ for some $0 \leq t \leq 2$, X is a Hilbert space. It is shown that if $C'_2(X) = 1$, X is a Hilbert space. However, there is a Banach space X with $C'_t(X) = 1$ for all $-\infty \leq t \leq 1$ which is not isometric to any Hilbert space.

The *modulus of convexity* of X is defined by

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| = \epsilon\right\} \quad (0 \leq \epsilon \leq 2).$$

The function δ_X is continuous on [0,2), increasing on [0,2], and strictly increasing on $[\epsilon_0, 2]$, where $\epsilon_0 = \epsilon_0(X)$ is the coefficient of convexity of X:

$$\epsilon_0(X) = \sup\{\epsilon \in [0,2]; \delta_X(\epsilon) = 0\}.$$

The function $\delta_X(\epsilon)/\epsilon$ is increasing on (0,2], while $\delta_X(\epsilon)$ need not be convex. X is said to be *uniformly convex* if $\delta_X(\epsilon) > 0$ for all $0 < \epsilon \leq 2$, i.e., $\epsilon_0(X) = 0$. The *modulus of smoothness* of X is defined by

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|}{2} - 1 : \|x\| = \|y\| = 1\right\}.$$

The function ρ_X is increasing, continuous, and convex on $[0,\infty)$, $\rho_X(0) = 0$ and $\rho_X(\tau) \leq \tau$. The function $\rho_X(\tau)/\tau$ is also increasing on $[0,\infty)$. X is said to be *uniformly smooth* if $\rho_X(\tau)/\tau \to 0$ $(\tau \to +0)$, i.e., $\rho'_X(0) = \lim_{\tau \to +0} \rho_X(\tau)/\tau = 0$. By the Lindenstrauss formula we easily have $\rho_X(1) = \rho_{X^*}(1)$ and $\rho'_X(0) = \epsilon_0(X^*)/2$.

Now we have the following sequence of characterizations of uniform non-squareness.

Theorem 2 (cf. [6]). *The following are equivalent.*

(i) X *is uniformly non-square.*

(ii) $\delta_X(\epsilon) > 0$ for some $0 < \epsilon < 2$.

(iii) $\epsilon_0(X) < 2$.

(iv) $\rho_X(\tau_0) < \tau_0$ for some $\tau_0 > 0$

(v) $\rho_X(1) < 1$.

(vi) $\rho_X(\tau) < \tau$ for all $\tau > 0$.

(vii) $\rho'_X(0) < 1$.

(viii) $\epsilon_0(X^*) < 2$.

(iv) $\rho'_{X^*}(0) < 1$.

Kato-Maligranda-Takahashi [6] proved that

$$\frac{1}{2}J(X)^2 \leq C_{NJ}(X) \leq \frac{J(X)^2}{(J(X)-1)^2+1}. \tag{1}$$

The estimate from above was improved by Maligranda (2003) and Nikolova-Persson-Zachariades [8, 2004] independently to the estimate

$$C_{NJ}(X) \leq \frac{J(X)^2}{4} + 1 + \frac{J(X)}{4}\left(\sqrt{J(X)^2 - 4J(X) + 8} - 2\right) \tag{2}$$

and Maligranda (2003, 2005) stated the conjecture:

$$C_{NJ}(X) \leq \frac{J(X)^2}{4} + 1. \tag{3}$$

Theorem 3. *For any Banach space* X

$$\max\{\epsilon_0(X), \epsilon_0(X^*)\} \leq 2\rho_X(1) \leq J(X) \leq \rho_X(1) + 1. \tag{4}$$

Remark 2. If X is not uniformly non-square, $J(X) = \epsilon_0(X) = \epsilon_0(X^*) = 2$ and $\rho_X(1) = 1$; hence we have equality in the all inequalities in (4). It is shown that X is not uniformly non-square if and only if $2\rho_X(1) = J(X)$. On the other hand, $J(X) = \rho_X(1) + 1$ for any L_p-space X with $\dim X \geq 2$. Moreover, if X is the 2-dimensional Day-James $l_2 - l_\infty$ space, then $J(X) = \rho_X(1) + 1$ and $\max\{\epsilon_0(X), \epsilon_0(X^*)\} = 2\rho_X(1)$, where X^* is the dual space of X.

Corollary 1 (cf. [6]). *For any Banach space* X

$$J(X^*) \leq \rho_{X^*}(1) + 1 = \rho_X(1) + 1 \leq \frac{J(X)}{2} + 1. \tag{5}$$

Moreover, X is not uniformly non-square if and only if $J(X^*) = J(X)/2 + 1$.

Theorem 4. *For any Banach space X*

$$(6) \quad 1 + \frac{\epsilon_0(X)^2}{4} \le C_{NJ}(X) \le 1 + \rho_X(1)\left(\sqrt{(1-\rho_X(1))^2+1} - (1-\rho_X(1))\right)$$

Remark 3. If X is not uniformly non-square, we have equality in the both inequalities of (6). On the other hand there are uniformly non-square Banach spaces X for which equality holds in the first resp. second inequalities of (6): Let X be the 2-dimensional Day-James $l_2 - l_1$ space. Then $C_{NJ}(X) = 1 + \epsilon_0(X)^2/4 = 3/2$. Also let X be the 2-dimensional Day-James $l_\infty - l_1$ space. Then $C_{NJ}(X) = 1 + \rho_X(1)\left(\sqrt{(1-\rho_X(1))^2+1} - (1-\rho_X(1))\right) = (3+\sqrt{5})/4$ (cf. [1, 9]).

Let $f(u) = 1 + u(\sqrt{(1-u)^2+1} - (1-u))$. As the function f is strictly increasing and $\rho_X(1) \le J(X)/2$, we have the following.

Corollary 2 (cf. [8]). *For any Banach space X*

$$(7) \qquad C_{NJ}(X) \le 1 + \frac{J(X)^2}{4} + \frac{J(X)}{4}(\sqrt{(J(X)-2)^2+4} - 2).$$

Moreover, the equality holds if and only if X is not uniformly non-square.

Theorem 5. *For any Banach space X*

$$(8) \qquad 1 + \frac{\epsilon_0(X)^2}{4} \le C_2'(X) \le 1 + \rho_X(1)^2 \le 1 + \frac{J(X)^2}{4}$$

Remark 4. If X is not uniformly non-square, we have equality in both of the above inequalities (8). On the other hand there are uniformly non-square Banach spaces X for which $1 + \epsilon_0(X)^2/4 = C_2'(X) = 1 + \rho_X(1)^2$. Indeed if X is the $l_2 - l_1$ space, $\epsilon_0(X) = \sqrt{2}$, $\rho_X(1) = 1/\sqrt{2}$ (hence $C_2'(X) = 3/2$). In this case, we also have $C_{NJ}(X) = 1 + \rho_X(1)^2 = 3/2$. In general the inequality $C_{NJ}(X) \le 1 + \rho_X(1)^2$ does not hold. For example let X be the $l_\infty - l_1$ space. Then $C_{NJ}(X) = (3+\sqrt{5})/4$ and $1 + \rho_X(1)^2 = 5/4$. However, if $C_{NJ}(X)$ attains the supremum at $x, y \in X$ such that $\|x\| = \|y\|$ or $\|x+y\| = \|x-y\|$, then it holds $C_{NJ}(X) \le 1 + \rho_X(1)^2$. Of course there is no uniformly non-square Banach space X for which $C_2'(X) = 1 + J(X)^2/4$.

Theorem 6. *For any Banach space X*

$$\epsilon_0(X) \le C_Z(X) \le 1 + \rho_X(1)^2 \le 1 + \frac{J(X)^2}{4} \tag{9}$$

Remark 5. If X is not uniformly non-square, we have equality in all the ineqaulities of (9). On the other hand, if X is the $l_2 - l_1$ space (uniformly non-square), $C_Z(X) = \epsilon_0(X) = \sqrt{2}$; and if X is the $l_2 - l_\infty$ space (uniformly non-square), $C_Z(X) = 1 + \rho_X(1)^2 = 3/2$.

Theorem 7. *For any Banach space X*

$$C_Z(X) \le \frac{J(X) + \sqrt{(2 - J(X))^2 + J(X)^2}}{2} \le 1 + \frac{J(X)^2}{4} \tag{10}$$

Remark 6. It is shown that X is not uniformly non-square if and only if it holds

$$C_Z(X) = 1 + \frac{J(X)^2}{4}. \tag{11}$$

Theorem 8. *For any Banach space X*

$$\epsilon_0(X) \le C_0'(X) \le \frac{(1 + \rho_X(1))^2}{2} \le \frac{(J(X) + 2)^2}{8} \le 1 + \frac{J(X)^2}{4} \tag{12}$$

Remark 7. If X is not uniformly non-square, we have equality in the all ineqaulities in (12). It is shown that X is not uniformly non-square if and only if $C_0'(X) = (J(X) + 2)^2/8$. On the other hand, if X is the $l_2 - l_1$ space, then $C_0'(X) = \epsilon_0(X) = \sqrt{2}$; if X is the $l_2 - l_\infty$ space, then $C_0'(X) = (1 + \rho_X(1))^2/2 = (1 + 1/\sqrt{2})^2/2$.

References

[1] J. Alonso and P. Martín, A counterexample for a conjecture of G. Zbăganu about the Neumann-Jordan constant, preprint.

[2] J. Gao, A Pythagorean approach in Banach spaces, J. Inequal. Appl. **2006**: Article ID 94982 (2006), 1–11.

[3] R. C. James, Uniformly nonsquare Banach spaces, Ann. of Math. **80** (1964), 542–550.

[4] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear metric spaces, Ann. of Math. **36** (1935), 719–723.

[5] M. Kato and L. Maligranda, On James and Jordan-von Neumann constants of Lorentz sequence spaces, J. Math. Anal. Appl. **258** (2001), 457–465.

[6] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, On James, Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces, Studia Math. **144** (2001), 275–295.

[7] M. Kato and Y. Takahashi, On the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1055–106.

[8] L. Y. Nikolova, L. E. Persson and T. Zachariades, A study of some constants for Banach spaces, C. R. Acad. Bulg. Sci. **57** (2004), 5–8.

[9] C. Yang and F. Wang, On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant, J. Math. Anal. Appl., to appear.

[10] G. Zbăganu, An inequality of M. Rădulescu and S. Rădulescu which characterizes the inner product spaces, Rev. Roumaine Math. Pure Appl. **47** (2002), 253–257.

Yasuji Takahashi
Department of System Engineering,
Okayama Prefectural University,
Soja 719-1197, Japan
e-mail: takahasi@cse.oka-pu.ac.jp

Mikio Kato
Department of Mathematics,
Kyushu Institute of Technology,
Kitakyushu 804-8550, Japan
e-mail: katom@tobata.isc.kyutech.ac.jp

周期的な重みを持つシフト作用素の q-数域半径

The q-numerical radius of a weighted shift operator with periodic weights

中里　博　　Hiroshi Nakazato
弘前大学理工学部
Hirosaki University, Faculty of Science and Technology

We deal with the q-numereical radius of weighted unilateral shift operators. In particular, the q-numerical radius of weighted shift operators with periodic weights is discussed.

1.　周期的な重みを持つシフトと行列の関係

T を複素ヒルベルト空間 H における有界線形作用素とする。実数 $0 \leq q \leq 1$ に対して、T の q-数域 $W_q(T)$ を次のように定義する。

$$W_q(T) = \{\langle T\xi, \eta\rangle : ||\xi|| = ||\eta|| = 1, \langle \xi, \eta\rangle = q\}.$$

U をユニタリ作用素とすれば、$W_q(UTU^{-1}) = W_q(T)$ が成り立ち、T の随伴作用素 T^* に対しては、$W_q(T^*) = \overline{W_q(T)}$ が成り立つ。特に、T がエルミット作用素のときは、T のスペクトル $\sigma(T)$ の最大値を M, 最小値を m とするとき、

$$\mathrm{closure}(W_q(T)) = [M(1+q)/2 + m(-1+q)/2, M(-1+q)/2 + m(1+q)/2]$$

が成り立つ。

一般に、$W_q(T)$ は、$\mathbf{C}$ における有界閉凸集合となる (N. K. Tsing, 1984)。$q = 1$ のときは、$W_q(T)$ は、（古典的な）数域 $W(T)$ である。T の数域半

径 $w_q(T)$ が次のように定義される。

$$w_q(T) = \sup\{|z| : z \in W_q(T)\}.$$

非負実数列 $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ を重みに持つような片側シフト unilateral shift を無限行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1}$$

により定める。ここでは、特に重みが周期的であって $s_{k+m} = s_k$ が任意の自然数 k に対して成り立つ場合を考える。このとき、重み $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ を持った巡回シフト行列 S

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & s_m \\ s_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s_{m-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

を定義する。

定理 1 A を周期的な重み $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ を持つ片側シフトとし、S は重み $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ を持つ (2) で与えられた巡回シフト行列とする。 このとき $w_q(A) = w_q(S)$ が各 $0 \leq q \leq 1$ に対して成り立つ。

2. 重みの順番の入れ替え

周期的な重み $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ を持つ片側または両側シフトの q-数域半径を $w_q([s_1, s_2, \ldots, s_m])$ と表すことにする。このとき、次の結果が成り立つ。

定理 2

(*i*) $w_q([cs_1, cs_2, \ldots, cs_m]) = cw_q([s_1, s_2, \ldots, s_m])$ $(c \geq 0)$

(*ii*) $s_1, s_2, \ldots, s_m, s'_1, s'_2, \ldots, s'_m$ を非負実数とするとき $w_q([s_1, s_2, \ldots, s_m]) \leq w_q([s_1 + s'_1, s_2 + s'_2, \ldots, s_m + s'_m])$

(iii) $\min\{s_1, \ldots, s_m\} \leq w_q([s_1, \ldots, s_m]) \leq \max\{s_1, \ldots, s_m\}$.

(iv) $w_q([s_m, s_{m-1}, \ldots, s_2, s_1]) = w_q([s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}, s_m])$.

(v) $w_q([s_2, \ldots, s_m, s_1]) = w_q([s_1, s_2, \ldots, s_m])$.

上の定理 2 の (iv) および (v) より 重みの周期 $m = 2$, $m = 3$ のとき、対応する q-数域は重みの並べ方に依らない。しかし、$m \geq 4$ のときは、q-数域は重みの並べ方に依存する。$m = 4$ のときは次の結果が成り立つ。

定理 3 $s_4 \geq s_3 \geq s_2 \geq s_1 \geq 0$ と仮定する。このとき次の不等式が成り立つ:

$$w_q([s_2, s_4, s_3, s_1]) \geq w_q([s_1, s_4, s_3, s_2]) \geq w_q([s_1, s_4, s_2, s_3])$$

($0 \leq q \leq 1$)

定理 3 を証明するために次の補題 1 を用いる。$g(t) = t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d$ を最高次係数 1 の実係数多項式であって $g''(t) = 12t^2 + 6at + 2b$ は 2 個の異なる根を持つと仮定する。このとき係数 b は $p > 0$ を用いて $3a^2/8 - p^2$ の形に表される。従って多項式 $g(t)$ は次の形となる。

$$g(t : a, p, c, d) = t^4 + at^3 + (3a^2/8 - p^2)t^2 + ct + d.$$

補題 1 負または 0 である実数 a および正の実数 p に対する実多項式

$$g(t : c, d) = t^4 + at^3 + (3a^2/8 - p^2)t^2 + ct + d$$

に対応する閉領域

$$\Omega = \{(c, d) \in \mathbf{R}^2 : g(t : c, d) = 0 \text{ が重複度を込めて 4 個の実根を持つ} \}$$

はコンパクトである。ここで $(c_1, d_1), (c_2, d_2) \in \Omega$ かつ $c_1 < c_2$ and $d_1 < d_2$ ならば、次の不等式が成り立つ。

$$\max\{t \in \mathbf{R} : g(t : c_1, d_1) = 0\} \geq \max\{t \in \mathbf{R} : g(t : c_2, d_2) = 0\}.$$

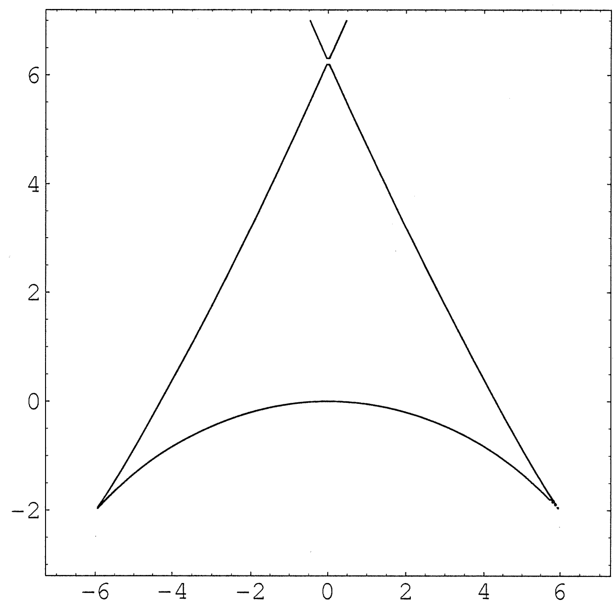

図 1:

[補題 1 の証明] a および p を固定する。このとき、3 次多項式

$$g'(t:c,d) = 4t^3 + 3at^2 + (3a^2/4 - 2p^2)t + c$$

が 3 つの実根を持つための必要十分条件は c が区間

$$[(9a^2 - 72ap^2 - 32\sqrt{6}p^3)/144, (9a^2 - 72ap^2 + 32\sqrt{6}p^3)/144]$$

に属することである。そのような条件を満たす c に対して、4 次多項式 $g(t:c,d)$ が 4 つの実根を持つための条件は、d がある閉区間に属することとして表される。そこでそのような点 (c,d) はある閉領域 Ω を成す。領域 Ω の境界は $g(t:c,d) = 0$ が t に関して重根を持つような点 (c,d) が形成する代数曲線上にある。この代数曲線は $\partial\Omega$ 上で 3 つの特異点を持つ。点

$$(c,d) = (a(a^2 - 8p^2)/16, (a^2 - 8p^2)^2/256)$$

は通常 2 重点（結節点）であり、2 点

$$(c,d) = ((9a^3 - 72ap^2 - 32\sqrt{6}p^3)/144, (9a^4 - 144a^2p^2 - 128\sqrt{6}ap^3 - 192p^4)/2304),$$

および

$$(c,d) = ((9a^3 - 72ap^2 + 32\sqrt{6}p^3)/144, (9a^4 - 144a^2p^2 + 128\sqrt{6}ap^3 - 192p^4)/2304)$$

は尖点である。閉領域 Ω は凸ではない。それを少し補うように領域

$$\Omega_1 = \{(c,d) \in \mathrm{conv}(\Omega) : (c, d + d_0) \in \Omega \text{ for some } d_0 \geq 0\}$$

を考える。変数変換 $t = s - a/4$ を施せば多項式 $g(t : c, d)$ は次のような最高次係数 1 に変換される。

$$\tilde{g}(s : \gamma, \delta) = s^4 - p^2 s^2 + \gamma s + \delta,$$

ただし、ここで

$$\begin{aligned} \gamma &= c - a^3/16 + ap^2/2, \\ \delta &= d - ac/4 + 3a^4/256 - a^2p^2/16 \end{aligned}$$

である。

ここで、点 (c,d) と点 (γ,δ) の間の対応は全単射なアフィン変換であり領域 Ω, ω_1 は、次のような領域 $\tilde{\Omega}$、 $\tilde{\Omega}_1$ に変換される。領域 $\tilde{\Omega}$ は 4 次曲線

$$-27\gamma^4 + 256\delta^3 - 144p^2\gamma^2\delta - 128p^4\delta^2 + 4p^6\gamma^2 + 16p^8\delta = 0$$

によって囲まれる。この 4 次曲線は 点 $(\gamma,\delta) = (0, p^2/4)$ において結節点を持ち、2 点 $(\gamma,\delta) = (\pm 2\sqrt{6}p^3/9, -p^4/12)$ において尖点を持つ。領域 $\tilde{\Omega}_1$ の境界となる弧で、2 つの尖点を結ぶ線分以外のものは、区間 $[-p^4/12, p^2/4]$ 上の関数

$$\gamma(\delta) = \sqrt{2/27}(p^6 - 36p^2\delta + (p^4 + 12\delta)^{3/2})^{1/2}$$

によって $\gamma = \pm\gamma(\delta)$ と表示される。上の 2 つの関数のうちの正のものは $\gamma'(\delta) < 0$ を満たすから単調減少する。

仮定より $a < 0, c_1 < c_2, d_1 < d_2$ であるから領域 $\tilde{\Omega}$ の 2 点 (γ_1, δ_1),(γ_2, δ_2) をそれぞれ (c_1, d_1),(c_2, d_2) に対応するする点とすれば、不等式 $\gamma_1 < \gamma_2$, $\delta_1 < \delta_2$ が成り立つ。領域 $\tilde{\Omega}_1$ も凸ではないが、 この領域 $\tilde{\Omega}_1$ に頂点 (γ_1, δ_1), (γ_2, δ_1), (γ_2, δ_2) を結ぶ折れ線が含まれる。この折れ線上の任意の点 (γ, δ) に対して 4 次多項式 $\tilde{g}(s : \gamma, \delta)$ の最大実根と最小実根は単純根である。

次のような場合を考えよう。

$$\tilde{g}(s : \gamma, \delta) = (s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)(s - a_4),$$

ただし $a_1 > a_2 \geq a_3 \geq a_4$ かつ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ とする。このとき、$a_1 > 0$ となる。摂動論的な方法により、$\tilde{g}(s:\gamma, \delta+k)$ および $\tilde{g}(s:\gamma+k, \delta)$ のそれぞれの最大実根は十分小さい $|k|$ に対してそれぞれ

$$a_1 - \frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}k + b_2k^2 + \cdots,$$

$$a_1 - \frac{a_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}k + c_2k^2 + \cdots,$$

で与えられる。

次に

$$\tilde{g}(s:\gamma,\delta) = (s-a_1)(s-a_2)(s^2 + (a_1+a_2)s + (a_1+a_2)^2/4 + r^2),$$

が或る $r > 0$ と $a_1 > a_2$ に対して成り立つ場合を考える。$\tilde{g}(s:\gamma, \delta+k)$ および $\tilde{g}(s:\gamma+k, \delta)$ の最大実根は、$|k|$ が十分小さいとき、それぞれ

$$a_1 - \frac{4}{(a_1-a_2)((3a_1+a_2)^2 + 4r^2)}k + \tilde{b}_2k^2 + \cdots,$$

$$a_1 - \frac{4a_1}{(a_1-a_2)((3a_1+a2)^2 + 4r^2)}k + \tilde{c}_2k^2 + \cdots,$$

によって与えられる。これより補題は証明された。(図1は、$p^2 = 5$ のときの $\tilde{\Omega}$ の境界を描いたものである。)

参考文献

[1] M. T. Chien and H. Nakazato, The q-numerical radius of weighted shift operators with periodic weights, to appear in Linear Alebra and Its Applications.

[2] W. Ridge, Numerical range of a weighted shift with periodic weights, Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976) 107-110.

[3] T. Y. Tam, The q-numerical range and the real q-numerical range of the shift, preprint, http://www.auburn.edu/ ~tamtiny/pub.html

[4] N. K. Tsing, The constrained bilinear form and C-numerical range, Linear Algebra Appl. 56 (1984) 195-206.

Extensions of Weyl's theorem for (p,k)-quasihyponormal operators

東北薬科大学　棚橋　浩太郎 (Kotaro Tanahashi)
仙台電波高専　　内山　敦 (Atsushi Uchiyama)
King Saud University　　Sala Mecheri

[概要] (p,k)-quasihyponormal operator に関する Weyl の定理を拡張する。

[序論] ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $B(\mathcal{H})$ とおく。作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ が (p,k)-qusihyponormal とは

$$T^{*k}((T^*T)^p - (TT^*)^p)T^k \geq 0$$

を満たすときをいう $(0 < p \leq 1, k \in \mathbb{N})$。この作用素は I.H. Kim [9] によって導入された。定義からすぐわかるように、これは p-hyponormal 作用素 $(0 < p \leq 1)$,

$$(T^*T)^p - (TT^*)^p \geq 0$$

p-quasihyponormal 作用素 $(0 < p \leq 1)$,

$$T^*((T^*T)^p - (TT^*)^p)T \geq 0$$

の自然な拡張である。(p,k)-quasihyponormal 作用素は多くの良い性質を持つことが証明されている。残念なことに具体的な例としては行列に値を持つシフト作用素程度しか知られていないが、今後の研究によって応用が広がることを期待したい。([9], [10], [12])

ここでは (p,k)-quasihyponormal 作用素が Weyl の定理を満たすこと、また、この拡張について概説する。現在この分野は多くの人が拡張を目指しているので以下の定理についてはすでに知られている可能性があることを断っておく。

[1. Weyl の定理]

作用素 T の値域を $R(T)$, null space を $N(T)$ とかく。作用素 T が upper semi-Fredholm とは、値域 $R(T)$ が closed で $\dim N(T) < \infty$ となるとき、lower semi-Fredholm とは値域 $R(T)$ が closed で $\dim N(T^*) = \dim R(T)^\perp < \infty$ となるときをいう。upper semi-Fredholm または lower semi-Fredholm 作用素を合わせて semi-Fredholm, また, upper semi-Fredholm かつ lower semi-Fredholm 作用素を Fredholm という。また semi-Fredholm 作用素 T について $\mathrm{ind}\, T = \dim N(T) - \dim N(T^*)$ を T の index という。特に $\mathrm{ind}\, T = 0$ のとき T を Weyl という。T の Weyl spectrum $\sigma_W(T)$ を

$$\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : T - \lambda \ \text{ is not Weyl } \}$$

と定める。$\sigma(T)$ の孤立点で重複度有限の固有値となる点全体を $\pi_{00}(T)$ とかく。

T が Weyl の定理を満たすとは

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$$

となるときをいう。H. Weyl [15] は self-adjoint operator の compact perturbation を調べてこの関係式が self-adjoint operator について成立することを示した。この後、もっと広いクラスの作用素 (hyponormal, p-hyponormal, class A 等) についても Weyl の定理を満たすことが示されている。([4], [5], [13], [14]) (p,k)-quasihyponormal operator については Kim and Kim [10] が証明した。ここではその別証をする。

[補題 1]([9], [12]) T は (p,k)-quasihyponormal 作用素とする。

(1) 値域 $R(T^k)$ が dense でないなら

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = [R(T^k)] \oplus N(T^{*k})$$

と分解したとき T_1 は p-hyponormal 作用素、$T_3^k = 0$、$\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \{0\}$ となる。ただし $[R(T^k)]$ は値域 $R(T^k)$ の閉包である。

(2) restriction $T|_{\mathcal{M}}$ も (p,k)-quasihyponormal 作用素である。

[補題 2] (p,k)-qusihyponormal 作用素 T は Bishop's property (β) をもつ。つまり、もし 開集合 D 上の analytic funcion $f_n(z)$ が D 上広義一様に $(T-z)f_n(z) \to 0$ なら D 上広義一様に $f_n(z) \to 0$ である。従って T は single valued extension property (svep) をもつ。

[証明] D 上の analytic function $f_n(z)$ が D 上広義一様に $(T-z)f_n(z) \to 0$ とする。補題 1 より

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} T_1 - z & T_2 \\ 0 & T_3 - z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n1}(z) \\ f_{n2}(z) \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} (T_1 - z)f_{n1}(z) + T_2 f_{n2}(z) \\ (T_3 - z)f_{n2}(z) \end{pmatrix} \to 0. \end{aligned}$$

である。ここで $T_3^k = 0$ なので T_3 は (β) をもつ。よって $f_{n2}(z) \to 0$ となるので $(T_1 - z)f_{n1}(z) \to 0$ である。一方、T_1 は p-hyponormal なので (β) をもつ。よって $f_{n1}(z) \to 0$ となり、 $f_n(z) \to 0$ が得られる。 **[証明終]**

[定理 3(Kim)] (p,k)-quasihyponormal operator T は Weyl の定理

$$\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \pi_{00}(T)$$

を満たす。

[別証] $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_W(T)$ とする。すると $T - \lambda$ は Weyl で not invertible である。λ が $\sigma(T)$ の内点なら、$\lambda \in G \subset \sigma(T) \setminus \sigma_W(T)$ となる open set G が存在する。よって $\dim N(T - \mu) > 0, \forall \mu \in G$ となり [8] Theorem 9 から T は single valued extension property をもたない。しかし補題 2 より T は single valued extensinon property をもつのでこれは矛盾である。よって λ は $\sigma(T)$ の境界点としてよい。すると [6] Theorem XI 6.8 から λ は $\sigma(T)$ の孤立点になる。よって $\lambda \in \pi_{00}(T)$ である。

逆に $\lambda \in \pi_{00}(T)$ とする。 E_λ を λ の Reisz idempotent とする。ここで

$$T = T|E_\lambda\mathcal{H} \oplus T|(I - E_\lambda)\mathcal{H}$$

と分解すると補題 1 から $T|E_\lambda\mathcal{H}$ は (p,k)-quasihyponormal で

$$\sigma(T|E_\lambda\mathcal{H}) = \{\lambda\}$$

となる。

ここで、もし $\lambda \neq 0$ なら [12] より $T|E_\lambda\mathcal{H} = \lambda$ となるので $E_\lambda\mathcal{H} \subset N(T-\lambda)$ である。$N(T-\lambda)$ は仮定より有限次元だから $T|E_\lambda\mathcal{H}$ は compact である。一方、$\sigma(T|(I-E_\lambda)\mathcal{H}) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$ だから $(T-\lambda)|(I-E_\lambda)\mathcal{H}$ は可逆である。よって $T - \lambda = 0 \oplus (T-\lambda)|(I-E_\lambda)\mathcal{H}$ は Weyl である。従って $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_W(T)$ である。

また、もし $\lambda = 0$ なら [12] より $(T|E_\lambda\mathcal{H})^k = 0$ となる。ここで $\lambda = 0 \in \pi_{00}(T)$ なので $N(T)$ は有限次元である。よって

$$\dim E_\lambda\mathcal{H} \leq \dim N(T^k) \leq k \dim N(T) < \infty$$

より $E_\lambda\mathcal{H}$ は有限次元、よって $T|E_\lambda\mathcal{H}$ は compact である。一方、 $T|(I-E_\lambda)\mathcal{H}$ は可逆なので $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_W(T)$ である。 **[証明終]**

[2. Generalized Weyl の定理]

最近 Weyl の定理は Berkani, Sarih [2] らによって generalized Weyl の定理まで拡張されて考えられた。T が generalized Weyl の定理を満たせば Weyl の定理を満たすので、generalized Weyl の定理は Weyl の定理より強い条件である。ここでは (p,k)-quasihyponormal operator が generalized Weyl の定理を満たすことを示す。([1], [3])

[定義] T が upper semi-B-Fredholm とは、値域 $R(T^n)$ が closed で

$$T_n : R(T^n) \ni x \to Tx \in R(T^n)$$

が upper semi-Fredholm ($R(T_n)$ closed, $\dim N(T_n) < \infty$) となる n が存在するときをいう。また、lower semi-B-Fredholm とは、値域 $R(T^n)$ が closed で T_n が lower semi-Fredholm となる n が存在するときをいう。semi-B-Fredholm, B-Fredholm も Fredholm と同様に定義する。

[注意] この定義に従えば有限次元の行列は B-Fredholm である。一般に Fredholm 作用素は無限次元で考えるのが通常なので、今までのイメージとは違和感がある。

[定理 5(Berkani)] T が semi-B-Fredholm, つまり、値域 $R(T^n)$ closed, T_n semi-Fredholm となる n が存在するなら、任意の $n \leq m \in \mathbb{N}$ に対して値域 $R(T^m)$ は closed, T_m は semi-Fredholm で $\mathrm{ind}\ T_m = \mathrm{ind}\ T_n$ である。

[定義]

(1) このとき $\mathrm{ind}\ T = \mathrm{ind}\ T_n$ と定める。

(2) B-Fredholm operator T が B-Weyl とは $\mathrm{ind}\ T = 0$ のときをいう。

(3) $\sigma_{BW}(T) = \{\lambda \mid \lambda - T \quad \text{is not B-Weyl}\} \subset \sigma_W(T)$

(4) $E(T)$: スペクトラムの孤立点で固有値になる点全体

[定理 6(Berkani)] T が semi-B-Fredholm となる必要十分条件は $T = T|\mathcal{M} \oplus T|\mathcal{N}, T|\mathcal{M}$ semi-Fredholm, $T|\mathcal{N}$ nilpotent となる直和分解 $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ が存在することである。

[注意] B-Fredholm, B-Weyl についても同様である。

[定理 7] (p,k)-quasihyponormal operator T は generalized Weyl の定理、つまり、

$$\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E(T)$$

を満たす。

[証明] $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T)$ とする。すると $T - \lambda$ は B-Weyl で not invertible である。よって定理 6 から

$$T - \lambda = (T - \lambda)|\mathcal{M} \oplus (T - \lambda)|\mathcal{N}$$

と直和分解できて $(T - \lambda)|\mathcal{M}$ は Weyl, $(T - \lambda)|\mathcal{N}$ は nilpotent とできる。

(case 1.) $\lambda \in \sigma(T|\mathcal{M})$.
このときは補題 1 より $T|\mathcal{M}$ は (p,k)-quasihyponormal である。よって定理 3 から

$$\lambda \in \sigma(T|\mathcal{M}) \setminus \sigma_W(T|\mathcal{M}) = \pi_{00}(T|\mathcal{M})$$

である。よって λ は $\sigma(T|\mathcal{M})$ の孤立点で $T|\mathcal{M}$ の固有値である。よって λ は T の固有値でもある。一方 $(T - \lambda)|\mathcal{N}$ は nilpotent だから λ は $\sigma(T)$ の孤立点でもある。よって $\lambda \in E(T)$ である。

(case 2.) $\lambda \notin \sigma(T|\mathcal{M})$.
このとき $(T - \lambda)|\mathcal{N}$ は nilpotent だから λ は $T|\mathcal{N}$ の固有値である。よって T の固有値でもある。一方 $(T - \lambda)|\mathcal{M}$ は可逆だから λ は $\sigma(T)$ の孤立点である。よって $\lambda \in E(T)$ である。

逆に $\lambda \in E(T)$ とする。λ は $\sigma(T)$ の孤立点であるから E_λ を λ の Reisz idempotent とすると

$$T - \lambda = (T - \lambda)|E_\lambda \mathcal{H} \oplus (T - \lambda)|(I - E_\lambda)\mathcal{H}$$

と分解できる。補題 1 より $(T - \lambda)|E_\lambda \mathcal{H}$ は (p,k)-quasihyponormal で $\sigma(T|E_\lambda \mathcal{H}) = \{\lambda\}$ である。
ここで、もし $\lambda \neq 0$ なら [12] より $T|E_\lambda \mathcal{H} = \lambda$ となるので $E_\lambda \mathcal{H}$ は λ の固有空間である。また

$$T - \lambda = 0 \oplus (T - \lambda)|(I - E_\lambda)\mathcal{H}$$

で $(T - \lambda)|(I - E_\lambda)\mathcal{H}$ は可逆だから定理 6 より $T - \lambda$ は B-Weyl である。よって $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T)$ である。
また、もし $\lambda = 0$ なら [12] より $(T|E_\lambda \mathcal{H})^k = 0$ となる。よってこの場合も定理 6 より $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T)$ である。 **[証明終]**

[3. その他の拡張]

Djordjevic, Duggal [7] は T^* が p-hyponormal ならば T は Weyl の定理を満たすことを示した。この結果は次のように拡張できる。

[定理 8] T^* が (p,k)-quasihyponormal ならば T は generalized Weyl の定理

$$\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E(T)$$

を満たす。

Weyl の定理の拡張版で a-Weyl の定理がある。この定理のために準備をしておく。これらの関係については Aiena [1] が詳しい。

[定義]

(1) $T \in SF_+^-$ とは $R(T)$ closed , $\dim N(T) < \infty$, $\mathrm{ind}\, T \leq 0$ のときをいう。

(2) $\sigma_{SF_+^-}(T) = \{\lambda \mid T - \lambda \notin SF_+^-\} \subset \sigma_W(T)$

(3) $\sigma_a(T)$ は T の近似点スペクトラム、$\pi_{00}^a(T)$ は $\sigma_a(T)$ の孤立点で重複度有限の固有値となる点全体を表す。

[定理 9] T^* が (p,k)-quasihyponormal ならば T は a-Weyl の定理、つまり

$$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \pi_{00}^a(T)$$

を満たす。

また a-Weyl の定理の拡張版で generalized a-Weyl の定理がある。この定理のために準備をしておく。

[定義]

(1) $T \in SBF_+^-$ とは $R(T^n)$ closed , $\dim N(T_n) < \infty$, $\mathrm{ind}\, T_n = \mathrm{ind}\, T \leq 0$ となる n が存在するときをいう。

(2) $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \{\lambda \mid T - \lambda \notin SBF_+^-\} \subset \sigma_{SF_+^-}(T)$

(3) $E^a(T)$: 近似点スペクトラムの孤立点で固有値になる点全体

[定理 10] T^* が (p,k)-quasihyponormal ならば T は generalized a-Weyl の定理、つまり

$$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E^a(T)$$

を満たす。

[注意]

(1) generalized a-Weyl の定理 $\Longrightarrow$ a-Weyl の定理 $\Longrightarrow$ Weyl の定理

(2) 定理 10 で T^* を T で置き換えてよいかは不明である。

参考文献

[1] P. Aiena, *Fredholm and local spectral theory with applications to multipliers*, Kluwer Academic Publishers (2004), Dordrecht, Boston, London.

[2] M. Berkani and M. Sarih, *On semi B-Fredholm operators*, Glasgow Math. J., **43** (2001), 457–465.

[3] X. Cao, M. Guo and B. Meng, *Weyl type theorems for p-hyponormal and M-hyponormal operators*, Studia Math., **163** (2004), 177-188.

[4] M. Chō, M. Ito and S. Oshiro, *Weyl's theorem holds for p-hyponormal operators,* Glasgow Math. J., **39** (1997), 217–220.

[5] L.A. Coburn, *Weyl's theorem nonnormal operators,* Michigan Math. J., **13** (1966), 285–288.

[6] J.B. Conway, A Course in Functional Analysis 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1990.

[7] S.V. Djordjevic and B.P. Duggal, *Weyl's theorems and continuity of spectra in the class of p-hyponormal operators,* Studia Math., **143** (2000), 23–32.

[8] J.K. Finch, *The single valued extension property on a Banach space,* Pacific J. Math., **58** (1975), 61–69.

[9] In Hyoun Kim, *On* (p,k)*-quasihyponormal operators,* Math. Inequal. and Appl., **7**(2004), 629–638.

[10] An-Hyun Kim and In Hyoun Kim, *Essential spectra of quasisimilar* (p,k)*-quasihyponormal operators,* preprint.

[11] K.B. Laursen, *Operators with finite ascent,* Pacific J. Math., **152** (1992), 323–336.

[12] K. Tanahashi, A. Uchiyama and M. Chō, *Isolated point of spectrum of* (p,k)*-quasihyponormal operators*, Linear Algebra and its Applications, **382**(2004), 221–229.

[13] A. Uchiyama and T. Yoshino, *Weyl's theorem for p-hyponormal or M-hyponormal operators,* Glasgow Math. J., **43** (2001), 375–381.

[14] A. Uchiyama, *Weyl's theorem for class A operators,* Math. Inequalities and Appl., **4**(2001), 143–150.

[15] H. Weyl, *Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollsteig ist,* Rend. Circ. Mat. Palermo, **27** (1909), 373–392.

Generalizations of Ando-Hiai inequality, and Furuta inequality

MASATOSHI FUJII* AND EIZABURO KAMEI**

ABSTRACT. We discuss two variables version of the Ando-Hiai inequality: For $A,\ B > 0$ and $\alpha \in [0,\ 1]$, if $A \natural_\alpha B \le I$, then

$$A^r \natural_{\frac{\alpha r}{\alpha r+(1-\alpha)s}} B^s \le I \quad \text{for} \quad r, s \ge 1.$$

Here $\natural_\alpha$ is the α-geometric mean in the sense of Kubo-Ando. In this context, the Furuta inequality is understood as the one-sided version (the case of $s = 1$): If $A \natural_\alpha B \le I$, then

$$A^r \natural_{\frac{\alpha r}{\alpha r+1-\alpha}} B \le I \quad \text{for} \quad r \ge 1.$$

As a consequence, the Furuta inequality has an alternative simple proof. In addition, we point out that the obtained inequality is understood as the case $t = 1$ in the grand Furuta inequality.

1. Introduction. Let $A,\ B$ be positive operators on a Hilbert space. In [10], the α-geometric operator mean for $\alpha \in [0,\ 1]$ is defined as

$$A \natural_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}$$

if $A > 0$, i.e., A is invertible. First of all, we cite the Ando-Hiai inequality for convenience.

Ando-Hiai inequality. *For $A, B > 0$,*

$$A \natural_\alpha B \le 1 \ \Rightarrow\ A^r \natural_\alpha B^r \le 1 \text{ for } r \ge 1. \tag{1}$$

Recently, we discussed in [3] some relations between the Ando-Hiai inequality and the following theorem:

Theorem A. *If $A \ge B > 0$ and $\alpha \in [0,\ 1]$, then*

$$A^{-r} \natural_{\frac{r}{p+r}} B^p \le I \tag{2}$$

holds for $p, r \ge 0$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47A63 and 47A64

Key words and phrases. Positive operators, geometric mean, Ando-Hiai inequality, Furuta inequality.

It is an operator order version of our characterization of the chaotic order that for $A, B > 0$, $\log A \geq \log B$ if and only if (2) in Theorem A holds for $p, r \geq 0$. By the way, the base of Theorem A is the Furuta inequality, see [1], [2], [4], [5], [6], [7], [8] and [9]:

Furuta inequality. *If $A \geq B > 0$, then for each $r \geq 0$*

$$(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+r}{q}}$$

holds for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ satisfying $(1+r)q \geq p+r$.

Its crucial point is the case $(1+r)q = p+r$. So we recognize the following inequality as (FI), which is expressed in terms of the α-geometric mean $\sharp_\alpha$:

(FI) If $A \geq B > 0$, then

$$A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq A \quad \textit{for} \quad p \geq 1 \textit{ and } r \geq 0. \tag{3}$$

Based on these facts, we proposed two variables version of the Ando-Hiai inequality in [2; Theorem 3]:

Theorem 1. *For $A,\ B > 0$ and $\alpha \in [0,\ 1]$, if $A \sharp_\alpha B \leq I$, then*

$$A^r \sharp_{\frac{\alpha r}{\alpha r + (1-\alpha)s}} B^s \leq I \quad \textit{for} \quad r, s \geq 1.$$

It is obvious that the case $r = s$ in Theorem 1 is just the Ando-Hiai inequality. Moreover, as discussed in below, the case $s = 1$ is a natural variational expression of the Furuta inequality. Namely Theorem 1 is a common extension of them.

2. Equivalence. Now we consider two one-sided versions of Theorem 1:

Proposition 2. *For $A,\ B > 0$ and $\alpha \in [0,\ 1]$, if $A \sharp_\alpha B \leq I$, then*

$$A^r \sharp_{\frac{\alpha r}{\alpha r + 1 - \alpha}} B \leq I \quad \textit{for} \quad r \geq 1.$$

Proposition 3. *For $A,\ B > 0$ and $\alpha \in [0,\ 1]$, if $A \sharp_\alpha B \leq I$, then*

$$A \sharp_{\frac{\alpha}{\alpha + (1-\alpha)s}} B^s \leq I \quad \textit{for} \quad s \geq 1.$$

In the section, we investigate relations among them and Theorem 1.

Theorem 4. (1) *Propositions 2 and 3 are equivalent.*
(2) *Theorem 1 follows from Propositions 2 and 3.*

Proof. (1) We first note the transposition formula $X \natural_\alpha Y = Y \natural_\beta X$ for $\beta = 1-\alpha$. Therefore Proposition 2 (for β) is rephrased as follows:

$$B \natural_\beta A \le I \quad \Rightarrow \quad B^s \natural_{\frac{\beta s}{\beta s+\alpha}} A \le I \quad \text{for} \quad s \ge 1.$$

Using the transposition formula again, it coincides with Proposition 3 because

$$1 - \frac{\beta s}{\beta s + \alpha} = \frac{\alpha}{\beta s + \alpha} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)s+\alpha}.$$

(2) Suppose that $A \natural_\alpha B \le I$ and $r, s \ge 1$ are given. Then it follows from Proposition 2 that $A^r \natural_{\alpha_1} B \le I$ for $\alpha_1 = \frac{\alpha r}{\alpha r + 1 - \alpha}$. We next apply Proposition 3 to it, s that we have

$$1 \ge A^r \natural_{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+(1-\alpha_1)s}} B^s = A^r \natural_{\frac{\alpha r}{\alpha r+(1-\alpha)s}} B^s,$$

as desired.

3. Furuta inequality of Ando-Hiai type. First of all, we point out that Proposition 2 is an Ando-Hiai type reformulation of (FI):

Theorem 5. *Propositions 2 is equivalent to the Furuta inequality.*

Proof. For a given $p \ge 1$, we put $\alpha = \frac{1}{p}$. Then $A \ge B (\ge 0)$ if and only if

$$A^{-1} \natural_\alpha B_1 \le 1, \text{ for } B_1 = A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

If $A \ge B > 0$, then (4) holds for $A,\ B > 0$, so that Proposition 2 implies that for any $r \ge 0$

$$1 \ge A^{-(r+1)} \natural_{\frac{\frac{r+1}{p}}{(1-\frac{1}{p})+\frac{r+1}{p}}} B_1 = A^{-(r+1)} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B_1 = A^{-(r+1)} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}}.$$

Hence we have (FI);

$$A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \le A.$$

Conversely suppose that (FI) is assumed. If $A^{-1} \natural_\alpha B_1 \le 1$, then $A \ge (A^{\frac{1}{2}} B_1 A^{\frac{1}{2}})^\alpha = B$, where $p = \frac{1}{\alpha}$. So (FI) implies that for $r_1 = r - 1 \ge 0$

$$A \ge A^{-r_1} \natural_{\frac{1+r_1}{p+r_1}} B^p = A^{-(r-1)} \natural_{\frac{r}{p+r-1}} A^{\frac{1}{2}} B_1 A^{\frac{1}{2}}.$$

Since $\frac{r}{p+r-1} = \frac{\alpha r}{1+\alpha r-\alpha}$, we have Proposition 2.

As in the discussion of the preceding section, Theorem 1 can be proved by showing Proposition 2. Finally we cite a proof of Proposition 2 for completeness. Since it is equivalent to the Furuta inequality, we have an alternative proof of it. It is done by the usual induction, and its technical point is a multiplicative property of the index $\frac{\alpha r}{(1-\alpha)+\alpha r}$ of $\sharp$ as appeared below.

Proof of Proposition 2. For convenience, we show that if $A^{-1} \sharp_\alpha B \leq I$, then

$$A^{-r} \sharp_{\frac{\alpha r}{(1-\alpha)+\alpha r}} B \leq I \quad \text{for} \quad r \geq 1. \tag{5}$$

Now the assumption says that

$$C^\alpha = (A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^\alpha \leq A.$$

For any $\epsilon \in (0,1]$, we have $C^{\alpha\epsilon} \leq A^\epsilon$ by the Löwner-Heinz inequality and so

$$\begin{aligned} A^{-(1+\epsilon)} \sharp_{\frac{\alpha(1+\epsilon)}{(1-\alpha)+\alpha(1+\epsilon)}} B &= A^{-\frac{1}{2}}(A^{-\epsilon} \sharp_{\frac{\alpha(1+\epsilon)}{1+\alpha\epsilon}} A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}) A^{-\frac{1}{2}} \\ \leq \ A^{-\frac{1}{2}}(C^{-\alpha\epsilon} \sharp_{\frac{\alpha(1+\epsilon)}{1+\alpha\epsilon}} C) A^{-\frac{1}{2}} &= A^{-\frac{1}{2}} C^\alpha A^{-\frac{1}{2}} = A^{-1} \sharp_\alpha B \leq I. \end{aligned}$$

Hence we proved the conclusion (5) for $1 \leq r \leq 2$. So we next assume that (5) holds for $1 \leq r \leq 2^n$. Then the discussion of the first half ensures that

$$(A^{-r})^{r_1} \sharp_{\frac{\alpha_1 r_1}{(1-\alpha_1)+\alpha_1 r_1}} B \leq I \quad \text{for } 1 \leq r_1 \leq 2, \text{ where } \alpha_1 = \frac{\alpha r}{(1-\alpha)+\alpha r}.$$

Thus the multiplicative property of the index

$$\frac{\alpha_1 r_1}{(1-\alpha_1)+\alpha_1 r_1} = \frac{\alpha r r_1}{(1-\alpha)+\alpha r r_1}$$

shows that (5) holds for all $r \geq 1$.

4. Grand Furuta inequality. As well-known, the grand Furuta inequality (GFI) interpolates Ando-Hiai and Furuta inequalities. It is expressed as follows:
(GFI) If $A \geq B > 0$ and $t \in [0,1]$, then

$$[A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \leq A^{1-t+r}$$

for $r \geq t$ and $p, s \geq 1$.
We note that

(GFI) for $t=1,\ r=s \iff$ (AH)
(GFI) for $t=0,\ s=1 \iff$ (FI)

In this section, we point out that (GFI) for $t=1$ inclueds both Ando-Hiai and Furuta inequalities.

Since Ando-Hiai inequality is just (GFI;$t=1$) for $r=s$, it suffices to check that Furuta inequality is contained in (GFI;$t=1$). As a matter of fact, it is just (GFI;$t=1$) for $s=1$.

Theorem 6. *Furuta inequality (FI) is equivalent to* (GFI) *for* $t = s = 1$.

Proof. We write down (GFI; $t = 1$) for $s = 1$: If $A \geq B > 0$, then

$$[A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}B^p A^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{r}{2}}]^{\frac{r}{p-1+r}} \leq A^r$$

for $p, r \geq 1$, or equivalently,

$$A^{-(r-1)} \ \sharp_{\frac{r}{p-1+r}} \ B^p \leq A$$

for $p, r \geq 1$. Replacing $r - 1$ by r_1, (GFI; $t = 1$) for $s = 1$ is rephrased as follows: If $A \geq B > 0$, then

$$A^{-r_1} \ \sharp_{\frac{1+r_1}{p+r_1}} \ B^p \leq A$$

for $p \geq 1$ and $r_1 \geq 0$, which is nothing but Furuta inequality.

Furthermore Theorem 1, generalized Ando-Hiai inequality, is understood as the case $t = 1$ in (GFI):

Theorem 7. (GFI; $t = 1$) *is equivalent to Theorem 2.*

Proof. (GFI; $t = 1$) is written as

$$A \geq B > 0 \ \Rightarrow \ [A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}B^p A^{-\frac{1}{2}})^s A^{\frac{r}{2}}]^{\frac{r}{(p-1)s+r}} \leq A^r \quad (p, r, s \geq 1).$$

We here put

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad B_1 = A^{-\frac{1}{2}}B^p A^{-\frac{1}{2}}.$$

Then we have

$$A \geq B > 0 \iff A^{-1} \ \sharp_{\frac{1}{p}} \ A^{-\frac{1}{2}}B^p A^{-\frac{1}{2}} \leq 1 \iff A^{-1} \ \sharp_\alpha \ B_1 \leq 1$$

and for each $p, r, s \geq 1$

$$\begin{aligned} & [A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}B^p A^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{r}{2}}]^{\frac{r}{p-1+r}} \leq A^r \\ \iff & A^{-r} \ \sharp_{\frac{r}{(p-1)s+r}} \ (A^{-\frac{1}{2}}B^p A^{-\frac{1}{2}})^s \leq 1 \\ \iff & A^{-r} \ \sharp_{\frac{\alpha r}{\alpha r+(1-\alpha)s}} \ B_1^s \leq 1. \end{aligned}$$

This shows the statement of Theorem 3.

References

[1] M.Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach, J.Operator Theory, 23(1990), 67-72.

[2] M.Fujii and E.Kamei, Ando-Hiai inequality and Furuta inequality, Linear Alg. Appl., 416(2006), 541-545.

[3] M.Fujii, E.Kamei and R.Nakamoto, An Analysis on the internal structure of the celebrated Furuta inequality, preprint.

[4] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., 101(1987), 85-88.

[5] T.Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality, Proc. Japan Acad., 65(1989), 126.

[6] T.Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, Linear Alg. Appl., 219(1995), 139-155

[7] T.Furuta, Invitatin to Linear Operators, Taylor & Francis, London and New York, (2001).

[8] E.Kamei, A satellite to Furuta's inequality, Math. Japon., 33(1988), 883-886.

[9] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, Math. Japon., 49(1999), 65-71.

[10] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann., 246(1980), 205-224.

(*)Department of Mathematics,
Osaka Kyoiku University,
Asahigaoka, Kashiwara,
Osaka, 582-8582, Japan
e-mail: mfujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

(**)Maebashi Institute of Technology,
Kamisadori, Maebashi,
Gunma, 371-0816, Japan
e-mail: kamei@maebashi-it.ac.jp

EXTREMAL PROPERTIES FOR HYPERINVARIANT SUBSPACES OF OPERATORS

Il Bong Jung*†

Department of Mathematics, College of Natural Sciences,
Kyungpook National University,
Daegu 702-701, Korea
E-mail: ibjung@mail.knu.ac.kr

Abstract

A new technique producing hyperinvariant subspaces via extremal vectors was introduced by Enflo in [1]. In this note we employ the technique originated by Enflo to study the hyperinvariant subspace problem for subnormal operators and show that every normalized subnormal operator S such that either $\{(S^{*n}S^n)^{1/n}\}$ does not converge in the SOT to the identity operator or $\{(S^nS^{*n})^{1/n}\}$ does not converge in the SOT to zero has a nontrivial hyperinvariant subspace. We also discuss a structure theorem about certain quasinilpotent operators and reduce the hyperinvariant subspace problem for quasinilpotent operators to a special subcase.

1. Introduction. This is based on the joint work with C. Foias, E. Ko, and C. Pearcy ([7], [8], [9], and [10]) and was talked at the conference on Function spaces 2006, which was held at Hokkaido University on December 23-25 in 2006.

Let $\mathcal{H}$ be a separable, infinite dimensional, complex Hilbert space, and denote by $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ the algebra of all bounded linear operators on $\mathcal{H}$. According to Aronszajn-Smith [2], the invariant subspace problem of compact operators was proved by John von Neumann (unpublished) about 1935. Thus there has now been over a half-century of work devoted to establishing that operators in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ that have a relation to some compact operator have nontrivial invariant subspaces. In [1], a new technique was introduced for producing invariant subspaces for compact-related operators in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. This technique of proof uses some extremal vectors in a very clever way, and, as was mentioned in [3], is so new that most likely it will be some time before one knows whether the technique will yield all the stronger theorems from [4] and [5] as well as perhaps some completely new results in the same direction. In [7], the Enflo's new technique was modified as a considerably better version and the following theorem was obtained.

Theorem 1.1 ([5]). *Suppose that $Q \neq 0$ is a quasinilpotent operator in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ and there exist a sequence $\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{Q\}'$ converging in the weak operator topology to a nonzero* (*C*

*2000 Mathematics Subject Classification. 47A15, 47B20.

†*Key words and phrases*: subnormal operators, hyperinvariant subspaces, spectral measures, quasinilpotent operators.

in $\{Q\}'$) *and a sequence* $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *of compact operators such that* $\lim_m \|D_m - K_m\| = 0$. (*In other words, in the language of* [5], *we suppose that* $\{Q\}'$ *has the Pearcy-Salinas property.*) *Then* Q *has a nontrivial hyperinvariant subspace.*

In this note we modified and extended a technique introduced by P. Enflo in [1] involving some extremal vectors to produce a nontrivial hyperinvariant subspaces for some quasinilpotent operators in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (cf. [7], [8]). Also, the extremal properties are generalized to the spectral measure theory, which gives a contribution on the hyperinvariant subspace problem of operators (cf. [9] and [10]). In particular, we introduce a different construction that leads to the existence of a nontrivial hyperinvariant subspace for some additional classes of quasinilpotent operators. In particular, one proves a modest structure theorem for a special class of quasinilpotent operators (cf. [10]).

2. Some preparatory material. If Λ is a compact subset of the complex plane $\mathbb{C}$, we write $\partial_u(\Lambda)$ for the boundary of the unbounded component of $\mathbb{C}\backslash\Lambda$, and we say that a subnormal operator S in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ is in *spectral general position* if S is pure, $\sigma_p(S) = \sigma_p(S^*) = \varnothing$, $\sigma(S)$ is connected, $0 \in \partial_u(\sigma(S))$, $\|S\| = 1$, and $\sigma_p(N_S^* N_S) = \varnothing$.

Proposition 2.1. *If* S *is a subnormal operator in spectral general position, then* S *is a completely nonunitary contraction in the class* C_{00} (*i.e., both sequences* $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *and* $\{S^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge to* $0_{\mathcal{H}}$ *in the strong operator topology* (SOT)).

The following Proposition provides a good motivation to study the hyperinvariant subspace problem for subnormal operators in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ in spectral general position.

Proposition 2.2. *If every subnormal operator* S *in* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *in spectral general position has a nontrivial hyperinvariant subspace, then every subnormal operator in* $\mathcal{L}(\mathcal{H})\backslash\mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ *has a nontrivial hyperinvariant subspace* (*In other words, when looking for a nontrivial hyperinvariant subspace for a subnormal operator* S, *no generality is lost by assuming that* S *is in spectral general position, and, in particular* (*Proposition 2.1*), *that* S *is a c.n.u. contraction in the class* C_{00}.)

Let $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\backslash\mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ with dense range. For $n \in \mathbb{N}$, let $E^{(n)}$ be the spectral measure associated with the operator T^nT^{*n}, so $T^nT^{*n} = \int_{[0,\|T^n\|^2]} \lambda\, dE^{(n)}(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$. Define $E_\lambda^{(n)} = E^{(n)}([0,\lambda])$, $E_{\lambda^-}^{(n)} = E^{(n)}([0,\lambda))$, $0 \le \lambda \le \|T^n\|^2$ ($n \in \mathbb{N}$) and define $\lambda_n = \min\{\lambda \in [0, \|T^n\|^2] : \|E_\lambda^{(n)} x_0\| \ge \theta\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Then $\lambda_n > 0$ for $n \in \mathbb{N}$ and the space $\mathcal{M}_n := (1_{\mathcal{H}} - E_{\lambda_n^-}^{(n)})\mathcal{H} = E^{(n)}([\lambda_n, \|T^n\|^2])\mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, is a reducing subspace for T^nT^{*n} such that $T^nT^{*n}|_{\mathcal{M}_n}$ is an invertible operator. Thus there exists a unique $x_n \in \mathcal{M}_n$ such that $T^nT^{*n}x_n = (1_{\mathcal{H}} - E_{\lambda_n^-}^{(n)})x_0$, $n \in \mathbb{N}$. Next we define $y_n = T^{*n}x_n$ and $z_n = E_{\lambda_n}^{(n)}x_0$, which yields $T^ny_n = E^{(n)}([\lambda_n, \|T^n\|^2])x_0$. Then we have a proposition for hyperinvariant subspaces for normal operators as following.

Proposition 2.3. *Suppose* N *is a normal operator such that* $\sigma(N^*N) = [0,1]$ *and* $\sigma_p(N^*N) = \varnothing$. *With the definitions and notation as above, let* s_0 *be the weak limit of some weakly convergent subsequence of* $\{N^ny_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Then* $(\{N\}'s_0)^-$ *is a nontrivial hyperinvariant subspace for* N.

3. Hyperinvariant subspaces for subnormal operators. We begin with a subnormal operator $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ in spectral general position with minimal normal extension $N = N_S$

in $\mathcal{L}(\mathcal{K})$, so $\mathcal{K} = \vee_{n\in\mathbb{N}_0} (N^*)^n \mathcal{H}$, and $\sigma_p(N^{*n}N^n) = \varnothing$ for $n \in \mathbb{N}$. We write $P = P^* = P^2$ for the projection in $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ whose range is $\mathcal{H}$, and $S^{*n}S^n = \int_{[0,1]} \lambda \, dE^{(n)}(\lambda)$ $(n \in \mathbb{N})$, so $E^{(n)}$ is the spectral measure of $S^{*n}S^n$. Furthermore we write $(S^{*n}S^n)^{1/n} = \int_{[0,1]} \nu \, dG^{(n)}(\nu)$ $(n \in \mathbb{N})$. Once again there is an obvious relation between the sequences $\{E^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\{G^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, which yields, in particular, $G^{(n)}_\lambda = E^{(n)}_{\lambda^n}$ and $G^{(n)}_{\lambda^-} = E^{(n)}_{(\lambda^n)^-}$ $(\lambda \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$. Finally we write

$$(N^*N)^n = N^{*n}N^n = \int_{[0,1]} \mu \, dF^{(n)}(\mu) = \int_{[0,1]} \mu^n \, dF^{(1)}(\mu), \tag{1}$$

and again it follows easily that $F^{(n)}_{\mu^n} = F^{(1)}_\mu$ and $F^{(n)}_{(\mu^n)^-} = F^{(1)}_{\mu^-}$ $(\mu \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$. Note that

$$\langle (N^*N)^n x, x\rangle = \int_{[0,1]} \lambda \, dE^{(n)}_{x,x}(\lambda) = \int_{[0,1]} \nu^n \, dG^{(n)}_{x,x}(\nu), \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{2}$$

Next, we define $\mathcal{H}_\mu = \mathcal{H} \cap F^{(1)}_\mu \mathcal{K}$ for $\mu \in (0,1)$.

Proposition 3.1. *For each $\mu \in (0,1)$, $\mathcal{H}_\mu = \mathcal{H} \cap F^{(1)}_\mu \mathcal{K}$ is either (0) or a nontrivial hyperinvariant subspace for S.*

This proposition has an interesting corollary.

Corollary 3.2. *If $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ is a subnormal operator in spectral general position and S has an invariant subspace $\widetilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$ such that $\|S|_{\widetilde{\mathcal{H}}}\| < 1$, then S has a nontrivial hyperinvariant subspace*

Now we proceed with the general construction with S replacing T^* and using (1), (2), and the above remarks. In other words, we let x_0 be an arbitrary unit vector in $\mathcal{H}$ and θ an arbitrary real number satisfying $0 < \theta < 1$, and we define

$$\mu_n = \mu_n(\theta, x_0) = \min\{\mu : \langle F^{(n)}_\mu x_0, x_0\rangle^{1/2} \geq \theta\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

and

$$\nu_n = \nu_n(\theta, x_0) = \min\{\nu : \langle G^{(n)}_\nu x_0, x_0\rangle^{1/2} \geq \theta\}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

To continue with the general construction, we need now the following computational lemmas.

Lemma 3.3. *Let $x \in \mathcal{H}$, $0 < \nu_0 < 1$, and $r > 1$ be such that $r\nu_0 \leq 1$. Then*

$$\|(1_\mathcal{K} - F^{(1)}_{r\nu_0})G^{(n)}_{\nu_0} x\|^2 \leq (1/r^n)\|G^{(n)}_{\nu_0} x\|^2 \leq (1/r^n)\,\|x\|^2\,, \qquad n \in \mathbb{N},$$

and consequently $\|(1_\mathcal{K} - F^{(1)}_{r\nu_0})G^{(n)}_{\nu_0}\|^2 \leq 1/r^n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.4. *If $\mathcal{H}_\mu = (0)$ (i.e., $F^{(1)}_\mu \mathcal{K} \cap \mathcal{H} = (0)$) for every $\mu \in (0,1)$, then the sequence $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\nu_n(x_0,\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ from (3) satisfies $\lim_n \nu_n = 1$ independent of the choices of the unit vector x_0 and the θ satisfying $0 < \theta < 1$.*

Under the hypotheses of Lemma 3.4, for every $\nu_0 \in (0,1)$, the sequence $\{G^{(n)}_{\nu_0}\}_{n\in\mathbb{N}}$ of projections is SOT-convergent to 0. We can now obtain the following proposition.

Proposition 3.5. *If S is a subnormal operator in spectral general position, and for every $\mu \in (0,1)$, the hyperinvariant subspace $\mathcal{H}_\mu = \mathcal{H} \cap F_\mu^{(1)}\mathcal{K} = (0)$, then the sequence $\{(S^{*n}S^n)^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ is* SOT-*convergent to $1_\mathcal{H}$.*

The converse of Proposition 3.5 is also true and admits a very easy proof.

Proposition 3.6. *If S is a subnormal operator in spectral general position, and the sequence $\{(S^{*n}S^n)^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ is* SOT-*convergent to $1_\mathcal{H}$, then for each $\mu \in (0,1)$, the space $\mathcal{H}_\mu$ is the zero subspace.*

Putting together Propositions 3.5 and 3.6 we obtain immediately one of our main results.

Theorem 3.7. *If S is a subnormal operator in spectral general position, then there exists $\mu_0 \in (0,1)$ such that $\mathcal{H}_{\mu_0} = \mathcal{H} \cap F_{\mu_0}^{(1)}\mathcal{K}$ is a nontrivial hyperinvariant subspace for S if and only if the sequence $\{(S^{*n}S^n)^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ does not converge in the* SOT *to $1_\mathcal{H}$.*

It is not difficult to show that the spaces $\mathcal{H}_\mu$ in use above are exactly the spectral maximal spaces for S corresponding to the closed discs centered at 0 with radius $\mu^{1/2}$ which are well known to be hyperinvariant for S.

4. The sequence $\{(S^nS^{*n})^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. We obtain further information about a subnormal operator S in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ in spectral general position by studying the sequence $\{(S^nS^{*n})^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. We write $(S^nS^{*n})^{1/n} = \int_{[0,1]} \alpha \, d\widetilde{G}^{(n)}(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$, so $\widetilde{G}^{(n)}$ is the spectral measure of $(S^nS^{*n})^{1/n}$. As before we write $\widetilde{G}_\alpha^{(n)} = \widetilde{G}^{(n)}([0,\alpha])$. We now first establish the counterpart of Lemma 3.3.

Lemma 4.1. *Suppose $0 < \mu_0 < 1$ and $r > 1$ is such that $\mu_0 r \le 1$. Then*

$$\|(1_\mathcal{H} - \widetilde{G}_{\mu_0 r}^{(n)})PF_{\mu_0}^{(1)}z\|^2 \le (1/r^n)\|F_{\mu_0}^{(1)}z\|^2 \le (1/r^n)\|z\|^2, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathcal{K},$$

and consequently $\|(1_\mathcal{H} - \widetilde{G}_{\mu_0 r}^{(n)})PF_{\mu_0}^{(1)}\|^2 \le 1/r^n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.2. *For every $\mu_0 \in (0,1)$,*

$$\limsup_n \|(S^nS^{*n})^{1/2n}PF_{\mu_0}^{(1)}z\|^2 \le \mu_0\|PF_{\mu_0}^{(1)}z\|^2 \text{ for } z \in \mathcal{K}.$$

Lemma 4.3. *If for every $\mu \in (0,1)$, we have $(PF_\mu^{(1)}\mathcal{K})^- = \mathcal{H}$, then the sequence $\{(S^nS^{*n})^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges to 0 in the* SOT.

Proposition 4.4. *For each $\mu \in (0,1)$, we have $PF_\mu^{(1)}\mathcal{K} \ne (0)$ and $\mathcal{M}_\mu := \mathcal{H} \cap (1_\mathcal{K} - F_\mu^{(1)})\mathcal{K} \ne \mathcal{H}$. Moreover, there exists $\mu_0 \in (0,1)$ such that $(PF_{\mu_0}^{(1)}\mathcal{K})^- \ne \mathcal{H}$ if and only if $\mathcal{M}_{\mu_0} \ne (0)$.*

We next wish to show that if there exists $\mu_0 \in (0,1)$ such that $(PF_{\mu_0}^{(1)}\mathcal{K})^- \ne \mathcal{H}$, then the nontrivial subspace $\mathcal{M}_{\mu_0}$ defined above is a nontrivial hyperinvariant subspace for S. To establish this, we must first obtain another characterization of $\mathcal{M}_{\mu_0}$.

Proposition 4.5. *If $\mu_0 \in (0,1)$ is such that the space $\mathcal{M}_{\mu_0} = \mathcal{H} \cap (1_\mathcal{K} - F_{\mu_0}^{(1)})\mathcal{K}$ from Proposition 5.4 is nonzero, then $N|_{\mathcal{M}_{\mu_0}} = S|_{\mathcal{M}_{\mu_0}}$ is invertible and $\mathcal{M}_{\mu_0} = P_{\mu_0}$, where*

$$\mathcal{P}_{\mu_0} = \{x \in \mathcal{H} : \exists \{x_n\} \subset \mathcal{H} \text{ with } x = N^n x_n \forall n \text{ and } \sup_n(\mu_0^{n/2}\|x_n\|) < +\infty\}.$$

Finally we can obtain the main result of the present section.

Theorem 4.6. *Let S be a subnormal operator in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ in spectral general position. Then there exists $\mu_0 \in (0,1)$ such that $\mathcal{M}_{\mu_0} = \mathcal{H} \cap (1_{\mathcal{K}} - F_{\mu_0}^{(1)})\mathcal{K}$ is a nontrivial hyperinvariant subspace for S if and only if the sequence $\{(S^n S^{*n})^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ does not converge to zero in the* SOT.

As an immediate corollary of Proposition 2.1 and Theorems 3.7 and 4.6, we have also the following rather intriguing result.

Theorem 4.7. *If S is a subnormal operator in spectral general position, then the sequences $\{S^{*n}S^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\{S^n S^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in the* SOT *to $0_{\mathcal{H}}$. Moreover, either S has a nontrivial hyperinvariant subspace or the sequences $\{(S^{*n}S^n)^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\{(S^n S^{*n})^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in the* SOT *to $1_{\mathcal{H}}$ and $0_{\mathcal{H}}$, respectively.*

5. Applications to quasinilpotent operators. In all that follows, the notation $(\mathcal{Q})$ will be used to denote the set of all nonzero quasinilpotent operators in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Also we obtain some results of hyperinvariant subspaces of quasinilpotent operators via the techniques of extremal properties.

Theorem 5.1. *Suppose $Q \in (\mathcal{Q})$ and there exists a finite dimensional subspace $\mathcal{M} \neq (0)$ of $\mathcal{H}$ that is invariant for (equivalently, reduces) each member of the sequence $\{Q^n Q^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Then Q has a nontrivial hyperinvariant subspace*

If we take $\mathcal{M} = \mathbb{C}x_0$ in Theorem 5.1, we get easily the following corollary.

Corollary 5.2. *Suppose $Q \in (\mathcal{Q})$ and the operators in the sequence $\{Q^n Q^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ have a common eigenvector x_0. Then Q has a nontrivial hyperinvariant subspace*

Recall that from [11, Prop. 3.4] that the sequence $\{Q^n Q^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ consists of mutually commuting operators and the finite dimensional eigenspace of $Q^{k_0}Q^{*k_0}$ is a nontrivial hyperinvariant subspace for $Q^{k_0}Q^{*k_0}$. This reduces all the commuting operators $Q^k Q^{*k}$, $k \in \mathbb{N}$. Hence Theorem 5.1 induces the following theorem.

Theorem 5.3. *Suppose $Q \in (\mathcal{Q})$ is such that Q^*Q has a cyclic vector and Q^*Q commutes with QQ^*. Suppose also that some $Q^{k_0}Q^{*k_0}$ has an eigenvalue of finite multiplicity. Then Q has a nontrivial hyperinvariant subspace.*

Note that to apply Theorem 5.3, it is not necessary that the eigenvalue of $Q^{k_0}Q^{*k_0}$ of finite multiplicity be an isolated point of $\sigma(Q^{k_0}Q^{*k_0})$.

Problem 5.4. Show that every $Q \in (\mathcal{Q})$ such that the operators in the family $\{Q^n Q^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ all commute with one another has a n.h.s. In this connection, see Corollary 5.2 and Theorem 5.3.

Finally we introduce a structure theorem which shows that we can say more about the operators treated in Corollary 5.2.

Theorem 5.5. *Suppose $Q \in (\mathcal{Q})$ is quasiaffinity. Suppose also that the operators in the sequence $\{Q^n Q^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ have a common eigenvector w_0. Then the subspace $\mathcal{N} = (\{Q\}' w_0)^-$ is a nontrivial hyperinvariant subspace for Q, and there exists a (strictly) larger $\mathcal{M} \in$* Lat(Q)

such that if we write $\mathcal{H} = \mathcal{N} \oplus (\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}) \oplus \mathcal{M}^{\perp}$, *the corresponding operator matrix for* Q *has the form*

$$Q = \begin{pmatrix} Q|\mathcal{N} & Q_{12} & Q_{13} \\ 0 & Q_{\mathcal{M}\ominus\mathcal{N}} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{pmatrix},$$

where $Q_{\mathcal{M}\ominus\mathcal{N}}$ *is a backward weighted shift of multiplicity one.*

References

[1] S. Ansari and P. Enflo, *Extremal vectors and invariant subspaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **350**(1998), 539-558.

[2] N. Aronszajn and K. Smith, *Invariant subspaces of completely continuous operators,* Ann. of Math. **60**(1954), 345-350.

[3] P. Enflo and V. Lomonosov, *Some aspects of the invariant subspace problem*, preprint.

[4] V. Lomonosov, *On invariant subspaces of families of operators commuting with a completely continuous operator* (in Russian), Funkcional Anal. i Prilozen **7**(1973), 55-56.

[5] _________, *An extension of Burnside's theorem to infinite dimensional spaces*, Israel J. Math. **75**(1991), 329-339.

[6] S. Brown, *Some invariant subspaces for subnormal operators*, Integral Equations Operator Theory, **1**(1978), 310-333.

[7] I. Jung, E. Ko, and C. Pearcy, *On quasinilpotent operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **131**(2003), 2121-2127.

[8] C. Foias, I. Jung, E. Ko, and C. Pearcy, *On quasinilpotent operators II,* J. Aust. Math. Soc., **77**(2004), 349-356.

[9] _________, *On quasinilpotent operators III,* J. Operator Theory, to appear.

[10] _________, *Hyperinvariant subspaces for some subnormal operators*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[11] V. Paulsen, C. Pearcy, and S. Petrović, *On centered and weakly centered operators*, J. Funct. Anal. **128**(1995), 87-101.

[12] J. Thomson, *Invariant subspaces for algebras of subnormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **96**(1986), 462-464.

[13] _________, *Approximation in the mean by polynomials*, Ann. Math. **133**(1991), 477-507.

Banach algebras and a functional calculus via Helffer–Sjöstrand formula

Shizuo Miyajima（宮島静雄）
Wakamiya-cho 26, Shinjyuku-ku, Tokyo 162
Dept. of Math., Fac. of Sci., Tokyo University of Science

1　問題の発端

unital Banach algebra $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ の subalgebra であるとき，$x \in \mathfrak{A}$ に対して $\mathfrak{A}$ 内で考えたスペクトル $\sigma_{\mathfrak{A}}(x)$ は $\mathfrak{B}$ 内で考えたスペクトル $\sigma_{\mathfrak{B}}(x)$ を含んでいることは直ちに分かる．そして一般には $\sigma_{\mathfrak{B}}(x) \subsetneq \sigma_{\mathfrak{A}}(x)$ であるが，$\mathfrak{A} = C(K)$（K はコンパクトハウスドルフ）というようなよい条件の下ではいかなる $\mathfrak{B}$ に対しても $\sigma_{\mathfrak{A}}(x) = \sigma_{\mathfrak{B}}(x)$ が成り立つことが確かめられる．このことは次のように一般化される（[1] の結果の特別な場合）．

Theorem 1 (Barnes [1]) $\mathfrak{A}$ が unital Banach algebra で可換かつ semi-simple, regular であるとする．このとき $\mathfrak{A}$ を含む任意の unital Banach algebra $\mathfrak{B}$ に対して $\sigma_{\mathfrak{A}}(x) = \sigma_{\mathfrak{B}}(x)$ $(\forall x \in \mathfrak{A})$ が成り立つ．

この定理を適用する場合にポイントとなるのが，**「$\mathfrak{A}$ が regular」**という条件である．しかし Banach algebra が regular であることを確かめるのはそう易しくはない問題である．例えば Dixmier [4] では，冪零リー群 G の group algebra $L^1(G)$ が regular であることを確かめるために，Fourier 変換を利用して，$L^1(G)$ のある種の元に対しては「十分なめらかな関数への代入」が可能であることを示すことによっている．regularity は Banach algebra のある種の「柔軟性」を意味しているので，解析関数より広いクラスの関数への代入が有効となることが regularity に結びつくことはもっともなことと言える．

本論考では，E.B. Davies によって展開された，Helffer–Sjöstrand formula による functional calculus を用いることによって，Dixmier の結果を一般化して，ある種の可換 Banach 環の regularity を統一的に示すことを目標にする．

2　Helffer–Sjöstrand formula による functional calculus

実軸上のなめらかな関数の quasi-analytic extension　$|t| \le 1$ で $\tau(t) = 1$, $|t| \ge 2$ で $\tau(t) = 0$ をみたす関数 $\tau \in C^\infty(\mathbb{R})$ を一つ固定しておく．このとき，$f \in C^\infty(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{C}$ 上の関数 $\widetilde{f}_n$ を Taylor 級数を利用して

$$\widetilde{f}_n(x+iy) = \left(\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) \frac{(iy)^k}{k!} \right) \tau(y/\langle x \rangle)$$

によって定義する．ここで $\langle x \rangle := (1+|x|^2)^{1/2}$ である．$\widetilde{f}_n$ は f の拡張であり，$\tau(y/\langle x \rangle)$ を掛けているため，$|y| \le 2\langle x \rangle$ の外では 0 となっている．$\widetilde{f}_n$ が f の quasi-analytic extension と呼ばれる所以は，$\sigma(x,y) := \tau(y/\langle x \rangle)$ として成り立つ次の等式にある：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{f}_n}{\partial \bar{z}}(x+iy) &:= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \widetilde{f}_n}{\partial x} + i \frac{\partial \widetilde{f}_n}{\partial y} \Big) \\ &= \frac{1}{2} f^{(n+1)}(x) \frac{(iy)^n}{n!} \cdot \sigma(x,y) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x) \frac{(iy)^r}{r!} \left\{ \sigma_x(x,y) + i\sigma_y(x,y) \right\} \qquad (1)\end{aligned}$$

$|y|/\langle x\rangle \le 1$ では $\sigma_x=\sigma_y=0$ なので，(1) からそこでは

$$\frac{\partial\widetilde{f_n}}{\partial\bar{z}}(x+iy)=\frac{1}{2}f^{(n+1)}(x)\frac{(iy)^n}{n!}\cdot\sigma(x,y)$$

となる．特に $\mathbb{R}$ 上では $\partial\widetilde{f_n}/\partial\bar{z}=0$ であり，各 $x\in\mathbb{R}$ に関して

$$\left|\frac{\partial\widetilde{f_n}}{\partial\bar{z}}(x+iy)\right|=O(y^n)\quad(y\to 0)$$

である．さらに詳しい評価を得るために，

$$U:=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1<|y|/\langle x\rangle<2\,\},\quad V:=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<|y|/\langle x\rangle<2\,\}$$

とすると $\left|\sigma_x+i\sigma_y\right|\le c\,\chi_U/\langle x\rangle$ が成り立つ（$c:=3\max_t|\tau'(t)|$, χ_U は U の定義関数）ことに注意する．これから f や x, y に無関係な定数 C があって，一般に

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\widetilde{f_n}}{\partial\bar{z}}(x+iy)\right|&\le C\left(\left|f^{(n+1)}(x)\right|\frac{|y|^n}{n!}\,\chi_V(x,y)+\left|\sum_{r=0}^{n}f^{(r)}(x)\frac{y^r}{r!}\right|\frac{\chi_U(x,y)}{\langle x\rangle}\right)\\&\le C\left(\left|f^{(n+1)}(x)\right|\frac{|y|^n}{n!}\,\chi_V(x,y)+\sum_{r=0}^{n}\left|f^{(r)}(x)\right|\frac{\langle x\rangle^{r-1}}{r!}\,\chi_U(x,y)\right)\end{aligned}\tag{2}$$

Davies の functional calculus　Helffer–Sjöstrand は自己共役作用素 H の functional calculus が，実軸上のあるクラスの関数 f に対してはその quasi-analytic extension を用いて

$$f(H)=-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial\widetilde{f_n}(z)}{\partial\bar{z}}\,(z-H)^{-1}\,dA(z)\tag{3}$$

のように，線積分でなく面積分で表されることを示した．ここで $dA(z)$ は平面における通常の面積要素を表す．E.B. Davies [3] は逆に (3) で H に対する functional calculus を定義することを考え，理論を作り上げた．簡単に言えば (3) の右辺が意味を持つような H を考えればよいので，H が自己共役であることは必ずしも本質的ではなく，Banach algebra の元に一般化することも容易である．

そこで，H は単位元を持つ Banach algebra $\mathfrak{A}$ の元，あるいはある Banach 空間で稠密に定義された閉線型作用素として，(2) を考えに入れて (3) の右辺の積分に意味を持たせるために次の条件を考える：$\sigma(H)\subset\mathbb{R}$ かつある $\alpha\ge 0$ に対して

$$p_\alpha(H):=\sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\frac{\|(z-H)^{-1}\|}{(1+|z|^2)^{\alpha/2}}\,|y|^{\alpha+1}<\infty\qquad(z=x+iy).\tag{4}$$

U 上では $|y|\sim\langle x\rangle\sim\langle z\rangle=(1+|z|^2)^{1/2}$, V 上で $|y|$, $\langle z\rangle$ は $\langle x\rangle$ の定数倍以下なので，(4) をみたす H に対して，(2) により $n\ge\alpha+1$ ならば

$$\iint_{\mathbb{C}}\left|\frac{\partial\widetilde{f_n}(z)}{\partial\bar{z}}\right|\,\|(z-H)^{-1}\|\,dA(z)\le C_{n,\alpha}p_\alpha(H)\int_{\mathbb{R}}\left\{\sum_{r=0}^{n+1}\left|f^{(r)}(x)\right|\langle x\rangle^{r-1}\right\}dx$$

が成り立つことが分かる（評価した後 y についての積分を実行）．ここで $C_{n,\alpha}$ は n, α ($n\ge\alpha+1$)（と τ）にのみ依存する定数．このことから $\mathscr{A}_{n+1}$ を

$$\|f\|_{n+1}:=\int_{\mathbb{R}}\sum_{r=0}^{n+1}\left|f^{(r)}(x)\right|\langle x\rangle^{r-1}\,dx$$

が有限な $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 全体の $\|f\|_{n+1}$ による完備化として次の定理が証明できる．

Theorem 2 (Davies [2], [3]) H が unital Banach algebra $\mathfrak{A}$ の元（resp. Banach 空間 X で稠密に定義された閉線型作用素）で，条件 (4) をみたしているとき，$n \geq \alpha+1$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ を取れば，任意の $f \in \mathscr{A}_{n+1}$ に対して (3) によって $f(H) \in \mathfrak{A}$（resp. $f(H) \in \mathcal{L}(X)$）を定義できて $\|f(H)\| \leq C_n \|f\|_{n+1}$ が成り立つ（C_n は定数）．$n < m$ かつ $f \in \mathscr{A}_{m+1}$ とすると，$f \in \mathscr{A}_{n+1}$ でもあるが，(3) において n を m に変えても積分は不変となり，$f(H)$ は f をどのクラスに属すると考えるかによらず定まる．そして $f \mapsto f(H)$ は $\mathscr{A}_{n+1}$ から $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathcal{L}(X)$) への algebra homomorphism となる．

当面の目的にとって，次のことが重要である．

Proposition 3 $\mathfrak{A}$ を可換な unital Banach algebra とし，φ は $\mathfrak{A}$ 上の multiplicative linear functional とする．このとき，$x \in \mathfrak{A}$ が $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$ かつ条件 (4) をみたし，$n \geq \alpha+1$ をみたす n に対して $f \in \mathscr{A}_{n+1}$ とすれば $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$ が成り立つ．

proof. 定義式 (3) の積分はノルム収束なので

$$\varphi(f(x)) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{f}_n(z)}{\partial \overline{z}} (z - \varphi(x))^{-1} \, dA(z) \tag{5}$$

が成り立つ（ここでは x は z の実部ではないことに注意）．この式の両辺が $\|f\|_{n+1}$ ノルムで連続なことに注意すると，$f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ の場合に証明すればよいことが分かる．この場合，$\widetilde{f}_n$ の定義から $\widetilde{f}_n$ の台も有界となるので，(5) の右辺の積分範囲は $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ を内部に含む円 D としてよい．そして $\varphi(x)$ を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の円を D_ε として，$D \setminus D_\varepsilon$ 上での積分が $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $f(x)$ に収束することに注意する．(5) の右辺の積分を $D \setminus D_\varepsilon$ 上の積分で置き換えると，グリーンの定理により

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{D \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial \widetilde{f}_n(z)}{\partial \overline{z}} (z - \varphi(x))^{-1} \, dA(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{\widetilde{f}_n(z)}{z - \varphi(x)} \, dz \longrightarrow f(\varphi(x)) \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

が成り立つ．よって $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$ が得られる．∎

条件 (4) をみたす簡単な十分条件としては次のものがある．

Proposition 4 (1) $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ が Banach 空間 X 上の C_0-group で，ある $k \in \mathbb{N}$ と定数 C に対して $\|T(t)\| \leq C(1 + |t|^k)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ をみたしてれば，$\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ の生成作用素 iH は $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$ をみたし，$\alpha = k$ として条件 (4) が成り立つ．

(2) $\mathfrak{A}$ が単位元を持つ Banach algebra で $H \in \mathfrak{A}$ とする．このときある $k \in \mathbb{N}$ と定数 C があって，任意の $t \in \mathbb{R}$ で $\|e^{itH}\| \leq C(1 + |t|^k)$ が成り立つならば，$\sigma(H) \subset \mathbb{R}$ で，$\alpha = k$ として条件 (4) が成り立つ．

proof. (1): $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ をみたす任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) \, dt$ が意味を持ち $(\lambda - iH)^{-1}$ を与える．また $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ のときは $\int_0^\infty e^{\lambda t} T(-t) \, dt$ が意味を持ち，$(-\lambda + iH)^{-1} = -(\lambda - iH)^{-1}$ を与える．よって $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$ である．また $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ では

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) \, dt \right\| \leq C \int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re})\,\lambda t} (1 + t^k) \, dt = C \left(\frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda} + \frac{\Gamma(k+1)}{(\mathrm{Re}\,\lambda)^{k+1}} \right)$$

というノルム評価が成り立つ．$\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ のときには $\int_0^\infty e^{\lambda t} T(-t) \, dt$ に対する同様の評価を用いると，$\alpha = k$ として評価 (4) が成り立つことが分かる．

(2) の証明はまったく同様にできる．∎

3 Banach algebra の regularity への応用

命題 3 によって，Banach algebra の regularity に関する次の十分条件が得られる．この結果は本質的に Dixmier [4] の該当部分を含んでいる．

Theorem 5 $\mathfrak{A}$ は unital Banach algebra で semi-simple とする．$\mathfrak{A}$ の生成元 x_0 で，ある定数 C と $k \in \mathbb{N}$ に対して $\|e^{itx_0}\| \leq C(1+|t|^k)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ をみたすものがあれば $\mathfrak{A}$ は regular である．

proof. $\mathfrak{A}$ の maximal ideal space $\widehat{\mathfrak{A}}$ は $\sigma(x_0)$ と同一視される．仮定と Proposition 4 より $\sigma(x_0) \subset \mathbb{R}$ かつ $\alpha = k$ として条件 (4) をみたすことに注意しよう．$\mathfrak{A}$ が regular であることを言うには，$\sigma(x_0)$ の（通常の意味の）任意の閉集合 F と $\lambda_0 \in \sigma(x_0) \setminus F$ に対して $x \in \mathfrak{A}$ で，その Gelfand 変換 $\widehat{x}$ が $\widehat{x}|_F = 0$ かつ $\widehat{x}(\lambda_0) = 0$ となるものが存在することを言えばよい．ところが $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ で $f|_F = 0$, $f(\lambda_0) = 1$ をみたすものが存在し，すべての n に対して $f \in A_{n+1}$ だから Proposition 3 により $f(x_0) \in \mathfrak{A}$ が存在し，任意の $\varphi \in \widehat{\mathfrak{A}}$ に対して $\varphi(f(x_0)) = f(\varphi(x_0))$ が成り立つ．よって，$\widehat{f(x_0)}|_F = 0$ かつ $\widehat{f(x_0)}(\lambda_0) = 1$ が成り立ち，証明が終わる．∎

Proposition 6 $k \in \mathbb{N}$ として，$w(t) := 1 + |t|^k$ $(t \in \mathbb{R})$ とする．このとき $L^1(\mathbb{R}, w(t)\,dt)$ を w を weight とする可積分関数の空間とする：$L^1(\mathbb{R}, w(t)\,dt) := \{\, f \in L^1(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, w(t)\,dt < \infty \,\}$, ノルムは $\|f\|_{L^1_w} := \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, w(t)\,dt$. $L^1(\mathbb{R}, w(t)\,dt)$ は合成積を積として commutative Banach algebra となるが，さらに regular となる．

proof. Step 1: $\mathfrak{A} := L^1(\mathbb{R}, w(t)\,dt)$ とすると，$\widehat{\mathfrak{A}} = \mathbb{R}$ と見なすことができる．これは $\mathfrak{A} \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$ と，Fourier 変換による $\widehat{L^1(\mathbb{R})} = \mathbb{R}$ という同一視によっている．$\Phi \in \widehat{\mathfrak{A}}$ が Fourier 変換で表されることの証明がポイントであるが，$L^1(\mathbb{R})$ の場合と同様にできる．すなわち，Φ に対してある $F \in L^\infty(\mathbb{R})$ で $\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}} F(t) g(t)\,dt$ $(g \in \mathfrak{A})$ となるものが存在し，Φ が multiplicative であることから，$\Phi(f) \neq 0$ なる f に対して a.e. t で $F(t) = \Phi(f(\cdot - t))/\Phi(f)$，かつ $F(t+s) = F(t)F(s)$ (a.e. $(t,s) \in \mathbb{R}^2$) となることが分かる．よって $F(t)$ は連続で関数等式 $F(t+s) = F(t)F(s)$ をみたしているとしてよく，ある複素数 λ により $F(t) = e^{i\lambda t}$ と書けるが，$\|f(\cdot - t)\|_{\mathfrak{A}} \leq C(1+|t|^k)\|f\|_{\mathfrak{A}}$ という多項式増大度の制約から $\lambda \in i\mathbb{R}$ となり，Φ に λ/i を対応させればよい．

Step 2: Step 1 でも使っている，$\mathfrak{A}$ 上の translation group $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ が役に立つ：$(T(t)f)(x) := f(x+t)$, $(f \in \mathfrak{A},\ x, t \in \mathbb{R})$. 仮定から $T(t)$ は Proposition 4 の仮定ををみたしていることが分かる．よって，任意の閉集合 $F \subset \mathbb{R}$ と $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus F$ に対して $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ で $h|_F = 0$, $h(\lambda_0) \neq 0$ をみたすものを取ると，$\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ の生成作用素 H に対して $h(H) \in \mathcal{L}(\mathfrak{A})$ が定まる．急減少関数 $f_0 \in \mathfrak{A}$ を Fourier 変換 $\widehat{f_0}$ が零点を持たないようなものとすると，$h(H)f_0$ の Fourier 変換は F 上で 0，λ_0 では $\neq 0$ となるので，$\mathfrak{A}$ が regular であることが分かる（Proposition 3 の証明を参照）．∎

4 補記

Fašanga [5] によると，Theorem 1 はさらに次のように一般化される．

Theorem 7 (Seferoğlu [6]) $\mathfrak{A}$ は可換な unital Banach algebra で，semi-simple かつ regular とする．このとき任意の unital Banach algebra $\mathfrak{B}$ への連続な unital algebra homomorphism $\Pi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ に対して

$$\forall a \in \mathfrak{A} \quad \sigma(\Pi(a)) = \widehat{a}(\operatorname{Sp}\Pi)$$

が成り立つ．ここで $\widehat{a}$ は a の Gelfand 変換，$\mathrm{Sp}\,\Pi := \bigcap\{\,\widehat{a}^{-1}(0) \mid a \in \ker \Pi\,\}$ である．$\mathfrak{A}$ が unit を持たない場合は，上式右辺を閉包に置き換えた式が成り立つ．

この定理は，Π が injective な場合には $\sigma(a) = \sigma(\Pi(a))$ $(a \in \mathfrak{A})$ というスペクトルの不変性を示している．この定理を用いると，$\mathrm{Sp}\,\Pi$ と Arveson spectrum との関係によって，次のようなスペクトルの不変性も証明できる．

Theorem 8 X_1, X_2 は Banach 空間で，$X_1 \cap X_2$ は X_1, X_2 の双方で稠密とする．このとき X_1, X_2 でそれぞれ稠密な定義域を持つ閉作用素 A_1, A_2 がそれぞれの上で C_0 群を生成し，$\|e^{tA_i}\| \leq C(1+|t|^k)$ $(i = 1, 2,\ \forall t \in \mathbb{R})$ をみたす定数 C, $k \in \mathbb{N}$ があったとする．このとき C_0 群 $\{e^{tA_1}\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\{e^{tA_2}\}_{t\in\mathbb{R}}$ が consistent，つまり

$$e^{tA_1}|_{X_1\cap X_2} = e^{tA_2}|_{X_1\cap X_2} \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

をみたしていれば $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$ が成り立つ．

Theorem 2 の直前に定義した $\mathscr{A}_{n+1}$ は各点ごとの積によって可換な Banach algebra となるが，これが regular であることによって次の結果も得られる．

Theorem 9 X_1, X_2 は Banach 空間で，$X_1 \cap X_2$ は X_1, X_2 の双方で稠密とする．このとき X_1, X_2 でそれぞれ稠密な定義域を持つ閉作用素 A_1, A_2 のスペクトルが実数に含まれ，ある $\alpha \geq 0$ に対してともに条件 (4) をみたしているとする．さらに任意の $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ に対して $(\lambda - A_1)^{-1}|_{X_1\cap X_2} = (\lambda - A_2)^{-1}|_{X_1\cap X_2}$ が成り立っているならば $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$ である．

詳細については [5] を見ていただきたい．

参考文献

[1] Barnes, B.A., *Inverse closed subalgebras and Fredholm theory*, Proc. Roy. Irish Acad., **83A** (1983), No. 2, 217–224.

[2] Davies, E.B., “Spectral analysis”, Cambridge University Press, 1995.

[3] Davies, E.B., *The functional calculus*, J. London Math. Soc. **52**(1995), 166–176.

[4] Dixmier, J., *Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **6** (1960), 13–25.

[5] Fašanga, E., *Spectral Mapping Theorems and Spectral Space Independence*, Prog. in Nonlin. Diff. Equations and Their Appl., **55** (2003), 157–168.

[6] Seferoğlu, H., *Spectral mapping theorem for representations of measure algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **40** (1997), 261–266.

Three dimensional Commutative Operator Algebras and Q-Algebras (II)

Takanori Yamamoto (Hokkai-Gakuen University)

This is a joint work with Takahiko Nakazi (Hokkaido University).
Let A be a uniform algebra on a compact Hausdorff space X. If I is a closed ideal of A, then the quotient algebra A/I is a commutative Banach algebra with unit. In this talk, if a Banach algebra $\mathcal{B}$ is isometrically isomorphic to A/I, then $\mathcal{B}$ is called a Q-algebra. (Bonsall and Duncan called $\mathcal{B}$ an IQ-algebra.) (cf. [1, p.270]). We consider the case when $\dim \mathcal{B} = 3$.

Cole's Theorem (cf [1, p.272]) *Let $\mathcal{B}$ be a Q-algebra. Then there exists a Hilbert space H which is not necessarily finite dimensional, and an isometric isomorphism of $\mathcal{B}$ to a commutative algebra of bounded operators on a Hilbert space.*

It is interesting to consider whether every commutative closed algebra $\mathcal{B}$ of bounded operators on H is a Q-algebra (cf. [1, pp.272–273]). It is clear that a 1-dimensional commutative operator algebra $\mathcal{B}$ with an identity operator on a Hilbert space H is just a Q-algebra. It is proved by Drury (cf. [4]) and Nakazi (cf. [8]) that a 2-dimensional commutative operator algebra $\mathcal{B}$ with an identity operator on a Hilbert space H is just a Q-algebra. At the end of this paper, we will introduce the Holbrook's counterexample which shows that there is a 4-dimensional commutative operator algebras $\mathcal{B}_4$ with an identity operator on a 4-dimensional Hilbert space H which is not a Q-algebra. Hence, a set of all 4-dimensional algebras of the form

$$\{A/I \ ; \ I \text{ is a closed ideal of } A\}$$

is smaller than a set of all 4-dimensional algebras of the form

$$\{\text{span}\{T_1, T_2, T_3, I\} \ ; \ T_1, T_2, T_3 \text{ are mutually commutative bounded operators on } H\}.$$

Both the ideal of A and the identity operator on H are represented by the same letter I. By this fact, if $n \geq 5$, then this implies that the set of all n-dimensional Q-algebra A/I is smaller than (and not equal to) the set of all set of all n-dimensional commutative oparator algebras with unit on a n-dimensional Hilbert space. Therefore, it is interesting to know whether a 3-dimensional commutative operator algebra $\mathcal{B}$ with an identity operator on a Hilbert space H is just a Q-algebra. It seems difficult for us to solve this problem. We wil consider the more simple probrem as the followings. Let T denote the unit circle, and let $A(\mathbf{T})$ denote the disc algebra.

Problem. Describe a set of all 3-dimensional Q-algebras $\mathcal{B}$ of the disc algebra $A(\mathbf{T})$ in a set of all 3-dimensional commutative operator algebras with an identity operator on a 3-dimensional Hilbert space H. That is, discribe a set of all 3-dimensional algebras of the form

$$\{A(\mathbf{T})/I \ ; \ I \text{ is a closed ideal of } A(\mathbf{T})\}$$

in a set of all 3-dimensional algebras of the form

$$\{\text{span}\{T_1, T_2, I\} \ ; \ T_1, T_2 \text{ are mutually commutative bounded operators on } H\}.$$

What kind of a 3-dimensional Q-algebra can be represented as a 3-dimensional commutatative operator algebra with identity on a 3-dimensional Hilbert space? As above, the 2-dimensional case is completely solved by Drury and Nakazi. In the 3-dimensional case, it seems to be known only trivial ones which is direct sum of thee 1-dimensional operator algebras:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

direct sum of a 2-dimensional commutative operator algebra and a 1-dimensional operator algebras:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

or Q-algebras of $A(\mathbf{T})$ (cf. [12]). Therefore, we study the structure of the Q-algebra of $A(\mathbf{T})$. We introduce some operators and spaces to show the Sarason's theorem which is used to solve this problem. Let H^2 be the closure of $A(\mathbf{T})$ in $L^2 = L^2(d\theta/2\pi)$. $H^2 \cap I^\perp$ denotes the annihilator of I in $H^2 = H^2(d\theta/2\pi)$. Let P denote the orthogonal projection from H^2 onto $H^2 \cap I^\perp$ and for any $f \in A(\mathbf{T})$ put

$$S_f = S_f^{d\theta/2\pi}\phi = P(f\phi), \quad (\phi \in H^2 \cap I^\perp).$$

Then $S_{f+k} = S_f$ for k in I and $\|S_f\| \le \|f + I\|$.

Sarason's Theorem (cf. [2, p.125]; [10, vol.1, p.230]; [11]) *If $f \in A(\mathbf{T})$, then $\|S_f\| = \|f+I\|$, where the norm on the left is operator norm on $H^2 \cap I^\perp$ and the norm on the right is the quotient norm in $A(\mathbf{T})/I$.*

By Sarason's theorem, we consider the Q-algebra of $A(\mathbf{T})$ as the 3 commutative matrix algebra with identity, that is, as the 3-dimensional commutative operator algebra with identity. Let

$$k_1(z) = \frac{1}{1-\bar{a}z}, \quad k_2(z) = \frac{1}{1-\bar{b}z}, \quad k_3(z) = \frac{1}{1-\bar{c}z}.$$

Let

$$\psi_1(z) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}z}, \quad \psi_2(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\frac{\sqrt{1-|b|^2}}{1-\bar{b}z}, \quad \psi_3(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\frac{z-b}{1-\bar{b}z}\frac{\sqrt{1-|c|^2}}{1-\bar{c}z}.$$

Then ψ_1, ψ_2 and ψ_3 are mutually orthogonal in L^2, and $\mathrm{span}\{k_1, k_2, k_3\} = \mathrm{span}\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$. and let $f \in A$. Let

$$a_{ij} = \langle S_f\psi_j, \psi_i\rangle = \int_{\mathbf{T}} f\psi_j\overline{\psi_i}\frac{d\theta}{2\pi}, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

McCullough and Paulsen [7] consider the following 3×3 matrices in more general settings. In the followg propositions, $\dim H^2 \cap I^\perp = 3$.

Proposition 1. *Let a, b and c be distinct points in $\mathbf{D}$. Let $f \in A$. Let $I = \{g \in A \ ; \ g(a) = g(b) = g(c) = 0\}$. Then*

(1)

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} f(a) & 0 & 0 \\ x(f(a)-f(b)) & f(b) & 0 \\ yf(a) - xzf(b) + (xz-y)f(c) & z(f(b)-f(c)) & f(c) \end{pmatrix}$$

$$= f(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} + f(b)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ -xz & z & 0 \end{pmatrix} + f(c)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ xz-y & -z & 1 \end{pmatrix},$$

where

$$x = \frac{-\langle k_2, k_1\rangle}{\sqrt{\|k_1\|^2\|k_2\|^2 - |\langle k_1, k_2\rangle|^2}} = \frac{\sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|b|^2}}{a-b},$$

$$y = \frac{-\langle k_3, \psi_1\rangle - \langle k_3, \psi_2\rangle x}{\|k_3 - \langle k_3, \psi_1\rangle\psi_1 - \langle k_3, \psi_2\rangle\psi_2\|} = \frac{\sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|c|^2}}{a-c}\frac{1-a\bar{b}}{a-b},$$

and

$$z = \frac{-\langle k_3, \psi_2\rangle}{\|k_3 - \langle k_3, \psi_1\rangle\psi_1 - \langle k_3, \psi_2\rangle\psi_2\|} = \frac{\sqrt{1-|b|^2}\sqrt{1-|c|^2}}{b-c}.$$

(2) *There are* 3×3 *idempotent matrices* P_1, P_2 *such that* $\mathrm{span}\{P_1, P_2, I\}$ *is not isometrically isomorphic to* A/I. *That is, a set* $\{A/I\ ;\ a, b, c \in \mathbf{D}\}$ *is smaller than* $\{\mathrm{span}\{P_1, P_2, I\}\ ;\ P_j^2 = P_j\ (j = 1, 2)$

Proof. It is sufficient to calculate a_{31}.

$$\begin{aligned} a_{31} &= \langle S_f\psi_1, \psi_3\rangle = \langle f\psi_1, \psi_3\rangle \\ &= \frac{\sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|c|^2}}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}} f\left(\frac{D}{z-a} + \frac{E}{z-b} + \frac{F}{z-c}\right) dz \\ &= \sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|c|^2}\left(\frac{1-a\bar{b}}{(a-b)(a-c)}f(a) + \frac{1-|b|^2}{(a-b)(c-b)}f(b) + \frac{1-b\bar{c}}{(a-c)(b-c)}f(c)\right) \\ &= yf(a) - xzf(b) + (xz-y)f(c), \end{aligned}$$

where

$$D = \frac{1-a\bar{b}}{(a-b)(a-c)}, \quad E = \frac{1-|b|^2}{(b-a)(b-c)}, \quad F = \frac{1-\bar{b}c}{(c-a)(c-b)}.$$

Proposition 2. *Let* a *and* b *be distinct points in* $\mathbf{D}$. *Let* $f \in A$. *Let* $I = \{g \in A\ ;\ g(a) = g'(a) = g(b) = 0\}$.

(1)

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} f(a) & 0 & 0 \\ x(f(a)-f(b)) & f(b) & 0 \\ \sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|b|^2}\left(\frac{1-a\bar{b}}{(a-b)^2}(f(a)-f(b)) - \frac{1-|b|^2}{a-b}f'(b)\right) & (1-|b|^2)f'(b) & f(b) \end{pmatrix}$$

$$= f(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} + f(b)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix} + f'(b)(1-|b|^2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

where

$$x = \frac{-\langle k_2, k_1\rangle}{\sqrt{\|k_1\|^2\|k_2\|^2 - |\langle k_1, k_2\rangle|^2}} = \frac{\sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|b|^2}}{a-b},$$

and

$$y = \frac{-\langle k_3, \psi_1\rangle - \langle k_3, \psi_2\rangle x}{\|k_3 - \langle k_3, \psi_1\rangle\psi_1 - \langle k_3, \psi_2\rangle\psi_2\|} = \frac{\sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|b|^2}}{a-b}\frac{1-a\bar{b}}{a-b}.$$

(2) *There is a* 3×3 *idempotent matrix* P *and an* N *such that* $\mathrm{span}\{P, N, I\}$ *is not isometrically isomorphic to* A/I. *That is, a set* $\{A/I; a, b \in \mathbf{D}\}$ *is smaller than* $\{\mathrm{span}\{P, N, I\}\ ;\ P^2 = P, N^2 = 0\}\}$

Proof. It is sufficient to calculate a_{31}. By the proof of Lemma 1,

$$\begin{aligned} a_{31} &= \lim_{c\to b}\sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|c|^2}\left(\frac{1-a\bar{b}}{(a-b)(a-c)}f(a) + \frac{1-|b|^2}{(a-b)(c-b)}f(b) + \frac{1-\bar{b}c}{(a-c)(b-c)}f(c)\right) \\ &= \lim_{c\to b}\sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|c|^2}\left(\frac{1-a\bar{b}}{(a-b)(a-c)}(f(a)-f(b)) - \frac{1-\bar{b}c}{(a-c)(b-c)}(f(b)-f(c))\right) \\ &= \sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|b|^2}\left(\frac{1-a\bar{b}}{(a-b)^2}(f(a)-f(b)) - \frac{1-|b|^2}{a-b}f'(b)\right) \end{aligned}$$

Proposition 3. *Let* a *be a point in* $\mathbf{D}$. *Let* $f \in A$. *Let* $I = \{g \in A\ ;\ g(a) = g'(a) = g''(a) = 0\}$.

(1)

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} f(a) & 0 & 0 \\ (1-|a|^2)f'(a) & f(a) & 0 \\ \frac{(1-|a|^2)^2 f''(a)}{2} - \bar{a}(1-|a|^2)f'(a) & (1-|a|^2)f'(a) & f(a) \end{pmatrix}.$$

$$= f(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + f'(a)(1-|a|^2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\bar{a} & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}f''(a)(1-|a|^2)^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) *There is a* 3×3 *matrix* N *satisfying* $N^3 = 0$ *such that* $\mathrm{span}\{N, N^2, I\}$ *is not isometrically isomorphic to* A/I. *That is, a set* $\{A/I; a, b \in \mathbf{D}\}$ *is smaller than* $\{\mathrm{span}\{N, N^2, I\}; N^3 = 0\}$.

Proof. It is sufficient to calculate a_{31}. By the proof of Lemma 2,

$$\begin{aligned} a_{31} &= \lim_{b\to a}\sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|b|^2}\left(\frac{1-a\bar{b}}{(a-b)^2}(f(a)-f(b)) - \frac{1-|b|^2}{a-b}f'(b)\right) \\ &= \frac{(1-|a|^2)^2 f''(a)}{2} - \bar{a}(1-|a|^2)f'(a). \end{aligned}$$

Example. We construct a 4-dimensional semisimple commutative matrix algebra $\mathcal{B}_4$ with unit on $\mathbf{C}^4$ which is not a Q-algebra. Holbrook (cf. [6]) proved that von Neumann's inequality

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_\infty$$

can fail for some polynomials p in 3 variables, where $T = (T_1, T_2, T_3)$ is a triple of commuting contractions on $\mathbf{C}^4$, and T_1, T_2, T_3 are simultaneously diagonalizable. Then we use the Craw's theorem.

Craw's Theorem (cf. [1, p.271]) *$\mathcal{B}$ is a Q-algebra if and only if for all n,*

$$\phi_j \in A, \ \|\phi_j\| \leq 1 \ (j = 1, ..., n) \Rightarrow \|p(\phi_1, ..., \phi_n)\| \leq 1$$

whenever p is a polynomial in n variables satisfying $|p(z_1, ..., z_n)| \leq 1$ $(|z_j| \leq 1, \ j = 1, ..., n)$.

By Craw's theorem, it follows that Holbrook's example shows that there is a 4-dimensional commutative operator algebras $\mathcal{B}_4$ with an identity operator on a 4-dimensional Hilbert space H which is not a Q-algebra. Then we can construct a 4-dimensional commutative matrix algebra with an identity matrix on $\mathbf{C}^4$, which is not a Q-algebra. By the example of J.Holbrook (cf. [6]), if

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and $p(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$, then $\|T_j\| = 1, (j = 1, 2, 3)$ and $\|p(T_1, T_2, T_3)\| = 6 > 5$. He proved that if

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and $p_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-1}z + \varepsilon^{-4}z^2 - (\varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-5})z^3$ for $\varepsilon \neq 0$, then $Q = p_\varepsilon(T_1(\varepsilon))$, and

$$T_2 = -\frac{1}{2}T_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}Q, \quad T_3 = -\frac{1}{2}T_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}Q.$$

If

$$q_1(z) = z, \quad q_2(z) = -\frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}p_\varepsilon(z), \quad q_3(z) = -\frac{1}{2}z - \frac{\sqrt{3}}{2}p_\varepsilon(z),$$

and $T'_j = q_j(T_1(\varepsilon))$, $(j = 1, 2, 3)$, then

$$T'_1 = T_1(\varepsilon), \quad T'_2 = -\frac{1}{2}T_1(\varepsilon) + \frac{\sqrt{3}}{2}Q, \quad T'_3 = -\frac{1}{2}T_1(\varepsilon) - \frac{\sqrt{3}}{2}Q.$$

Then $T'_j \to T_j$ as $\varepsilon \to 0$, $(j = 1, 2, 3)$, and hence there is an $\varepsilon > 0$ such that $\|p(T'_1, T'_2, T'_3)\| > 5$. Let T''_1 be the perturbation of $T'_1 = T_1(\varepsilon)$ such that T''_1 has distinct eigenvalues, and let $T''_j =$

$q_j(T_1'')$, $(j = 2, 3)$. Then there is an invertible matrix Z and diagonal matrices U_j $(j = 1, 2, 3)$ such that $T_j'' = ZU_jZ^{-1}$ $(j = 1, 2, 3)$. Let $E_1, ..., E_4$ be 4×4 diagonal matrices such that

$$E_1 = \mathrm{diag}(1, 0, 0, 0), \quad ..., \quad E_4 = \mathrm{diag}(0, 0, 0, 1).$$

Let $P_j = ZE_jZ^{-1}$ $(1 \leq j \leq 4)$. Then $P_j^2 = P_j$, $P_jP_k = 0$, $(j \neq k)$ and $P_1 + ... + P_4 = I_4$. Let $\mathcal{B}_4 = \mathrm{span}\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Then $\mathcal{B}_4$ is a 4-dimensional semisimple commutative matrix algebra with unit on $\mathbf{C}^4$ such that $T_1'', T_2'', T_3'' \in \mathcal{B}_4$. Since T_j'' is a perturbation of T_j' $(j = 1, 2, 3)$, it follows that $\|p(T_1'', T_2'', T_3'')\| > 5$. By Craw's theorem, it follows that $\mathcal{B}_4$ is not a Q-algebra.

References

[1] F.Bonsall, J.Duncan, Complete Normed Algebras, Springer, Berlin, 1973.

[2] B.Cole, J.Wermer, Pick interpolation, von Neumann inequalities, and hyperconvex sets, Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993), 89–129, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol.439, Kluwer Acad.Publ., Dordrecht, 1994.

[3] B.Cole, J.Wermer, Isometries of certain operator algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 3047–3053.

[4] S.W.Drury, Remarks on von Neumann's inequality, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 1983, pp.14-32.

[5] I.Feldman, N.Krupnik, A.Markus, On the norm of two adjoint projections, Integral Equations Operator Theory 14 (1991) 69–90.

[6] J.Holbrook, Schur norms and the multivariate von Neumann inequality, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser, 2001, 375–386.

[7] S.McCullough, V.Paulsen, C^*–envelopes and interpolation theory, Indiana Univ. Math. J. 51 (2002) 479-505.

[8] T.Nakazi, Two dimensional Q-algebras, Linear Algebra Appl. 315 (2000) 197-205.

[9] T.Nakazi, K.Takahashi, Two dimensional representations of uniform algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995) 2777–2784.

[10] N.K.Nikolski, Operators, Functions, and Systems, vols. 1 and 2, Amer. Math. Soc., 2002.

[11] D. Sarason, Generalized interpolation in H^∞, Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967) 179–203.

[12] T.Yamamoto, Three dimensional commutative operator algebras and Q-algebras (I), Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics 105 (2006) 95–100.

On solvability of certain algebraic equations in commutative C^*-algebras

Takeshi Miura (Yamagata University)
Dai Honma (Niigata University)

Abstract. Let $C(X)$ be the commutative Banach algebra of all complex-valued continuous functions on a compact Hausdorff space X. We will give a necessary and sufficient condition for X in order that $C(X)$ have the following property introduced by Karahanjan: For every $a \in C(X)$ there exist $f \in C(X)$ and positive integers p, q such that p does not divide q and $a^q = f^p$. We shall also consider the property to square-root closedness, or algebraic closedness of $C(X)$.

1 導入

$C(X)$をコンパクトHausdorff空間X上の複素数値連続関数全体のなす可換Banach環とする．ただしノルムは$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$ $(f \in C(X))$により定める．$P_n(x,z)$をzを変数とし，係数を$C(X)$にもつn次のmonic多項式とする．つまり，ある$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in C(X)$に対して

$$P_n(x,z) = z^n + a_{n-1}(x)z^{n-1} + \cdots + a_1(x)z + a_0(x)$$

である．ただし$n \in \mathbb{N}$とする．この$P_n(x,z)$を$C(X)$上のmonic多項式と呼ぶことにする．特にXが一点集合であるとき$C(X)$は複素数体$\mathbb{C}$と同一視できるので，代数学の基本定理としてよく知られているように，任意の$P_n(x,z)$に対して代数方程式$P_n(x,z)=0$は$\mathbb{C} \cong C(X)$に解をもつ．言い換えれば，Xが一点集合であれば$C(X)$は代数的に閉じているのである．そこで以下の定義は自然であろう．

定義 1 $C(X)$が代数的に閉じているとは，$C(X)$上の任意のmonic多項式$P_n(x,z)$に対して$P_n(x,z)=0$が$C(X)$に解をもつことである．

このとき「$C(X)$は(いつ)代数的に閉じているか？」という問題が自然に起こる．この問題は単に$C(X)$だけでなく，より一般に関数環とも密接に関連している．実際1966年にČika ([3]) は次の結果を示している．

定理 A Xを局所連結コンパクトHausdorff空間とする．X上の関数環Aが次の条件(C)をみたせば$A = C(X)$である．

(C)　任意の$a \in A$に対して$a = f^2$となる$f \in A$が存在する．

定理Aにおける条件(C)は，任意の$a \in A$に対して$P_2(x,z) = z^2 - a(x) = 0$が$A$に解をもつ，ということも出来る．条件(C)が成り立つときAは平方根に関して閉じているという．Karahanjan ([13]) は1979年にČirkaの結果を次のように拡張した．

定理 B X を局所連結コンパクト Hausdorff 空間とする．X 上の関数環 A が次の条件 (K) をみたせば $A = C(X)$ である．

(K)　任意の $a \in A$ に対して $a^q = f^p$ となる $f \in A$ と $p, q \in \mathbb{N}$: $q/p \notin \mathbb{N}$ が存在する．

条件 (C) が成り立ったとすると，どんな $a \in A$ に対しても $a = f^2$ となる $f \in A$ が存在するから，これは条件 (K) が必ず $p = 2, q = 1$ に対して成り立つことに他ならない．特に条件 (C) は条件 (K) よりも強いことが分かる．この意味で定理 B は定理 A の拡張になっている．

定理 B より，もし条件 (K) が成り立てば $C(X)$ 自身がこの条件をみたさなければならないことになる．つまり次が成り立つ．

$(*)$ 任意の $a \in C(X)$ に対して $a^q = f^p$ となる $f \in C(X)$ と $p, q \in \mathbb{N}$: $q/p \notin \mathbb{N}$ が存在する．

本稿ではコンパクト Hausdorff 空間 X が局所連結，あるいは第一可算であるとき $(*)$ が成り立つための X の条件を，X の位相の言葉により特徴付ける．

2　主定理

結果を述べる前に，位相空間に関して 2 つの定義を必要とする．

定義 2 位相空間 T が *hereditarily unicoherent* であるとは，どんな連結閉集合 $M, N \subset T$: $M \cap N \neq \emptyset$ に対しても $M \cap N$ が連結となることである．

定義 3 位相空間 T が *almost locally connected* であるとは，T が次の条件をみたす互いに素な可算個の閉集合 C_n $(n \in \mathbb{N})$ を含まないことである：

各 C_n は $\cup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ の閉包における開集合で，点 $x_n, y_n \in C_n$ が存在して $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は相異なる点に収束する．

Countryman, Jr ([4]) の手法を適用することにより，以下の補題が容易に示される．

補題 1 X をコンパクト Hausdorff 空間とする．このとき $C(X)$ が条件 $(*)$ をみたせば X は hereditarily unicoherent かつ almost locally connected である．

定理 2 X を第一可算コンパクト Hausdorff 空間とする．このとき以下は同値である．

$(*)$ どんな $a \in C(X)$ に対しても $a^q = f^p$ となる $f \in C(X)$ と $p, q \in \mathbb{N}$: $q/p \notin \mathbb{N}$ が存在する．
(a) X は hereditarily unicoherent かつ almost locally connected である．
(b) $C(X)$ は代数的に閉じている．
(c) $C(X)$ は平方根に関して閉じている．

定理 2 により X が第一可算であれば，Karahanjan の導入した条件 $(*)$ は，より強い条件「$C(X)$ は代数的に閉じている」を導く．同様の結果が，第一可算とは限らないが，局所連結な X に対しても成り立つ．

定理 3 X を局所連結コンパクト Hausdorff 空間とする．このとき以下は同値である．

(∗) どんな $a \in C(X)$ に対しても $a^q = f^p$ となる $f \in C(X)$ と $p, q \in \mathbb{N}$: $q/p \notin \mathbb{N}$ が存在する．
(a) X は hereditarily unicoherent である．
(b) $C(X)$ は代数的に閉じている．
(c) $C(X)$ は平方根に関して閉じている．

定理 2, 3 を示すために，Countryman, Jr ([4]) 及び Miura and Niijima ([16]) の結果を用いる．

定理 C X を第一可算コンパクト Hausdorff 空間とする．このとき以下は同値である．

(a) X は hereditarily unicoherent かつ almost locally connected である．
(b) $C(X)$ は代数的に閉じている．
(c) $C(X)$ は平方根に関して閉じている．

定理 D X を局所連結コンパクト Hausdorff 空間とする．このとき以下は同値である．

(a) X は hereditarily unicoherent である．
(b) $C(X)$ は代数的に閉じている．
(c) $C(X)$ は平方根に関して閉じている．

定理 2 の証明 まず補題 1 より (∗) ⇒ (a) が示される．逆に (a) ⇒ (∗) を示す．定理 C より (a) ⇔ (c) であり，さらに定義より (c) ⇒ (∗) であるから (a) ⇒ (∗) が示された． ■

定理 3 の証明 まず補題 1 より (∗) ⇒ (a) が分かる．定理 D 及び定義より (a) ⇔ (c) ⇒ (∗) であるから (a) ⇒ (∗) が示された． ■

注意 条件 (∗) をより詳細に調べることにより，X が局所連結ならば以下の条件も定理 3 の各条件と同値であることが分かる．詳細は [12] を参照されたい．

(d) $\exp C(X) = C(X)^{-1}$ かつ $C(X)^{-1}$ は $C(X)$ で一様に稠密である．ただし $C(X)^{-1}$ は $C(X)$ の可逆元全体であり，$\exp C(X) = \{e^f : f \in C(X)\}$ である．
(e) 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して集合 $\{f^p : f \in C(X)\}$ は $C(X)$ で一様に稠密である．
(f) ある $p \in \mathbb{N}$: $p \geq 2$ に対して集合 $\{f^p : f \in C(X)\}$ は $C(X)$ で一様に稠密である．
(g) 任意の $a \in C(X)$ と任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $a = f^p$ となる $f \in C(X)$ が存在する．
(h) 次をみたす $p \in \mathbb{N}$: $p \geq 2$ が存在する：任意の $a \in C(X)$ に対して $a = f^p$ となる $f \in C(X)$ が存在する．

参考文献

[1] N. Brodskiy, J. Dydak, A. Karasev and K. Kawamura, *Root closed function algebras on compacta of large dimension*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[2] A. Chigogidze, A. Karasev, K. Kawamura and V. Valov, *On C^*-algebras with the approximate n-th root property*, Bull. Austral. Math. Soc. **72** (2005), 197–212.

[3] E. M. Čirka, *Approximation of continuous functions by functions holomorphic on Jordan arcs in $\mathbb{C}^n$*, Soviet Math. **7** (1966), 336–338.

[4] R. S. Countryman Jr., *On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed*, Pacific J. Math. **20** (1967), 433–448.

[5] T. W. Dawson, *A survey of algebraic extensions of commutative, unital normed algebras*, Contemp. Math. **328** (2003), 157–170.

[6] D. Deckard and C. Pearcy, *On matrices over the ring of continuous complex valued functions on a Stonian space*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 322–328.

[7] D. Deckard and C. Pearcy, *On algebraic closure in function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 259–263.

[8] J. F. Feinstein and T. J. Oliver, *Extensions of endomorphisms of $C(X)$*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[9] M. K. Fort, Jr., *Images of plane continua*, Amer. J. Math. **81** (1959), 541–546.

[10] E. A. Gorin and M. I. Karahanjan, *Some certain characteristic properties of the algebra of all continuous functions on a locally connected compactum*, Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. **11** (1976), 237–255.

[11] O. Hatori and T. Miura, *On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative C^*-algebras in which every element is the square of another*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1185–1189.

[12] D. Honma and T. Miura, *On a characterization of compact Hausdorff space X for which certain algebraic equations are solvable in $C(X)$*, to appear in Tokyo J. Math.

[13] M. I. Karahanjan, *On some algebraic characteristics of the algebra of all continuous functions on a locally connected compactum*, Math. USSR-Sb. **35** (1979), 681–696.

[14] K. Kawamura and T. Miura, *On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations*, to appear in Topology Appl.

[15] T. Miura, *On commutative C^*-algebras in which every element is almost the square of another*, Contemp. Math., **232** (1999), 239–242.

[16] T. Miura and K. Niijima, *On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C^*-algebras.*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 2869–2876.

Relative operator entropy and operator divergence

JUN ICHI FUJII* AND EIZABURO KAMEI**

1. Introduction. This note is an intermediate report of our discussions on relative operator entropies and operator divergences. Throughout this note, we use A and B as positive invertible operators on a Hilbert space.

Our relative operator entropy introduced in [1],[3](cf.[1],[11]) is given by

$$\begin{aligned} S(A|B) &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{A \natural_\alpha B - A}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{A^{\frac{1}{2}}((A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha - I)A^{\frac{1}{2}}}{\alpha} \\ &= A^{\frac{1}{2}}\log(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

where

$$A \natural_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}$$

is the generalized geometric operator mean established by Kubo-Ando [7].

$S(A|B)$ is a generalization of the operator entropy $H(A) = -A\log A$ introduced by Nakamura and Umegaki [9](cf.[10]). If A and B commute, $TrS(A|B)$ coinsids with Umegaki's relative entropy [14] which is a noncommutative version of the Kullback-Leibler relative entropy.

Recently Furuichi-Yanagi-Kuriyama [5] introduced Tsallis relative operator entropy which is given by

$$T_\alpha(A|B) = \frac{A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}} - A}{\alpha},$$

that is,

$$T_\alpha(A|B) = \frac{A \natural_\alpha B - A}{\alpha}.$$

The first purpose of this note is defining a generalized Tsallis relative operator entropy from a view point of paths, that is, parametrized operator mean, between A and B. The second one is giving an interpretation for Bregman operator divergence introduced by Petz [12].

2. Paths. In [4] and [8], we compounded the geometricoperator mean, arithmetic operator mean and harmonic operator men by the form

$$A\ m_{t,s}\ B = A^{\frac{1}{2}}(1 - t + t(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{s}}A^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \le t \le 1, \quad -1 \le s \le 1.$$

This interpolates $A = A\ m_{0,s}\ B$ and $B = A\ m_{1,s}\ B$, so we call this form the paths between A and B.

In the case $s = 1$, the arithmetic path; $A\ m_{t,1}\ B = (1-t)A + tB = A\ \nabla_t\ B$, the case $s = 0$,

the geometric path; $A \ m_{t,0} \ B = A \ \natural_t \ B$
and $s = -1$, the harmonic path; $A \ m_{t,-1} \ B = ((1-t)A^{-1} + tB^{-1})^{-1} = A \ !_t \ B$. Moreover we had shown that

$$\lim_{t \to 0} \frac{A \ m_{t,s} \ B - A}{t} = \frac{A \ \natural_s \ B - A}{s}$$

and

$$\lim_{s \to 0} \frac{A \ \natural_{t,s} \ B - A}{t} = \frac{A \ \natural_t \ B - A}{t},$$

that is,

$$\lim_{t \to 0} \frac{A \ m_{t,s} \ B - A}{t} = T_s(A|B) \ \text{ and } \ \lim_{s \to 0} \frac{A \ \natural_{t,s} \ B - A}{t} = T_t(A|B).$$

So we may define a generalized Tsallis relative operator entropy by

$$(*) \qquad S_{t,s}(A|B) = \frac{A \ \natural_{t,s} \ B - A}{t}.$$

The following is shown in [8].

$$\lim_{s \to 0} \frac{A \ \natural_s \ B - A}{s} = \lim_{t \to 0} \frac{A \ \natural_t \ B - A}{t} = S(A|B).$$

Using the Tsallis relative operator entropy, the following is given by Yanagi-Kuriyama-Furuichi [13].

Theorem (Yanagi-Kuriyama-Fruichi). *Let $\{A_1, \cdots, A_n\}$ and $\{B_1, \cdots, B_n\}$ be sequences of strictly positive operators. If $\Sigma_{i=1}^n A_i = \Sigma_{i=1}^n B_i = I$, then*

$$0 \geq \Sigma_{i=1}^n T_s(A_i|B_i) \geq \frac{(\Sigma_{i=1}^n A_i B_i^{-1} A_i)^{-s} - I}{s}.$$

As a corollary of this theorem, they give the operator version of the Shannon inequality and reverse one given by Furuta [6].

Corollary(Furuta). *Let $\{A_1, \cdots, A_n\}$ and $\{B_1, \cdots, B_n\}$ be sequences of strictly positive operators. If $\Sigma_{i=1}^n A_i = \Sigma_{i=1}^n B_i = I$, then*

$$0 \geq \Sigma_{i=1}^n S(A_i|B_i) \geq -\log(\Sigma_{i=1}^n A_i B_i^{-1} A_i).$$

Imitating these, we have the following:

Theorem 1. *Let $\{A_1, \cdots, A_n\}$ and $\{B_1, \cdots, B_n\}$ be sequences of strictly positive operators. If $\Sigma_{i=1}^n A_i = \Sigma_{i=1}^n B_i = I$, then*

$$\Sigma_{i=1}^n S_{t,s}(A_i|B_i) \geq \frac{(1 - t + t(\Sigma_{i=1}^n A_i B_i^{-1} A_i)^{-s})^{\frac{1}{s}} - I}{t}.$$

The following relation holds.

Theorem 2. *Let $\{A_1, \cdots, A_n\}$ and $\{B_1, \cdots, B_n\}$ be sequences of strictly positive operators. If $\Sigma_{i=1}^n A_i = \Sigma_{i=1}^n B_i = I$, then*

$$0 \geq \Sigma_{i=1}^n S_{t,s}(A_i|B_i) \geq \Sigma_{i=1}^n T_t(A_i|B_i).$$

Rényi's relative entropy had beeb given by a simmilar idea to Tsallis's one. The definition is the following:

$$I_\alpha((q_i),(p_i)) = \frac{1}{1-\alpha} \log \Sigma_i^n q_i^\alpha p_i^{1-\alpha}$$

for $(q_i),(p_i)$ probability distributions.

We give an operator version of Rényi's relative entropy as follows:

Definition. For $\Sigma_{i=1}^n A_i = \Sigma_{i=1}^n B_i = I$, we call the next form Rényi's relative operator entropy,

$$I_\alpha((A_i),(B_i)) = \frac{1}{\alpha} \log \Sigma_i^n \ A_i \ \natural_\alpha \ B_i.$$

Then the following can be easily obtained.

Theorem 3. *For $\Sigma_{i=1}^n A_i = \Sigma_{i=1}^n B_i = I$,*

$$\lim_{\alpha \to 0} I_\alpha((A_i),(B_i)) = \Sigma_i^n S(A_i|B_i).$$

Theorem 4. *For $\Sigma_{i=1}^n A_i = \Sigma_{i=1}^n B_i = I$,*

$$I_\alpha((A_i),(B_i)) \leq \Sigma_i^n T_\alpha(A_i|B_i).$$

3. Operator divergence. Recently, Petz introduced Bregman operator divergence [12]. For operator cocave function Ψ,

$$D_\Psi(A,B) = \Psi(A) - \Psi(B) - \lim_{t \to +0} \frac{\Psi(B + t(A-B)) - \Psi(B)}{t}.$$

If $\Psi(x) = Tr\eta(x)$; $\eta(x) = x \log x$, then for density matrices A and B

$$Tr(D_\eta(A,B)) = TrA(\log A - \log B)$$

which is the Umegaki relative entropy. Petz gives also an operator divergence as a slightly modified form of $S(A|B)$ as follows:

$$S_{FK}(A,B) = B - A - S(A|B).$$

Our proposal here is to point out the Bregman operator divergebce is given by the following formulation.

Theorem 5.

$$\lim_{t\to 0} \frac{A \nabla_t B - A \sharp_t B}{t} = B - A - S(A|B) = S_{FK}(A, B)$$

and

$$\lim_{t\to 1} \frac{A \nabla_t B - A \sharp_t B}{t-1} = B - A - S(B|A) = -S_{FK}(B, A).$$

References

[1] J.I.Fujii, M.Fujii and Y.Seo, An extension of the Kubo-Ando theory:Solidarities, Math. Japon., 35(1990), 387-348.

[2] J.I.Fujii and E.Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, Math. Japon., 34(1989), 341-348.

[3] J.I.Fujii and E.Kamei, Uhlmann's interpolational method for operator means, Math. Japon., 34(1989), 541-547.

[4] J.I.Fujii and E.Kamei, Interpolational paths and their derivatives, Math. Japon., 39(1994), 557-560.

[5] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, Fundamental properties of Tsallis relative entropy, J. Math. Phys., 45(2004), 4868-4877.

[6] T.Furuta,Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbertspace operators, Linear Algebra Appl., 381(2004), 219-235.

[7] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann., 246(1980), 205-224.

[8] E.Kamei, Paths of operators parametrized by operator means, Math. Japon., 39(1994), 365-400.

[9] M.Nakamura and H.Umegaki, An note on the entropy for operator algebras, Proc. Jap. Acad., 37(1961), 149-154.

[10] J. von Neumann, "Mathematische Grundlagen der Quantummechanik", Springer-Verg, 1932.

[11] M.Ohya and D.Petz, "Quantum Entropy and Its Use", Springer-Verlag, 1993.

[12] D.Petz, Bregman divergence as relative operator entropy, Preprint.

[13] K.Yanagi, K.Kuriyama and S.Furuichi, Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy, Linear Algebra Appl., 394(2005), 109-118.

[14] H.Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra IV, Kodai Math. Sem. Rep., 14(1962), 59-85.

(*)Osaka Kyoiku University, Asahigaoka, Kashiwara, Osaka, 582-8582, Japan
e-mail: fujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

(**)Maebashi Institute of Technology, Kamisadori, Maebashi, Gunma, 371-0816, Japan
e-mail: kamei@maebashi-it.ac.jp