



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第3回数学総合若手研究集会 : 他分野との学際的交流を目指して
Author(s)	Suzuki, Akito; Ito, Takao; Sato, Norifumi et al.
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 117, 1
Issue Date	2007-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/25711
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/28025
Type	departmental bulletin paper
File Information	00001674.pdf



21st Century COE Program:
Mathematics of Nonlinear Structure via Singularity

第3回数学総合若手研究集会
～他分野との学際的交流を目指して
The 3rd COE Conference for Young Researchers
— CCYR3 —

鈴木章斗, 伊藤孝男, 佐藤規文, 渋谷一博, 広瀬大輔, 前川泰則, 松本和宏
COE 運営委員会交流機能代表 泉屋 周一

Sapporo, 2007

Series #117. February, 2007

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #94 Y. Nakano, 学位論文 Doctoral thesis “OPTIMAL HEDGING IN THE PRESENCE OF SHORTFALL RISK” 43 pages. 2005.
- #95 Keiji Matsumoto and Masao Jinzenji (Eds.), 2004 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 17 pages. 2005.
- #96 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 30th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 83 pages. 2005.
- #97 M. Watanabe, 第 5 回 COE 研究員連続講演会 『逆散乱法』入門, 52 pages. 2005.
- #98 M. Takeda, T. Mikami (Eds.), Probability and PDE, 48 pages. 2005.
- #99 M. Van Manen, The 6th COE Lecture Series “From the cut-locus via medial axis to the Voronoi diagram and back” 42 pages. 2005.
- #100 K. Hayami, T. Nara, D. Furihata, T. Matsuo, T. Sakurai and T. Sakajo (Eds.), 応用数理サマーセミナー「逆問題」, 196 pages. 2005.
- #101 B. Forbes, The 7th COE Lecture Series トーリックミラー対称性, 56 pages. 2005.
- #102 H. Kubo, T. Ozawa and K. Yamauchi, SAPPORO GUEST HOUSE SYMPOSIUM ON MATHEMATICS 20 “Nonlinear Wave Equations”, 68 pages. 2005.
- #103 A. Miyachi and K. Tachizawa, Proceedings of the Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, 107 pages. 2005.
- #104 S. Izumiya (Ed), Y. Numata, J. Ishimoto, I. Sasaki, Y. Nagase and M. Yamamoto, 第 2 回数学総合若手研究集会 - The 2nd COE Conference for Young Researchers -, 274 pages. 2006.
- #105 T. Yamamoto, O. Hatori, M. Hayashi and T. Nakazi (Eds.), 第 14 回関数空間セミナー, 112 pages. 2006.
- #106 Y. Daido, 学位論文 Doctoral thesis “RECONSTRUCTION OF INCLUSIONS FOR THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT EQUATION USING PROBE METHOD”, 68 pages. 2006.
- #107 T. Yamamoto, 学位論文 Doctoral thesis “Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants”, 333 pages. 2006.
- #108 S. Izumiya, Singularity theory of smooth mappings and its applications: a survey for non-specialists, 41 pages. 2006.
- #109 J. Cheng, B. Y. C. Hon, J. Y. Lee, G. Nakamura and M. Yamamoto, Inverse Problems in Applied Sciences - towards breakthrough - Organizing Committee, 96 pages. 2006.
- #110 K. Matsumoto, 超幾何関数早春学校, 87 pages. 2006.
- #111 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 31th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 91 pages. 2006.
- #112 H. Okamoto, D. Sheen, Z. Shi, T. Ozawa, T. Sakajo and Y. Chen, Book of Abstracts of the First China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics & The Second East Asia SIAM Symposium, 78 pages. 2006.
- #113 N. Ishimura, T. Ishiwata, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, K. Hayami, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー「確率微分方程式」, 116 pages. 2006.
- #114 T. Abe, 第 8 回 COE 研究員連続講演会『超平面配置と対数的ベクトル場の幾何』, 23 pages. 2006.
- #115 H. Kubo and T. Ozawa, Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 22 “Nonlinear Wave Equations”, 67 pages. 2006.
- #116 S. Okabe, 第 9 回 COE 研究員連続講演会『ある束縛条件下における平面弾性閉曲線のダイナミクス』, 31 pages. 2006.

21st Century COE Program:
Mathematics of Nonlinear Structure via Singularity

第3回 数学総合若手研究集会
～他分野との学際的交流を目指して
The 3rd COE Conference for Young Researchers
-CCYR3-

鈴木章斗, 伊藤孝男, 佐藤規文, 渋谷一博, 広瀬大輔, 前川泰則, 松本和宏
COE 運営委員会交流機能代表 泉屋 周一

Sapporo, 2007

当研究集会の経費は
北海道大学 21 世紀 COE プログラム「特異性から見た非線形構造の数学」
北海道大学大学院理学研究院数学部門
により賄われています。

はじめに

第3回数学総合若手研究集会～他分野との学際的交流を目指して-The 3rd COE Conference for Young Researchers- (CCYR3) は、北海道大学 21 世紀 COE プログラム「特異性から見た非線形構造の数学」の交流機能の一事業として大学院生、ポストドクターら若手研究者により運営される研究集会です。

この研究集会は、

- 様々な分野の若手研究者が発表し、交流しあう場を提供する事で、お互いの研究活動に刺激を与える事。
- 数学の各分野間の横型の連携、基盤研究と応用研究間の縦型の交流という 2 つの軸に沿った交流を行う事。

を目的としております。

本アブストラクト集は講演者の方々から事前に集めた原稿をそのまま印刷したものです。本研究集会の目的から、講演者の方々には他分野の方々にも分かりやすい様に入門的な事項を含めて書いて頂いております。参加者が講演をより深く理解し、活発な交流を行ってご自身の研究を進展させる一助になればこの上ない喜びです。

また本研究集会では、60 分講演がシングルセッション、30 分講演がパラレルセッションになっています。シングルセッションではより入門的な内容を含めて講演して頂き、パラレルセッションでは同分野の人を対象に専門的なことも含めて講演して頂くことになっています。

なおこの研究集会は、

- * 北海道大学 21 世紀 COE プログラム「特異性から見た非線形構造の数学」
- * 北海道大学大学院理学研究院数学部門

の援助を受けて開催されます。

最後になりましたが、開催にあたり、

COE 運営委員会の先生方をはじめ、北大数学教室の先生方、

COE 研究推進室ならびに COE 研究支援室の事務の方々、

講演者の皆様、参加者の皆様、

第 1,2 回 CCYR 世話人の方々、第 4 回 CCYR 世話人の方々

から多大なるご支援を頂きました。この場をかりて心より感謝申し上げます。

2007 年 2 月

CCYR3 世話人

鈴木章斗, 伊藤孝男, 佐藤規文, 渋谷一博, 広瀬大輔, 前川泰則, 松本和宏

第3回 数学総合若手研究集会

The 3rd COE Conference for Young Researchers -CCYR3-

世話人: 鈴木章斗, 伊藤孝男, 佐藤規文, 渋谷一博, 広瀬大輔, 前川泰則, 松本和宏
Organizers: A. Suzuki, T. Ito, N. Sato, K. Shibuya, D. Hirose, Y. Maekawa and K. Matsumoto

期間: 2007年2月13日(火) ~ 2月16日(金)

Period: February 13-16, 2007

場所: 北海道大学理学部3号館508室・512室, 4号館409室・508室,
5号館203室・2階ロビー

Venue: Room 508 and 512, Faculty of Science Building #3;
Room 409 and 508, Faculty of Science Building #4; and
Room 203 and 2nd Floor Lobby, Faculty of Science Building #5, Hokkaido University

プログラム: (A)は3-508, (B)は3-512, (C)は4-508, (D)は4-409, (E)は5-203, (F)は2階ロビーです.

Program: (A),(B),(C),(D),(E) and (F) are held in Room 3-508, 3-512, 4-508, 4-409, 5-203
and 2nd Floor Lobby respectively.

2月13日(火) / Tuesday, February 13

9:50- 開会の挨拶 / Opening Address

10:00-11:00 (E) 原下 秀士 (Shushi HARASHITA) 北海道大学大学院理学研究院
Configuration of the central streams in the moduli of abelian varieties

11:15-12:15 (E) 今田 光彦 (Mitsuhiko IMADA) 東京工業大学大学院理工学研究科
固定点の近傍における正則写像の力学系について
(The dynamics of a holomorphic map in some small neighborhood of a fixed point)

14:00-14:30 (A) 岩成 勇 (Isamu IWANARI) 京都大学大学院理学研究科
Geometry of toric stacks

(B) 山崎 雅人 (Masahito YAMAZAKI) 東京大学大学院理学系研究科
コアメーバ, ダイマー, ホモロジカル・ミラー対称性
(Coamoeba, dimer and homological mirror symmetry)

(C) 山岸 弘幸 (Hiroyuki YAMAGISHI) 大阪大学大学院基礎工学研究科
リーマンゼータ関数, ベルヌーイ多項式とソボレフ不等式の最良定数
(Riemann zeta function, Bernoulli polynomials and the best constant
of Sobolev inequality)

(D) Boldizsar KALMAR 九州大学大学院数理学府
Cobordisms of fold maps

14:45-15:15 (A) 深谷 友宏 (Tomohiro FUKAYA) 京都大学大学院理学研究科
Application of Gröbner bases and computer calculation to LS-category of oriented
Grassmann manifolds

(B) 藪 義郎 (Yoshiro YABU) 京都大学大学院情報学研究科
On Hamiltonian deformation of loops

- (C) 千葉 逸人 (Hayato CHIBA) 京都大学大学院情報学研究科
 繰り込み群によるベクトル場の C^1 近似
 (C^1 approximation of vector fields on the renormalization group method)
- (D) 茂地 圭一 (Keiichi SHIGECHI) 東京大学大学院理学系研究科
 $O(1)$ -loop models and the sum rule: affine Temperley-Lieb/Hecke algebra
 and qKZ equation

- 15:30-16:00 (A) 町出 智也 (Tomoya MACHIDE) 北海道大学大学院理学研究科
 An elliptic analogue of the generalized Dedekind-Rademacher sums
- (B) 鍛冶 静雄 (Shizuo KAJI) 京都大学大学院理学研究科
 Homotopy nilpotency in localized Lie groups
- (C) 中村 昌裕 (Masahiro NAKAMURA) 大阪大学大学院理学研究科
 Ergodic theorems for random sequences
- (D) 坂庭 康仁 (Yasunori SAKANIWA) 北海道大学大学院工学研究科
 負曲率面上イジング格子模型のハイパースケーリング則
 (Hyperscaling in the Ising lattice model on a surface with negative curvature)

2月14日(水) / Wednesday, February 14

- 10:00-10:30 (A) 村井 聡 (Satoshi MURAI) 大阪大学大学院情報科学研究科
 Universal lexsegment ideals
- (C) 三竹 大寿 (Hiroyoshi MITAKE) 早稲田大学大学院理工学研究科
 Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations with state constraints
- (D) 出来 光夫 (Mitsuo IZUKI) 北海道大学大学院理学研究科
 The characterizations of weighted function spaces by wavelets and scaling functions
- 10:45-11:15 (A) 君塚 磨 (Maro KIMIZUKA) 日本大学大学院理工学研究科
 M -matrices of the ternary Golay code and the Mathieu group M_{12}
- (B) **Gengyu ZHANG** 東京工業大学大学院理工学研究科
 Crosscap numbers of knots and links
- (C) 菊池 弘明 (Hiroaki KIKUCHI) 京都大学大学院理学研究科
 Stability of standing waves for the Schrödinger-Poisson-Slater equation
- (D) 岡 康之 (Yasuyuki OKA) 上智大学大学院理工学研究科
 Asymptotic expansions of the solutions to the heat equations with
 generalized functions initial value
- 13:00-14:00 (E) 名古屋 創 (Hajime NAGOYA) 東京大学大学院数理科学研究科
 Classical and Quantum isomonodromic deformation with affine Weyl group symmetry
 of type $C_l^{(1)}$
- 14:15-15:15 (E) 岩切 雅英 (Masahide IWAKIRI) 広島大学大学院理学研究科
 The lower bound of the w -indices of surface links via quandle cocycle invariants
- 15:30-17:00 (F) ポスターセッション
 越坂部 恭史 (Yasushi OSAKABE) 北海道大学大学院理学研究科
 Classification of behavior induced by noise in a spatio-temporal intermittency model

川俣 弘治 (Koji KAWAMATA) 新潟大学大学院自然科学研究科
 重み付き・異方性全変動汎関数最小化を用いた画像修復
 (Anisotropic and weighted total variation for image restoration)

北川 友美子 (Yumiko KITAGAWA) 東京理科大学理工学部
 サブリーマン多様体上の測地線
 (Geodesics on Sub-Riemannian manifolds)

黒田 拓 (Hiraku KURODA) 北海道大学大学院理学院
 MathML-library for Ruby, and its applications

下田 啓詞 (Hiroshi SHIMODA) 北海道大学大学院工学研究科
 境界要素法を用いた核融合プラズマ平衡解析
 (Boundary element method applied to the equilibrium analyses of nuclear fusion plasma)

杉山 儀 (Tadashi SUGIYAMA) 名古屋工業大学大学院工学研究科
 Logarithmic derivatives of curvature of curves and isometric immersions

關 良輔 (Ryosuke SEKI) 北海道大学大学院工学研究科
 ヘリオトロン型核融合装置における粒子軌道解析
 (Particle orbit analysis in heliotron type nuclear fusion device)

平 久夫 (Hisao TAIRA) 北海道大学大学院工学研究科
 The Schrödinger equation of a quantum system embedded on a curved surface

西野 信也 (Shinya NISHINO) 北海道大学大学院工学研究科
 フラットバンド不規則電子系における局在一非局在転移
 (Localization-delocalization transition in a flat band disordered electronic system)

野田 尚廣 (Takahiro NODA) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
 微分方程式の同値問題
 (Equivalence problem of differential equations)

若狭 有光 (Arimitsu WAKASA) 北海道大学大学院工学研究科
 核融合プラズマ解析へのニューラルネットワークの適用
 (Application of neural network to the fusion plasma analysis)

[懇親会]

2月15日(木) / Thursday, February 15

- 10:00-11:00 (E) 黒木 慎太郎 (Shintaro KUROKI) 大阪市立大学数学研究所
 トーラス多様体上の余次元0または1の軌道を持つコンパクト群作用の分類
 (Classification of compact group actions on torus manifolds which have
 codimension 0 or 1 orbits)
- 11:15-12:15 (E) 斉木 吉隆 (Yoshitaka SAIKI) 慶應義塾大学理工学部
 Lorenz chaotic system and unstable periodic orbits
- 14:00-14:30 (A) 上條 亮 (Akira KAMIJO) 北海道大学大学院理学院
 On the congruence in a finite group
- (B) 山本 卓宏 (Takahiro YAMAMOTO) 九州大学大学院数理学研究院
 Singular fibers and characteristic classes
- (C) 増田 茂 (Shigeru MASUDA) 首都大学東京大学院理学研究科
 The earlier-on successions of the constructions of the solutions on the Navier-Stokes
 equations
- (D) Felipe CAMPELO 北海道大学大学院情報科学研究科
 Properties of additive models in multiobjective optimization problems

- 14:45-15:15 (A) 榑崎 亮 (Ryo NARASAKI) 大阪大学大学院理学研究科
On perfect isometries
- (B) 伊藤 昇 (Noboru ITO) 早稲田大学大学院理工学研究科
Word theory and its applications to knots and plane curves
- (C) 上田 好寛 (Yoshihiro UEDA) 九州大学大学院数理学府
Asymptotic stability of stationary waves for viscous gases
- (D) 矢口 久雄 (Hisao YAGUCHI) 北海道大学大学院工学研究科
ナノ液滴の蒸発・凝縮に関する分子動力的研究
(Molecular dynamics study of evaporation and condensation of nanodroplets)
- 15:30-16:00 (A) 若林 徳子 (Noriko WAKABAYASHI) 近畿大学大学院総合理工学研究科
Cyclic sum of multiple zeta values
- (B) 安井 弘一 (Kouichi YASUI) 大阪大学大学院理学研究科
Exotic rational elliptic surfaces without 1-handles
- (C) 梅原 守道 (Morimichi UMEHARA) 慶應義塾大学大学院理工学研究科
Global existence of the solution to the system for a spherically symmetric viscous gaseous star with rigid core
- (D) 小林一 道 (Kazumichi KOBAYASHI) 北海道大学大学院工学研究科
Gaussian-BGK Boltzmann 方程式に基づく相変化現象に対するアプローチ
(An approach for phase change phenomena based of the Gaussian-BGK Boltzmann equation)

2月16日(金) / Friday, February 16

- 10:00-11:00 (E) 川上 裕 (Yu KAWAKAMI) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Value distribution of the hyperbolic Gauss map of constant mean curvature one surfaces
- 11:15-12:15 (E) 澤野 嘉宏 (Yoshihiro SAWANO) 東京大学大学院数理科学研究科
分数積分作用素の有界性に関して
(On the boundedness of the fractional integral operators)
- 12:15- 閉会の挨拶 / Closing Address

Configuration of the central streams in the moduli of abelian varieties

Shushi Harashita

Talk at the 3rd COE conference for young researchers
Hokkaido University, February 13, 2007

Abstract

We study the structure of the moduli space \mathcal{A}_g of principally polarized abelian varieties in characteristic p . Oort defined *the central streams* in \mathcal{A}_g . We determine the configuration of the central streams. As a corollary of our proof we obtain a new proof of the dimension formula of the central streams.

1 Introduction

We fix once for all a rational prime p . Let \mathcal{A}_g be the moduli space of principally polarized abelian varieties over fields of characteristic p .

We have two main stratifications on \mathcal{A}_g : the Newton polygon stratification

$$\mathcal{A}_g = \bigsqcup_{\xi} W_{\xi}^0$$

and the Ekedahl-Oort stratification

$$\mathcal{A}_g = \bigsqcup_{\varphi} S_{\varphi},$$

where ξ is a symmetric Newton polygon and φ is an elementary sequence. We shall give a brief review of these stratifications in §2.2 and §2.3.

In [Oor04] Oort defined *central leaves* and *isogeny leaves* in the open Newton polygon stratum W_{ξ}^0 for a symmetric Newton polygon ξ , and showed that a central leaf and an isogeny leaf give an “almost” product structure on each irreducible component of W_{ξ}^0 ([Oor04], (5.3)). Clearly this result tells us that it is important to investigate these two leaves in detail in order to know the structure of \mathcal{A}_g .

For each symmetric Newton polygon ξ , there is a special central leaf

$$\mathcal{Z}_{\xi} \subset W_{\xi}^0,$$

which is called *the central stream* (cf. §2.4).

Our main theorem is Th. 3.1. This theorem produces a couple of corollaries. First we can determine the configuration of the central streams $\{\mathcal{Z}_{\xi}\}$ in \mathcal{A}_g (Cor. 3.2):

$$\mathcal{Z}_{\zeta} \subset \overline{\mathcal{Z}_{\xi}} \iff \zeta \prec \xi.$$

As another corollary we obtain the dimension formula of the central streams (Cor. 3.4), which has been obtained by Oort and Chai-Oort (see [Oor]). Also we give a contribution (Cor. 3.7) to Oort's conjecture (Conj. 3.6) on intersections of Newton polygon strata and Ekedahl-Oort strata.

2 Stratifications and foliations

We start with reviewing the definition of the stratifications and the foliations, and some facts that we shall use later on.

2.1 Dieudonné theory

Let K be a perfect field of characteristic p and $W(K)$ the ring of infinite Witt vectors with coordinates in K . Let A_K be the p -adic completion of the associative ring

$$W(K)[\mathcal{F}, \mathcal{V}] / (\mathcal{F}x - x^p \mathcal{F}, \mathcal{V}x^p - x\mathcal{V}, \mathcal{F}\mathcal{V} - p, \mathcal{V}\mathcal{F} - p, \forall x \in W(K))$$

with the Frobenius automorphism ρ of $W(K)$. Note A_K is not commutative unless $K = \mathbb{F}_p$. A *Dieudonné module over $W(K)$* is a left A_K -module which is finitely generated as a $W(K)$ -module.

The covariant Dieudonné theory says that there is a canonical categorical equivalence \mathbb{D} from the category of p -torsion finite commutative group schemes (resp. p -divisible groups) over K to the category of Dieudonné modules over $W(K)$ which are of finite length (resp. free as $W(K)$ -modules). We write F and V for “Frobenius” and “Verschiebung” on commutative group schemes. The covariant Dieudonné functor \mathbb{D} satisfies $\mathbb{D}(F) = \mathcal{V}$ and $\mathbb{D}(V) = \mathcal{F}$.

2.2 The NP-stratification

A pair (m, n) of non-negative integers with $\gcd(m, n) = 1$ is called a *segment*. The *slope* $\lambda(\varrho)$ of a segment $\varrho = (m, n)$ is defined to be $n/(m+n)$.

For a series $(\varrho_1, \dots, \varrho_t)$ of segments $\varrho_i = (m_i, n_i)$, putting $P_j := (\sum_{i=1}^j (m_i + n_i), \sum_{i=1}^j n_i) \in \mathbb{R}^2$ for $0 \leq j \leq t$, let $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varrho_1, \dots, \varrho_t)$ denote the line graph in \mathbb{R}^2 passing through P_0, \dots, P_t in this order. The *i -th slope* of \mathcal{L} is the slope $\lambda(\varrho_i)$ of ϱ_i . The *height* h of \mathcal{L} is the integer $\sum_{i=1}^t (m_i + n_i)$. Naturally \mathcal{L} is regarded as a continuous map from $[0, h]$ to \mathbb{R} . For a point $Q \in [0, h] \times \mathbb{R}$, we say $Q \prec \mathcal{L}$ if Q is not below \mathcal{L} . We say, for two line graphs $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ as above with the same end point, that $\mathcal{L}' \prec \mathcal{L}$ if $Q \prec \mathcal{L}$ for all $Q \in \mathcal{L}'$. A line graph $\mathcal{L}(\varrho_1, \dots, \varrho_t)$ is said to be *symmetric* if $\lambda(\varrho_i) + \lambda(\varrho_{t+1-i}) = 1$ for all $i = 1, \dots, t$.

A *Newton polygon* is a line graph of the form $\mathcal{L}(\varrho_1, \dots, \varrho_t)$ with $\lambda(\varrho_1) \leq \dots \leq \lambda(\varrho_t)$. We usually write this Newton polygon as $\varrho_1 + \dots + \varrho_t$. The symmetric Newton polygon with $\lambda(\varrho_1) = \dots = \lambda(\varrho_t) = 1/2$ is called *supersingular* and is denoted by σ .

For a segment (m, n) , we define a p -divisible group $G_{m,n}$ over \mathbb{F}_p by

$$\mathbb{D}(G_{m,n}) = A_{\mathbb{F}_p} / A_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{F}^m - \mathcal{V}^n). \quad (2.2.1)$$

By the Dieudonné-Manin classification ([Man63] and [Dem72]), for any p -divisible group \mathcal{G} over a field K of characteristic p , there is an isogeny over an algebraically closed field Ω containing

K from \mathcal{G} to

$$\bigoplus_{i=1}^t G_{m_i, n_i} \quad (2.2.2)$$

for some finite set of segments $\varrho_i = (m_i, n_i)$. Thus we get a Newton polygon $\varrho_1 + \cdots + \varrho_t$, which is denoted by $\text{NP}(\mathcal{G})$. For an abelian variety X , we have its Newton polygon $\text{NP}(X) := \text{NP}(X[p^\infty])$. Note $\text{NP}(X)$ is symmetric.

For a symmetric Newton polygon ξ of height $2g$, we define its *NP-stratum* by

$$W_\xi = \{(X, \mu) \in \mathcal{A}_g \mid \text{NP}(X) \prec \xi\},$$

which has a natural structure of closed subscheme of \mathcal{A}_g by Grothendieck and Katz ([Kat79], Th. 2.3.1 on p. 143). We also define *the open NP-stratum* by

$$W_\xi^0 = \{(X, \mu) \in \mathcal{A}_g \mid \text{NP}(X) = \xi\},$$

which is a locally closed subscheme of \mathcal{A}_g .

2.3 The EO-stratification

The main reference for the EO-stratification is [Oor01a]. Also see [Moo01] and [EG] for the beautiful formulation in terms of Weyl groups. In this note, we follow the notations of [Oor01a].

Let K be a field of characteristic p .

Definition 2.1. A finite commutative group scheme G over K is said to be a *truncated Barsotti-Tate group of level one* (denoted by BT_1) over K if

$$\begin{aligned} \text{Im}(V : G^{(p)} \rightarrow G) &= \text{Ker}(F : G \rightarrow G^{(p)}), \\ \text{Im}(F : G \rightarrow G^{(p)}) &= \text{Ker}(V : G^{(p)} \rightarrow G). \end{aligned}$$

Definition 2.2. A *final sequence of length d* is a map $\psi : \{0, 1, \dots, d\} \rightarrow \{0, 1, \dots, d\}$ satisfying $\psi(0) = 0$ and $\psi(i-1) \leq \psi(i) \leq \psi(i-1) + 1$.

Let G be a BT_1 over K . For any subgroup scheme G' of G over \bar{K} and for any word w of V, F^{-1} , we define $w \cdot G'$ inductively by $V \cdot G' := VG'^{(p)}$ and $F^{-1} \cdot G' := F^{-1}(G'^{(p)} \cap FG)$. Then there exists a unique final sequence ψ of a certain length d such that for any word w of V, F^{-1} we have $\psi(\text{length}(w \cdot G)) = \text{length}(Vw \cdot G)$. It was proved that there exists a filtration over \bar{K}

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_d = G \quad (2.3.1)$$

with $\text{length}(G_i) = i$ such that

$$V \cdot G_i = G_{\psi(i)} \quad \text{and} \quad F^{-1} \cdot G_i = G_{\psi(d)+i-\psi(i)} \quad \text{for} \quad 0 \leq i \leq d. \quad (2.3.2)$$

A filtration as in (2.3.1) satisfying (2.3.2) is called a *final filtration of G* .

Thus we have a canonical map

$$\text{FS} : \{\text{BT}_1 \text{ of length } d \text{ over } K\} / K\text{-isom.} \longrightarrow \{\text{final sequence of length } d\}.$$

The following theorem was first obtained by Kraft [Kra75]:

Theorem 2.3. *If K is algebraically closed, then FS is bijective.*

Assume k is perfect.

Definition 2.4. A polarized BT_1 over K is a pair (G, \langle, \rangle) of a BT_1 G over K and an alternating form \langle, \rangle on $\mathbb{D}(G)$ satisfying $\langle \mathcal{F}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{V}y \rangle^\rho$.

Definition 2.5. (1) An elementary sequence of length g is a final sequence of length g .

(2) A symmetric final sequence of length $2g$ is a map $\psi : \{0, 1, \dots, 2g\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 2g\}$ satisfying $\psi(0) = 0$ and $\psi(i-1) \leq \psi(i) \leq \psi(i-1) + 1$ for $1 \leq i \leq 2g$ and $\psi(2g-i) = g + \psi(i) - i$.

Let ψ be a symmetric final sequence of length $2g$; then the restriction of ψ to $\{0, \dots, g\}$ defines an elementary sequence of length g . Conversely for an elementary sequence φ of length g , we have a symmetric final sequence ψ of length $2g$ defined by $\psi(i) = \varphi(i)$ and $\psi(2g-i) = g - i + \varphi(i)$ for all $0 \leq i \leq g$, which is called *the final sequence stretched from φ* . Thus we have a canonical bijection from the set of symmetric final sequences of length $2g$ to the set of elementary sequences of length g .

If (G, \langle, \rangle) is a polarized BT_1 , then $\psi := \text{FS}(G)$ is symmetric. Hence we have a canonical map

$$\text{ES} : \{\text{polarized } \text{BT}_1 \text{ of length } 2g \text{ over } K\} / K\text{-isom.} \longrightarrow \{\text{elementary sequence of length } g\}.$$

The following theorem was proved in [Oor01a], (9.4):

Theorem 2.6. *If K is algebraically closed, then ES is bijective.*

For each elementary sequence φ of length g , the EO-stratum S_φ is defined to be the subset of \mathcal{A}_g consisting of points $y \in \mathcal{A}_g$ where y comes over some field from a principally polarized abelian variety X_y such that $\text{ES}(X_y[p]) = \varphi$, see [Oor01a], (5.11). As shown in [Oor01a], (3.2), S_φ has a natural structure of a locally closed reduced subscheme of \mathcal{A}_g .

There are two partial orderings on the set of elementary sequences of length g .

Definition 2.7. Let φ and φ' be two elementary sequences of length g .

- (1) We say $\varphi' \leq_{\text{BC}} \varphi$ if $\varphi'(i) \leq \varphi(i)$ for all $i = 1, \dots, g$. This order is called the Bruhat-Chevalley order.
- (2) We say $\varphi' \subset \varphi$ if $S_{\varphi'}$ is contained in the Zariski closure $\overline{S_\varphi}$ of S_φ in \mathcal{A}_g .

We shall use the results of [Oor01a]:

Theorem 2.8. (1) S_φ is not empty and is quasi-affine for every φ .

(2) Any irreducible component of S_φ has dimension $|\varphi| := \sum_{i=1}^g \varphi(i)$.

(3) $\varphi' \leq_{\text{BC}} \varphi$ implies $\varphi' \subset \varphi$.

(4) $\varphi' \subset \varphi$ is equivalent to $S_{\varphi'} \cap \overline{S_\varphi} \neq \emptyset$.

Also recall the result of Ekedahl and van der Geer ([EG], Th. 11.5):

Theorem 2.9. *If $\varphi(\lfloor (g+1)/2 \rfloor) \neq 0$, then S_φ is irreducible.*

Remark 2.10. Oort proved that $\varphi(\lfloor(g+1)/2\rfloor) = 0$ is equivalent to $S_\varphi \subset W_\sigma$ (cf. [CO], (3.7), Step 2). Also see [Har07] for another proof and a generalization of this result of Oort.

For two polarized BT₁'s G and G' , the direct sum $G \oplus G'$ becomes a polarized BT₁ canonically. Let φ and φ' be elementary sequences of G and G' respectively. We denote by $\varphi \oplus \varphi'$ the elementary sequence of $G \oplus G'$. Clearly $S_\varphi \times S_{\varphi'} \subset S_{\varphi \oplus \varphi'}$.

Definition 2.11. Let φ and φ' be two elementary sequences. We say $\varphi' \leq \varphi$ if there exist elementary sequences $\varphi_0, \dots, \varphi_l$ for some l with $0 \leq l < \infty$ such that

- (1) $\varphi' = \varphi_0$ and $\varphi = \varphi_l$,
- (2) for each i ($0 \leq i < l$), there are elementary sequences ϕ, ϕ_1 and ϕ_2 with $\phi_1 <_{BC} \phi_2$ such that $\varphi_i = \phi \oplus \phi_1$ and $\varphi_{i+1} = \phi \oplus \phi_2$.

Lemma 2.12. (1) $\varphi' \leq_{BC} \varphi \implies \varphi' \leq \varphi$.

(2) $\varphi' \leq \varphi \implies \varphi' \subset \varphi$.

Proof. (1) follows immediately from the definition. (2) It suffices to show that $\varphi_1 \subset \varphi_2$ for $\varphi_1 = \phi \oplus \phi_1$ and $\varphi_2 = \phi \oplus \phi_2$ with $\phi_1 <_{BC} \phi_2$. Clearly

$$S_\phi \times S_{\phi_1} \subset S_\phi \times \overline{S_{\phi_2}} \subset \overline{S_\phi \times S_{\phi_2}} \subset \overline{S_{\varphi_2}}.$$

Here we used Th. 2.8 (3) to see the first inclusion. Since $S_\phi \times S_{\phi_1}$ is not empty (Th. 2.8 (1)) and is contained in S_{φ_1} , we have $S_{\varphi_1} \cap \overline{S_{\varphi_2}} \neq \emptyset$. Then $\varphi_1 \subset \varphi_2$ follows from Th. 2.8 (4). \square

Remark 2.13. (1) $\varphi' \leq \varphi$ does not imply $\varphi' \leq_{BC} \varphi$. Indeed put $\varphi = (0, 0, 1, 2, 2)$ and $\varphi' = (0, 1, 1, 1, 1)$. Since $\varphi = (0, 1, 1) \oplus (0, 1)$ and $\varphi' = (0, 1, 1) \oplus (0, 0)$, we have $\varphi' \leq \varphi$. However obviously $\varphi' \not\leq_{BC} \varphi$.

(2) Quite recently in [Wed] Wedhorn determined when $\varphi' \subset \varphi$ in terms of Weyl groups. In this paper we do not use his result.

(3) Question: does $\varphi' \subset \varphi$ imply $\varphi' \leq \varphi$?

2.4 Central streams

We shall review the theory of minimal p -divisible groups [Oor05] and the definition of the central streams [Oor04], (3.10).

Definition 2.14. For non-negative integers m, n with $\gcd(m, n) = 1$, we define a p -divisible group $H_{m,n}$ over \mathbb{F}_p by

$$\mathbb{D}(H_{m,n}) = \bigoplus_{i=0}^{m+n-1} \mathbb{Z}_p x_i$$

with \mathcal{F}, \mathcal{V} operations:

$$\mathcal{F}x_i = x_{i+n} \quad \text{and} \quad \mathcal{V}x_i = x_{i+m} \quad \text{for} \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (2.4.1)$$

where x_i ($i \in \mathbb{Z}_{\geq m+n}$) are defined as satisfying $x_{i+m+n} = px_i$ for $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

For a Newton polygon $\xi = \sum_{i=1}^t (m_i, n_i)$, we denote by $H(\xi)$ the p -divisible group

$$\bigoplus_{i=1}^t H_{m_i, n_i}. \quad (2.4.2)$$

Note the Newton polygon of $H(\xi)$ is equal to ξ .

Definition 2.15. A p -divisible group \mathcal{G} is called *minimal* if there exist a Newton polygon ξ and an isomorphism from \mathcal{G} to $H(\xi)$ over an algebraically closed field.

For any symmetric Newton polygon ξ , we set

$$\mathcal{Z}_\xi = \{x = (A_x, \mu_x) \in \mathcal{A}_g \mid A_x[p^\infty] \otimes \Omega \simeq H(\xi) \otimes \Omega, \text{ for some } \Omega = \overline{\Omega} \supset k(x)\},$$

which has a natural structure of a closed subscheme in W_ξ^0 by [Oor04], (3.3). We call \mathcal{Z}_ξ *the central stream of Newton polygon ξ* .

Recall [Oor05], (1.2):

Theorem 2.16. *Let \mathcal{G} be a p -divisible group over an algebraically closed field Ω . If $\mathcal{G}[p] \simeq H(\xi)[p] \otimes \Omega$, then $\mathcal{G} \simeq H(\xi) \otimes \Omega$ over Ω .*

Let ξ be a symmetric Newton polygon. By [Oor04], Prop. 3.7, there exists a principal quasi-polarization μ on $H(\xi)$, which is unique up to isomorphism of $H(\xi)$. We set

$$\varphi_\xi := \text{ES}(H(\xi)[p], \mu[p]). \quad (2.4.3)$$

Then Th. 2.16 implies that the central stream \mathcal{Z}_ξ coincides with the EO-stratum S_{φ_ξ} . By Th. 2.9, \mathcal{Z}_ξ is irreducible unless ξ is supersingular σ . Let o be the ordinary Newton polygon; then we have $\varphi_o = (1, \dots, g)$; hence $\dim \mathcal{Z}_o = |\varphi_o| = g(g+1)/2$ by Th. 2.8 (2). For the supersingular case, we have $\varphi_\sigma = (0, \dots, 0)$; hence the dimension of any irreducible component of \mathcal{Z}_σ is $|\varphi_\sigma| = 0$.

3 Main theorem

For two Newton polygons ξ and ζ of height $2g$ with $\zeta \prec \xi$, we set

$$c(\xi; \zeta) = 2 \sum_{1 \leq i \leq g} (\zeta(i) - \xi(i))$$

and $c(\xi) = c(\xi; \sigma)$. Note $c(\xi; \zeta) = c(\xi) - c(\zeta)$.

Our main result is:

Theorem 3.1. *Let ξ and ζ be two symmetric Newton polygons with $\zeta \prec \xi$. Then there exists a series of elementary sequences φ_i ($0 \leq i \leq c(\xi; \zeta)$) of length g such that*

$$\varphi_\zeta = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{c(\xi; \zeta)} = \varphi_\xi.$$

Let $\overline{\mathcal{Z}_\xi}$ denote the Zariski closure of \mathcal{Z}_ξ in \mathcal{A}_g . Then

Corollary 3.2. *$\mathcal{Z}_\zeta \subset \overline{\mathcal{Z}_\xi}$ if and only if $\zeta \prec \xi$.*

Proof. Assume $\zeta \prec \xi$. Th. 3.1 says in particular $\varphi_\zeta \leq \varphi_\xi$. Then we have $\varphi_\zeta \subset \varphi_\xi$ by Lem. 2.12 (2). The “only if”-part follows from Grothendieck-Katz ([Kat79], Th. 2.3.1). \square

Remark 3.3. Cor. 3.2 was expected in [Oor04], (6.10).

Corollary 3.4. $\dim(\mathcal{Z}_\xi) = c(\xi)$.

Proof. Let o be the ordinary Newton polygon. We know $\dim(\mathcal{Z}_o) = g(g+1)/2 = c(o)$ and $\dim(\mathcal{Z}_\sigma) = 0 = c(\sigma)$. By Th. 3.1 we have $\dim(\mathcal{Z}_\xi) - \dim(\mathcal{Z}_\zeta) \geq c(\xi; \zeta)$ for any symmetric Newton polygons $\zeta \prec \xi$. Applying this to $\sigma \prec \xi$ and $\xi \prec o$, we have $c(\sigma) + c(\xi; \sigma) \leq \dim(\mathcal{Z}_\xi) \leq c(o) - c(o; \xi)$. Since $c(\sigma) + c(\xi; \sigma) = c(\xi) = c(o) - c(o; \xi)$ by definition, we get $\dim(\mathcal{Z}_\xi) = c(\xi)$. \square

Remark 3.5. As Oort showed in [Oor04], from Cor. 3.4 we obtain the dimension formulas of central leaves and isogeny leaves (Rapoport-Zink spaces).

In [Oor04], (6.9) Oort conjectured

Conjecture 3.6. If $W_\xi^0 \cap S_\varphi \neq \emptyset$, then $\mathcal{Z}_\xi \subset \overline{S_\varphi}$.

For an elementary sequence φ , let ξ_φ be the Newton polygon of the generic point of S_φ if $S_\varphi \not\subset W_\sigma$ and the supersingular Newton polygon σ if $S_\varphi \subset W_\sigma$ (see Th. 2.9 and Rem. 2.10). Clearly $W_{\xi_\varphi}^0 \cap S_\varphi \neq \emptyset$; hence Conj. 3.6 implies $\mathcal{Z}_{\xi_\varphi} \subset \overline{S_\varphi}$. Let us show that the inverse holds:

Corollary 3.7. $\mathcal{Z}_{\xi_\varphi} \subset \overline{S_\varphi}$ implies Conj. 3.6.

Proof. Assume $\mathcal{Z}_{\xi_\varphi} \subset \overline{S_\varphi}$. If $W_\xi^0 \cap S_\varphi \neq \emptyset$, we have $\xi \prec \xi_\varphi$ by Grothendieck and Katz ([Kat79], Th. 2.3.1); then Cor. 3.2 implies $\mathcal{Z}_\xi \subset \overline{\mathcal{Z}_{\xi_\varphi}}$, which is contained in $\overline{S_\varphi}$ by the assumption. \square

Remark 3.8. We shall prove $\mathcal{Z}_{\xi_\varphi} \subset \overline{S_\varphi}$ in the forthcoming paper [GNP].

References

- [CO] C.-L. Chai and F. Oort: Monodromy and irreducibility of leaves. Preprint. See <http://www.math.uu.nl/people/oort/>.
- [Dem72] M. Demazure: Lectures on p -divisible groups. Lecture Notes in Mathematics, **302**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [EG] T. Ekedahl and G. van der Geer: Cycle classes of the E-O stratification on the moduli of abelian varieties. Preprint: math.AG/0412272.
- [Har07] S. Harashita: Ekedahl-Oort Strata and the First Newton Slope Strata. J. Algebraic Geom. **16** (2007) 171–199.
- [CCS] S. Harashita: Configuration of the central streams in the moduli of abelian varieties. Manuscript 33 pp. See <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~harashita>.
- [GNP] S. Harashita: Generic Newton polygons of Ekedahl-Oort strata: Oort’s conjecture. In preparation.
- [Kat79] N. M. Katz: Slope filtration of F -crystals. Journ. Géom. Alg. Rennes, Vol. I, Astérisque **63** (1979), Soc. Math. France, 113-164.

- [Kra75] H. Kraft: Kommutative algebraische p -Gruppen (mit Anwendungen auf p -divisible Gruppen und abelsche Varietäten). Sonderforsche. Bereich Bonn, September 1975. Ms. 86 pp.
- [Man63] Yu. I. Manin: Theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic. Uspehi Mat. Nauk **18** (1963) no. 6 (114), 3–90; Russ. Math. Surveys **18** (1963), 1-80.
- [Moo01] B. Moonen: Group schemes with additional structures and Weyl group cosets. In: Moduli of abelian varieties (Ed. C. Faber, G. van der Geer, F. Oort), Progr. Math., **195**, Birkhäuser, Basel, 2001; pp. 255–298.
- [Oor66] F. Oort: Commutative group schemes. Lecture Notes in Mathematics, **15**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.
- [Oor01a] F. Oort: A stratification of a moduli space of abelian varieties. In: Moduli of abelian varieties (Ed. C. Faber, G. van der Geer, F. Oort), Progr. Math., **195**, Birkhäuser, Basel, 2001; pp. 345–416.
- [Oor01b] F. Oort: Newton Polygon Strata in the Moduli Space of Abelian Varieties. In: Moduli of abelian varieties (Ed. C. Faber, G. van der Geer, F. Oort), Progr. Math., **195**, Birkhäuser, Basel, 2001; pp. 417–440.
- [Oor04] F. Oort: Foliations in moduli spaces of abelian varieties. J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 2, 267–296.
- [Oor05] F. Oort: Minimal p -divisible groups. Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 2, 1021–1036.
- [Oor] F. Oort: Foliations in moduli spaces of abelian varieties and dimension of leaves. Preprint. See <http://www.math.uu.nl/people/oort/>.
- [Wed] T. Wedhorn: Specialization of F -zips. Preprint. See <http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/>.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY,
 Kita 10, Nishi 8, Kita-ku, Sapporo, Hokkaido, 060-0810, Japan.
 E-mail address: harasita@math.sci.hokudai.ac.jp

The dynamics of a holomorphic map in some small neighborhood of a fixed point

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
博士後期課程2年 今田光彦

平成19年2月13日

Abstract

In this talk we survey the dynamics of a holomorphic map in some small neighborhood of a fixed point. It is known that the first derivative at a fixed point plays an important role in the dynamics near the point. Thus we can classify the dynamics near the point into cases using the derivative. Most cases are now well understood, but a few cases still present extremely difficult problems. We introduce a topological technique which can be used to study these cases.

1 固定点の周りの力学系

複素力学系は点や集合を同じ解析関数で繰り返し反復させてその様子を研究する分野である。この節の目的は固定点の近くでその振る舞いをおおまかに分類することである。

1.1 定義

f を解析関数とする。自然数 n に対して f^n を f を n 回反復合成した関数とする。便宜上, f^0 を恒等関数と約束しておく。ある自然数 m が存在して, $f^m(z_0) = z_0$ が成り立つような点 z_0 を**周期点** (periodic point) という。このような自然数 m の中で最小のものを再び m とかくことにして, これを z_0 の**周期** (period) という。特に, 周期 m が1に等しいとき, 点 z_0 を**固定点** (fixed point) という。周期点 z_0 の**乗法因子** (multiplier) を $\lambda = (f^m)'(z_0)$ で定義する。

この乗法因子は周期点 z_0 の近傍における f^m の力学系の振る舞いを調べる重要な指標であり, 天下りの的であるが次のように分類しておく。周期点における振る舞いは固定点における振る舞いの話に持ち込むことができるので, 以下では固定点の話を展開する。

1.2 定義

f は原点で解析的であり、かつ、原点は固定点であるとする。つまり、原点の近

くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の形とする。

- $|\lambda| < 1$ のとき、原点を**吸引固定点** (attracting fixed point) という。
- $|\lambda| = 1$ のとき、原点を**中立固定点** (neutral fixed point) という。
- $|\lambda| > 1$ のとき、原点を**反発固定点** (repelling fixed point) という。

2 吸引及び反発固定点の周りの力学系

この節の目的は吸引及び反発固定点の周りの力学系を位相的に特徴づけることである。それは前節の分類で定義した名前の由来を確認することでもある。

2.1 定義

f は原点で解析的であり、かつ、原点は固定点であるとする。つまり、原点の

近くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の形とする。原点が**位相吸引的** (topologically attracting) であるとは、原点のある近傍 U が存在して、 $f^n|_U$ が原点に U 上一様収束することである。

2.2 命題 ([Mi] Lem 8.1)

f は原点で解析的であり、かつ、原点は固定点であるとする。つまり、原点の近

くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の形とする。このとき、 $|\lambda| < 1$ であることと原点が位相吸引的であることは同値である。

2.3 定義

f は原点で解析的であり、かつ、原点は固定点であるとする。つまり、原点の

近くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の形とする。原点が**位相反発的** (topologically repelling) であるとは、原点のある近傍 U が存在して、 U 内の任意の点 $z \neq 0$ に対してある自然数 n が存在して $f^n(z) \notin U$ が成り立つことである。

2.4 命題 ([Mi] Lem 8.10)

f は原点で解析的であり、かつ、原点は固定点であるとする。つまり、原点の近

くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の形とする。このとき、 $|\lambda| > 1$ であることと原点が位相反発的であることは同値である。

2.5 注意

以上では、吸引及び反発固定点の周りの力学系の位相的な性質しか述べなかったが、実際はもう少し正確な解析的な性質を持っている。例えば、[Mi] の 8 節および 9 節を参照。

3 中立固定点の周りの力学系

この節では中立固定点の周りの力学系をみていく。その力学系をさらに分類するためには次の概念が必要となる。

3.1 定義

f は原点で解析的であり、かつ、原点は中立固定点であるとする。つまり、原点の近くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $\lambda = e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R}$ の形とする。 f が原点で解析的線形化可能 (analytic linearizable at the origin) であるとは、原点の近傍 U , 原点の近傍 \mathbb{D}_r , および等角同型 $\phi : \mathbb{D}_r \rightarrow U$ が存在して、 $\phi(0) = 0$, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) = \lambda z$ ($\forall z \in \mathbb{D}_r$) が成り立つことである。さらにそのような単連結領域 $U \subseteq \mathbb{C}$ で最大なものを S_f とかく。

3.2 注意

上の定義において f の定義域について特に述べていないが、 f を与えた時点で f が解析的になるような定義域も与えられている。原点の近傍 U は当然 f の定義域内にとっているのである。だから、 S_f とかいたがそれは与えられた f の定義域に依存している。

3.3 定義

f は原点で解析的であり、かつ、原点は中立固定点であるとする。つまり、原点の近くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $\lambda = e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R}$ の形とする。 $t \in \mathbb{Q}$ のとき、原点を有理的中立固定点 (rational neutral fixed point) という。

3.4 定義

f は原点で解析的であり、かつ、原点は有理的中立固定点であるとする。つまり、原点の近くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $\lambda = e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{Q}$ の形とする。 f が原点の近くで有限位数である (finite order near the origin) とは、ある自然数 m が存在して f^m が原点の近くで恒等函数になることである。 f が原点の近くで有限位数でないとき、原点を放物固定点 (parabolic fixed point) という。

3.5 命題

f は原点で解析的であり、かつ、原点は有理的中立固定点であるとする。つまり、原点の近くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $\lambda = e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{Q}$ の形とする。このとき、 f が原点で解析的線形化可能であることと原点の近くで有限位数であることは同値である。

[証明] f が原点で解析的線形化可能であると仮定する。このとき、原点の近傍 U , 原点の近傍 \mathbb{D}_r , および等角同型 $\phi: \mathbb{D}_r \rightarrow U$ が存在して、 $\phi(0) = 0$, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) = \lambda z$ ($\forall z \in \mathbb{D}_r$) が成り立つ。 $\lambda = e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{Q}$ であるから、 $\lambda^m = 1$ を満たす自然数 m がとれる。すると、 $\phi^{-1} \circ f^m \circ \phi(z) = (\phi^{-1} \circ f \circ \phi)^m(z) = \lambda^m z = z$ となる。 $w = \phi(z)$ とおくと、 $f^m(w) = w$ ($\forall w \in U$) が成り立つ。ゆえに、 f は原点の近くで有限位数である。逆に、 f が原点の近くで有限位数であると仮定する。したがって、ある自然数 m が存在して f^m が原点の近くで恒等函数になる。特に、 $\lambda^m = 1$ である。形式的に $z = \psi(w) = \frac{1}{m} \left(w + \frac{f(w)}{\lambda} + \frac{f^2(w)}{\lambda^2} + \dots + \frac{f^{m-1}(w)}{\lambda^{m-1}} \right)$ とおく。 $\psi(0) = 0$ および $\psi'(0) = 1$ より、原点の近くで ψ の逆函数 ϕ が存在する。つまり、十分小さい $r > 0$ と原点の近傍 U をとれば、 $\phi: \mathbb{D}_r \rightarrow U$ は等角同型で $\phi(0) = 0$ を満たす。また、計算により $\psi \circ f(w) = \lambda \psi(w)$ ($\forall w \in U$) が分かるので、結局、 $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) = \lambda z$ ($\forall z \in \mathbb{D}_r$) が成り立つ。ゆえに、 f は原点で解析的線形化可能である。

3.6 注意

放物固定点の周りの力学系の性質についてはとくに述べないが、ファトゥ座標 (Fatou coordinate) を使って力学系の解析的な性質を調べることができる。例えば、[Mi] の 10 節を参照。

3.7 定義

f は原点で解析的であり、かつ、原点は中立固定点であるとする。つまり、原点の近くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $\lambda = e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R}$ の形とする。 $t \notin \mathbb{Q}$ のとき、原点を無理的中立固定点 (irrational neutral fixed point) という。

3.8 定義

f は原点で解析的であり、かつ、原点は無理的中立固定点であるとする。つまり、原点の近くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $\lambda = e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ の形とする。 f が原点で解析的線形化可能であるとき、原点をジーゲル固定点 (Siegel fixed point) といい、 S_f をジーゲル円板 (Siegel disk) という。 f が原点で解析的線形化可能でないとき、原点をクレーマー固定点 (Cremer fixed point) という。

3.9 定理 ([Mi] Th.11.14)

ほとんど全ての $t \in \mathbb{R}$ に対して, 2次多項式 $f(z) = \lambda z + z^2$, $\lambda = e^{2\pi it}$ は原点で解析的線形化可能である.

3.10 注意

原点を無理的中立固定点にもつ解析函数芽がどのような条件を満たすときに原点で解析的線形化可能であるかという問題を線形化問題 (Linearization problem) という. 現在でも完全には解決されていない. 2次多項式の場合はヨコツが解決した. 例えば, [Yo] を参照. この業績もあって, 彼は 1994 年にフィールズ賞を獲得した.

4 中立固定点の周りの不変集合

中立固定点の周りの力学系は線形化問題をはじめ, 現在でも難しい問題をたくさん含んでいる. とくに, クレーマー固定点の周りの力学系はほとんど何も分かっていない. そこで, そのような難しい力学系を既知の力学系で近似するという発想が大切になってくる. 次の定理はその発想のもとで証明された.

4.1 定理 ([PM] Th.1)

f は原点で解析的であり, かつ, 原点は中立固定点であるとする. つまり, 原点の近くで $f(z) = \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $\lambda = e^{2\pi it}$, $t \in \mathbb{R}$ の形とする. $U \subset \mathbb{C}$ を原点を含む有界なジョルダン領域とし, f は \bar{U} の近傍 $V \subset \mathbb{C}$ で単葉であるとする. このとき, 次を満たす集合 H が存在する.

- H は連続体であり, その補集合 $\mathbb{C} \setminus H$ は連結である.
- $0 \in H \subset \bar{U}$
- $H \cap \partial U \neq \phi$
- $f(H) = H$

さらに, f が原点で解析的線形化可能であることと原点が $\text{Int}H$ に属すことは同値である.

4.2 注意

H は f と U に依存しているが, そのようなもののなかでも一般に一意的とは限らない. また, H は原点から U の境界まで伸びているので非自明な連続体である.

References

- [Ah] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*, 3rd edn. McGraw-Hill, 1979.
- [Mc] C. McMullen. *Complex Dynamics and Renormalization*. Princeton University Press, 1994.
- [Mi] J. Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*, 3rd edn. Princeton University Press, 2006.
- [PM] R. Pérez-Marco. Fixed points and circle maps. *Acta Math.* **179** (1997), 243-294.
- [Po] C. Pommerenke. *Boundary Behaviour of Conformal Maps*. Springer, 1992.
- [Yo] J.-C. Yoccoz. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. *Petits diviseurs en dimension 1, Astérisque* **231** (1995), 3-88.

Geometry of toric stacks

岩成 勇*

1 序

以下標数零の体上での話とします. 実ベクトル空間内の有理的ファン Σ を考えます. このとき, トーリック多様体という代数多様体 X_Σ を対応させることができます. 私はいくつかの動機と理由から, ファン (正確にはスタッキーファン) から, トーリックスタック (toric stack) という代数スタックを定義しました. トーリックスタックは, 非特異トーリック多様体の拡張とみなせます. 実際, トーリックスタックは滑らかなスタックであり, またトーリックスタックの圏は非特異トーリック多様体の圏を忠実充満部分圏としてふくみます. トーリック多様体は非特異トーリック多様体の拡張とみなせますが, トーリックスタックはそれとは別方向への (スムーズな代数スタック内での) 拡張になっています. そればかりでなく, トーリックスタックは古典的なトーリック幾何学と深く関係していて, 古典的なトーリック多様体だけを見てはわからないようないくつかの現象も, トーリックスタック上では簡明に説明することができます. 一方, まだトーリックスタックは多くのことがわかっているとはいえ, 研究すべきことは多くあるようにも思えます. これを読んで興味を持っていただけたらうれしいです. 以下は私の講演の簡単な予稿です. 詳しくは私の拙論文 [2] [3] 見てください.

2 トーリックスタック (toric stack) の定義

定義 2.1 $N = \mathbb{Z}^d$, $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ とおく. Σ が $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 内の単体的有理的有限ファン (以下, 有理的有限ファンのことをファンということにする) であり, Σ^0 が Σ の以下の条件を満たすような部分集合 (*free net* (自由網) と呼ぶ) であるとき, 二つ組 (Σ, Σ^0) をスタッキーファンという.

(条件) 任意のコーン $\sigma \in \Sigma$ に対して, $\sigma \cap \Sigma^0$ は, \mathbb{N}^r と同型な半群をなし (ただし $r = \dim \sigma$), 更に $\sigma \cap N$ の任意の元は何倍かすれば $\sigma \cap \Sigma^0$ の元になる.

(Σ, Σ^0) に対する条件から, 各コーン $\sigma \in \Sigma$ に対して, σ の各一次元部分コーン ρ 上に, 点 $e_\rho \in \rho \cap N$ があって, それらが半群 $\sigma \cap \Sigma^0 \cong \mathbb{N}^r$ の生成元になっていることがわかる. 大雑把にいうと, スタッキーファンとは, ファンの各一次元部分コーンに正の整数 (レベル又は重みということにする) が割り当てられた単体的ファンということができる.

スタッキーファンの射 $(\Sigma, \Sigma^0) \rightarrow (\Delta, \Delta^0)$ を, ファンの射 $f: \Sigma \rightarrow \Delta$ で $f(\Sigma^0) \subset \Delta^0$ を満たすものとして定義する. 単体的ファン Σ を考える. 任意のコーン $\sigma \in \Sigma$ に対し, $\sigma \cap \Sigma_{\text{can}}^0$ が σ

*京都大学理学研究科 博士課程, e-mail: iwanari@math.kyoto-u.ac.jp この原稿は2007年2月の北海道大学 COE 第3回数学総合若手研究集会の予稿のためのものです.

の各一次元部分コーンの $\rho \subset \sigma$ の第一格子点たちで生成されるような部分半群 ($\sigma \cap N$ の) であるような“自然な自由網” Σ_{can}^0 が存在する. Σ と Δ を非特異ファンとし, $\Sigma \rightarrow \Delta$ をファンの射とすると, これは自然にスタッキーファンの射 $(\Sigma, \Sigma_{\text{can}}^0) \rightarrow (\Delta, \Delta_{\text{can}}^0)$ に延長される. 但し, Σ_{can}^0 と Δ_{can}^0 は自然な自由網とする. 従って, 非特異ファンの圏は, スタッキーファンの圏に忠実充満部分圏として自然に埋め込まれる.

では, スタッキーファン (Σ, Σ^0) に対して, トーリックスタック $\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)}$ を定義しよう. 定義する (また理論を展開するにおいても) のに重要なのは, Fontaine-Illusie の意味での log structure である.

定義 2.2 (Cf. [3]) 体 k 上で話をする. トーリックスタック $\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)}$ は, k -スキームの圏上の以下のような fibered category である. k -スキーム X に対し, $\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)}$ の X 上のファイバー $\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)}(X)$ の対象は, 三つ組 $(\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}_X, \alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_X, \eta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M})$ で次を満たすようなもの:

- (1) \mathcal{S} は, $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ から決まる定数層の部分半群のエタール層で任意の点 $x \in X$ に対し, $\mathcal{S}_x \cong \mathcal{S}_{\bar{x}}$. 但し \mathcal{S}_x (resp. $\mathcal{S}_{\bar{x}}$) はザリスキー (resp. エタール) ストーク.
- (2) $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}_X$ は, 半群の層の射. ここで \mathcal{O}_X は乗法により半群の層とする.
- (3) 任意の \mathcal{S} のセクション s に対し, $\pi(s)$ が可逆である必要十分条件は s が可逆であることである.
- (4) 各点 $x \in X$ に対し, $\mathcal{S}_{\bar{x}} = \sigma^\vee \cap M$ となるようなコーン $\sigma \in \Sigma$ が存在する.
- (5) $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_X$ は, X 上の fine log structure.
- (6) $\eta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$ は, $\pi = \alpha \circ \eta$ を満たすような半群の層の射で, 各幾何学的点 $\bar{x} \rightarrow X$ に対して, $\bar{\eta} : \bar{\mathcal{S}}_{\bar{x}} = (\mathcal{S}/(\text{unit elements}))_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{M}_{\bar{x}}/\mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*$ は, $\bar{\mathcal{S}}_{\bar{x}}$ の (Σ, Σ^0) -自由分解:

$$\bar{\mathcal{S}}_{\bar{x}} \hookrightarrow F,$$

と同型. (ここで, (Σ, Σ^0) -自由分解: $\bar{\mathcal{S}}_{\bar{x}} \hookrightarrow F$ とは, $\mathcal{S}_{\bar{x}} \subset M$ と Σ^0 のデータから決まる射で, また F は, \mathbb{N}^l ($l = \text{rk } \bar{\mathcal{S}}_{\bar{x}}^{\text{gp}}$) と同型な半群である. 正確な定義は準備が必要なため, 紙数の関係もあり最も重要なところであるが,, , 省略する. [2][3] 参照)

$\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)}(X)$ における $(\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}_X, \alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_X, \eta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M})$ から $(\pi' : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{O}_X, \alpha' : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{O}_X, \eta' : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{M}')$ の射の集合は, $(\mathcal{S}, \pi) = (\mathcal{S}', \pi')$ ときは $\phi \circ \eta = \eta' : \mathcal{S} = \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{M}'$ となるような log structure の同型射 $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ を元とする集合とし, $(\mathcal{S}, \pi) \neq (\mathcal{S}', \pi')$ の時は空集合とする. 自然に引き戻しを定義することにより, $\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)}$ は, k -スキームの圏上の fibered category となり, さらにスタックになる (k -スキームの圏にエタール位相をいれて) ことも容易にわかる.

定義というよりも「定義もどき」になってしまったが, (いい訳になってしまうが) Σ や Σ^0 から決まるある種の半群の層と log structure とその間の射たちの組の moduli stack として トーリックスタックが定義されるところだけでも説明したかったのである. このことから直ちに得られることとして例えば, 自然なトーラス埋め込み $\text{Spec } k[M] \hookrightarrow \mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)}$ が定義できたり ($(M \rightarrow \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{O}_X, M \rightarrow \mathcal{O}_X^*)$ の形の対象を考える), 自然なトーラス作用関手 $\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)} \times \text{Spec } k[M] \rightarrow \mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)}$ や トーリック多様体 X_Σ への自然な射 $\pi_{(\Sigma, \Sigma^0)} : \mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)} \rightarrow X_\Sigma$ が存在することがわかる. 更に, M. Olsson と Illusie による log structure のモジュライに関

する結果を用いることにより, $\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)}$ が滑らかな Deligne-Mumford stack になり, $\pi_{(\Sigma, \Sigma^0)} : \mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)} \rightarrow X_\Sigma$ は粗モジュライであることが示せる. ここで, X_Σ は, Σ が非特異ファンでなければ特異点を持つものに対し, $\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)}$ は滑らかであることに注意してほしい. これは, 古典的トーリック幾何と比べて最も大きな違いと思われる. 冒頭に標数零を仮定したが, 任意の体上でも $\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma^0)}$ が, Artin stack であることは示すことができる. しかしながら, 一般に滑らかでない. 標数に制限を加えたのはこのためである. また, Σ が非特異ファンで Σ_{can}^0 をその自然な自由網とすると $\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma_{\text{can}}^0)}$ は, たんにトーリック多様体 X_Σ である.

スタッキーファンからトーリックスタックを構成したが, 最も基本的な問いの一つはスタッキーファンの圏とトーリックスタックの圏の関係である. Log geometry を使うことにより次を得る:

定理 2.3 (Cf. [3]) 対象をトーリックスタックたち, 1-射をトーリックスタック間のトーラス同変射, 2-射を1-射間の同型の集合とする2-圏を (トーリックスタックのなす2-圏) と書くことにする. このとき自然な圏同値

$$(\text{トーリックスタックのなす2-圏}) \xrightarrow{\sim} (\text{スタッキーファンのなす1-圏})$$

が存在する.

トーリック多様体はファンから定義できるほか, 幾何学的に特徴付けれる. スタッキーファンから定義されるトーリックスタックたちは, なんだか幾何学的な条件により特徴づけることができないであろうか? (Σ, Σ^0) -自由分解のモジュライの話や log geometry の最近の結果を組み合わせるにより次が示せる.

定理 2.4 (Cf. [3]) スタッキーファンから定義されるトーリックスタックたちは, (スプリット) トーラスを稠密開スタックとして含み, そのトーラスの自分自身への作用がスタック全体に広げられるような滑らかな Deligne-Mumford スタック (+やや技術的な条件) として特徴付けられる.

この結果の特徴づけをトーリックスタックの定義にしてもよい. トーラスを含みトーラス作用をもつ滑らかな Deligne-Mumford スタックたちは, スタッキーファンの圏と同値な圏をなすことがわかり, このことは組み合わせ的信息を豊富に含む興味深いスタックのクラスが見出されたことを示していると思う.

古典的なトーリック幾何学との関係を簡単に表すため, 次の可換図式を示す. $\mathfrak{Torst} = (\text{トーリックスタックのなす2-圏})$, 同様に $\text{Smtoric} = (\text{非特異トーリック多様体のなす1-圏})$, $\text{Simtoric} = (\text{単体的トーリック多様体のなす1-圏})$ と表記することにする.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{Torst} & \xrightarrow{\sim} & (\text{スタッキーファンの圏}) \\
 \nearrow i & \downarrow & \searrow a & \downarrow \\
 \text{Smtoric} & \xrightarrow{\sim} & (\text{非特異ファンの圏}) & \searrow b \\
 \searrow i & \downarrow & & \downarrow \\
 & \text{Simtoric} & \xrightarrow{\sim} & (\text{単体的ファンの圏})
 \end{array}$$

但し, 非特異ファン Σ に対して $a(\Sigma) = (\Sigma, \Sigma_{\text{can}}^0)$, $b(\Sigma) = \Sigma$. 関手 ι and i は自然な埋め込みである. 関手 ι, i, a, b は, すべて忠実充満関手であり, 水平方向の関手はすべて同値を導く関手である.

3 トーリックスタック上の交叉理論

以下標数零の閉体上で考える.

トーリックスタック上のサイクルの交叉理論を考えたい. 特に Chow 環を計算したい. トーリック多様体においてもこのような問題 (variant もふくめて) は多くの人に研究されてきた. まず, トーリック多様体の Chow 環の結果を復習しよう. 単体的ファン Σ に対して, Σ の Stanley-Reisner 環は

$$\text{SR}(\Sigma) := \mathbb{Z}[D_\rho, \rho \in \Sigma(1)] / (I_\Sigma + J_\Sigma),$$

として定義される. 但し $\Sigma(1)$ は Σ の一次元コーンの集合をあらわす. I_Σ は線型形式たち $L(m) := \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, v_\rho \rangle D_\rho$ (v_ρ は ρ の第一格子点を表し, m は M の元) で生成された (m は M を走らす) イデアルで, J_Σ は, ρ_1, \dots, ρ_r ではられるコーンが Σ に入っていないような単項式 $D_{\rho_1} \cdots D_{\rho_r}$ たちで生成されるイデアルである. このとき, Fulton-Sturmfels, Danilov, Jurkiewicz による次の有名な結果がある.

定理 3.1 ファン Σ が非特異なファンとする. $A^*(X_\Sigma)$ をトーリック多様体 X_Σ の整係数 Chow 環とする. このとき環同型

$$A^*(X_\Sigma) \cong \text{SR}(\Sigma)$$

が存在する. もし, Σ が単体的ファンであるならば, 環同型

$$A^*(X_\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \text{SR}(\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

が存在する.

上の同型で D_ρ は $c_1(\mathcal{O}_{X_\Sigma}(V(\rho))) \in A^*(X_\Sigma)$ に対応する. 但し $V(\rho)$ は ρ に対応するトーリック因子である. ファン Σ が非特異の時は X_Σ 上に homological な整係数の交叉理論があるが, Σ が単に単体的な場合は X_Σ は商特異点をもち Stanley-Reisner 環との同型は有理数体をテンソルしないと得られない. これは X_Σ は商特異点をもつとき, 交叉が有理係数でないと得られないことや更には群としてでもそもそも k -次チャウ群 $A^k(X_\Sigma)$ が Stanley-Reisner 環の k 次部分のなす群と一般に一致しないことによる. また, bivariant (cohomological) な Chow 環 (これは整係数で定義できるにもかかわらず) は Stanley-Reisner 環とは一般に一致をしない. 一般の単体的ファンに対しては, トーリック多様体の「幾何学」とファンの「組み合わせのデータ」に差異が生じるのである. ここで非常に簡単な例をみてみよう. ファン Σ を \mathbb{R}^2 の中の一つのコーン $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (2, -1) + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (0, 1)$ とする. 対応するトーリック多様体は quadric cone である. このファンの Stanley-Reisner 環は $\mathbb{Z}[t]/(2t)$ と同型である. この場合上の定理は $A^*(X_\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ というつまらないことしか主張していない. 更に注意すべきなのは $\mathbb{Z}[t]/(2t)$ は任意の自然数 l

に対し l 次数部分のなす群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型であることである。スキームやもっと一般に代数空間の Chow 群は、その空間の次元より大きい次数では零であることを考えると、この現象は（整係数 Chow 群を考えるとという点から見て）不可解で、特に

スキームや代数空間の枠組みで捕らえられない現象が組み合わせ論の側から現れている

と見ることができる。

トーリックスタックの Chow 環の私の結果を紹介する。滑らかな Artin stack（+技術的仮定）上の整係数交叉理論は B. Totaro の卓抜なるアイデアを発展する形で Edidin-Graham や A. Kresch によって構築された ([1][4] を参照)。ここでの整係数 Chow 環は彼らの交叉理論によるものである。一般にこの整係数 Chow 環を計算するという事は非常に難しい問題である。

定理 3.2 (Cf. [2]) ファン Σ を単体的ファンとし、二つ組 $(\Sigma, \Sigma_{\text{can}}^0)$ を Σ からできる自然なスタッキーファンとする。 $A^*(\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma_{\text{can}}^0)})$ をトーリックスタック $\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma_{\text{can}}^0)}$ の整係数 Chow 環とする。このとき自然な環同型

$$A^*(\mathcal{X}_{(\Sigma, \Sigma_{\text{can}}^0)}) \cong \text{SR}(\Sigma)$$

が存在する。

4 最後に

私の力不足のためわかりにくい予稿となってしまったことをお詫びしたい。私に許される紙数も尽きた。ほかにも触れたい話題があったのであるができなかった。最後にトーリック幾何に次の視点を提案して終わりたい。

ファンの情報の「正しい」幾何学的実現はトーリックスタックであり、組み合わせ論（スタッキーファン）と幾何学的実現=トーリックスタックの幾何学との対応がまず最初に現れ、単体的トーリック多様体たちのなす古典的トーリック幾何学（特に組み合わせ論との対応）は、その「退化」である。

参考文献

- [1] D. Edidin and W. Graham, Equivariant intersection theory, Invent Math. 131 (1998) 595–634.
- [2] I. Iwanari, Toroidal geometry and Deligne-Mumford stacks, preprint (2006) <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/preprint/preprint2006.html>
- [3] I. Iwanari, The category of toric stacks, preprint arxiv: math.AG/0610548.
- [4] A. Kresch, Cycle groups for Artin stacks, Invent. Math. 138 (1999), 495–536.

コアメーバ、ダイマー、ホモロジカル・ミラー対称性
**COAMOEBA, DIMER AND
 HOMOLOGICAL MIRROR SYMMETRY**

山崎雅人

要約. アメーバの親戚であるコアメーバを定義し、ダイマーモデルや箆との関連、更にはホモロジカルミラー対称性への応用について述べる。

1. アメーバとコアメーバ

\mathbb{Z}^2 上の格子多角形 Δ を考えよう。このとき、 Δ の Newton 多項式 $W(x, y) \in \mathbb{C}[x^\pm, y^\pm]$ が、次のように定義される。

$$W(x, y) = \sum_{(i,j) \in \Delta} c_{(i,j)} x^i y^j$$

ただし、ここで $c_{(i,j)}$ は複素数値を動く。この $W(x, y)$ の零点集合 $W^{-1}(0)$ の対数写像 Log による像のことをアメーバ (amoeba) と呼ぶ¹：

$$\begin{array}{ccc} \text{Log} : (\mathbb{C}^\times)^2 & \rightarrow & \mathbb{R}_+^2 \\ \psi & & \psi \\ (x, y) & \mapsto & (\log(x), \log(y)). \end{array}$$

アメーバは、Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky[1] によって超幾何関数をの研究に関連して導入されたものであるが、実代数幾何（ヒルベルトの第 16 問題）、トロピカル幾何や数理論理などとも関係した豊かな内容を持つ。

アメーバの具体例を図 1 に示した。

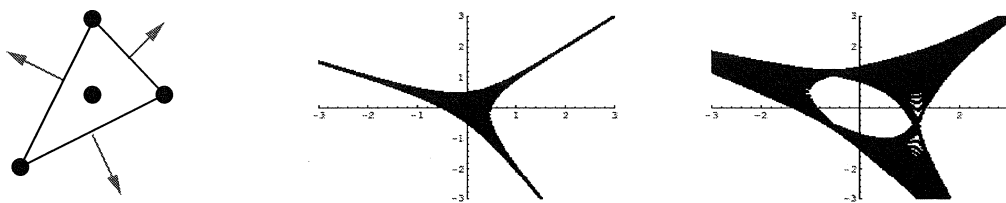


図 1. Δ の例と対応するアメーバの例

アメーバの内部の形は、Newton 多項式の係数によって複雑に変化するが、アメーバの「触角」、つまり漸近形は、 Δ の法線と同じ傾きを持つことが見て取れるだろう。

¹より一般に $(\mathbb{C}^\times)^n$ でも同様に定義できるが、ここでは $n = 2$ の場合のみを扱う、

一方、その親戚として、コアメーバ (coamoeba) という概念が、物理学者によって 2005 年に導入された [2]²。コアメーバを定義するには、上の定義で、 \log の部分を偏角に取り替えてやればよい：

$$\begin{aligned} \text{Arg} : (\mathbb{C}^\times)^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \\ \Psi &\qquad \qquad \qquad \Psi \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{2\pi}(\arg(x), \arg(y)). \end{aligned}$$

つまり、コアメーバとは、 $\text{Arg}(W^{-1}(0))$ のことである。

例として、 Δ が三角形の時の例をプロットしたのが図 1 である。

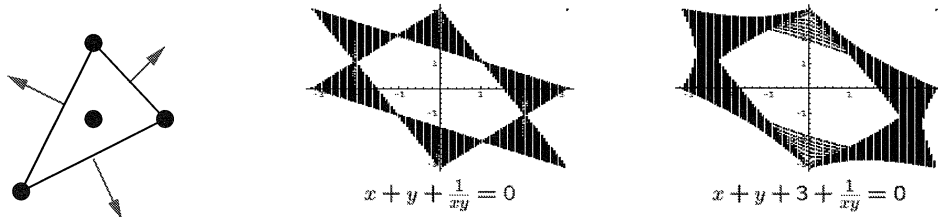


図 2. Δ の例と対応するコアメーバの例

コアメーバの時も、アメーバの時と同様、係数の取り方を変えることによって複雑に変化するが、係数をうまく選ぶと、驚くべきことに境界がきれいな直線になっていることが見て取れる。一般に、 Δ が三角形の場合には、次の定理を示すことができる：

定理 1. 格子三角形 Δ に対し、その頂点に対応する単項式の和を W_Δ とおく。このとき、

- Δ の面積の 2 倍を N とすると、 W_Δ^{-1} のコアメーバは偶数個の三角形 $\{U_i\}_{i=1}^N$ 、 $\{V_i\}_{i=1}^N$ とその頂点 $\{I_i\}_{i=1}^{3N}$ の和集合になっている。但し、 U_i どうし、また V_i どうしは共有する頂点を持たない。
- 偏角写像 Arg はそれぞれの開三角形に制限すると微分同相であり、 U_i 上では向きを保ち、 V_i 上では向きを逆にする。また、任意の $i = 1, 2, \dots, 3N$ に対して、 $\text{Arg}^{-1}(I_i)$ は开区間と同相である。

また、図 1 の左図をみると、コアメーバの境界は直線をなしており、その傾きはもとの Δ の法線に対応していることが見て取れる。このことから、 Δ が与えられたときに、対応するコアメーバを書くための簡便法を得ることができる (Hanany-Vegh のアルゴリズム [3])。

一般的な手順を説明すると大変なので、やはり先の Δ の場合に、具体例で説明しよう。

²コアメーバとは、[2] 以前に Passare や Tsikh 等によってつけられた名前であり、[2] では、同じ概念が再発見され藻 (alga) と呼ばれた。どちらの名前が定着するかは、現時点ではまだ分からない。また、コアメーバの訳語としては、余アメーバや虚アメーバが考えられる。

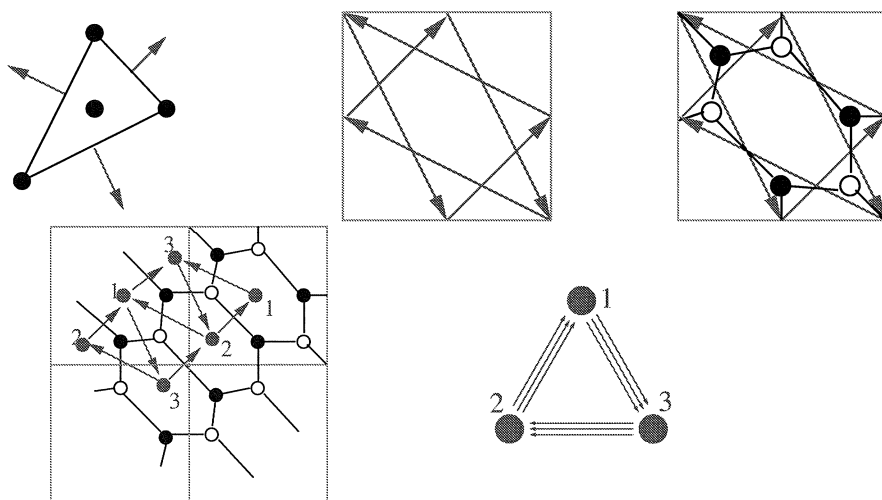


図 3. Hanany-Vegh のアルゴリズムの例。左上は Δ 、中上はそこからコアメーバ、右上は 2 色グラフ。左下は 2 色グラフの双対、右下は籠である。

まず、 Δ に法線を書く (図 3 左上)。更に、その法線と傾きが同じになるような直線をトーラスの上を書く (図 3 中上)。これにより、トーラスはいくつかの領域に分割される。領域の周りの矢印が、すべて反時計回りあるいは時計回りのときにその面を塗りつぶすことにしよう。こうして塗りつぶされた領域は、先ほどのコアメーバの図に他ならない。

なお、図 1 の右図のように、係数が一般の場合には、コアメーバの境界はきれいな直線になっていない。しかし、この場合にも、漸近境界という概念を定義することに同様の議論をすることができる。

2. コアメーバからダイマー、籠へ

2 色グラフとは、グラフであって、頂点の集合が二つの部分集合 B と W との連結和で書け、任意の辺は B の頂点と W の頂点を結んでいるものを指す。Hanany-Vegh のアルゴリズムでは、コアメーバの図から更に \mathbb{T}^2 上の 2 色グラフを構成する (図 3 右上)。

具体的には、

- 各開三角形に対し、 Arg がその三角形上で向きを保つとき (逆にする) 時には白 (黒) の頂点を用意する。
- 次に、二つの三角形が交点を持つときは、対応する頂点を辺で結ぶ (これを各交点ごとに行う)。

こうして得られた 2 色グラフは、物理ではブレーンによるタイル張り (brane tiling) と呼ばれている。

さて、こうして得られた2色グラフから、さらに籠を得ることができる。それには、2色グラフの双対を取ればよい(図3左下)。ただし、頂点に色がついていたことに対応して、双対グラフに矢印を書くことができる。つまり、白(黒)の頂点の周りでは矢印が時計回り(反時計回り)に回るように矢印の向きを定めればよい。こうして得られた \mathbb{T}^2 上の有向グラフから、トーラス上に実現されていることを忘れて抽象的なグラフと思ったのが籠である³(図3右下)。ただし、ここでは、籠とは、単に有向グラフのことである。

さて、このように、いささか面倒な方法によって Δ から籠を手に入れたが、実はこの籠は表現論的に定まるMcKay籠と同一であることが示される：

定理 2 (植田・山崎 [5]). Δ を格子三角形とし、 A を $SL_3(\mathbb{C})$ の離散部分群であり、 \mathbb{C}^3/A が、 $\Delta \times \{1\}$ を最高次元の錘として持つような扇から構成されるトーリック多様体と一致するとする。このとき、 Δ から Hanany-Vegh のアルゴリズムによって作られる関係付きの籠は、 A の McKay 籠に一致する。

また、詳細は省略するが、この2色グラフから、Kasteleyn 行列という組み合わせ論的な手続きを経ることによって、逆に Δ の情報を取り出すこともできる。

3. ホモロジカルミラー対称性

さて、ここまで述べてきたことを、 Δ が平行四辺形の場合に適用することで、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に対するホモロジカルミラー対称性を示すことができる。最後に、このことを述べよう。

ミラー対称性とは、複素幾何とシンプレクティック幾何との不思議な対応を主張するものである。このミラー対称性の一つの定式化に、Kontsevichにより提唱されたホモロジカルミラー対称性がある。以下では、トーリックの場合にこれを説明しよう。

まず、複素側では、 Δ から適当な方法で定まるトーリック多様体 X の接続層の導来圏 $D^b \text{coh } X$ を考えよう。

一方、シンプレクティック側では、 Δ の Newton 多項式 $W(x, y)$ から、有向深谷圏 $D^b \mathfrak{Fut}^{\rightarrow} W$ と呼ばれるものを考えることができる。

この二つが一致するというのがホモロジカルミラー対称性の主張である。今回我々は、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ およびそのアーベル群によるオービフォールドの場合に、ホモロジカルミラー対称性が成り立つことを示した：

定理 3 (植田-山崎 [4]). A を $(\mathbb{C}^\times)^2$ の有限部分群とする。このとき、シンプレクティック Lefschetz ファイブレーション $W : (\mathbb{C}^\times)^2 \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の A -同変接続層のなす導来圏 $D^b \text{coh}^A \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ と、 W の有向深谷圏 $D^b \mathfrak{Fut}^{\rightarrow} W$ は、三角圏として一致する：

$$D^b \text{coh}^A \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong D^b \mathfrak{Fut}^{\rightarrow} W$$

³実は、より正確には、関係付きの籠になっている。籠を得る際に、 \mathbb{T}^2 上に実現されているという情報を忘れてしまったが、これが籠の関係を与える。ここでは、その議論は省略した。

この証明で鍵となるのは、両辺がそれぞれ、関係付きの籠から定まる道の代数 CQ の有限次元右加群のなす導来圏 $D^b \text{ mod } CQ$ に等しいことを示すことである。なお、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ のホモロジカルミラー対称性は、Seidel によって最初に示されている [6] が、この方法では、更に一般に、オービフォールドの場合もほとんど同様の議論で示すことができるところが大きな長所である。

なお、ここまで述べてきたことに興味を持たれた方は、より詳しい解説として、[7] も併せて参照されたい。

参考文献

- [1] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinant*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [2] B. Feng, Y. H. He, K. D. Kennaway and C. Vafa, "Dimer models from mirror symmetry and quivering amoebae," arXiv:hep-th/0511287.
- [3] A. Hanany and D. Vegh, "Quivers, tilings, branes and rhombi," arXiv:hep-th/0511063.
- [4] K. Ueda and M. Yamazaki, "Brane tilings for parallelograms with application to homological mirror symmetry," arXiv:math.ag/0606548.
- [5] K. Ueda and M. Yamazaki, "A Note on Brane Tilings and McKay Quivers," arXiv:math.ag/0605780.
- [6] P. Seidel, "More about vanishing cycles and mutation". In *Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000)*, 429. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001.
- [7] 植田一石、ダイマーと藻類、数理解析研究所講究録に掲載予定、
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kazushi/rim_kokyuroku2006_8.pdf

東京大学理学系研究科物理学専攻

E-mail:: yamazaki@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

リーマンゼータ関数, ベルヌーイ多項式とソボレフ不等式の最良定数

Riemann zeta function, Bernoulli polynomials and the best constant of Sobolev inequality

亀高 惟倫, 山岸 弘幸 (阪大基礎工 D3), 渡辺 宏太郎 (防衛大)
永井 敦 (日大生産工), 武村 一雄 (東京工科大)

リーマンゼータ関数 $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ ($\operatorname{Re} z > 1$) の偶数における値 $\zeta(2M)$ ($M = 1, 2, 3, \dots$) の変分学的な意味付けを行った.

定理 1 $M = 1, 2, 3, \dots$ とする. 関数空間

$$H_M = \left\{ u(x) \mid u^{(M)}(x) \in L^2(0, 1), \right. \\ \left. u^{(i)}(1) - u^{(i)}(0) = 0 \quad (0 \leq i \leq M-1), \quad \int_0^1 u(x) dx = 0 \right\}$$

に属する任意の関数 $u(x)$ に対し, $u(x)$ によらない正定数 C があって, ソボレフ不等式

$$\left(\sup_{0 \leq y \leq 1} |u(y)| \right)^2 \leq C \int_0^1 |u^{(M)}(x)|^2 dx$$

が成り立つ. C のうち最良のものは

$$C_M = \frac{2\zeta(2M)}{(2\pi)^{2M}} = \frac{B_M}{(2M)!}$$

である. ここで B_M はベルヌーイ数で, 正の有理数である.

上の不等式で C を C_M でおきかえるとき, $0 \leq y \leq 1$ なる任意の y と, 任意の複素数 c に対し, $u(x) = c b_{2M}(|x-y|)$ に対して等号が成り立つ. $b_i(x)$ は i 次ベルヌーイ多項式である.

定義 1 ベルヌーイ多項式 $b_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) は

$$\begin{cases} b_0(x) = 1 \\ b'_i(x) = b_{i-1}(x), \quad \int_0^1 b_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

によって定められる.

$$b_0(x) = 1, \quad b_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad b_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}, \\ b_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x, \quad b_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}$$

$$\begin{aligned}
b_5(x) &= \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{72}x^3 - \frac{1}{720}x \\
b_6(x) &= \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{240}x^5 + \frac{1}{288}x^4 - \frac{1}{1440}x^3 + \frac{1}{30240} \\
b_7(x) &= \frac{1}{5040}x^7 - \frac{1}{1440}x^6 + \frac{1}{1440}x^5 - \frac{1}{4320}x^4 + \frac{1}{30240}x \\
b_8(x) &= \frac{1}{40320}x^8 - \frac{1}{10080}x^7 + \frac{1}{8640}x^6 - \frac{1}{17280}x^5 + \frac{1}{60480}x^4 - \frac{1}{1209600} \\
&\dots
\end{aligned}$$

である。

背景となる常微分方程式の境界値問題を考える。

定理 2 可解条件 $\int_0^1 f(y) dy = 0$ をみたす区間 $0 < x < 1$ 上の任意の有界連続関数 $f(x)$ に対して、境界値問題

BVP

$$\begin{cases}
(-1)^M u^{(2M)} = f(x) & (0 < x < 1) \\
u^{(i)}(1) - u^{(i)}(0) = 0 & (0 \leq i \leq 2M - 1) \\
\int_0^1 u(x) dx = 0
\end{cases}$$

は唯一つの解をもち、解 $u(x)$ はグリーン関数 $G(x, y)$ によって

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \quad (0 < x < 1)$$

と表示される。

$$\begin{aligned}
G(x, y) &= (-1)^{M-1} b_{2M}(|x - y|) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^{-2M} \cos(2\pi n(x - y)) \\
&(0 < x, y < 1)
\end{aligned}$$

である。とくに

$$G(y, y) = (-1)^{M-1} b_{2M}(0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^{-2M} = \frac{2}{(2\pi)^{2M}} \zeta(2M)$$

である。

定理 3 グリーン関数

$$G(x, y) = (-1)^{M-1} b_{2M}(|x - y|) \quad (0 < x, y < 1)$$

に対して次の事が成り立つ.

$$(1) \quad G(x, y) = G(y, x) \quad (0 < x, y < 1)$$

$$(2) \quad \partial_x^i G(x, y) = (-1)^{M-1} \left(\operatorname{sgn}(x - y) \right)^i b_{2M-i}(|x - y|) \\ (0 < x, y < 1, \quad x \neq y, \quad 0 \leq i \leq 2M)$$

$$(3) \quad (-1)^M \partial_x^{2M} G(x, y) = -1 \quad (0 < x, y < 1, \quad x \neq y)$$

$$(4) \quad \partial_x^i G(x, y) \Big|_{x=1} - \partial_x^i G(x, y) \Big|_{x=0} = 0 \quad (0 \leq i \leq 2M - 1, \quad 0 < y < 1)$$

$$(5) \quad \int_0^1 G(x, y) dx = 0 \quad (0 < x < 1)$$

$$(6) \quad \partial_x^i G(x, y) \Big|_{y=x-0} - \partial_x^i G(x, y) \Big|_{y=x+0} = \begin{cases} 0 & (0 \leq i \leq 2M - 2) \\ (-1)^M & (i = 2M - 1) \end{cases} \\ (0 < x < 1)$$

$$(7) \quad \partial_x^i G(x, y) \Big|_{x=y+0} - \partial_x^i G(x, y) \Big|_{x=y-0} = \begin{cases} 0 & (0 \leq i \leq 2M - 2) \\ (-1)^M & (i = 2M - 1) \end{cases} \\ (0 < y < 1)$$

ここで、偏微分 $\partial_x = \partial/\partial x$ は開集合 $0 < x, y < 1, x \neq y$ において古典的な意味の微分であって、 $0 < x, y < 1$ における超関数の意味の微分ではない。

定理 4 関数空間 H_M に対して

$$(u, v)_M = \int_0^1 u^{(M)}(x) \bar{v}^{(M)}(x) dx$$

は内積となり、 H_M はこの内積によりヒルベルト空間となる。 $G(x, y)$ はヒルベルト空間 H_M と内積 $(\cdot, \cdot)_M$ に関し再生核である。 すなわち、任意の $u(x) \in H_M$ に対して

$$\int_0^1 u^{(M)}(x) \partial_x^M G(x, y) dx = u(y) \quad (0 \leq y \leq 1)$$

が成り立つ。

定理 4 証明 $0 \leq y \leq 1$ なる y を固定する. 関数 $u = u(x)$, $v = v(x) = G(x, y)$ に対する等式

$$u^{(M)} v^{(M)} - u (-1)^M v^{(2M)} = \left(\sum_{j=0}^{M-1} (-1)^j u^{(M-1-j)} v^{(M+j)} \right)'$$

の両辺を区間 $0 < x < y$, $y < x < 1$ 上で積分する.

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{(M)}(x) \partial_x^M G(x, y) dx &= \int_0^1 u(x) (-1)^M \partial_x^{2M} G(x, y) dx + \\ &\left[\sum_{j=0}^{M-1} (-1)^j u^{(M-1-j)}(x) \partial_x^{M+j} G(x, y) \right] \left\{ \left|_0^y + \left|_y^1 \right. \right\} = \\ &\int_0^1 u(x) (-1)^M \partial_x^{2M} G(x, y) dx + \\ &\sum_{j=0}^{M-1} (-1)^j \left[u^{(M-1-j)}(1) \partial_x^{M+j} G(x, y) \Big|_{x=1} - u^{(M-1-j)}(0) \partial_x^{M+j} G(x, y) \Big|_{x=0} \right] + \\ &\sum_{j=0}^{M-1} (-1)^j u^{(M-1-j)}(y) \left[\partial_x^{M+j} G(x, y) \Big|_{x=y-0} - \partial_x^{M+j} G(x, y) \Big|_{x=y+0} \right] = u(y) \end{aligned}$$

ここで定理 3(3), (4), (7) を使った. $(\cdot, \cdot)_M$ が内積であることの証明は, 後で示される. ■

この研究の結論である定理 1 を証明する.

定理 1 証明 定理 4 より $u(x) \in H_M$ に対し, 再生等式

$$\int_0^1 u^{(M)}(x) \partial_x^M G(x, y) dx = u(y) \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad (*)$$

が成り立つ. 特に $0 \leq y \leq 1$ なる y を固定する毎に $u(x) = G(x, y)$ とすると $u(x) \in H_M$ であって

$$\int_0^1 |\partial_x^M G(x, y)|^2 dx = G(y, y)$$

が成り立つ.

シュワルツの不等式を使って, 再生等式 (*) の両辺を評価する.

$$|u(y)|^2 \leq \int_0^1 |\partial_x^M G(x, y)|^2 dx \int_0^1 |u^{(M)}(x)|^2 dx = G(y, y) \int_0^1 |u^{(M)}(x)|^2 dx$$

ここで

$$\sup_{0 \leq y \leq 1} G(y, y) = G(y_0, y_0) \quad (0 \leq y_0 \leq 1)$$

とすると

$$\left(\sup_{0 \leq y \leq 1} |u(y)| \right)^2 \leq G(y_0, y_0) \int_0^1 |u^{(M)}(x)|^2 dx \quad (**)$$

となる.

少し脇道にそれよう. この不等式は $\int_0^1 |u^{(M)}(x)|^2 dx = 0$ なら $u(x) \equiv 0$ ($0 < x < 1$) を意味している. 定理 4 で積み残した $(\cdot, \cdot)_M$ の正定値性が示された. シュワルツの不等式を使う段階では正定値性は要求されていないことに注意しよう.

次に $u(x) = G(x, y_0) \in H_M$ に, 上の不等式 (**) を適用すると

$$\left(\sup_{0 \leq y \leq 1} |G(y, y_0)| \right)^2 \leq G(y_0, y_0) \int_0^1 |\partial_x G(x, y_0)|^2 dx = G(y_0, y_0)^2$$

を得る. 自明な不等式

$$G(y_0, y_0)^2 \leq \left(\sup_{0 \leq y \leq 1} |G(y, y_0)| \right)^2$$

と組み合わせると

$$G(y_0, y_0)^2 = \left(\sup_{0 \leq y \leq 1} |G(y, y_0)| \right)^2 = G(y_0, y_0) \int_0^1 |\partial_x G(x, y_0)|^2 dx = G(y_0, y_0)^2$$

を得る. 定理 1 証明を終る. ■

定理 1 の工学的な意味は非常にはっきりしている. $M = 1$ は糸のたわみ, $M = 2$ は棒のたわみ問題で, それぞれたわみの最大値の 2 乗 $\left(\sup_{0 \leq y \leq 1} |u(y)| \right)^2$ はポテンシャルエネルギー $\int_0^1 |u^{(M)}(x)|^2 dx$ の定数倍で上からおさえられる. その定数のうち最良のものは, インパルス応答 $G(x, y)$ の (x にかんする) ポテンシャルエネルギー

$$G(y, y) = \int_0^1 |\partial_x^M G(x, y)|^2 dx$$

すなわちグリーン関数の対角線値の最大値 $\sup_{0 \leq y \leq 1} G(y, y)$ である.

参考文献

- [1] Y. Kametaka, K. Watanabe, A. Nagai and S. Pyatkov *The best constant of Sobolev inequality in an n dimensional Euclidean space*, *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, e-2004 (2004) pp. 295-303
- [2] Y. Kametaka, H. Yamagishi, K. Watanabe, A. Nagai and K. Takemura, *Riemann zeta function, Bernoulli polynomials and the best constant of Sobolev inequality*, submitted

COBORDISMS OF FOLD MAPS

BOLDIZSÁR KALMÁR

1. FOLD MAPS AND IMMERSIONS FROM THE VIEWPOINT OF COBORDISM

We establish a relation between fold maps and immersions and obtain geometrical invariants of cobordism classes of fold maps in terms of immersions with prescribed normal bundles. We show that these invariants are complete invariants of the cobordism classes of simple fold maps of oriented $(n+1)$ -dimensional manifolds into an n -dimensional manifold N^n . As a corollary we obtain that the oriented cobordism group of simple fold maps of oriented $(n+1)$ -dimensional manifolds into \mathbb{R}^n is isomorphic to the direct sum of the $(n-1)$ th stable homotopy group of spheres and the $(n-1)$ th stable homotopy group of the space $\mathbb{R}P^\infty$. We also describe the natural map of the simple fold cobordism group to the fold cobordism group by natural homomorphisms between cobordism groups of immersions. We have the analogous results about bordism groups of fold maps as well.

Fold maps of $(n+1)$ -dimensional manifolds into n -dimensional manifolds are the simplest singular maps and they have the formula

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2 \pm x_{n+1}^2)$$

as a local form around each singular point. Let $f: Q^{n+1} \rightarrow N^n$ be a fold map. The set of singular points of the fold map f is a two codimensional smooth submanifold in the source manifold Q^{n+1} and the fold map f restricted to its singular points is a one codimensional immersion into the target manifold N^n . This immersion together with more detailed informations about the neighbourhood of the set of singular points in the source manifold Q^{n+1} can be used as a geometrical invariant of fold cobordism classes of fold maps, and by this way we obtain a geometrical relation between fold maps and immersions via cobordisms. However, this invariant of a fold map $f: Q^{n+1} \rightarrow N^n$ can be quite complicated because of the complexity of the possible singular fibers [28, 29, 40], and a way of making it simpler is restricting ourselves to fold maps with additional special properties.

Simple fold maps are fold maps with at most one singular point in each connected component of a singular fiber. From this definition it follows that the only possible indefinite singular fibers (whose singular points are indefinite fold singularities) are the disjoint

unions of a finite number of “figure eight” singular fibers, provided that the source manifold is orientable.

Simple fold maps have been studied for a long time. Levine [18] classifies the vertices of a Stein factorization of a fold map into “simple” ones and “non-simple” ones. Saeki gives necessary conditions for the existence of simple fold maps [22], proves that there exists a simple fold map on a given 3-manifold if and only if it is a graph-manifold [25], gives constructions [23] of such simple fold maps obtained in [25], and uses simple fold maps for studying links in 3-manifolds [24]. Sakuma [31] obtains relations between the homologies and diffeomorphism type of the singular set of a simple fold map and the homologies and homeomorphism type of its source manifold. Yonebayashi [41] proves theorems about the number of crossing points of the immersion of the indefinite singular set of simple stable fold maps of 3-manifolds into surfaces.

If we have a simple fold map $f: Q^{n+1} \rightarrow N^n$ of an oriented manifold Q^{n+1} , then the immersion of the singular set has trivial normal bundle in the target manifold N^n , moreover there is a canonical trivialization corresponding to the number of regular fibers in a neighbourhood of a singular point. Hence the geometrical invariants in hand are less complicated.

The main result of this paper is that our geometrical invariants describe completely the set of cobordism classes of simple fold maps of oriented $(n+1)$ -dimensional manifolds into an n -dimensional manifold N^n . By this way we prove that the cobordism classes of simple fold maps of oriented $(n+1)$ -dimensional manifolds into an n -dimensional manifold N^n are in a natural bijection with the set of stable homotopy classes of continuous maps of the one point compactification of the manifold N^n into the Thom-space of the trivial line bundle over the space $\mathbb{R}P^\infty$. As a special case we obtain that the oriented cobordism group of simple fold maps of oriented $(n+1)$ -manifolds into \mathbb{R}^n is isomorphic to the n th stable homotopy group of the space $S^1 \vee S\mathbb{R}P^\infty$. We also describe the natural homomorphism which maps a simple fold cobordism class to its fold cobordism class in terms of natural homomorphisms between cobordism groups of immersions with prescribed normal bundles. In this way we obtain results about the “inclusion” of the simple fold maps into the cobordism group of fold maps. We have the analogous results about *bordisms* of fold maps as well.

There exist several methods to study singular maps and their cobordisms. Much of these methods are based on the h-principle for singular maps established by Gromov [7], Eliashberg [5, 6] and Ando [1, 2]. By h-principle it is possible to reduce the problem of studying singular maps to the problem of computing homotopy groups of spaces but usually these spaces are too complicated to describe their homotopy types in detail, furthermore to obtain complete geometrical invariants is an additional difficult problem.

Pontryagin-Thom type construction is an elementary method to build a classifying space for cobordisms of singular maps [32, 20]. The basic keypoint of Pontryagin-Thom type construction is to prove that a singular map can be considered as locally trivial bundles with given singularity types as fibers glued together and the structure groups of these bundles can be reduced to nice groups, see [11, 38]. In order to make a Pontryagin-Thom type construction for negative codimensional singular maps we need theorems about fiber-germs analogous to the theorems of [11, 38]. In this paper we show these analogous theorems for -1 codimensional fold maps (if we have a map $f: M^m \rightarrow P^p$ of an m -dimensional manifold into a p -dimensional manifold, then the *codimension* of the map f is the integer $p - m$). The Pontryagin-Thom type construction and also the geometrical manipulations are possible by virtue of the existence of this kind of “bundle structures” on fold maps. The first theorems about this kind of bundle structures were developed in the works of Szűcs [34] in order to give the basics of the Pontryagin-Thom construction for positive codimensional singular maps.

Some results and ideas in this paper already appeared in the author’s master’s degree thesis and his earlier works [13, 14]. The purpose of these works was to develop a Pontryagin-Thom type construction for -1 -codimensional fold maps with prescribed singular fibers in order to obtain results about cobordisms of negative codimensional fold maps with prescribed singular fibers, in a way analogous to the positive codimensional case [32, 20].

2. FOLD COBORDISMS AND STABLE HOMOTOPY GROUPS

We prove that for $n \geq 1$ and $q > 0$ the (oriented) cobordism group of fold maps of (oriented) $(n + q)$ -dimensional manifolds into \mathbb{R}^n contains the direct sum of $\lfloor (q - 1)/2 \rfloor + 1$ copies of the $(n - 1)$ th stable homotopy group of spheres as a direct summand. We also prove that for $k \geq 1$ and $q = 2k - 1$ the cobordism group of fold maps of unoriented $(n + q)$ -dimensional manifolds into \mathbb{R}^n also contains the n th stable homotopy group of the space $\mathbb{R}P^\infty$ as a direct summand. We have the analogous results about bordisms as well.

In the study of singular maps one basic approach is classifying singular maps under the equivalence relation *cobordism* and describing *cobordism groups* of singular maps [3, 9, 16, 20, 32, 33, 35, 36, 37].

This paper is about fold maps of $(n + q)$ -dimensional manifolds into oriented n -dimensional manifolds. Fold maps of $(n + q)$ -dimensional manifolds into n -dimensional manifolds have the formula $f(x_1, \dots, x_{n+q}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \pm x_n^2 \pm \dots \pm x_{n+q}^2)$ as a local form around each singular point, and the subset of the singular points in the source manifold is a $(q + 1)$ -codimensional submanifold. Moreover, if we restrict a fold map to

the set of its singular points, then we obtain a codimension one immersion into the target manifold of the fold map. These properties give the possibility to define simple geometrical invariants of cobordisms of fold maps via immersions of the singular sets. And by [39] these geometrical invariants show a strong relation with stable homotopy groups of Thom spaces of vector bundles like the circle S^1 and the projective space $\mathbb{R}P^\infty$. Furthermore, it turns out that these geometrical invariants detect an important torsion part of the cobordism group of fold maps, namely the stable homotopy groups of spheres and the space $\mathbb{R}P^\infty$.

In [3] Ando showed that the cobordism group of fold maps of oriented n -dimensional manifolds into the n -dimensional Euclidean space \mathbb{R}^n is isomorphic to the n th stable homotopy group of spheres. In this paper we are looking for similar results in the case of the cobordism group of fold maps of $(n+q)$ -dimensional manifolds into \mathbb{R}^n , where $q > 0$. The case $n = 1$ (i.e., the cobordism group of Morse functions) has been computed by Ikegami [9].

REFERENCES

- [1] Y. Ando, Fold-maps and the space of base point preserving maps of spheres, *J. Math. Kyoto Univ.* **41** (2002), 693–737.
- [2] Y. Ando, Existence theorems of fold-maps, *Japan. J. Math.* **30** (2004), 29–73.
- [3] Y. Ando, Stable homotopy groups of spheres and higher singularities, *J. Math. Kyoto Univ.* **46** (2006) 147–165.
- [4] P. E. Conner and E. E. Floyd, *Differentiable periodic maps*, Springer-Verlag, 1964.
- [5] J. M. Eliashberg, On singularities of folding type, *Math. USSR-Izv.* **4** (1970), 1119–1134.
- [6] J. M. Eliashberg, Surgery of singularities of smooth mappings, *Math. USSR-Izv.* **6** (1972), 1302–1326.
- [7] M. Gromov, Stable mappings of foliations into manifolds, *Math. USSR-Izv.* **3** (1969), 671–694.
- [8] J. F. Hughes, Bordism and regular homotopy of low-dimensional immersions, *Pacific J. Math.* **156** (1992), no. 1, 155–184.
- [9] K. Ikegami, Cobordism group of Morse functions on manifolds, *Hiroshima Math. J.* **34** (2004), 211–230.
- [10] K. Ikegami and O. Saeki, Cobordism group of Morse functions on surfaces, *J. Math. Soc. Japan* **55** (2003), 1081–1094.
- [11] K. Jänich, Symmetry Properties of Singularities of C^∞ -Functions, *Math. Ann.* **238** (1978), 147–156.
- [12] B. Kalmár, Cobordism group of Morse functions on unoriented surfaces, *Kyushu J. Math.* **59** (2005), 351–363.
- [13] B. Kalmár, Cobordism group of fold maps from oriented 3-manifolds into the plane, submitted.
- [14] B. Kalmár, Pontrjagin-Thom construction for singular maps with negative codimension, degree-thesis, 2005.
- [15] B. Kalmár, Fold cobordisms and stable homotopy groups, preprint.
- [16] U. Koschorke, Vector fields and other vector bundle morphisms - a singularity approach, *Lect. Notes in Math.* **847**, Springer-Verlag, 1981.

- [17] H. Levine, Elimination of cusps, *Topology* **3** (1965) suppl. 2, 263–296.
- [18] H. Levine, Classifying immersions into \mathbb{R}^4 over stable maps of 3-manifolds into \mathbb{R}^2 , *Lect. Notes in Math.* **1157**, Springer-Verlag, 1985.
- [19] A. Liulevicius, A theorem in homological algebra and stable homotopy of projective spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **109** (1963), 540–552.
- [20] R. Rimányi and A. Szűcs, Generalized Pontrjagin-Thom construction for maps with singularities, *Topology* **37** (1998), 1177–1191.
- [21] V. Rohlin, *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **89** (1953), 789–792.
- [22] O. Saeki, Notes on the topology of folds, *J. Math. Soc. Japan* **44** (1992), no. 3, 551–566.
- [23] O. Saeki, Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces. II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **40** (1993), no. 1, 73–124.
- [24] O. Saeki, Stable maps and links in 3-manifolds, *Workshop on Geometry and Topology (Hanoi, 1993)*, *Kodai Math. J.* **17** (1994), no. 3, 518–529.
- [25] O. Saeki, Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces, *Topology* **35** (1996), no. 3, 671–698.
- [26] O. Saeki, Cobordism groups of special generic functions and groups of homotopy spheres, *Japan. J. Math. (N.S.)* **28** (2002), no. 2, 287–297.
- [27] O. Saeki, Fold maps on 4-manifolds, *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), no. 3, 627–647.
- [28] O. Saeki, *Topology of singular fibers of differentiable maps*, *Lect. Notes in Math.* **1854**, Springer-Verlag, 2004.
- [29] O. Saeki and T. Yamamoto, Singular fibers of stable maps and signatures of 4-manifolds, *Geom. Topol.* **10** (2006), 359–399.
- [30] R. Sadykov, Elimination of singularities of smooth mappings of 4-manifolds into 3-manifolds, *Topology Appl.* **144** (2004), no. 1–3, 173–199.
- [31] K. Sakuma, On the topology of simple fold maps, *Tokyo J. Math.* **17** (1994), no. 1, 21–31.
- [32] A. Szűcs, Analogue of the Thom space for mappings with singularity of type Σ^1 (in Russian), *Math. Sb. (N.S.)* **108 (150)** (1979), 433–456, 478; English translation: *Math. USSR-Sb.* **36** (1980), 405–426.
- [33] A. Szűcs, Cobordism groups of immersions with restricted self-intersection, *Osaka J. Math.* **21** (1984), 71–80.
- [34] A. Szűcs, Universal Singular Map, *Coll. Math. Soc. János Bolyai* 55. *Topology (Pécs, Hungary, 1989)*.
- [35] A. Szűcs, Topology of $\Sigma^{1,1}$ -singular maps, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **121** (1997), 465–477.
- [36] A. Szűcs, On the cobordism group of Morin maps, *Acta Math. Hungar.* **80** (1998), 191–209.
- [37] A. Szűcs, Elimination of singularities by cobordism, *Contemporary Mathematics* **354** (2004), 301–324.
- [38] C. T. C. Wall, A second note on symmetry of singularities, *Bull. London Math. Soc.* **12** (1980), 347–354.
- [39] R. Wells, Cobordism of immersions, *Topology* **5** (1966), 281–294.
- [40] T. Yamamoto, Classification of singular fibres of stable maps from 4-manifolds to 3-manifolds and its applications, *J. Math. Soc. Japan* **58** (2006), No. 3, 721–742.
- [41] Y. Yonebayashi, Note on simple stable maps of 3-manifolds into surfaces, *Osaka J. Math.* **36** (1999), no. 3, 685–709.

BOLDIZSÁR KALMÁR

KYUSHU UNIVERSITY, FACULTY OF MATHEMATICS, 6-10-1 HAKOZAKI, HIGASHI-KU, FUKUOKA 812-8581, JAPAN

E-mail address: kalmbold@yahoo.com

APPLICATION OF GRÖBNER BASES AND COMPUTER CALCULATION TO LS-CATEGORY OF ORIENTED GRASSMANN MANIFOLDS

TOMOHIRO FUKAYA

ABSTRACT. Until these days, there are a few applications of Gröbner bases and computer calculations to algebraic topology. However, they have been applied to algebraic geometry and given us many results. In this paper we apply them to the cohomology of oriented Grassmann manifolds and obtain the $\mathbb{Z}/2$ cup-length of them, which is a lower bound of Lusternik-Schnirelmann category.

1. INTRODUCTION

In [7], Lusternik and Schnirelmann defined the LS-category of a space X , $\text{cat}(X)$, by the least number n such that there is an open cover $X = \bigcup_{i=0}^n U_i$ in which each U_i is the contractible in X . In particular, one has $\text{cat}(\ast) = 0$. The original result of [7] shows that $\text{cat}(X)$ provides a lower bound for the number of critical points of a smooth function on a manifold X . The LS-category now appears in various areas of mathematics, not only in geometry, and it has been studied by many mathematicians. Especially, homotopy theorists have been trying to develop the theory by finding invariants estimating the LS-category. One of the most well-known such invariants is the cup-length as follows. Let \mathcal{M} be non-negative graded ring, the cup-length of \mathcal{M} , denoted by $\text{cup}(\mathcal{M})$ is the greatest number k such that there exist $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^0$ satisfying $a_1 \cdots a_k \neq 0$. We simply write $\text{cup}(H^*(X; R))$ by $\text{cup}_R(X)$ for space X and a commutative ring R . Then, by definition, one can easily deduce that

$$\text{cat}(X) \geq \text{cup}_R(X).$$

A longstanding problem in topology is the task to find LS-category for familiar manifold. However, this is very hard even in the case of well-known homogeneous spaces. The aim of this paper is to estimate the LS-category of the specific oriented Grassmann manifolds

$$\tilde{G}_{n,3} = SO(n+3)/SO(n) \times SO(3)$$

by calculating the cup-length of the mod 2 cohomology of $\tilde{G}_{n,3}$, here $\tilde{G}_{n,3}$ is, of course, oriented 3 dimensional subspaces in \mathbb{R}^{n+3} . A good plenty of computer calculation for $\text{cup}_{\mathbb{Z}/2}(\tilde{G}_{n,3})$ gives us the following conjecture.

Conjecture 1.1.

$$\text{cup}_{\mathbb{Z}/2}(\tilde{G}_{n,3}) = \begin{cases} 2^{m+1} - 3 & \text{when } 2^{m+1} - 4 \leq n \leq 2^{m+1} + 2^m - 6 \\ 2^{m+1} - 1 + k & \text{when } n = 2^{m+1} + 2^m - 5 + k, 0 \leq k \leq 2 \\ 2^{m+1} + 2^m + \dots & \text{when } n = 2^{m+1} + 2^m + \dots + 2^{j-1} - 2 + k \\ \quad + 2^{j+1} + 2^{j-1} + k & 0 \leq k \leq 2^j - 1. \end{cases}$$

We will employ the method of Gröbner bases to calculate $\text{cup}_{\mathbb{Z}/2}(\tilde{G}_{n,3})$. Gröbner bases, discovered by Buchberger and Hironaka in the 1960s, allows us to solve problems about polynomial ideals in an algorithmic or computational fashion. This made it possible to investigate complicated examples that would be impossible to do by hand, and has changed the practice of much research in algebraic geometry. This should make a same change in algebraic topology, but a few application has been known in algebraic topology. Then, one can say that this paper provides a new method of a cohomology calculation.

Actually, we will solve the above conjecture affirmatively in the case that $n = 2^{m+1} - 4$ as:

Theorem . We have $\text{cup}_{\mathbb{Z}/2}(\tilde{G}_{n,3}) = n + 1$ when $n = 2^{m+1} - 4$.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 55M30, Secondary 57T15,13P10.
Key words and phrases. Cup-length; Lusternik-Schnirelman.

By the standard argument of the obstruction theory, one will see that:

Theorem . We have $\text{cat}(\widetilde{G}_{n,3}) < \frac{3}{2}n$ when $n = 2^{m+1} - 4$.

Corollary . Especially, we have $\text{cat}(\widetilde{G}_{4,3}) = 5$.

2. COHOMOLOGY OF $\widetilde{G}_{n,3}$

Let $\widetilde{G}_{n,3}$ and $G_{n,3}$ denote the oriented and unoriented 3 dimensional vector subspaces in \mathbb{R}^{n+3} , respectively. There is double covering map

$$(1) \quad p: \widetilde{G}_{n,3} \rightarrow G_{n,3}$$

and induced homomorphism $p^*: H^*(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(G_{n,3}; \mathbb{Z}/2)$. It will be shown that $\text{cup}_{\mathbb{Z}/2}(\widetilde{G}_{n,3})$ can be determined by $\text{cup}(\mathbf{Imp}^*)$. Then we shall investigate $\text{cup}(\mathbf{Imp}^*)$.

Borel [2] showed that

$$H^*(G_{n,3}; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[w_1, w_2, w_3]/I_n$$

where the ideal I_n is generated by the homogeneous components of degrees $n+1, n+2$ and $n+3$ in $1/(w_1, w_2, w_3)$. Then considering the Wang sequence induced by the double covering map, we have

$$H^*(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[w_2, w_3]/J_n$$

where the ideal J_n is generated by the homogeneous components of degrees $n+1, n+2$ and $n+3$ in $1/(1+w_2+w_3)$.

Let N be the unique integer which satisfies $2^N < n \leq 2^{N+1}$. Since $\dim \widetilde{G}_{n,3} < 4n \leq 2^{N+3}$, we have $(1+w_2+w_3)^{2^{N+3}} = 1$ in $H^*(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}/2)$. Then it follows that $1/(1+w_2+w_3) = (1+w_2+w_3)^{2^{N+3}-1}$ and hence J_n is generated by

$$(2) \quad g_r = \sum_{\frac{r}{3} \leq s \leq \frac{r}{2}} \binom{s}{3s-r} w_2^{3s-r} w_3^{r-2s}$$

for $n+1, n+2$ and $n+3$.

3. INVESTIGATING GENERATORS $n+1, n+2$ AND $n+3$

In this section, we investigate generators g_{n+1}, g_{n+2} and g_{n+3} of J_n by exploiting the binary expansion.

Let us prepare notation for the binary expansion. To a non-negative integer x with $0 \leq x < 2^k$, we assign a sequence $\epsilon_k(x) = (x_{k-1}, \dots, x_0) \in \{0, 1\}^k$ such that $x = \sum_{i=0}^{k-1} x_i 2^i$. This is, of course, the binary expansion of x . To calculate $\binom{s}{3s-r}$ modulo 2, we use the following well-known result from elementary number theory.

Lemma 3.1. Let n and k be non-negative integers such that $k \leq n \leq 2^l - 1$ and $\epsilon_l(n) = (n_{l-1}, \dots, n_0)$, $\epsilon_l(k) = (k_{l-1}, \dots, k_0)$. Then we have $\binom{n}{k} \equiv 1 \pmod{2}$ if and only if $k_i = 1$ implies $n_i = 1$ for each i .

In the rest of this paper, we assume that

$$n = 2^{m+1} - 4 \quad (m \geq 2).$$

Applying Lemma 3.1 to the coefficients of g_{n+1} , we have:

Proposition 3.2. $\binom{s}{3s-(n+1)}$ is even for all integer s with $(n+1)/3 \leq s \leq (n+1)/2$, that is $g_{n+1} = 0$.

Proof. Let the binary expansion of s with $(n+1)/3 \leq s \leq (n+1)/2$ be $\epsilon_m(s) = (s_{m-1}, \dots, s_0)$ and that of $n+1-2s$ be $\epsilon_{m+1}(n+1-2s) = (t_m, \dots, t_0)$. Since $s \leq 2^m - 2$, there exists an integer i such that $s_i = 0$. Let i be the least integer satisfying $s_i = 0$, that is $\epsilon_m(s) = (s_{m-1}, \dots, s_{i+1}, 0, 1, \dots, 1)$. Then it is easy to show that $t_i = 1$. Hence it follows from Lemma 3.1 that $\binom{s}{3s-(n+1)} = \binom{s}{n+1-2s} \equiv 0 \pmod{2}$. \square

Next we investigate g_{n+2} . Coefficients of g_{n+2} are well understood by considering their binary expansion as in the above case of g_{n+1} . Let

$$\mathcal{S}_k = \left\{ s \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \frac{n(k)+2}{3} \leq s \leq \frac{n(k)+2}{2}, \epsilon_k(s) = (s_{k-1}, \dots, s_0) \text{ satisfies that if } s_j = 0, \text{ then } s_{j+1} = 1 \right\}$$

here $n(k) = 2^{k+1} - 4$. Note that $\frac{n(k)+2}{3} \leq s \leq \frac{n(k)+2}{2}$ implies that s_{k-1} is always equal to 1 for each $s \in \mathcal{S}_k$ with $\epsilon_k(s) = (s_{k-1}, \dots, s_0)$. There is a one-to-one correspondence between non-zero coefficients of g_{n+2} and \mathcal{S}_m as:

Lemma 3.3. $\binom{s}{3s-(n+2)} \equiv 1 \pmod{2}$ if and only if $s \in \mathcal{S}_m$.

It is convenient for calculations in section 4 to index coefficients of g_{n+2} by exponents of w_2 in (2), that is, $3s - (n + 2)$, not by $s \in \mathcal{S}_m$. Then we define a set \mathcal{P}_k by $\mathcal{P}_k = \{p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid p = 3s - (n(k) + 2), s \in \mathcal{S}_k\}$. \mathcal{P}_m is expressed by the binary expansion as:

Proposition 3.4. *Let*

$$\Delta_k = \{(p_{k-1}, \dots, p_0) \in \{0, 1\}^k \mid \text{If } p_{l-1} = 1 \text{ and } p_l = p_{l+1} = \dots = p_{l+2l} = 0, \text{ then } p_{l+2l+1} = 0\}$$

here we assume that $p_{-1} = 1$. Then we have $\mathcal{P}_m = \{p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \epsilon_m(p) \in \Delta_m\}$.

We list, without proof, some properties of Δ_k which will be needed in the following sections.

Proposition 3.5. *The set Δ_k has the following properties.*

- (1) $\mathbf{p}_k \in \Delta_k$ implies $(1, \mathbf{p}_k) \in \Delta_{k+1}$.
- (2) $\mathbf{p}_k \in \Delta_k$ implies $(\mathbf{p}_k, 1) \in \Delta_{k+1}$.
- (3) $\Delta_m = \{(1, \mathbf{p}_{m-1}) \in \{0, 1\}^m \mid \mathbf{p}_{m-1} \in \Delta_{m-1}\} \sqcup \{(0, 0, \mathbf{p}_{m-2}) \in \{0, 1\}^m \mid \mathbf{p}_{m-2} \in \Delta_{m-2}\}$.

Sketch of proof of Proposition 3.4. It is easy to show that $\mathcal{S}_m = \{s + 2^{m-1} \mid s \in \mathcal{S}_{m-1}\} \sqcup \{s + 2^{m-1} \mid s \in \mathcal{S}_{m-2}\}$. Then we have $\mathcal{P}_m = \{p + 2^{m-1} \mid p \in \mathcal{P}_{m-1}\} \sqcup \mathcal{P}_{m-2}$. Thus, for $\mathcal{P}_2 = \{0, 3\}$ and $\mathcal{P}_3 = \{1, 4, 7\}$, by induction, we have established Proposition 3.4. \square

For the last of this section, we investigate g_{n+3} . Coefficients of g_{n+3} can be well understood by using the binary expansion as well as above. Let

$$\mathcal{S}'_k = \left\{ s' \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \frac{n(k)+3}{3} \leq s' \leq \frac{n(k)+3}{2}, \epsilon_k(s') = (s_{k-1}, \dots, s_1, 1) \text{ satisfies that if } s_j = 0, \text{ then } s_{j+1} = 1 \right\}.$$

Lemma 3.6. $\binom{s'}{3s'-(n+3)} \equiv 1 \pmod{2}$ if and only if $s' \in \mathcal{S}'_m$.

We give an explicit description of the set $\mathcal{P}'_k = \{p' \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid p' = 3s' - (n(k) + 3), s' \in \mathcal{S}'_k\}$.

Proposition 3.7. $\mathcal{P}'_m = \{p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \epsilon_m(p) = (\mathbf{p}_{m-1}, 0), \mathbf{p}_{m-1} \in \Delta_{m-1}\}$.

4. GRÖBNER BASIS AND CUP-LENGTH

4.1. Gröbner basis. We first recall the definition and some facts of a Gröbner basis by restricting to our specific cases. In order to clarify our discussion and simplify notation, we shall make a convention of identifying a two variable polynomial ring with a certain set as follows. Let $\mathcal{X} = \{(p, q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \mid p \geq 0, q \geq 0\}$ and let $P[\mathcal{X}]$ denote the set of finite subset of \mathcal{X} . By assigning $F \in P[\mathcal{X}]$ to $\sum_{(p,q) \in F} w_2^p w_3^q$, we can identify $P[\mathcal{X}]$ with a polynomial ring $\mathbb{Z}/2[w_2, w_3]$ and we shall make this identification throughout this section. This identification translates the operations in $\mathbb{Z}/2[w_2, w_3]$ into $P[\mathcal{X}]$ as: For $F, G \in P[\mathcal{X}]$,

$$F + G = F \cup G \setminus F \cap G, \quad F \cdot G = \sum_{(p,q) \in F, (r,s) \in G} (p+r, q+s).$$

This translation enables us to handle the following polynomial calculations easily.

The order of \mathcal{X} is given by the usual lexicographic order. Namely, for $(p, q), (r, s) \in \mathcal{X}$,

$$(p, q) \geq (r, s) \text{ if and only if } p > r \text{ or } p = r, q \geq s.$$

By employing this order, we search for a Gröbner basis of the ideal $J_n \subset P[\mathcal{X}]$.

In order to define a Gröbner basis, we prepare some notation and terminology. The leading term of $F \in P[\mathcal{X}]$ is the monomial $\text{LT}(F) = \max\{(p, q) \in F\}$. Choose $F_1, \dots, F_s \in P[\mathcal{X}]$ and give them an arbitrary order. Then it is known that there is an algorithm to provide the decomposition of $F \in P[\mathcal{X}]$ as $F = A_1 F_1 + \dots + A_s F_s + R$ such that $A_1, \dots, A_s \in P[\mathcal{X}]$ and R is a linear combination of monomials, non of which is divisible by each $\text{LT}(F_1), \dots, \text{LT}(F_s)$. The above R is called the remainder of F on division by (F_1, \dots, F_s) . However, this decomposition depends on the choice of an order of F_1, \dots, F_s and $F \in \langle F_1, \dots, F_s \rangle$ does not imply the remainder $R = 0$. We can overcome this difficulty of remainders by choosing a Gröbner basis defined as:

Definition 4.1. *Let I be an ideal of $P[\mathcal{X}]$. A finite subset $G = \{G_1, \dots, G_s\}$ is a Gröbner basis of I if*

$$\langle \text{LT}(F) \mid F \in I \rangle = \langle \text{LT}(G_1), \dots, \text{LT}(G_s) \rangle.$$

Theorem 4.2. Let I be an ideal of $P[X]$ and let $\{G_1, \dots, G_s\}$ be a Gröbner basis of I . Then the remainder of $F \in I$ on division by $\{G_1, \dots, G_s\}$ is zero.

Buchberger gave a criterion for a set of polynomials being a Gröbner basis of the ideal generated by those polynomials as follows. For $F, G \in P[X]$, the least common multiple of F and G is the monomial $\text{LCM}(F, G) = (\max\{p, r\}, \max\{q, s\})$, where $\text{LT}(F) = (p, q)$ and $\text{LT}(G) = (r, s)$. The S -polynomial of F and $G \in P[X]$ is

$$S(F, G) = \frac{\text{LCM}(F, G)}{\text{LT}(F)}F + \frac{\text{LCM}(F, G)}{\text{LT}(G)}G.$$

Theorem 4.3. The set of polynomials $\{G_1, \dots, G_s\} \subset P[X]$ is a Gröbner basis of the ideal (G_1, \dots, G_s) if and only if the remainder of $S(G_i, G_j)$ is zero for each $i \neq j$.

4.2. Search for a Gröbner basis of J_n . The author found the following polynomials experimentally by a computer calculation. For a non-negative integer t with $t - 2(2^m - 2^i) \equiv 0 \pmod{3}$, we define a polynomial $P(t, i)$ by

$$P(t, i) = \left\{ \left(p, \frac{t-2p}{3} \right) \in \mathcal{X} \mid \epsilon(p) = (\mathbf{p}_{m-i}, \overbrace{0, \dots, 0}^i), \mathbf{p}_{m-i} \in \Delta_{m-i} \right\} \in P[X]$$

$$P_i = P(2^i + n + 1, i).$$

We shall prove that $\{P_0, \dots, P_m\}$ is a Gröbner basis of J_n .

In order to investigate P_i , we define the following sets which will be useful for expression. Let $\Delta(i, j, l)$ and $\bar{\Delta}(i, j)$ be

$$\Delta(i, j, l) = \left\{ (\mathbf{p}_{m-j}, \mathbf{p}_{j-i-l}, \overbrace{1, \dots, 1}^l, \overbrace{0, \dots, 0}^i) \in \{0, 1\}^m \mid (\mathbf{p}_{m-j}, \mathbf{p}_{j-i-l}) \in \Delta_{m-i-l}, \mathbf{p}_{j-i-l} \neq (1, \dots, 1) \right\}$$

$$\bar{\Delta}(i, l) = \left\{ (\mathbf{p}_{m-i-l-2}, 0, 0, \overbrace{1, \dots, 1}^l, \overbrace{0, \dots, 0}^i) \in \{0, 1\}^m \mid \mathbf{p}_{m-i-l-2} \in \Delta_{m-i-l} \right\}.$$

Lemma 4.4.

$$\Delta(i, j, l) = \bar{\Delta}(i, l) \sqcup \Delta(i, j, l+1).$$

Let us begin investigating P_i . It is straightforward to verify that $\text{LT}(P_i) = (2^m - 2^i, 2^i - 1)$.

Proposition 4.5. We have $P_0, \dots, P_m \in J_{m,3}$. In particular $P_0 = g_{n+2}$, $P_1 = g_{n+3}$.

Proof. For Proposition 3.4 and Proposition 3.7, one has $P_0 = g_{n+2}$ and $P_1 = g_{n+3}$. For $i < j$, we have

$$S(P_i, P_j) = (0, 2^j - 2^i) \cdot P_i + (2^j - 2^i, 0) \cdot P_j$$

$$= \left\{ (p, q_{i,j}) \in \mathcal{X} \mid \epsilon(p) = (\mathbf{p}_{m-j}, \mathbf{p}_{j-i}, \overbrace{0, \dots, 0}^i), (\mathbf{p}_{m-j}, \mathbf{p}_{j-i}) \in \Delta_{m-i} \right\}$$

$$+ \left\{ (p, q_{i,j}) \in \mathcal{X} \mid \epsilon(p) = (\mathbf{p}_{m-j}, \overbrace{1, \dots, 1}^{j-i}, \overbrace{0, \dots, 0}^i), \mathbf{p}_{m-j} \in \Delta_{m-j} \right\}$$

$$= \left\{ (p, q_{i,j}(p)) \in \mathcal{X} \mid \epsilon(p) \in \Delta(i, j, 0) \right\}$$

where $q_{i,j}(p) = \frac{3 \cdot 2^j - 2 \cdot 2^i + n + 1 - 2p}{3}$. By definition of Δ_k , one can easily see that $\Delta(i, 0, i+1) = \Delta_{m-i-2}$. Then it follows that $S(P_i, P_{i+1}) = P_{i+2}$ and hence we have established Proposition 4.5. \square

We calculate the remainders of $S(P_i, P_j)$ on division by $\{P_0, \dots, P_m\}$. Using Lemma 4.4, we have:

Lemma 4.6. The remainder of $Q_{i,j,l} = \left\{ (p, q_{i,j}(p)) \in \mathcal{X} \mid \epsilon(p) \in \Delta(i, j, l) \right\}$ on division by P_{i+l+2} is $Q_{i,j,l+1}$.

Theorem 4.7. The set $\{P_0, \dots, P_m\}$ is a Gröbner basis of J_n .

Proof. For Proposition 4.5, we have $J_n = \langle P_0, \dots, P_m \rangle$. As in the proof of Proposition 4.5, we have $S(P_i, P_j) = Q(i, j, 0)$ and then it follows from Lemma 4.6 that, for $i < j$,

$$S(P_i, P_j) = Q(i, j, 0) \xrightarrow{P_{i+2^*}} Q(i, j, 1) \xrightarrow{P_{i+3^*}} \dots \xrightarrow{P_{j^*}} Q(i, j, j-i-1) \xrightarrow{P_{j+1^*}} 0.$$

\square

4.3. **Cup-length of \mathbf{Imp}^* .** Using a Gröbner basis obtained as above, we can find all $(a, b) \in \mathcal{X}$ such that $(a, b) \notin J_n$. Therefore we have obtained:

Theorem 4.8. $\text{cup}(\mathbf{Imp}^*) = n$.

5. CUP-LENGTH AND LS-CATEGORY OF $\widetilde{G}_{n,3}$

According to Poincaré duality theorem, there exists $y \in \tilde{H}^*(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}/2)$ such that $w_2^n \cup y \in H^{\dim \widetilde{G}_{n,3}}(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}/2) \setminus \{0\}$. To obtain the exact value of the cup-length, we need the following lemma.

Lemma 5.1. For $0 \leq q < n$, $H^q(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}/2) \subset \mathbf{Imp}^*$.

Assuming that y decomposes into the cup product of two elements $y = y_1 \cup y_2$. We may assume that $\deg(y_1) \leq \deg(y_2)$. Since $\deg(w_2^n) = 2n$, we have $\deg(y_1) \leq \frac{\deg(y)}{2} = \frac{n}{2}$. It follows that $y_1 \in \mathbf{Imp}^*$. Then we have $w_2^n \cup y_1 = 0$. This contradicts the definition of y_1 . Therefore we have $\text{cup}_{\mathbb{Z}/2}(\widetilde{G}_{n,3}) = n + 1$.

Theorem 5.2 (Main theorem). $\text{cup}_{\mathbb{Z}/2}(\widetilde{G}_{n,3}) = n + 1$ when $n = 2^{m+1} - 4$ ($m \geq 2$).

The Whitehead definition of category uses a particular subspaces of the product called the **fat wedge**, as:

$$T^k(X) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid \text{at least one } x_j \text{ is the base point } *\}.$$

Let $j : T^k(X) \hookrightarrow X^k$ denote the inclusion and let $\Delta : X \rightarrow X^k$ denote the **diagonal map**, $x \mapsto (x, \dots, x)$.

Definition 5.3. For topological space X , the **category** of X , denoted $\text{cat}(X)$, is the least integer n such that there exists a map $\Delta' : X \rightarrow T^{n+1}(X)$ which makes the following diagram homotopy commute.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta'} & T^{n+1}(X) \\ & \searrow \Delta & \downarrow j \\ & & X^{n+1} \end{array}$$

This definition is consistent the definition stated in section 1. Following James [5], we identify the first obstruction to the deformation of the diagonal into the fat wedge with $w_2^{\frac{3}{2}n} = 0$. Thus we have:

Theorem 5.4. $\text{cat}(\widetilde{G}_{n,3}) < \frac{3}{2}n$ when $n = 2^{m+1} - 4$ ($m \geq 2$).

Corollary 5.5. $\text{cat}(\widetilde{G}_{4,3}) = 5$.

REFERENCES

- [1] Bernstein, I., *On the Lusternik-Schnirelmann category of Grassmannians*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1976), **79**, 120.
- [2] Borel, A., *La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes*, Comment. Math. Helvetici **27**(1953), 165-197.
- [3] Cornea, O., Lupton, G., Oprea, J., Tanré, D., *Lusternik-Schnirelmann Category*, Mathematical Surveys and Monographs Vol. 103, American Math. Soc., 2003.
- [4] Cox, D. C., Little, J., O'Shea, D. *Ideals, varieties, and algorithm*, Second edition, Springer, New York, 1997.
- [5] James, I. M. *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), no. 4, 331-348;
- [6] Korbaš, J., *Bounds for the cup-length of Poincaré spaces and their applications*,
- [7] Lusternik, L., Schnirelmann, L. *Méthodes topologiques dans les problèmes variaionnels*, Hermann, Paris, 1934.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS KYOTO UNIVERSITY. KYOTO 606-8502, JAPAN.
E-mail address: tomo_xi@math.kyoto-u.ac.jp

On Hamiltonian deformation of loops ^{*}

Yoshiro YABU [†]

Department of Applied Mathematics and Physics

Kyoto University, Kyoto-606-8501, Japan

Problem 1. In a flat torus $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ with the standard symplectic form, take two loops γ_0 and γ_1 as

$$\gamma_0(t) = (t, 0), \quad \gamma_1(t) = (t, \epsilon), \quad \text{mod } \mathbb{Z}^2,$$

where $\epsilon \in (0, 1)$ is a constant. A question is if there exists a Hamiltonian diffeomorphism ϕ such that $\gamma_1 = \phi \circ \gamma_0$.

Problem 2. Suppose that a four-dimensional torus $T^4(x_1, x_2, y_1, y_2) = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ is endowed with a symplectic form $dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$. Is it possible for two loops

$$\gamma_0(t) = (t, 0, 0, 0), \quad \gamma_1(t) = (t, \epsilon, 0, 0), \quad \text{mod } \mathbb{Z}^4,$$

to be deformed into each other by a Hamiltonian flow?

1 The Poincaré invariants

A cotangent bundle $M = T^*N$ of a smooth manifold N carries the Liouville form $\theta \in \Omega^1(M)$ defined to be

$$\theta_\alpha(X) := \alpha(\pi_*X), \quad \alpha \in M, \quad X \in T_\alpha M,$$

where π denotes a natural projection from $M = T^*N$ to N . A symplectic form ω is a two-form given by $\omega = -d\theta$. (See the remark below.)

The Poincaré invariant for a loop γ in M is an integral of θ along γ , that is,

$$\mathcal{A}(\gamma) := \int_{S^1} \gamma^*\theta.$$

^{*}This note is for the 3rd COE Conference for Young Researchers, Hokkaido University.

[†]e-mail: yoshiro[atmark]amp.i.kyoto-u.ac.jp

On Hamiltonian deformation of loops

The derivation of the name ‘‘Poincaré invariant’’ is invariance under Hamiltonian isotopies. In fact, for a Hamiltonian isotopy $\phi_s \in \text{Ham}(M, \omega)$, the equality $\mathcal{A}(\phi_s \circ \gamma) = \mathcal{A}(\gamma)$ holds true for any $\gamma \in \mathcal{L}M$. Parenthetically, we note that it is not true if γ is not contractible and ϕ_s is not Hamiltonian but symplectic. Conversely, the following theorem is known as a special case of Cartan’s principle in classical mechanics:

Theorem 3. Suppose that ϕ_s is a family of diffeomorphisms on M with $\phi_0 = \text{id}_M$. If $\mathcal{A}(\phi_s \circ \gamma) = \mathcal{A}(\gamma)$ for any $\gamma \in \mathcal{L}M$, then ϕ_s is a Hamiltonian flow.

2 Hamiltonian deformation

Let (M^{2n}, ω) be a symplectic manifold. Since the symplectic form ω is not always exact, the Poincaré invariants for loops cannot be defined directly. If a loop γ is contractible, there is a smooth map $v : D^2 \rightarrow M$ such that $v|_{\partial D^2} = \gamma$. Then the Poincaré invariant for γ is replaced by a symplectic action of a bounding disk v ;

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_{D^2} v^* \omega.$$

However, this definition is ill-posed because $\mathcal{A}(\gamma)$ depends on the choice of bounding disks. Thus \mathcal{A} is a multi-valued functional on the set \mathcal{L}_0M of contractible loops in M . By lifting \mathcal{A} to the universal covering space $\widetilde{\mathcal{L}_0M}$ of \mathcal{L}_0M , we can obtain a single-valued functional, which is denoted by the same symbol \mathcal{A} . Here the covering space $\widetilde{\mathcal{L}_0M}$ is a quotient space of the set of pairs (γ, v) by an equivalence relation like

$$(\gamma, v) \sim (\gamma', v') \iff \gamma = \gamma', \text{ and } v \text{ is homotopic to } v'.$$

The covering space $\widetilde{\mathcal{L}_0M}$ is equipped with the structure group $\pi_2(M)$.

Lê and Ono proved the following theorem in an appendix of [LO].

Theorem 4. Assume that $\dim M \geq 4$, and that $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{L}_0M$ are embedded. If $\mathcal{A}([\gamma_0, v_0]) = \mathcal{A}([\gamma_1, v_1])$ for some bounding disks v_0 and v_1 of γ_0 and γ_1 , respectively, then there exists a Hamiltonian flow ϕ_s such that $\phi_0 = \text{id}_M$ and $\phi_1 \circ \gamma_0 = \gamma_1$.

In this talk, we will show the same argument for embedded loops with a non-trivial homotopy class, following the discussion by Lê and Ono [LO]. The set of loops in M which represent a homotopy class $\alpha \in \pi_1(M)$ is denoted by $\mathcal{L}_\alpha M$. Since loops we consider are not contractible, the Poincaré invariants for them cannot be defined even though we

On Hamiltonian deformation of loops

allow the invariants to be multi-valued. However, we can define a difference between the Poincaré invariants for two loops. For a cylinder $u : \mathbb{A} = S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ which connects $\gamma_0 \in \mathcal{L}_\alpha M$ to $\gamma_1 \in \mathcal{L}_\alpha M$, we put

$$\mathcal{A}_\alpha([\gamma_0, \gamma_1, u]) := \int_{\mathbb{A}} u^* \omega,$$

where $[\gamma_0, \gamma_1, u]$ is an equivalence class by the equivalence relation

$$(\gamma_0, \gamma_1, u) \sim (\gamma'_0, \gamma'_1, u') \iff \gamma_i = \gamma'_i, i = 0, 1, \text{ and } u \text{ is homotopic to } u'.$$

Theorem 5. Suppose that $\dim M \geq 4$, and that $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{L}_\alpha M$ are embedded. If $\mathcal{A}_\alpha([\gamma_0, \gamma_1, u]) = 0$ for some cylinder u connecting γ_0 to γ_1 , then there is a Hamiltonian flow ϕ_s such that $\phi_0 = \text{id}_M$ and $\phi_1 \circ \gamma_0 = \gamma_1$. Moreover, the trajectory of γ_0 by $\{\phi_s\}_{s \in [0, 1]}$ is homotopic to u .

3 Loops in an oriented surface

In the previous section, we have obtained the condition for two embedded loops to be deformed into each other by a Hamiltonian flow if $\dim M \geq 4$. It is expected that the same assertion would be true even if a symplectic manifold is an oriented surface. The assumption $\dim M \geq 4$ seems to be a technicality in the proof, but may be essential from a viewpoint of Hamiltonian deformations of Lagrangian submanifolds.

In the following, we consider Hamiltonian deformation of *non-contractible* loops in a connected compact surface Σ with an area form ω . Because it is a subtle problem what homotopy type of loops we deal with. As seen below, the choice of a homotopy class of loops makes a crucial difference in our discussion. For instance, in a Darboux chart, disjoint small circles with the same radius can be deformed each other by a Hamiltonian flow. In general, the next result has already known.

Proposition 6. For embedded disks D_0 and D_1 in Σ with the same area, there exists a Hamiltonian diffeomorphism $\phi \in \text{Ham}(\Sigma, \omega)$ which maps D_0 onto D_1 .

For contractible loops, the point in our literature is only areas of bounded regions by them. In non-contractible case, however, it does not make sense. Further, we must take though for intersections of non-contractible loops:

Lemma 7. Let $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$ be non-trivial. If $\gamma_0 \in \mathcal{L}_\alpha \Sigma$ is deformed into $\gamma_1 \in \mathcal{L}_\alpha \Sigma$ by a Hamiltonian isotopy, then they must intersect.

On Hamiltonian deformation of loops

This lemma means the inequality

$$\#(\gamma \cap \phi(\gamma)) \geq \sum_k \text{rank } H_k(S^1; \mathbb{Z}), \quad \phi \in \text{Ham}(\Sigma, \omega)$$

for a non-contractible loop γ which transversely intersects $\phi(\gamma)$. More generally, we have a Morse-type inequality

$$\#(L \cap \phi(L)) \geq \sum_k \text{rank } H_k(L; \mathbb{Q}), \quad \phi \in \text{Ham}(M, \omega),$$

provided a Lagrangian submanifold L transversely intersects $\phi(L)$ under appropriate assumptions. To show this inequality, Floer cohomology for Lagrangian intersections is applied.

Observation 8. Consider a flat torus $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ with the standard symplectic form $\omega = dx \wedge dy$. Two embedded loops illustrated in Figure 1 can be deformed each other by some Hamiltonian flow if $|A| = |B|$.

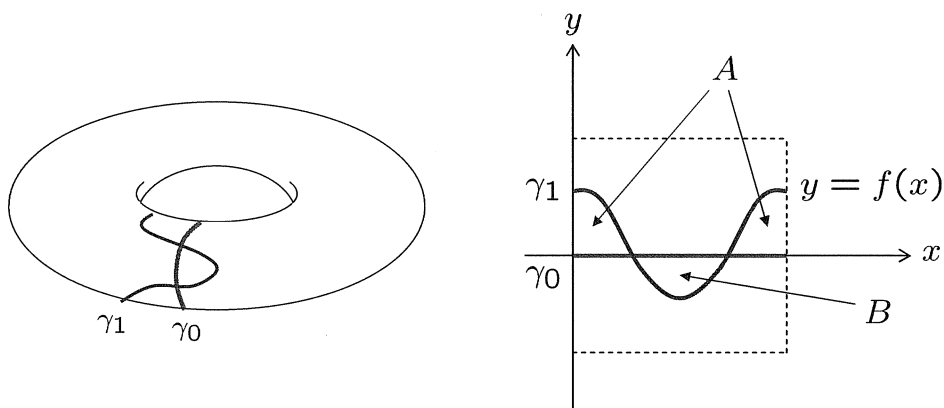


Figure 1: Two loops in $\Sigma = T^2$.

References

- [LO] H.-V. Lê and K. Ono, Symplectic fixed points, the Calabi invariant and Novikov homology, *Topology* **34**, 155-176 (1995).

繰り込み群によるベクトル場の C^1 近似

C^1 Approximation of Vector Fields on the Renormalization Group Method

京都大学情報学研究科 数理工学専攻

千葉逸人 *1

Abstract. 繰り込み群の方法は Chen, Goldenfeld, Oono [1,2] によって考案された常微分方程式に対する特異摂動の一種であり、与えられた方程式の厳密解を長い時間で近似する近似解を構成することができる。従来、繰り込み群の方法は 1 つ 1 つの厳密解を近似する 1 つ 1 つの近似曲線を構成するにすぎなかったが、発表者はこれら近似曲線の族が正しくベクトル場を定義することを示した。従って繰り込み群の方法は解の近似理論というよりもベクトル場の近似理論であり、これにより力学系理論の様々な定理を使うことが可能となる。特に元の方程式に対する不変多様体の存在やその安定性といった位相的性質が、繰り込み群方程式と呼ばれる方程式から遺伝することを示すことができる。

1 繰り込み群の方法

まず、繰り込み群の方法により常微分方程式の近似解を構成する手続きを紹介しよう。

f を多様体 M 上の時間に依存しない C^r 級ベクトル場とし、 $\varphi : \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ をその flow とする。すなわち $\varphi_t(x_0) = x(t)$ は常微分方程式 $\dot{x} = f(x)$ の x_0 を通る解であり、 φ_t は $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, $\varphi_0 = id_M$ を満たす。ここで id_M は M 上の恒等写像を表す。固定した $t \in \mathbf{R}$ に対して、 $\varphi_t : M \rightarrow M$ は M 上の微分同相を与える。我々はベクトル場は完備である、すなわち φ_t は任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して定義されるものと仮定する。

M 上の時間に依存するベクトル場 $f(t, x)$ に対しては、 $x(t, \tau, \xi)$ を常微分方程式 $\dot{x}(t) = f(t, x)$ の時刻 $t = \tau$ において $x = \xi$ を通る解とすると、flow $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ を $\varphi_{t,\tau}(\xi) = x(t, \tau, \xi)$ によって定義する。固定した $t, \tau \in \mathbf{R}$ に対して $\varphi_{t,\tau} : M \rightarrow M$ は M 上の微分同相であり、

$$\varphi_{t,t'} \circ \varphi_{t',\tau} = \varphi_{t,\tau}, \quad \varphi_{t,t} = id_M. \quad (1.1)$$

を満たす。逆に上式を満たす微分同相の族 $\varphi_{t,\tau} : M \rightarrow M$ が与えられたとき、 M 上の時間に依存するベクトル場 $f(t, x)$ を

$$f(t, x) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=t} \varphi_{\tau,t}(x). \quad (1.2)$$

により定義することができる。

$f(t, x)$ と $g(t, x)$ をそれぞれユークリッド空間 \mathbf{R}^n 上の C^4, C^3 級ベクトル場とする (一般の多様体上への拡張は容易であるがここでは行わない)。次の微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + \varepsilon g(t, x) \quad (1.3)$$

およびその非摂動系

$$\dot{x}_0(t) = f(t, x_0). \quad (1.4)$$

を考えよう。ここで $\varepsilon \in \mathbf{R}$ は微小なパラメータである。時刻 0 において点 $A \in \mathbf{R}^n$ を通る後者の一般解を

$$x_0(t) := x_0(t, 0, A) = \varphi_{t,0}^0(A), \quad (1.5)$$

*1 E mail address : chiba@amp.i.kyoto-u.ac.jp

と表す。 φ^0 は flow である。この x_0 に対し、 x_1 についての常微分方程式

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)x_1 + g(t, x_0). \quad (1.6)$$

を考える。この一般解は次のように書かれる。

$$x_1 = (D\varphi_{t,0}^0)_A \circ (D\varphi_{\tau,0}^0)^{-1}h(\tau) + (D\varphi_{t,0}^0)_A \int_{\tau}^t (D\varphi_{s,0}^0)^{-1}g(s, \varphi_{s,0}^0(A))ds, \quad (1.7)$$

ここで τ は初期時刻、 $h(\tau)$ は初期値、 $(D\varphi_{t,0}^0)_A$ は $\varphi_{t,0}^0$ の A による微分である。この x_1 に対して永年項を以下のように定義する。

Definition 1.1. $(D\varphi_{t,0}^0)^{-1}g(t, \varphi_{t,0}^0(A))$ は $t \in \mathbf{R}$ について一様に有界であるとする。このとき

$$R(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (D\varphi_{s,0}^0)^{-1}g(s, \varphi_{s,0}^0(A))ds \quad (1.8)$$

によって定義される関数 $R: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ を永年項と呼ぶ。なお、右辺の極限の収束は一様有界の仮定より従う。

式 (1.7) の x_1 の中から永年項を除去するために、 $R(A)$ を用いて x_1 を次のように変形する。

$$x_1 = (D\varphi_{t,0}^0)_A \circ (D\varphi_{\tau,0}^0)^{-1}h(\tau) + (D\varphi_{t,0}^0)_A \int_{\tau}^t \left((D\varphi_{s,0}^0)^{-1}g(s, \varphi_{s,0}^0(A)) - R(A) \right) ds + (D\varphi_{t,0}^0)_A R(A)(t - \tau).$$

ここで初期値 $h(\tau)$ を

$$h(\tau) := h(\tau, A) = (D\varphi_{\tau,0}^0)_A \int \left((D\varphi_{\tau,0}^0)^{-1}g(\tau, \varphi_{\tau,0}^0(A)) - R(A) \right) d\tau, \quad (1.9)$$

と定義すれば上式は

$$x_1 := x_1(t, \tau; A) = (D\varphi_{t,0}^0)_A \int \left((D\varphi_{t,0}^0)^{-1}g(t, \varphi_{t,0}^0(A)) - R(A) \right) dt + (D\varphi_{t,0}^0)_A R(A)(t - \tau). \quad (1.10)$$

と書き直される。この右辺第 2 項が摂動論におけるいわゆる永年項である。

この $x_1(t, \tau; A)$ に対して

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &:= \bar{x}(t, \tau; A) = x_0(t, 0, A) + \varepsilon x_1(t, \tau; A) \\ &= \varphi_{t,0}^0(A) + \varepsilon \varphi_{t,\tau}^1(h(\tau, A)) \end{aligned} \quad (1.11)$$

により定義される曲線 $\bar{x}(t)$ は素朴な摂動法による近似解と呼ばれる。ここで φ_1 は $x_1(t, \tau; A)$ の定義する flow である。この曲線は発散する永年項を含むため、一般には t が τ に十分近いときにしか元の方程式 (1.3) の厳密解を近似しない。繰り込み群の方法はこの永年項を除去するためにさらに以下の手続きをとる。

Definition 1.2. $(D\varphi_{t,0}^0)^{-1}g(t, \varphi_{t,0}^0(A))$ は $t \in \mathbf{R}$ について一様に有界であるとする。このとき、 $f + \varepsilon g$ に対する繰り込み群方程式を

$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon R(A), \quad A \in \mathbf{R}^n \quad (1.12)$$

で定義する。また右辺のベクトル場 $\varepsilon R(A)$ を $f + \varepsilon g$ に対する繰り込み群ベクトル場と呼び、その flow を φ^{RG} と表す。

時刻 t_0 において点 ξ を通る繰り込み群方程式の解を $A(t) = \varphi_{t-t_0}^{RG}(\xi)$ とするとき、

$$X(t) = X(t, t_0; \xi) := \bar{x}(t, t; A(t)), \quad (1.13)$$

によって定義される曲線 $X(t)$ が元の方程式 (1.3) の厳密解を長い時間スケールで近似する、というのが繰り込み群の方法の主張するところである。実際、ある $T > 0$ があって $t \in [-T/\varepsilon, T/\varepsilon]$ なるときこの曲線 $X(t)$ が厳密解の十分近傍にあることが DeVille ら [3] によって示された。

2 繰り込み群によるベクトル場の近似

主定理を述べるために、 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 上の関数 $f(t, x), g(t, x), x_0(t, 0, A), h(t, A) = x_1(t, t; A)$ たちに対する次のノルム条件 (N) を課す。

ノルム条件(N) $K \subset \mathbf{R}^n$ を任意のコンパクト集合とする。以下の関数のノルムが $\mathbf{R} \times K$ 上で一様に有界であると仮定する。

$$(N1) (D\varphi_{t,0}^0)^{-1}g(t, \varphi_{t,0}^0(A)), h(t, A)$$

$$(N2) \partial^2 f / \partial x^2, \partial f / \partial x, \partial g / \partial x, x_0(t, 0, A), \partial x_0 / \partial A, \partial^2 x_0 / \partial A^2, \partial h / \partial A, \partial h^2 / \partial A^2$$

$$(N3) f, \partial^2 f / \partial x \partial t, \partial^3 f / \partial x^3, \partial^3 f / \partial x^2 \partial t, g, \partial^2 g / \partial x^2, \partial^2 g / \partial x \partial t, \partial^3 x_0 / \partial A^3, \partial^3 h / \partial A^3$$

例えば、 A を対角化可能な $n \times n$ 行列で固有値を虚軸上にのみ持つもの、 $g(t, x)$ を t については周期関数で x については多項式であるものとするとき、

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon g(t, x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (2.1)$$

なる方程式に対してはノルム条件 (N1)~(N3) は自動的に満たされる。 A が虚軸上以外に固有値を持つときは中心多様体上に制限して議論すればいいので上式のタイプに制限しても応用範囲は広い。

任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して写像 $\alpha_t : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ を

$$\alpha_t(A) = x_0(t, 0, A) + \varepsilon h(t, A), \quad (2.2)$$

で定義しておく。

主定理は次のように述べられる。

Theorem 2.1. $f, g, x_0(t, 0, A), x_1(t, \tau; A)$ を (1.3), (1.5), (1.10) で定義されたものとする。 $f + \varepsilon g$ に対する繰り込み群ベクトル場を $\varepsilon R(A)$ とし、初期時刻 t_0 において初期値 $\xi \in \mathbf{R}^n$ を通るその積分曲線を $A(t) := A(t, t_0, \xi) = \varphi_{t-t_0}^{RG}(\xi)$ と表す。このとき、ある $\varepsilon_0 > 0$ で任意の $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ に対して以下が成り立つようなものが存在する：

(i) ノルム条件 (N1) が成り立つと仮定する。このとき

$$\Phi_{t,t_0} := \alpha_t \circ \varphi_{t-t_0}^{RG} \circ \alpha_{t_0}^{-1} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \quad (2.3)$$

は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 上の flow を定義する。式 (1.2) によりこの flow から誘導されるベクトル場は

$$F_\varepsilon(t, x) := \left. \frac{d}{da} \right|_{a=t} \Phi_{a,t}(x). \quad (2.4)$$

で与えられ、その積分曲線は

$$X(t, t_0; \xi) := \bar{x}(t, t; A(t, t_0, \xi)), \quad (2.5)$$

で与えられる。すなわち Chen らの繰り込み群の方法によって構成した近似解 (1.13) である。

(ii) ノルム条件 (N1), (N2) が成り立つと仮定する。このときある非負定数 L_1 が存在して式 (2.4) で定義されるベクトル場 F_ε は次を満たす。

$$\sup_{\mathbf{R} \times K} \|f + \varepsilon g - F_\varepsilon\| < \varepsilon^2 L_1. \quad (2.6)$$

ここで $K \subset \mathbf{R}^n$ は任意のコンパクト集合である。

(iii) ノルム条件 (N1)~(N3) が成り立つと仮定する。このときある非負定数 L_2 が存在して式 (2.4) で定義されるベクトル場 F_ε は次を満たす。

$$\sup_{\mathbf{R} \times K} \|Df + \varepsilon Dg - DF_\varepsilon\| < \varepsilon^2 L_2, \quad (2.7)$$

ここで $K \subset \mathbf{R}^n$ は任意のコンパクト集合であり、 $Df = (\partial f / \partial t, \partial f / \partial x)$ 、 $\|Df\| = \|\partial f / \partial x\| + \|\partial f / \partial t\|$ である。したがって繰り込み群の方法で構成した近似解の族は正しくベクトル場 F_ε を定義し、 F_ε は元のベクトル場 $f + \varepsilon g$ に C^1 位相で十分近い。

上で定義した近似ベクトル場 F_ε は座標変換で不変であり、繰り込み群の方法、および上記の定理が任意の多様体上で成り立つことは容易に分かる。

次に、多様体 M 上の自励系の方程式

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x), \quad x \in M, \quad (2.8)$$

を考えよう。ここで f, g はそれぞれ M 上の C^4, C^3 級の完備なベクトル場とする。このとき、定理 2.1 に加えて次が成り立つ。

Theorem 2.2. 式 (2.8) はノルム条件 (N) を満たし、 $|\varepsilon|$ は十分小さいとする。もし $f + \varepsilon g$ に対する繰り込み群ベクトル場 $\varepsilon R(x)$ が法双曲型不変多様体 N を持つならば式 (2.8) も N と微分同相な法双曲型不変多様体 N_ε を持つ。特に N と N_ε の安定性は一致する。

したがって、例えば繰り込み群方程式がリミットサイクルを持つならば、元の方程式もそうであることが従う。発表ではこの定理の分岐理論や同期現象への応用を紹介したい。

3 繰り込み群方程式の性質

繰り込み群方程式が元の方程式よりも簡単になっていなければ定理 2.1, 2.2 は実質役に立たない。以下の 2 つの主張は繰り込み群方程式が元の方程式よりも“解きやすい”ことを保証する。

多様体 M 上の自励系の方程式

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x), \quad x \in M. \quad (3.1)$$

を考えよう。これがノルム条件 (N1) を満たし、繰り込み群ベクトル場

$$\varepsilon R(A) = \varepsilon \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (D\varphi_s^0)^{-1} g(\varphi_s^0(A)) ds \quad (3.2)$$

が定義されるものとしておく。ここで φ^0 は $\varphi_{t+r}^0 = \varphi_t^0 \circ \varphi_r^0$ を満たす $f(x)$ の flow である。

Lie 群 G が多様体 M に作用しているとする。もし M 上のベクトル場 f が

$$(Da)_x f(x) = f(ax), \quad \forall a \in G, \forall x \in M, \quad (3.3)$$

を満たすならば、 f は G の作用で不変であるという。ここで $(Da)_x$ は $a : M \rightarrow M$ の点 x における微分である。

Proposition 3.1. 式 (3.1) について、ベクトル場 f と g が Lie 群 G の作用で不変ならば $f + \varepsilon g$ に対する繰り込み群ベクトル場もそうである。

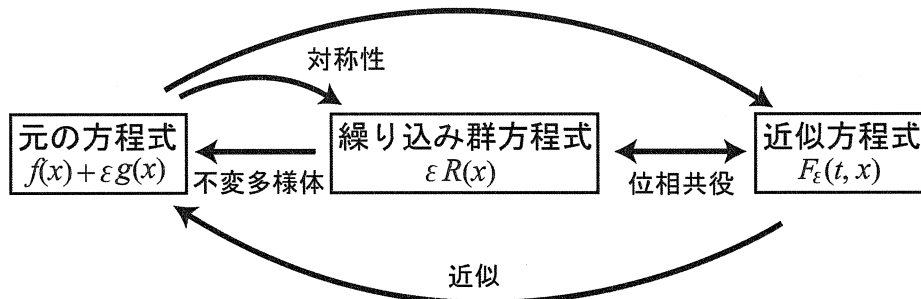
Proposition 3.2. $f + \varepsilon g$ に対する繰り込み群ベクトル場 $\varepsilon R(A)$ は f と Lie 括弧積で交換する。言い換えれば、 $R(A)$ は任意の $\forall t \in \mathbf{R}$ と $A \in M$ に対して

$$(D\varphi_t^0)_A R(A) = R(\varphi_t^0(A)), \quad (3.4)$$

を満たす。

Proposition 3.1, 3.2 は、もしベクトル場 f と g が Lie 群 G の作用で不変ならば繰り込み群ベクトル場 $\varepsilon R(A)$ は G 、および f の flow が定める 1-パラメータ変換群 $\{\varphi_t^0\}_{t \in \mathbf{R}}$ の作用で不変であることを意味する。この意味において繰り込み群方程式は $f + \varepsilon g$ よりも 1 つ多く対称性を持つので、 $f + \varepsilon g$ よりも簡明な構造を持っていると言える。

以上の定理 2.1, 2.2, 3.1, 3.2 を模式的に表しておこう。



Reference

- [1] Chen, Goldenfeld, Oono, Renormalization group theory for global asymptotic analysis, Phys. Rev. Lett. 73 (1994), no. 10, 1311-13
- [2] Chen, Goldenfeld, Oono, Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory, Phys. Rev. E 54, (1996), 376-394
- [3] DeVille, Harkin, Holzer, Josić, Kaper, Analysis of a Renormalization Group Method for solving perturbed Ordinary Differential Equations, J. Math. Phys. (preprint)

$O(1)$ -loop models and the sum rule: affine Temperley-Lieb/Hecke algebra and qKZ equation

Keiichi Shigechi

Department of Physics, Graduate School of Science, University of Tokyo
shigechi@monet.phys.s.u-tokyo.ac.jp

Abstract

We briefly review the recent developments in the study of the inhomogeneous $O(1)$ loop models. Many research areas play important roles: alternating sign matrices in combinatorics, the XXZ spin chain and the six-vertex model in statistical mechanics, and the representation theory of the Temperley-Lieb and the Hecke algebras. We also discuss the loop model on a cylinder associated with the affine Hecke algebra of type A .

1 Introduction

1.1 Alternating Sign Matrix and Six-vertex Model

We briefly review how the integrability of the six-vertex model appears in the context of alternating sign matrices (ASMs) in combinatorics. For this purpose, let us recall the known facts about ASMs and six-vertex models.

Alternating Sign Matrix A $n \times n$ alternating sign matrix is a $n \times n$ square matrix which satisfies 1) all entries are 0, 1 or -1 and 2) non-zero entries alternate in sign in each column and row. ASMs first appeared in the context of evaluating determinants, the Dodgson's algorithm (see [1] for interesting stories about ASMs). Mills, Robbins and Rumsey conjectured (proved by Zeilberger [9]) that the total number of $n \times n$ ASMs A_n is given by

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} = 1, 2, 7, 42, 429, \dots \quad (1)$$

There are some classes of ASMs with a symmetry. An example is a half-turn symmetric alternating sign matrix (HTSASM). A HTSASM is invariant under the rotation by π . The total number of $2n \times 2n$ HTSASMs is

$$A_n^{HT} = A_n^2 \prod_{j=1}^n \frac{3j+2}{3j+1} = 2, 10, 140, \dots \quad (2)$$

The sequence of numbers (1) appears also in the context of plane partitions. Actually, this coincides with the total number of the totally symmetric self-complement plane partitions.

Six-vertex model and Fully Packed Loops Let us consider a square lattice of length n . There are four edges at a vertex in the lattice. Arrows are placed on the edges. Although there are possible 16 arrow configurations at a vertex, we consider only 6 configurations which satisfy the condition that the numbers of incoming and outgoing arrows are equal. Let us introduce the weights for configurations around a vertex with a spectral parameter x (see Figure 1).

The weight of a configuration on the lattice is the product of weights at vertices. The partition function is given by the sum of the weight over all allowed arrow configurations. $2n$ spectral parameters $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ and $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ run along the vertical and horizontal edges, respectively. The boundary arrow configuration with $2n$ outgoing vertical arrows and $2n$ incoming horizontal arrows is called the domain wall boundary conditions

vertex		$\begin{array}{c c} x & \\ \hline & y \end{array} \equiv \begin{array}{c c} x/y & \\ \hline & \end{array}$ $\sigma(x) = x - 1/x$ $a : \text{parameter}$
weight	$\sigma(a^2) \quad \sigma(a^2) \quad \sigma(a/x) \quad \sigma(ax) \quad \sigma(a/x) \quad \sigma(ax)$	
ASM	$-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$	

Figure 1: The weight of the six-vertex model

(DWBC) (see the middle picture in Figure 3). Korepin and Izergin showed that the partition function with DWBC is written as a determinant of the form (see [5])

$$Z_{IK}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; a) = \frac{(a^2 - a^{-2})^n \prod_{i,j} (x_i y_j)^{n-2} \prod_{i,j} (ax_i^2 - a^{-1}y_j^2)(ay_j^2 - ax_i^2)}{\prod_{i < j} (x_j^2 - x_i^2)(y_i^2 - y_j^2)} \times \det \left[\frac{1}{(ax_i^2 - a^{-1}y_j^2)(ay_j^2 - a^{-1}x_i^2)} \right]_{1 \leq i, j \leq n} \quad (3)$$

This determinant is expressed as a Schur function when $a = \exp(\pi i/3)$.

We consider the bipartite lattice on the square lattice of the six-vertex model. Vertices are classified into even and odd ones. We replace an arrow configuration on a vertex with a red/dotted line (see Figure 2). We call a red/dotted line configuration on the lattice fully packed loops (FPL). A FPL configuration is characterized by a link pattern (see section 1.2).

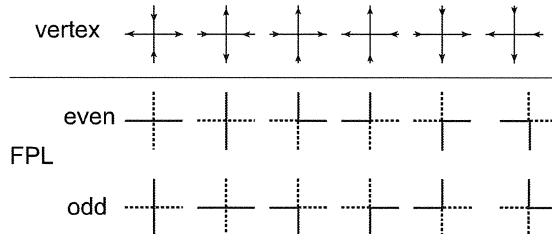


Figure 2: Six-vertex and FPL configuration

The R -matrix associated with six-vertex model is the one for $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. The property that the R -matrix satisfies the Yang-Baxter equation plays central role in the above discussions.

Kuperberg's observation

Kuperberg [6] showed an alternative proof of the ASM theorem by the usage of the integrability of the six-vertex model with DWBC. We put 0, 1 or -1 on a vertex with an arrow configuration as in Figure 1. This is a bijection between a configuration of the six-vertex model with (DWBC) and an alternating sign matrix.

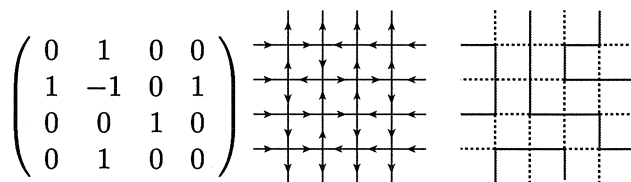


Figure 3: ASM/6V-DWBC/FPL correspondence

Roughly speaking, the total number of ASMs is equal to Z_{IK} with $a = \exp(\pi i/3)$ and all $x = 1$.

1.2 Inhomogeneous $O(1)$ Loop Model

Surprisingly, alternating sign matrices appear in the context of the integrable spin chain. Razumov and Stroganov [7] conjectured (RS conjecture) that the total number of ASMs and FPL configurations appear in the ground state wave function of the XXZ model at $\Delta = -1/2$. In this section, we recall the facts about the $XXZ/O(1)$ loop model and the proof of the RS sum rule by Di Francesco and Zinn-Justin [2].

The $XXZ/O(1)$ model Let us consider the XXZ model of the length L . The Hamiltonian \mathcal{H}_{XXZ} is given by

$$\mathcal{H}_{XXZ} = \sum_{i=1}^{L-1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) + (\text{boundary term}) \quad (4)$$

where $\vec{\sigma}$ is the Pauli matrix, $\Delta = -(q + q^{-1})/2$. At $\Delta = -1/2$, \mathcal{H}_{XXZ} is the leading term of the Hamiltonian of the $O(1)$ loop model

$$\mathcal{H}_{loop} = \sum_{i=1}^{L-1} (1 - e_i) + (\text{boundary term}) \quad (5)$$

where $e_i = \frac{1}{2}(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y - \frac{1}{2} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - \frac{i\sqrt{3}}{2}(\sigma_i^z - \sigma_{i+1}^z) + \frac{1}{2})$. The operators e_i 's satisfy the defining relations of the Temperley-Lieb algebra: $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = e_j e_i$ for $|i - j| > 1$ and $e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i$. A eigenvector of the \mathcal{H}_{XXZ} is also a eigenvector of \mathcal{H}_{loop} . We focus on the case where the total spin is zero (resp. one) with L even (resp. odd).

The generator e_i is graphically depicted as in Figure 4. The Temperley-Lieb algebra naturally acts on the space of link patterns locally from the outside. Let us consider a circle with L (L even) points on the circumference. A link pattern satisfies that $L/2$ pairs of points connected by links and any link does not cross each other. We denote by (i, j) a pair of two points i and j . A link pattern with $(i, i + 1)$ is invariant under the action of e_i . After the action of e_i on a link pattern with (i, j) and $(i + 1, k)$, we obtain a link pattern with $(i, i + 1)$ and (j, k) . Other pairs of points are unchanged.

$$e_i = \begin{array}{c} \overset{1}{\dots} \quad \overset{2}{\dots} \quad \overset{i}{\dots} \quad \overset{i+1}{\dots} \quad \overset{L-1}{\dots} \quad \overset{L}{\dots} \\ \left| \quad \right| \quad \left| \quad \right| \quad \left| \quad \right| \quad \left| \quad \right| \\ \dots \quad \dots \quad \cup \quad \cap \quad \dots \quad \dots \\ \left| \quad \right| \quad \left| \quad \right| \quad \left| \quad \right| \quad \left| \quad \right| \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

Figure 4: TL generator

Observation by Razumov and Stroganov Razumov and Stroganov observed that the ground state vector of the XXZ model at $\Delta = -1/2$ is related to the total numbers of the alternating sign matrices (ASM) and fully packed loops (FPL). Let π be a link pattern of length $2n$ and $\Psi = \Psi_\pi |\pi\rangle$ be the ground state vector of XXZ model. They conjectured: 1) the sum of the entries of Ψ , $\sum_\pi \Psi_\pi$ is equal to the total number of ASM and 2) each entry Ψ_π is equal to the total number of FPL with a link pattern π .

Inhomogeneous $O(1)$ loop model Di Francesco and Zinn-Justin proved the sum rule for the inhomogeneous $O(1)$ loop model by the usage of the integrability of the trigonometric \check{R} -matrix (for the six-vertex model). The solution of the quantum Kniznik-Zamolodchikov equation is the eigenvector of the transfer matrix. The crucial point is that the sum of the solution of q -KZ equation at the Razumov-Stroganov point is written in terms of the partition function of the six-vertex model with DWBC. Together with the Kuperberg's observation, the sum in the homogeneous limit is equal to the total number of ASM. This method is also applied to the $O(1)$ loop model on a cylinder (directed link patterns) and the total number of HTSASMs appears. This is $k = 2$ case in the section 2.

2 A_k generalized model on a cylinder

In this section, we consider the A_k generalization of the $O(1)$ loop models [8] (see also [3]).

Below, we restrict ourselves to the case where $N = nk$ and $n \geq 1, k \geq 2$ are positive integers. The Hecke algebra is generated by $\{e_i : 1 \leq i \leq N - 1\}$ which satisfy the defining

relations

$$\begin{aligned}
e_i^2 &= \tau e_i, \\
e_i e_j &= e_j e_i, \quad |i - j| > 1, \\
e_i e_{i\pm 1} e_i - e_i &= e_{i\pm 1} e_i e_{i\pm 1} - e_{\pm 1}
\end{aligned} \tag{6}$$

where $\tau = -(q + q^{-1})$. We introduce the cyclic operator σ and the additional generator $e_N = \sigma^{-1} e_{N-1} \sigma$ such that $e_i = \sigma^{-1} e_{i-1} \sigma$ and the relations (6) become cyclic. The generators satisfy the vanishing condition $Y_k(e_i, \dots, e_{i+k-1}) = 0$ where Y_k is recursively defined by $Y_{k+1}(e_i, \dots, e_{i+k}) = Y_k(e_i, \dots, e_{i+k-1})(e_{i+k} - \mu_{k+1})Y_k(e_i, \dots, e_{i+k-1})$ where $\mu_k = U_{k-1}(\tau)/U_k(\tau)$ and $U_k(\tau)$ is the Chebyshev polynomial of the second kind. Y_k is called a q -symmetrizer. Furthermore, we consider an additional vanishing condition

- When $N = k$, we have

$$Y_{k-1}(e_1, \dots, e_{N-1})(e_N - \tau)Y_{k-1}(e_1, \dots, e_{N-1}) = 0. \tag{7}$$

Obviously, $Y_k(e_1, \dots, e_N)$ is non-zero.

- For $N = nk$ with $n \geq 2$

$$Y_{q\text{-sym}} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (e_{ik} - \mu_{k-1})(e_{nk} - \tau) \cdot Y_{q\text{-sym}} = 0, \tag{8}$$

where $Y_{q\text{-sym}} := \prod_{i=0}^{n-1} Y_{k-1}(e_{i(k+1)}, \dots, e_{(i+1)k-1})$ is the product of the q -symmetrizers.

Below we call these vanishing conditions as the *cylindric relations*. We call the affine Hecke algebra satisfying the cylindric relations $\widehat{H}_N^{(k)}$

The Baxterization gives us the trigonometric \check{R} -matrix, namely

$$\check{R}_i(z, w) = \frac{qz - q^{-1}w}{qw - q^{-1}z} \mathbf{1} + \frac{z - w}{qw - q^{-1}z} e_i. \tag{9}$$

States In the case of $k = 2$, the Temperley-Lieb algebra acts on the space of link patterns (or Dyck paths). For the case of a generic k , the affine Hecke algebra acts on the set of states labelled by a path. An unrestricted path $\pi := \pi_1 \pi_2 \dots \pi_{nk}$ of length nk is a set of nk integers satisfying $1 \leq \pi_i \leq k$ for $1 \leq i \leq nk$ and $\#\{i | \pi_i = j, 1 \leq i \leq nk\} = n$ for $1 \leq j \leq k$. If an unrestricted path π satisfies $\#\{i | \pi_i = j, 1 \leq i \leq l\} \geq \#\{i | \pi_i = j+1, 1 \leq i \leq l\}$ for all $1 \leq j \leq k$ and $1 \leq l \leq nk$, the path π is said to be a restricted path. The set of states labelled by restricted (resp. unrestricted) paths is considered in [3] (resp. [8]). We consider unrestricted paths. Let $|\pi\rangle$ be a state labelled by a path. A state $|\pi\rangle$ is a natural generalization of a link pattern with a puncture point.

We consider the representation on the left ideal $\widehat{H}_N^{(k)} Y_{q\text{-sym}}$. A path corresponding to $Y_{q\text{-sym}}$ is $\pi^\Omega = \pi_{pk+q} = q$ for $0 \leq p \leq n-1$ and $1 \leq q \leq k$. A path is identified with a line graph. All the other states can be obtained as a rhombus tiling over the path π^Ω (see [8] for the construction of states).

A state $|\pi\rangle$ satisfies

- (P1) If π satisfies $\pi_i > \pi_{i+1}$, the state is invariant under the action of e_i , i.e. $e_i |\pi\rangle = \tau |\pi\rangle$.
- (P2) If π satisfies $\pi_i < \pi_{i+1}$, the action of e_i is given by $e_i |\pi\rangle = \sum_{\pi'} C_{i,\pi,\pi'} |\pi'\rangle$. If the coefficient $C_{i,\pi,\pi'} \neq 0$, π' is obtained by adding a unit rhombus or a path below π .

(P3) If π satisfies $\pi_i = \pi_{i+1}$, the action of e_i is given by $e_i|\pi\rangle = \sum_{\pi'} C_{i,\pi,\pi'}|\pi'\rangle$. If the coefficient $C_{i,\pi,\pi'} \neq 0$, π' is a path below π .

(P4) In the properties (P2) and (P3), let us consider the case where $e_j|\pi\rangle = \tau|\pi\rangle$ for $j \neq i \pm 1$. Then, for a path π' with non-zero $C_{i,\pi,\pi'}$ it satisfies $e_j|\pi'\rangle = \tau|\pi'\rangle$.

q -KZ equation and the sum rule We want the eigenvector of the transfer matrix of the A_k generalized model to obtain the eigenvector of the spin chain. Instead, we solve the system of difference equations for $\Psi(\mathbf{z}) = \Psi(z_1, \dots, z_N)$, the quantum Kniznik-Zamolodchikov equation,

$$\check{R}_i(z_i, z_{i+1})\Psi(z_1, \dots, z_N) = \tau_i\Psi(z_1, \dots, z_N) \quad (10)$$

for $1 \leq i \leq N$ where $\Psi(\mathbf{z}) = \sum_{\pi} \Psi_{\pi}(\mathbf{z})|\pi\rangle$ and $\tau_i f(z_i, z_{i+1}) = f(z_{i+1}, z_i)$. We have the solution of the Eqn. (10) when q is the generalized Razumov-Stroganov point, *i.e.*, $q = -\exp(2\pi i/(k+1))$. Hereafter, q is on the R-S point. Roughly speaking, the solution is determined by the existence of the highest state and of the minimal degree solution. This solution can be viewed as a special solution of the q -KZ equation considered in the context of the representation theory of the (double) affine Hecke algebra [4].

Let v be the simultaneous eigen covector satisfying $ve_i = \tau v$ and $v\sigma = v$. By using the recursive relation for the solution of the q -KZ equation, we obtain that the weighted sum $W(\mathbf{z}) = v \cdot \Psi(\mathbf{z})$ is written in terms of Schur functions $s_{\lambda}(\mathbf{z})$ as

$$W(\mathbf{z}) = (\text{const.}) \prod_{l=0}^{k-1} s_{Y_{k,l}^n}(\mathbf{z}). \quad (11)$$

Here, the Young diagrams are $Y_{k,l}^n = \delta(n^l, n - 1^{k-l})$ with

$$\delta(n^l, n - 1^{k-l}) = \underbrace{(n, \dots, n)}_l, \underbrace{(n-1, \dots, n-1)}_k, \underbrace{(n-2, \dots, n-2)}_k, \dots, \underbrace{(1, \dots, 1)}_k. \quad (12)$$

References

- [1] D. V. Bressoud. *Proofs and Confirmations: The story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*. Cambridge University Press, 1999.
- [2] P. Di Francesco and P. Zinn-Justin. *Elec. J. Comb.*, 12:R6, 2005, math-ph/0410061.
- [3] P. Di Francesco and P. Zinn-Justin. *J. Phys. A: Math. Gen.*, A38:L815–822, 2005, math-ph/0508059.
- [4] M. Kasatani and Y. Takeyama. *preprint*, math.QA/0608773.
- [5] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. Izergin. *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*. Cambridge University Press, 1993.
- [6] G. Kuperberg. *Internat. Math. Res. Notices*, 3:139–150, 1996, math.CO/9712207.
- [7] A. Razumov and Y. Stroganov. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 34: 3185, 2001, cond-mat/0012141; *Theor. Math. Phys.*, 138: 333–337, 2004, math.CO/0104216; *Theor. Math. Phys.*, 142: 237–243, 2005, cond-mat/0108101.
- [8] K. Shigechi and M. Uchiyama. *preprint*, math-ph/0612001.
- [9] D. Zeilberger. Proof of the alternating sign matrix conjecture. *Elec. J. Comb.*, 3(2):R13, 1996.

An Elliptic Analogue of the Generalized Dedekind-Rademacher Sums

北海道大学大学院理学研究科数学専攻 D 2

町出智也

1 序

$e(z) := e^{2\pi iz}$ とする。 τ を上半平面上の複素数とする。また、Bernoulli 多項式 $B_m(x)$ 、Bernoulli 関数 $\tilde{B}_m(x)$ を次のように定義する：

$$\frac{e^{x\xi}}{e^\xi - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(x)}{m!} \xi^{m-1},$$

$$\tilde{B}_m(x) := B_m(\{x\}), \quad \tilde{B}_1(x) := \begin{cases} 0, & (x \in \mathbb{Z}), \\ B_m(\{x\}), & (x \notin \mathbb{Z}). \end{cases}$$

ただし、 $\{x\}$ は x の少数部分を意味する。

Dedekind は Dedekind の η 関数

$$\eta(\tau) := e\left(\frac{\tau}{24}\right) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e(n\tau))$$

の τ による変換法則の研究を通して、Dedekind 和 $s(b, c)$ に遭遇した：

$$s(b, c) := \sum_{j=1}^{c-1} \tilde{B}_1\left(\frac{j}{c}\right) \tilde{B}_1\left(\frac{bj}{c}\right), \quad (b, c : \text{positive integers})$$

そして、次の相互法則を発見した。

$$s(b, c) + s(c, b) = \frac{1}{12} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{1}{bc} \right) - \frac{1}{4}.$$

これを契機に様々な Dedekind 和の拡張が考えられてきた。Apostol は η 関数の代わりに、変換法則を持つある Lambert 級数を考察することにより Apostol-Dedekind 和と呼ばれる次の和の相互法則を得た ([Apo])。

$$\sum_{j=1}^{c-1} \tilde{B}_1\left(\frac{j}{c}\right) \tilde{B}_m\left(\frac{bj}{c}\right).$$

また、 η 関数の存在は無視して、Dedekind 和の相互法則を純粹に Bernoulli 関数の等式とみなすことにより、U. Halbritter [Ha] と R.R. Hall *et al.* [HWZ] は (Rademacher 等の研究を経ることにより) 次の generalized Dedekind-Rademacher 和の相互法則を与えた。

$$S_{m,n} \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} := \sum_{j \pmod{c}} \tilde{B}_m \left(a \frac{j+z}{c} - x \right) \tilde{B}_n \left(b \frac{j+z}{c} - y \right), \quad (1)$$

ただし、 a, b, c は正整数、 x, y, z は実数とする。ちなみに、Apostol-Dedekind 和は $S_{1,n} \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と表される。

更に、デデキンド和の楕円類似が様々な人によって考えられてきた：(Bayad, Egami, Fukuhara and Yui, Sczech)。その中で、Fukuhara and Yui [FY] は Apostol-Dedekind 和の楕円類似を与えている。しかし、彼等の楕円類似は厳密には Apostol-Dedekind 和の生成関数の楕円類似なので、彼等自身、Bernoulli 関数の楕円類似を含む Apostol-Dedekind 和の楕円類似は見つけられないか、という問題を提起している。

本講演の目的は Bernoulli 関数の楕円類似である Kronecker 二重級数を用いて generalized Dedekind-Rademacher 和の楕円類似を与えることである。generalized Dedekind-Rademacher 和は Apostol-Dedekind 和を含むので、それはつまり、Fukuhara and Yui 氏の問題に答えることになる。なお、Dedekind 和の良い解説として [RG] を挙げておく。

2 Kronecker 二重級数

Kronecker 二重級数 $B_m(x', x; \tau)$ を定義するためにテータ関数 $\theta(x; \tau)$ と関数 $F(x, \xi; \tau)$ を紹介する：

$$\theta(x; \tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + \left(m + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$F(x, \xi; \tau) := \frac{\theta'(0; \tau)\theta(x + \xi; \tau)}{\theta(x; \tau)\theta(\xi; \tau)},$$

ただし $\theta'(x; \tau) = \frac{\partial}{\partial x} \theta(x; \tau)$ 。Kronecker 二重級数 $B_m(x', x; \tau)$ はその生成関数を用いて次のように定義される：

$$e(x\xi)F(-x' + x\tau, \xi; \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(x', x; \tau)}{m!} (2\pi i)^m \xi^{m-1}. \quad (2)$$

これらの関数が Kronecker 二重級数と呼ばれる由来は、Kronecker が等式

$$\underline{F}(x', x; \xi; \tau) = -\sum^e \frac{e(n'x' + nx)}{-\xi + n'\tau + n}, \quad (3)$$

を示したからである ([We])。ただし、 x', x は実数、かつ $-1 < x < 0$ 、そして

$$\sum^e = \lim_{N' \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n'=-N'}^{N'} \sum_{n=-N}^N.$$

とする。従って

$$B_m(x', x; \tau) = \begin{cases} 1 & (m = 0), \\ -\frac{m!}{(2\pi i)^m} \sum_{\substack{(n', n) \\ \neq (0, 0)}}^e \frac{e(n'x' + nx)}{(n'\tau + n)^m} & (m \geq 1). \end{cases} \quad (4)$$

が成り立つ。

もちろん、 $B_m(x', x; \tau)$ は $\tau \rightarrow \infty$ の時、Bernoulli 関数に退化する。

PROPOSITION 2.1. x', x を実数、 $x' \notin \mathbb{Z}$ とする。Re w は複素数 w の実数部分とする。この時、次が成り立つ。

$$\lim_{\tau \rightarrow i\infty} B_m(x', x; \tau) = \begin{cases} \frac{1 + e(x')}{2} \frac{1 - e(x')}{1 - e(x')} = \frac{i}{2} \cot(\pi x') & (m = 1, x \in \mathbb{Z}), \\ \tilde{B}_m(x) & (otherwise), \end{cases} \quad (5)$$

特に

$$\operatorname{Re} \lim_{\tau \rightarrow i\infty} B_m(x', x; \tau) = \tilde{B}_m(x). \quad (6)$$

3 generalized Dedekind-Rademacher 和の楕円類似とその相互法則

a', a, b', b, c', c を正整数、 x', x, y', y, z', z を実数とする。

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := ((a', a), (b', b), (c', c)), \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) := ((x', x), (y', y), (z', z)).$$

とおく。

$$a'z' - c'x' \notin \langle a', c' \rangle \mathbb{Z}, \quad b'z' - c'y' \notin \langle b', c' \rangle \mathbb{Z}. \quad (7)$$

と仮定する。generalized Dedekind-Rademacher 和の楕円類似 (elliptic generalized Dedekind-Rademacher 和) は次のように定義される。

$$S_{m,n}^{\tau} \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \end{pmatrix} := \frac{1}{c'} \sum_{\substack{j \pmod{c} \\ j' \pmod{c'}}} B_m \left(a' \frac{j'+z'}{c'} - x', a \frac{j+z}{c} - x; \frac{a'}{a} \tau \right) \\ \times B_n \left(b' \frac{j'+z'}{c'} - y', b \frac{j+z}{c} - y; \frac{b'}{b} \tau \right). \quad (8)$$

理由は省くが条件 (7) のため well-defined である。

さて、この和の相互法則を与えよう。それは elliptic generalized Dedekind-Rademacher 和の生成関数を用いて表すと簡明になる：

$$\mathfrak{S}^{\tau} \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ X & Y & Z \end{pmatrix} := \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} S_{m,n}^{\tau} \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \end{pmatrix} \left(\frac{X}{a}\right)^{m-1} \left(\frac{Y}{b}\right)^{n-1}.$$

ここで、 X, Y は 0 ではない変数で、 Z は、右辺には現れていないけれども、 $-X - Y$ と定める。次が elliptic generalized Dedekind-Rademacher 和の相互法則である。

THEOREM 3.1. X, Y, Z を $X+Y+Z=0$ 満たす変数とする。 a, a', b, b', c, c' を正整数、 x, x', y, y', z, z' を実数とする。

$$a'y' - b'x' \notin \langle a', b' \rangle \mathbb{Z}, \quad a'z' - c'x' \notin \langle a', c' \rangle \mathbb{Z}, \quad b'z' - c'y' \notin \langle b', c' \rangle \mathbb{Z}. \quad (9)$$

と仮定する。

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := ((a', a), (b', b), (c', c)), \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) := ((x', x), (y', y), (z', z)).$$

とおく。このとき、

$$\mathfrak{S}^{\tau} \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ X & Y & Z \end{pmatrix} + \mathfrak{S}^{\tau} \begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{c} & \vec{a} \\ \vec{y} & \vec{z} & \vec{x} \\ Y & Z & X \end{pmatrix} + \mathfrak{S}^{\tau} \begin{pmatrix} \vec{c} & \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{z} & \vec{x} & \vec{y} \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = 0. \quad (10)$$

が成り立つ。

もちろん、 $\tau \rightarrow \infty$ とすることにより、U. Halbritter [Ha] と R.R. Hall *et al.* [HWZ] により与えられた generalized Dedekind-Rademacher 和の相互法則が導かれる。

参考文献

- [Apo] T. M. Apostol, *Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series*, Duke Math. J. **17**, (1950), 147–157.
- [FY] S. Fukuhara and N. Yui, *Elliptic Apostol sums and their reciprocity laws*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no.10. 4237–4245.
- [Ha] U. Halbritter, *Some new reciprocity formulas for generalized Dedekind sums*, Resultate Math. **8** (1985), 21–46.
- [HWZ] R. R. Hall, J. C. Wilson and D. Zagier, *Reciprocity formulae for general Dedekind-Rademacher sums*, Acta Arith. **73** (1995), 389–396.
- [RG] H. Rademacher and E. Grosswald, *Dedekind Sums*, Carus Mathematical Monograph No. 16, Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1972.
- [We] A. Weil, *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*, (Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976).

HOMOTOPY NILPOTENCY IN LOCALIZED LIE GROUPS

SHIZUO KAJI
JOINT WORK WITH DAISUKE KISHIMOTO

1. ホモトピー論の復習

本稿の目的は、位相群のホモトピー不変量である homotopy nilpotency を、大きな素数で局所化されたコンパクト Lie 群について決定することである。

まずホモトピー論の基礎的なことから紹介する。

ここで扱う空間のカテゴリ T は以下の通りとする。

- T の対象は単連結で有限型 (各次元の胞体が有限個) の CW 複体のホモトピー型を持つ基点つき空間。
- T の射は基点を保つ写像のホモトピー類。

ホモトピー論では $\text{hom}(X, Y)$ を $[X, Y]$ と書く。ホモトピー不変量は主に $[X, Y]$ の構造に関する不変量として現れる。

Example 1.

- $K(G, n)$ を Eilenberg-MacLane 空間とすると、 G 係数コホモロジー群 $H^*(X; G) = [X, K(G, n)]$
- 複素 K 理論 $K^i(X) = [\Sigma^i X, BU \times \mathbb{Z}]$
- ホモトピー群 $\pi_i(X) = [S^i, X]$

一般にこれらの不変量をそのまま扱うのは非常に難しく、ほとんどの場合不可能である。そこで、局所化という道具がよく用いられる。

素数 p に対して $T_{(p)} \subset T$ を、整係数コホモロジー $H^*(; \mathbb{Z})$ が \mathbb{Z}/p 上のベクトル空間になる空間のなす full sub-category とする[†]。空間の局所化とは整数 \mathbb{Z} の局所化のアナロジーで、一度に一つの素数だけを考えることを可能にするテクニックである。

Theorem 2 (Bousfield-Kan[1]). 局所化関手と呼ばれる、 $T \rightarrow T_{(p)}$ なる”よい”性質の関手が存在する。特に Y が位相群のとき、 $[X, Y]$ は群となるが、その群としての局所化は $[X, Y_{(p)}]$ と一致する。

2. HOMOTOPY NILPOTENCY の定義

位相群の非可換性を計るホモトピー不変量として homotopy nilpotency と呼ばれるものがある。ここで位相群のホモトピー不変量とは、 T において積と可換なホモトピー同値に対する不変量を意味する。

Definition 3. G : 位相群について $\text{nil}(G) = \sup_{A \in T} \text{nil}[A, G]$ で定める。

上の定義は、位相群より一般的な (homotopy associative) H -空間のホモトピー不変量となっている。位相群の場合には、上と同値なより直感的な定義を与えることができる。

Definition 4. G : 位相群について、交換子写像を

$$\begin{aligned} \varphi_1: G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto [x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \end{aligned}$$

Date: 2007 年 2 月 13 日.

[†] T では、 $H^*(; \mathbb{Z})$ の代わりに、 $H_*(; \mathbb{Z})$ や $\pi_*()$ を用いて同様に定義しても一致する。

で定める. また多重交換子を $\varphi_k = \varphi_1(1 \times \varphi_{k-1}) : G^{\times(k+1)} \rightarrow G$ で定めるとき, φ_k が定値写像とホモトピックとなる最小の k を $\text{nil}(G)$ とかく.

この定義から, 以下の事実は明らかである.

- $\text{nil}(G_1 \times G_2) = \max(\text{nil}(G_1), \text{nil}(G_2))$.
- すべての素数 p にたいして, $\text{nil}(G_{(p)}) \leq \text{nil}(G)$.
- G がホモトピー可換 $\Leftrightarrow \text{nil}(G) = 1$.

単連結コンパクト Lie 群は単純 Lie 群に分解することが知られているので, 上の事実から, 本稿の目的である局所化されたコンパクト Lie 群の homotopy nilpotency の決定には, 単純コンパクト Lie 群のみを考えればよいことがわかる. すなわち以下の単純コンパクト Lie 群の分類のそれぞれの場合に対して調べればよい.

Definition 5. G をコンパクト連結 Lie 群とすると,

$$H^*(G; \mathbb{Q}) = \bigwedge (x_{2i_n-1}) \quad (\deg(x_{2i_n-1}) = 2i_n - 1)$$

となることが知られている. このとき i_n を小さい順に並べた物 (i_1, \dots, i_l) を G の型といい, l を階数という.

Theorem 6. 階数 l の連結単純コンパクト Lie 群 G_l とその型は以下にあげるものに限られる.

$A_l = SU(l+1)$	$(2, 3, \dots, l+1)$	G_2	$(2, 6)$
$B_l = Spin(2l+1)$	$(2, 4, \dots, 2l)$	F_4	$(2, 6, 8, 12)$
$C_l = Sp(l)$	$(2, 4, \dots, 2l)$	E_6	$(2, 5, 6, 8, 9, 12)$
$D_l = Spin(2l)$	$(2, 4, \dots, 2l-2, l)$	E_7	$(2, 6, 8, 10, 12, 14, 18)$
		E_8	$(2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30)$

3. これまでに知られていること

Homotopy nilpotency の決定の特殊な場合である, ホモトピー可換性の問題, すなわち $\text{nil}(G) = 1$ なる G については, 以下のようなことが知られている.

次の定理はトーラス定理と呼ばれる有名な定理である.

Theorem 7 (Hubbuck([4])). 連結で有限 CW 複体のホモトピー型を持つ位相群で, ホモトピー可換な物はトーラス (1次元球面の直積) に限られる.

言い換えれば, 単連結な有限複体であるような位相群は必ず非可換であるという非常に強い定理である.

無限複体の位相群の例でまず考えられるのは, 局所化された Lie 群である. この場合については, 以下のようにホモトピー可換性の問題は完全に決定されている.

Theorem 8 (old theorem). G を有限位相群とすると, $G_{(0)}$ はホモトピー可換.

Theorem 9 (McGibbon([7])). G をコンパクト連結単純 Lie 群とする. G の型を (n_1, \dots, n_l) とするとき,

- (i) $p > 2n_l \Rightarrow G_{(p)}$ はホモトピー可換.
- (ii) $(G, p) = (Sp(2), 3), (G_2, 5)$ のとき, $G_{(p)}$ はホモトピー可換.
- (iii) $p < 2n_l \Rightarrow G_{(p)}$ で上記以外の場合はホモトピー可換でない.

Homotopy nilpotency については, 具体的な計算例はほとんど知られていないが, 次のような一般的な結果が知られている.

Theorem 10 (Hopkins([3]), Rao([8]), Yagita([9])). G をコンパクト連結単純 Lie 群とする. $\text{nil}(G_{(p)}) < \infty$ である必要十分条件は, $H_*(G; \mathbb{Z})$ が p -torsion を持たないことである.

4. 主な結果

先に述べた McGibbon の定理より, $p > 2n_l$ ならば $\text{nil}(G_{(p)}) = 1$ で, $n_l \leq p \leq 2n_l$ ならば $\text{nil}(G_{(p)}) > 1$ であるが, 後者の場合に具体的に homotopy nilpotency を決定したい. この場合, コンパクト連結単純 Lie 群は p -torsion を持たない事が知られているため, 前章最後にあげた Hopkins の定理 ([3]) より, $\text{nil}(G_{(p)})$ は有限である.

一般的には直接 homotopy nilpotency を計算することは非常に困難であるが, 素数 p が上記の範囲のようにある程度大きいとき以下が成り立つ. この命題が主定理の証明の根幹となる.

Proposition 11. 有限次元連結位相群 G が型 (n_1, \dots, n_l) を持つとき, $p \geq n_l - n_1 + 2$ なる素数 p に対して,

$$\text{nil}(G_{(p)}) = \text{nil}(\pi_*(G_{(p)})).$$

ここで, ホモトピー群 $\pi_*(G_{(p)})$ は Samelson 積 $(\pi_*(\varphi_1))$ により, Lie 環の構造を与えられているとする.

Remark 12. 位相群のホモトピー論的一般化である H -空間のクラスに対しても, homotopy nilpotency を拡張できる. $p = 0$ の場合, 以前有理ホモトピー論を用いて同様の定理を示した ([5]).

- T に属する, (有限次元とは限らない) H -空間 G に対して $\text{nil}(G_{(0)}) = \text{nil}(\pi_*(G_{(0)}))$

以下に紹介するのが本稿の主定理である.

Theorem 13. G をコンパクト連結単純 Lie 群とする. G の型を (n_1, \dots, n_l) とする.

- (i) $2n_l < p \Rightarrow \text{nil}(G_{(p)}) = 1$.
- (ii) $\frac{3}{2}n_l < p \leq 2n_l \Rightarrow \text{nil}(G_{(p)}) = 2$.
- (iii) $(G, p) = (SU(2), 2), (F_4, 17), (E_6, 17), (E_8, 41), (E_8, 43) \Rightarrow \text{nil}(G_{(p)}) = 2$.
- (iv) $n_l \leq p \leq \frac{3}{2}n_l$ かつ, 上記以外の場合 $\Rightarrow \text{nil}(G_{(p)}) = 3$.

Proof. (証明の概略)

(上からの評価) 上の場合, 正確には $p \geq n_l - n_1 + 2$ の時, Kumpel([6]) により, 積構造を忘れずと空間としては,

$$G_{(p)} \simeq S_{(p)}^{2n_1-1} \times \cdots \times S_{(p)}^{2n_l-1}$$

と直積に分解する事が示されている. 球面のホモトピー群に関する結果から, 簡単な次元についての算数によって上からの評価が得られる.

(下からの評価) $SU(n)$ の homotopy nilpotency の下限については, 古くから知られている結果がある ([2]). 残りの古典型 Lie 群に関しては, 以下のような局所化の間の位相群としてのホモトピー同値を使う. 奇素数 p に対して, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} Sp(n)_{(p)} &\simeq SU(2n)_{(p)} \\ Spin(2n+1)_{(p)} &\simeq Spin(2n+2)_{(p)} \\ Spin(2n+1)_{(p)} &\simeq Sp(n)_{(p)}. \end{aligned}$$

例外型 Lie 群に関しては, homotopy nilpotency と分類空間の mod p コホモロジー環 $H^*(BG; \mathbb{Z}/p)$ の Steenrod 代数構造との関係が使える. Steenrod 代数構造, 特に \mathcal{P}^1 というコホモロジー作用素がある程度決定できればよい. 証明の中で最も手間のかかる部分は, この, 例外型リー群のコホモロジー作用素を計算するくだりである.

□

S. KAJI

REFERENCES

- [1] A. K. Bousfield and D. M. Kan, *Homotopy limits, Completions and Localizations*, Springer L.N.M., **304**, 1972.
- [2] R. Bott, *A note on the Samelson products in the classical groups*, Comment. Math. Helv. **34** (1960), 249-256.
- [3] M. Hopkins, *Nilpotence and finite H-spaces*, Israel J. Math. **66** (1989), 238-246.
- [4] J. Hubbuck, *On homotopy commutative H-spaces*, Topology **8** (1969), 119-126.
- [5] S. Kajı, *On the nilpotency of rational H-spaces*, J. Math. Soc. Japan **57** (2005), 1153-1165.
- [6] P.G. Kumpel, *Mod p-equivalences of mod p H-spaces*, Quart. J. Math. **23** (1972), 173-178.
- [7] C. McGibbon, *Homotopy commutativity in localized groups*, Amer. J. Math. **106** (1984), 665-687.
- [8] V. Rao, *Homotopy nilpotent Lie groups have no torsion in homology*, Manuscripta Math. **92** (1997), 455-462.
- [9] N. Yagita, *Homotopy nilpotency for simply connected Lie groups*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), no. 5, 481-486.

KYOTO UNIVERSITY

E-mail address: `kaji@math.kyoto-u.ac.jp`

Ergodic Theorems for Random Sequences

Masahiro Nakamura (Osaka University)

February 13, 2007

Abstract

In this paper, we study some properties of Martin-Löf random sequences from countable-alphabet stationary ergodic processes. we show some extensions of two ergodic theorems, Shannon-McMillan-Breiman theorem and Wyner-Ziv recurrence time theorem, to individual Martin-Löf random sequences. Moreover, in the case of finite-order Markov processes, we have the ultimate extensions of these theorems.

1 背景

あるデータ系列が与えられたとき、それがランダムであるか否かを数学的に厳密に判定する方法の一つとして、Martin-Löf の定式化 [4] が挙げられる。それは、データ系列の「非ランダム性」を検出するような統計的テストをアルゴリズムによって表現し、どのテストを用いても乱雑さを疑われなかったものを「ランダム」と定義しよう、というものであり、この流儀は現代において最も大きな支持を得ているものの一つである。Martin-Löf ランダムな系列の全体の集合は確率測度 1 を持つが、それでは、確率 1 で成立する種々の確率法則を、「すべての Martin-Löf ランダムな系列に対して成立する」という形の表現に拡張することは可能であろうか。実際、独立同分布過程における「大数の強法則」や「重複対数の法則」などではこの拡張は比較的容易であるが、一般の確率過程においては困難な問題である [3]。V'yugin [7] は、定常エルゴード過程における Birkhoff の個別エルゴード定理に対してランダム系列への拡張を示したが、Shannon-McMillan-Breiman (SMB) の定理に対しては、その一部分についての拡張に留まり、その証明も煩雑なものであった。本発表では、V'yugin による Shannon-McMillan-Breiman 定理の拡張に対して簡潔な別証明を与えると同時に、ユニバーサルデータ圧縮法の原理をなす Wyner-Ziv-Ornstein-Weiss の再帰時間定理についても、順定理部分においてランダム系列への拡張が可能であることを示す (定理 2,4)。また、部分的拡張にて留まっている上述の 2 つの定理について、有限次マルコフ過程であれば逆定理部分をも拡張可能であることを示す (定理 3, 5)。

2 準備

自然数の集合 \mathbf{N} およびその直積 \mathbf{N}^m 上の (部分) 関数のうち、Turing machine 上で計算できるものを帰納的関数という。詳しく言うと、以下の手続きに関して閉じている関数のクラス \mathcal{C} のうち最小のものに属する関数を、帰納的関数という。

- 後者関数 $S(x) := x + 1$, 零関数 $C_m(x_1, \dots, x_m) := 0$ ($m \in \mathbf{N}$), 射影関数 $U_m^i(x_1, \dots, x_m) := x_i$ ($i \leq m \in \mathbf{N}$) を \mathcal{C} に含む。
- (関数の合成) n -変数関数 $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}$ と m -変数関数 $h \in \mathcal{C}$ に対して

$$f(x_1, \dots, x_n) := h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$$

なる f を \mathcal{C} に含む。

- (原始帰納法) m -変数関数 $g \in \mathcal{C}$ と $(m+2)$ -変数関数 $h \in \mathcal{C}$ に対して,

$$\begin{cases} f(0, x_1, \dots, x_m) & := g(x_1, \dots, x_m) \\ f(t+1, x_1, \dots, x_m) & := h(t, f(t, x_1, \dots, x_m), x_1, \dots, x_m). \end{cases}$$

なる f を \mathcal{C} に含む.

- (最小化) $(m+1)$ -変数関数 $f(x_1, \dots, x_m, y) \in \mathcal{C}$ に対して,

$$g(x_1, \dots, x_m) := \mu y [f(x_1, \dots, x_m, y) = 0]$$

なる f を \mathcal{C} に含む. ここで, 右辺は, $f(x_1, \dots, x_m, y) = 0$ なる y が存在するときそのうちの最小値を与え, そうでないときは非定義とする関数である.

集合 $A \subseteq \mathbf{N}$ は, その特性関数が全域的な (\mathbf{N} 全体で定義された) 帰納的関数であるとき, 帰納的集合であるという. また, ある全域的な帰納的関数の値域であるとき, 帰納的可算集合であるという. 有理数全体の集合 \mathbf{Q} は,

$$\mathbf{Q} \ni (-1)^s \frac{p}{q} \longrightarrow (p, q, s) \in \mathbf{N}^3$$

なる対応によって \mathbf{N}^3 と同一視する. 後述の \mathcal{A}^* も, 標準的な方法により \mathbf{N} と同一視する.

\mathbf{N}^m から $\mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ への関数 $f(x)$ に対して, ある帰納的関数 $g : \mathbf{N}^m \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}$ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x, n) = f(x)$ となるとき, f は下から計算可能 (lower semicomputable) であるという. また, f および $-f$ が下から計算可能であるとき, f は計算可能 (computable) であるという. 例えば, 加減乗除やべき乗, 指数, 対数, 三角関数などは全てこの定義の下で計算可能な関数である.

\mathcal{A} を高々可算無限個の要素からなる集合 (アルファベット) とする. $\mathcal{A}^n, \mathcal{A}^*, \mathcal{A}^\infty$ をそれぞれ, 長さ n , 有限長, 片側無限, の文字列の集合とする. $\omega \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^\infty$ に対し, その i 番目の要素を ω_i で表し, また $\omega_i^j = \omega_i \omega_{i+1} \dots \omega_j$ ($i \leq j$) と書く. $x \in \mathcal{A}^*$ が $\omega \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^\infty$ の語頭であることを $x \subset \omega$ で表す. 本論文で我々は確率空間 $(\mathcal{A}^\infty, \mathcal{B}, P)$ を考える. ここで, \mathcal{B} は筒集合 $\Gamma_x := \{\omega \in \mathcal{A}^\infty \mid x \subset \omega\}$ ($x \in \mathcal{A}^*$) で生成される σ -algebra, P は \mathcal{A}^∞ 上の計算可能な確率測度である. \mathcal{A}^* 上の実数値関数 $f(x) = P(\Gamma_x)$ が計算可能であるとき, P は計算可能な測度であるという.

確率測度 P と筒集合 M_k ($k = 1, 2, \dots$) が以下の二つの条件を満たすとき, 列 $M = \{M_k\}_{k=1}^\infty$ を Martin-Löf P -test と呼ぶ.

- 特性集合

$$\text{ch}(M) := \{(k, x) \in \mathbf{N} \times \mathcal{A}^* \mid \Gamma_x \in M_k (k = 1, 2, \dots)\}$$

が帰納的可算集合である.

- $P(\bigcup \{\Gamma_x \mid (k, x) \in \text{ch}(M)\}) < 2^{-k}$ ($k = 1, 2, \dots$).

また, 二番目の条件を

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\bigcup \{\Gamma_x \mid (k, x) \in \text{ch}(M)\}) < \infty$$

に置き換えたとき, M を Solovay P -test と呼ぶ. なお, 以下では M_k を $\bigcup \{\Gamma_x \mid (k, x) \in \text{ch}(M)\}$ の略記としても用いる.

$\omega \in \mathcal{A}^\infty$ が, 任意の Martin-Löf P -test M に対して

$$\omega \notin \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} M_k$$

を満たすとき, Martin-Löf P -ランダム であるという. $R_{\text{ML}}(P) \subseteq \mathcal{A}^\infty$ を Martin-Löf P -ランダムな列全体の集合とする. Solovay P -ランダム列についても同様に定義し, $R_{\text{SOL}}(P)$ をその全体の集合とする.

Martin-Löf のランダムネスについて, 以下の事実が成立する.

命題 1 [1] $R_{ML}(P) = R_{SOL}(P)$.

命題 2 (universal test) ある *Martin-Löf P-test* $\{U_n\}_n$ が存在して, $\omega \notin R_{ML}(P) \iff \omega \in \limsup_n U_n$. 特に, $P(R_{ML}(P)) = 1$.

命題 3 $\omega \in R_{ML}(P)$ ならば $P(\omega_i^j) \neq 0$ ($i, j \in \mathbf{N}$).

本発表を通じて, 対数の底は 2 とし, 便宜上 $0 \log 0 = 0$ とする. また, 簡単のため, P のエントロピーレート

$$H(P) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_1^n \in \mathcal{A}^n} \frac{P(x_1^n)}{P(x_1^{n-1})}$$

は有限とする.

3 エルゴード定理

3.1 個別エルゴード定理

Birkhoff の個別エルゴード定理は V'yugin によって Martin-Löf ランダムネス版に拡張された. なお, 有限アルファベットの仮定の下で証明されているが, 可算無限アルファベットの場合も同様に証明できる.

定理 1 [7, Theorem 2] P を \mathcal{A}^∞ 上の計算可能な定常エルゴード測度とする. また, T を左シフト, f を, 少なくとも $R_{ML}(P)$ 上で定義された, \mathcal{A}^∞ 上の計算可能な可積分関数とする. このとき, 任意の $\omega \in R_{ML}(P)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(T^{j-1}\omega) = \int_{\mathcal{A}^\infty} f(\omega) dP(\omega) = \mathbf{E}[f]. \quad (1)$$

3.2 Shannon-McMillan-Breiman Theorem

SMB 定理については V'yugin によって順定理的部分の拡張がなされた. 本発表では, 可算アルファベットの場合にも適用可能で, かつ簡潔な別証明を与える.

定理 2 P を \mathcal{A}^∞ 上の計算可能な定常エルゴード測度とする. このとき, 任意の $\omega \in R_{ML}(P)$ に対して,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log P(\omega_1^n) = H(P). \quad (2)$$

証明 ここでは次の不等式を示す.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log P(\omega_1^n) \leq H(P) \quad (\forall \omega \in R_{ML}(P)) \quad (3)$$

P の k 次マルコフ近似 P_k を次のように定義する.

$$P_k(\omega_1^n) := P(\omega_1^k) \prod_{i=k+1}^n P(\omega_i | \omega_{i-k}^{i-1}),$$

ここで, $P(\omega_{j+1} | \omega_i^j)$ は次により定義する.

$$P(\omega_{j+1} | \omega_i^j) := \begin{cases} \frac{P(\omega_i^{j+1})}{P(\omega_i^j)} & \text{if } P(\omega_i^j) > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

また、各 $k \in \mathbf{N}$ に対し $f_k(\omega) := -\log P(\omega_{k+1}|\omega_1^k)$, $H_k := \mathbf{E}[-\log P(\omega_{k+1}|\omega_1^k)]$ とする。 f_k は計算可能な可積分関数で、命題 3 より $\mathbf{R}_{\text{ML}}(P)$ 上定義されているので、定理 1 より、 $\omega \in \mathbf{R}_{\text{ML}}(P)$ ならば

$$-\frac{1}{n} \log P_k(\omega_1^n) = -\frac{1}{n} \log P(\omega_1^k) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-k-1} f_k(T^j \omega) \longrightarrow 0 + H_k \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4)$$

さて、 $U_n := \{\Gamma_x \mid x \in \mathcal{A}^n, P_k(x) > n^2 P(x)\}$ とおくと、 $P(U_n) < n^{-2}$ により $\{U_n\}_n$ は Solovay P -test であるので、 $\omega \in \mathbf{R}_{\text{ML}}(P)$ ならば

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{P_k(\omega_1^n)}{P(\omega_1^n)} \leq 0 \quad (5)$$

を得る。 $H_k \searrow H(P)$ ($k \rightarrow \infty$) であるので、 (4) と (5) より (3) を得る。 ■

もし P が有限次マルコフであれば、十分大きな k に対して P_k と P は一致する。従って、

定理 3 P を \mathcal{A}^∞ 上の計算可能な有限次マルコフ定常エルゴード測度とする。このとき、任意の $\omega \in \mathbf{R}_{\text{ML}}(P)$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log P(\omega_1^n) = H(P). \quad (6)$$

3.3 再帰時間定理

再帰時間定理は、ユニバーサルデータ圧縮の文脈で Wyner と Ziv により導入され [8], Ornstein と Weiss によって概収束が証明された [6]. この定理の順定理的部分について Martin-Löf ランダム版に拡張できることを示す。

定理 4 P を \mathcal{A}^∞ 上の計算可能な定常エルゴード測度とする。このとき、任意の $\omega \in \mathbf{R}_{\text{ML}}(P)$ に対して

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log R_n(\omega) = H(P) \quad (7)$$

が成立する。ここで、 $R_n(\omega) := \min\{l \geq 1 \mid \omega_1^n = \omega_{l+1}^{l+n}\}$ は、 $\omega \in \mathcal{A}^\infty$ の (長さ n の語頭部分に対する) 再帰時間関数である。

証明 ここでは次の不等式を示す。

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log R_n(\omega) \leq H(P) \quad (\forall \omega \in \mathbf{R}_{\text{ML}}(P)). \quad (8)$$

$H(P) < c < c + \delta$ なる有理数 $c, \delta \in \mathbf{Q}$ を固定する。 $n \in \mathbf{N}$ と $y \in \mathcal{A}^n$ に対して

$$D_n(y) := \left\{ \Gamma_x \mid \begin{array}{l} x \in \mathcal{A}^{n+\lfloor 2^{(c+\delta)n} \rfloor}, \\ y = x_1^n \neq x_{l+1}^{l+n} \quad (1 \leq l \leq \lfloor 2^{(c+\delta)n} \rfloor) \end{array} \right\}$$

とおき、 $T_n := \{y \in \mathcal{A}^n \mid P(y) > 2^{-cn}\}$, $U_n = \bigcup_{y \in T_n} (D_n(y))$ とおく。 $P(U_n) \leq 2^{-\delta n} \cdot n$ ゆえ $\{U_n\}_n$ は Solovay P -test である。 $\omega \in \mathbf{R}_{\text{ML}}(P)$ とすると、十分大きな n に対して、定理 2 より、 $-\frac{1}{n} \log P(\omega_1^n) < c$, 即ち $\omega_1^n \in T_n$ であるので、 $\omega \notin D_n(\omega_1^n)$, 即ち $\frac{1}{n} \log R_n(\omega) \leq c + \delta$ が成立する。有理数 c, δ の任意性より (8) を得る。 ■

ところで、 P が有限次マルコフの場合にはより強い拡張を得ることができる。

定理 5 P を \mathcal{A}^∞ 上の計算可能な k 次マルコフ定常エルゴード測度とする。このとき、任意の $\omega \in \mathbf{R}_{\text{ML}}(P)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log R_n(\omega) = H(P). \quad (9)$$

証明 ここで示すべきことは

$$\omega \in R_{\text{ML}}(P) \implies \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log R_n(\omega) \geq H(P) \quad (10)$$

のみである。まず、 \mathcal{A} が有限アルファベットの場Ⓐについて示す。

$\delta := \min\{P(a_1^k) \mid P(a_1^k) > 0, a_1^k \in \mathcal{A}^k\}$ とおく。また、 $d < c < H(P)$ なる $d, c \in \mathbf{Q}$ を固定し、 $T_n := \{\Gamma_x \mid P(x_1^n) \leq 2^{-cn}\}$, $U_n := \{\Gamma_x \mid \log R_n(x) \leq dn\}$ とする。 $P(T_n \cap U_n) \leq \delta^{-2} 2^{-(c-d)n}$ ゆえ、 $\{T_n \cap U_n\}_n$ は Solovay P -test である。もし $\omega \in R_{\text{ML}}(P)$ ならば、十分大きな n に対して $\omega \notin U_n \cap T_n$ であるが、定理 3 により $\omega \in T_n$ であるので、(10) を得る。

次に、可算無限アルファベットの場Ⓐを示す。ここで、 \mathcal{A} を \mathbf{N} と同一視する。任意の $M \in \mathbf{N}$ に対して、有限アルファベットの確率過程 $(\mathcal{A}^{(M)}, P^{(M)})$ を次のように定める。

$$\mathcal{A}^{(M)} := \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{M\}, \{l \mid l > M\}\}$$

$$P^{(M)}(a_1 \cdots a_n) := \sum_{x_1 \in a_1} \cdots \sum_{x_n \in a_n} P(x_1 \cdots x_n)$$

すると、 $P^{(M)}$ は計算可能な k 次マルコフ定常エルゴード測度である。そこで、 $(\mathcal{A}^{(M)}, P^{(M)})$ に、先に証明した有限アルファベット版の定理 5 を適用して、

$$\omega \in R_{\text{ML}}(P^{(M)}) \implies \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log R_n^{(M)}(\omega) \geq H(P^{(M)})$$

を得る。 $R_n(\omega) \geq R_n^{(M)}(\omega)$, $R_{\text{ML}}(P) \subseteq R_{\text{ML}}(P^{(M)})$ であるので、

$$\omega \in R_{\text{ML}}(P) \implies \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log R_n(\omega) \geq H(P^{(M)})$$

を得る。ところで、

$$H(P^{(M)}) = \frac{1}{k} \sum_{a_1^k \in (\mathcal{A}^{(M)})^k} P^{(M)}(a_1^k) \log P^{(M)}(a_1^k) \nearrow H(P) \quad (M \rightarrow \infty)$$

であるので、(10) が得られた。 ■

References

- [1] G. J. Chaitin, *Algorithmic Information Theory*, Cambridge University Press, 1987.
- [2] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, New York, 1991.
- [3] M. van Lambalgen, “Random Sequences,” Ph. D. thesis, Universiteit van Amsterdam, 1987.
- [4] P. Martin-Löf, “The definition of random sequences,” *Information and Control*, vol.9, pp.602–619 (1966).
- [5] M. Nakamura, “Ergodic Theorems for Algorithmically Random Sequences,” *in the proceedings of IEEE ITSOC Information Theory Workshop 2005 on Coding and Complexity (2005)*.
- [6] D. S. Ornstein and B. Weiss, “Entropy and data compression schemes,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 39, pp.78–83 (1993).
- [7] V. V. V’yugin, “Ergodic theorems for individual random sequences,” *Theoretical Computer Science*, vol. 207, pp.343–361 (1998).
- [8] A. Wyner and J. Ziv, “Some asymptotic properties of the entropy of a stationary ergodic data source with applications to data compression,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 35, pp.1250–1258 (1989).

Hyperscaling in the Ising lattice model on a surface with negative curvature

～負曲率面上イジング格子模型のハイパースケーリング則～

坂庭 康仁 島 弘幸

北海道大学工学研究科 応用物理学専攻

E-mail: sakaniwa@eng.hokudai.ac.jp

2007年1月11日

1 序論

本研究の目的は、負曲率曲面上で起こる磁気相転移現象において、曲面の幾何学的曲率が系の臨界特性に与える効果を明らかにすることである。以下に、研究の背景と動機を述べる。

これまでの伝統的な物性物理学は主に、歪みや曲がりの無い平らな空間で起こる現象を研究の範疇としてきた。しかし近年、微細加工技術の著しい発展に伴い、系の形状変化とその基本物性との直接リンクするナノ構造体（フラレン [1]、球殻ナノ磁性体 [2]、メビウス結晶 [3] など）が数多く発見されるようになった。このようなエキゾチックな幾何構造を持つ系の現象として興味深いのが、多粒子系の相転移現象である。多粒子系とは、多数の粒子が閉じた空間の中で相互作用を及ぼしあう系のことであり、物理条件（温度、粒子濃度等）の変化に応じてしばしば“相転移”というマクロな協力現象を示す。この多粒子系の置かれた空間が有限の幾何学的曲率を有する場合、相転移点近傍における系の臨界特性がどのように変化するのは自明ではない。特に、曲がった空間内では粒子間の相互作用項の数学的表現が平らな空間の場合とは本質的に異なるため、平らな空間とは異なる挙動が観測されると考えられる。この曲がった空間特有の臨界挙動を数値計算と理論解析の両面から考察し、相転移における曲率の効果を定量的に明らかにすることが本研究の目的である。

2 相転移と臨界指数

「相転移」とは、物質の構造や性質が均一な部分である「相」が、温度・圧力・磁場などの外的要因によって別の相へ変化する現象を指す。相転移には H_2O の気液相転移のように準安定状態を持つ一次相転移と、準安定状態を持たない二次相転移がある。

後者の場合、系は転移温度以上で高い対称性を持つが転移温度以下ではその対称性が破れ、より低い対称性を持つ相へと変化する。二次相転移を示す代表的な物質は、鉄やニッケルなどで知られる強磁性金属である。これら物質は、高温では熱振動エネルギーが原子同士の磁気相互作用エネルギーよりも大きいため、原子の磁気モーメントの向きはバラバラで磁化は発生しない。しかし徐々に温度を下げると熱振動エネルギーが小さくなり、原子の磁気モーメントは次第に同じ方向を向くようになる。そして臨界温度 T_c を境に、系は磁化ゼロの常時性相から自発磁化を有する強磁性相へ転移する。このように相互作用のある多体系では、例え粒子間の相互作用が短距離的であつ

ても、 T_c より十分低温では長距離に渡っての秩序状態が出現するようになる。そして長距離秩序相へ転移する臨界点近傍では、諸々の熱力学量が巨大な揺らぎに由来する異常性を示す。この異常性が臨界特性である。例えば上述の強磁性相転移の場合だと、転移温度 T_c 近傍における系の比熱 C 、磁化 m 、磁化率 χ の温度依存性系は

$$C \propto |T - T_c|^{-\alpha} \quad (1)$$

$$m \propto (T_c - T)^\beta, \quad (T < T_c) \quad (2)$$

$$\chi \propto (T - T_c)^\gamma \quad (3)$$

のように表わすことができる。このときの、 α, β, γ を臨界指数と呼ぶ。臨界指数の値は系の微視的性質（格子構造や構成原子の種類）には依存しない。すなわち臨界指数は系のユニバーサリティ（普遍性）を示す指標と言える。

3 擬球面イジング格子模型

イジングスピン模型は、磁気モーメントの向きが up(上) と down(下) の二方向のみと設定した格子模型であり、磁性体の磁気相転移を記述する最も簡潔な理論モデルである。イジング模型は現実の系への幅広い応用が可能なことと解析解を求めることが可能なことから多岐に渡って利用されてきた。二次元平面上のイジング格子模型については臨界指数の厳密解が求められており（表 1 参照）、その値は三角格子、四角格子、六角格子といった格子の形状に依存しないことが分かっている。[4, 5] 今回の研究で我々は臨界的性質に対する幾何学的曲率の効果を明らかにするため、曲面上に配置したイジングスピン格子模型（図 1、2）の磁気相転移を数値的に調べた。

対象として選んだ曲面は、負の一定曲率を持つ開曲面である擬球面 [7, 8] である。擬球は二葉双曲面 [7] の片方の面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ ($z \geq 1$) として定義される。これは任意の点からの距離の二乗が -1 となる軌道を示しており、それゆえ球と対義的に $i = \sqrt{-1}$ の半径を持った擬球という。擬球は以下のミンコフスキー計量を満たしている。

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2 \quad (4)$$

以下では便宜上、開曲面である擬球を $(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$ という変換をもって二次元の単位円盤に射影したポアンカレディスクモデル（図 1、2）を用いることにする。このとき計量は以下のように変換される。

$$ds^2 = f(dx^2 + dy^2), \quad f = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (5)$$

ポアンカレディスクは擬球の簡略表現であり、実際

$$\kappa = -\frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \log f \quad (6)$$

と定義されるポアンカレディスク上のガウス曲率 [9] は、任意の点で $\kappa = -1$ となる。円盤の淵は擬球の無限遠に対応している。よって、図 1、2 の四種類の格子は一見歪んで見えるが、いずれも正多角形である。この四種類の格子模型はどれも平面（ガウス曲率が零）では実現不可能である。すなわちこれらの正多角形構造はポアンカレディスクが (4) 式の計量を満たしているために初めて実現可能となっている。

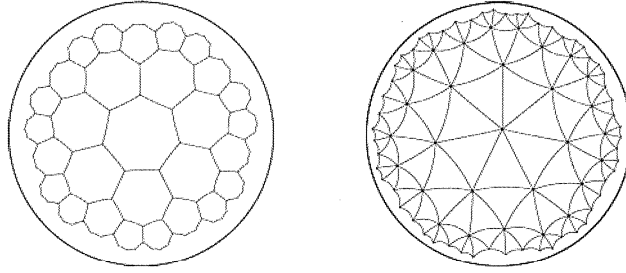


図 1: ポアンカレディスク上の正七角格子 (左図) と正三角格子 (右図)

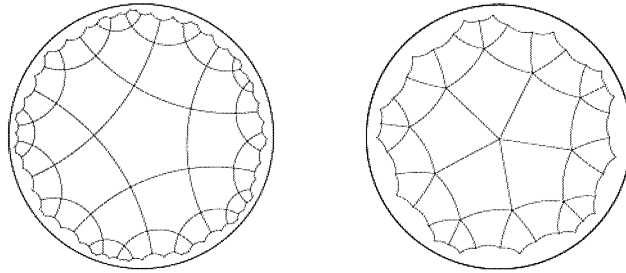


図 2: ポアンカレディスク上の正五角格子 (左図) と正四角格子 (右図)

なお、臨界点直上では系の相関長が発散するため、臨界状態に関する厳密な議論には、無限大の大きさをもつ系（熱力学的極限）が必要になる。例えば、球面のような閉曲面では、熱力学的極限で球面の曲率が零に漸近してしまい曲率の影響が消失してしまう。一方、擬球面の場合は曲率を一定に保持しながら格子系のサイズを拡張することが可能である。このような意味でも、擬球面はイジング格子モデルの臨界的性質に対する曲率の影響を調べる曲面として最適だと言える。

4 計算手法

本論文で扱った強磁性イジングモデルは、ハミルトニアン $H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j$ で記述される。ここで s_i は i 番目の格子点に置かれたイジングスピンの値で ± 1 である。 $\langle i,j \rangle$ は最近接格子点の組だけについて和をとることを示す。またスピン間の交換相互作用は一定値 ($J = 1$) とする。これは対象とする格子が正多角形構造を有しており、隣接スピン間の距離が曲面全領域にわたって一定であることに対応する。 J/k_B と J はそれぞれ温度とエネルギーの単位であり、一スピンあたりの自発磁化の大きさ（秩序パラメーター m ）は $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i$ と表す。

臨界状態に関する厳密な議論には無限大のシステムサイズが必要なのだが、これを数値的に取り扱うことは不可能である。そこで実際の計算では、有限サイズの系から得られたデータをもとに臨界指数を演繹する有限サイズスケーリング [6] という手法を用いた。スケーリング仮説によると、転移点近傍でシステムサイズ N の自由エネルギー $f(T, N)$ は以下のスケーリング則に従う。

$$f(T, N) = N^{-(2-\alpha)/\mu} \cdot F(\varepsilon), \quad (\varepsilon = |T - T_c|/T_c) \quad (7)$$

これに適切な変換を施すと、自発磁化 $m(T, N) = \langle |m| \rangle$ と磁化率 $\chi(T, N) = N \frac{\langle m^2 \rangle - \langle |m| \rangle^2}{k_B T}$ の

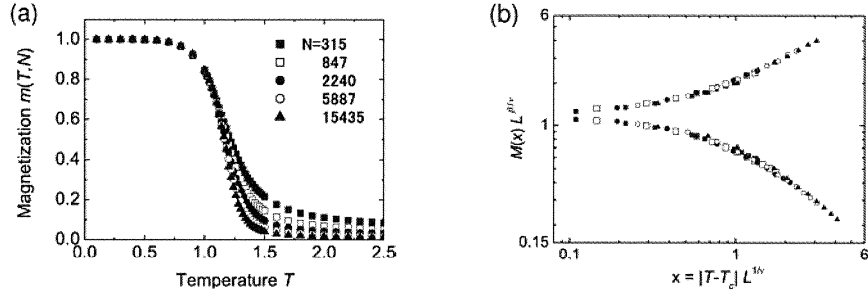


図 3: 正七角格子; 磁化の温度変化 (左図) と磁化のスケーリング (右図)

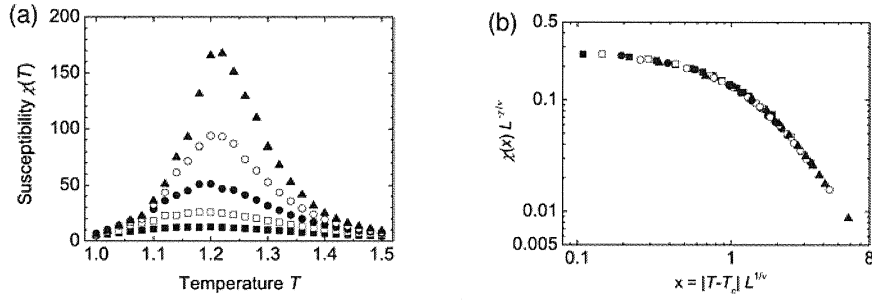


図 4: 正七角格子; 磁化率の温度変化 (左図) と磁化率のスケーリング (右図)

スケーリング則はそれぞれ次のように書ける。

$$m(T, N) \propto N^{-\beta/\mu} \cdot m_0(x) \quad (8)$$

$$\chi(T, N) \propto N^{\gamma/\mu} \cdot \chi_0(x) \quad (9)$$

ここで、 $x = \varepsilon N^{1/\mu}$ である。よって、各物理量の N 依存性を調べることで、臨界特性の評価に必要な臨界指数 β, γ, μ の値を見積もることが可能となる。

5 結果

図 3(a) は擬球面上の正七角格子における磁化 $m(T, N)$ の温度依存性を示す。システムサイズが大きくなるにつれ、転移温度近傍での磁化の勾配が大きくなるという、強磁性転移に典型的な振る舞いを見ることができる。さらに (8) 式に基づいた磁化 m のスケーリング解析の結果を図 3(b) に示した。異なるシステムサイズ N 、および温度 T に対するデータ点が全て同一の曲線上に乗ることが分かる。よってこの曲線を満たす関数を非線形最小二乗法により求めることにより、臨界点直上における臨界指数を導出することができる。計算の結果 $\beta \sim 0.61$ という臨界指数を得た。この値は平面の二次元イジング模型の厳密解 $\beta = 1/8$ と明確に異なる。

次に図 4(a) は正七角格子の磁化率 $\chi(N, T)$ の温度依存性の図である。転移点近傍 $T \sim 1.2$ での磁化率ピークは、システムサイズの拡大とともに鋭くなっており、無限大のシステムサイズで発散することが予測される。これは臨界点直上で長距離秩序が出現する（相関長が発散する）強磁性転移の特徴をよく示している。図 4(b) は (9) 式を用いた磁化率のスケーリングデータであり、ここから臨界指数 $\gamma \sim 2.21$ を得た。この値も平面のイジング模型の厳密解 $\gamma = 7/4$ とは異なっている。

残りの三種類の格子についても同様に有限サイズスケーリングを用いて臨界指数を導出した。結

表 1: 擬球面イジング格子の臨界指数

	β	γ	μ	T_c
heptagonal	0.61(2)	2.21(4)	3.44(6)	1.26(1)
triangular	0.73(3)	2.25(2)	3.6(4)	3.34(4)
pentagonal	0.74(2)	1.98(2)	3.5(1)	1.68(2)
square	0.74(4)	1.96(4)	3.4(3)	2.13(1)
planar[ref.2]	1/8	7/4	2	

果を表 1 にまとめる。ここで注目すべき結果は、i) 全ての擬球面イジング格子の臨界指数の値が平面イジング格子の厳密解と異なっている点、および ii) 四種類の格子の臨界指数はほぼ等しい値を示している点である。すなわち、擬球面上に配置されたイジング模型は、格子模型によらないユニバーサル（普遍的）な値をとることが分かる。さらには、この値が平面イジング模型の値とは異なることから、平面・曲面それぞれに定義された二つのイジング模型は異なるユニバーサリティクラスに属すると結論される。なお、各格子の指数に若干の差異がみられるのは、有限系に対して固定端境界条件を用いたことが原因だと考えられる。実際、解析手法を改良して境界の効果を軽減した場合、各臨界指数の値はさらに良い一致をみた。[10, 11]

結論として、二次元薄膜状の磁性物質の臨界特性は、二次元面の幾何学的曲率の有無に応じて変化することが明らかになった。これは、磁性物質を曲げたり歪めたりすることで物性が変化することを示唆するものである。

関連する発展課題としては、ハイゼンベルグスピン系や量子スピン系など、より一般的なスピン系における曲率効果の解明が挙げられる。その研究成果は、曲面構造を有する多くのナノ磁性体の物性解明へ寄与することが期待できる。

参考文献

- [1] P. M. Allemand, K. C. Khemani, *et al.*, *Science* **253** 301 (1991)
- [2] H. Yoshikawa, *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **85** 5287 (2004)
- [3] S. Tanda, *et al.*, *Nature* **417** 397 (2002)
- [4] L. Onsager *Phys. Rev.* **65** 117 (1944)
- [5] B. Kaufman *Phys. Rev.* **76** 1232 (1949)
- [6] J. Cardy *Scaling and Renormalization in Statistical Physics* (Cambridge University Press, Cambridge UK) (1996)
- [7] H. S. M. Coxeter *Introduction to Geometry* (Wiley, New York) (1969)
- [8] P. A. Firby and C. F. Gardiner *Surface Topology* (Ellis Horwood, London) (1991)
- [9] H. Shima and Y. Sakaniwa, *J. Phys. A* **39** 4921. (2006)
- [10] H. Shima and Y. Sakaniwa, *J. Stat. Mech* P.08017 (2006)
- [11] Y. Sakaniwa, I. Hasegawa, H. Shima *J. Magn. Magn. Mater* in press (2007)

UNIVERSAL LEXSEGMENT IDEALS

SATOSHI MURAI

ABSTRACT. Universal lexsegment イデアルとは Babson–Novik–Thomas [1] らによって導入された特殊な lexsegment イデアルです. ここでは universal lexsegment イデアルがどのようなイデアルであるかを述べた後, universal lexsegment イデアルと同じヒルベルト関数を持つイデアルは全て決定できるという結果を紹介します.

1. 基本的な背景について

ヒルベルト関数はここ三十年程の間で非常に盛んに研究されてきた対象の一つに挙げられるでしょう. その理由は幾つかありますが, 例えばヒルベルト関数が純粋な代数だけでなく組合せ論などの代数以外の分野での有効性も明らかになってきたことや, 計算機の発達によりヒルベルト関数を簡単に計算できるようになったことなどが挙げられるでしょう.

他方 lexsegment イデアルの概念は, ヒルベルト関数に関する Macaulay の有名な結果 [3] で導入されたものです. 簡単に述べるなら, Macaulay の結果はどのような関数が多項式環の斉次イデアル (もしくは多項式環を斉次イデアルで割った環) のヒルベルト関数になりうるかを完全に決定したというものです. 特に, Macaulay の結果は多項式環の任意の斉次イデアルに対して必ず同じヒルベルト関数を持つ特殊な単項式イデアルが一意的に存在することを保障していて, この単項式イデアルが今日 lexsegment イデアルと呼ばれているものです.

Macaulay の定理の強力さから, lexsegment イデアルはヒルベルト関数に関する研究の様々な局面で現れます. また, 代数的な立場から lexsegment イデアル自身の性質を調べるというような研究も最近では見受けられるようになってきました.

ここでは, [1] において導入された universal lexsegment イデアルと呼ばれる特殊な lexsegment イデアルにより深い理解を与えることを目的としたいと思います. この研究は典型的な ‘組合せ論的可換環論’ に位置する研究です. この分野の雰囲気を少しなりとも味わっていただければ幸いです.

2. Lexsegment イデアルとヒルベルト関数について

この章では lexsegment イデアルがどのような背景で現れることになったかを組合せ論的な立場から解説したいと思います.

2.1. ヒルベルト関数と数え上げ.

まずヒルベルト関数を定義しましょう. K を任意の体, $S = K[x_1, \dots, x_n]$ を体 K 上の n 変数多項式環とします. 多項式環 S の元で $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ (但し各 a_i は自然数) の形をしたものを **単項式** といいます. 単項式の **次数** とは $\deg(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}) =$

The author is supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ で与えられる整数のことです. (但し 0 の次数は全ての自然数を取り得るとします.) 多項式 f が **斉次** であるとは f に現れる全ての単項式の次数が等しい時に言います. また斉次な多項式 f の次数 $\deg(f)$ とは f に現れる単項式の次数のことです. (例えば, $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ は次数 2 の斉次多項式ですが, $g = x_1^2 + x_2^3$ は斉次でない多項式です.) 斉次な多項式で生成されるイデアルを **斉次イデアル** といいます. イデアル I が斉次イデアルである時, 各自然数 $t \in \mathbb{N}$ に対して

$$I_t = \{f \in I : \deg(f) = t\}$$

と定めてやると, I_t は体 K 上の有限次元ベクトル空間になることが簡単にチェックできます. 斉次イデアル I の **ヒルベルト関数** $H(I, t) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ とは

$$H(I, t) = \dim_K I_t$$

で定義される \mathbb{N} から \mathbb{N} への関数のことです. 但し, $\dim_K I_t$ は I_t のベクトル空間としての次元を表すとします.

次にヒルベルト関数を組合せ論的に扱う手法についてお話しておきたいと思います. 単項式で生成されるイデアルのことを **単項式イデアル** といいます. (例えば $I = (x_1^2, x_2^3)$ が単項式イデアルです.) 明らかに単項式イデアルは斉次イデアルです. 下記に, 単項式イデアルに関する簡単な事実を二つ並べておくことにします. (証明は容易なので各自に委ねます.)

- (a) 単項式イデアル I の単項式からなる生成系で包含関係で最小のものは一意的に定まる. (以後これを $G(I)$ と書くことにします.)
- (b) I が単項式イデアルなら $H(I, t)$ は I に含まれる次数 t の単項式の個数に一致.

特に, 上の (b) の意味するところは “**単項式イデアルのヒルベルト関数を知るにはイデアルに含まれる単項式の数を書き上げればよい**” ということから, これは単項式イデアルのヒルベルト関数を組合せ論的に扱う手法を提供してくれています. さらに次のことが知られています.

定理 2.1 (Macaulay). 任意の斉次イデアル $I \subset S$ に対し, ある単項式イデアル $J \subset S$ があって任意の自然数 $t \in \mathbb{N}$ に対して $H(I, t) = H(J, t)$ が成り立つ.

つまり, どんな斉次イデアルのヒルベルト関数も必ずある単項式イデアルのヒルベルト関数に一致するというわけです!

2.2. Lexsegment イデアルとは?.

Lexsegment イデアルが考えられた元々の背景は次のような問題の解決の為です.

問題 1. 関数 $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ がある斉次イデアルのヒルベルト関数に一致する為の必要十分条件は?

1927 年 Macaulay は問題 1 について完全な答えを与えました. ここでは Macaulay の定理の完全な形については触れないことにして, 斉次イデアルのヒルベルト関数がある特殊な単項式イデアルによって特徴付けられることだけを書いておくことにします.

定義 2.2. 多項式環 S 上の辞書式順序 $<_{\text{lex}}$ とは次で定義される単項式全体の集合の上の全順序です.

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} >_{\text{lex}} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

\Leftrightarrow ベクトル $(a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$ の最も左にある 0 でない成分が正.

例えば, 次数 2 の単項式を $<_{\text{lex}}$ で並べてやると

$$x_1^2 >_{\text{lex}} x_1x_2 >_{\text{lex}} x_1x_3 >_{\text{lex}} \cdots >_{\text{lex}} x_1x_n >_{\text{lex}} x_2^2 >_{\text{lex}} x_2x_3 >_{\text{lex}} \cdots >_{\text{lex}} x_2x_n >_{\text{lex}} \cdots$$

の様になります.

単項式イデアル I が **lexsegment** であるとは I が次の条件を満たす時に言います.

$$(*) \quad x^A \in I \text{ で } \deg(x^B) = \deg(x^A) \text{ かつ } x^B >_{\text{lex}} x^A \text{ なら } x^B \in I.$$

「注」上の条件の「 $x^A \in I$ 」を「 $x^A \in G(I)$ 」に変えても同じです.

例 2.3. 例えば, $I = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3) \subset K[x_1, x_2, x_3]$ は lexsegment ですが, $J = (x_1^2, x_2^2) \subset K[x_1, x_2]$ は $x_1x_2 >_{\text{lex}} x_2^2$ なので lexsegment ではありません.

また lexsegment イデアルとは各斉次部分 I_t に含まれる単項式全体の集合が辞書式順序で大きいものから順番に取ってきたものになっている単項式イデアル I のことである, と言い換えることもできます. すると次のことが直ちにわかります.

(c) I と J が同じヒルベルト関数を持つ S 上の lexsegment イデアルなら $I = J$.

長くなりましたが, 問題 1 に対する Macaulay の回答の一つが次のものです.

定理 2.4 (Macaulay). 任意の斉次イデアル $I \subset S$ に対し, I と同じヒルベルト関数を持つ S 上の lexsegment イデアル (以後これを $\text{Lex}(I)$ と書く) が一意的に存在する.

上の (c) から lexsegment イデアルは各ヒルベルト関数ごとに一意的に決定するわけですから, 上の定理は本質的に斉次イデアルのヒルベルト関数の特徴付けを与えています. 実は, 二項係数を使ったもっと具体的な特徴付けの方法もあるのですがここでは割愛することにします. 興味があれば [2, §4.2] 等を参照して下さい.

3. Universal lexsegment イデアルとは?

この章では universal lexsegment イデアルについて学ぶことにします.

定義 3.1. 多項式環 $K[x_1, \dots, x_n]$ 上の lexsegment イデアル I が **universal** であるとは, 任意の整数 $m \geq n$ に対して, 単項式の集合 $G(I)$ で生成される $K[x_1, \dots, x_m]$ 上のイデアルがやはり lexsegment イデアルである時に言います.

少しわかりにくいので例を挙げておきましょう. $I = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2) \subset K[x_1, x_2]$ は次数が 2 以上の単項式を全て含むことになりから lexsegment イデアルです. しかし, (x_1^2, x_1x_2, x_2^2) を $K[x_1, x_2, x_3]$ のイデアルとしてみるなら, $x_1x_3 >_{\text{lex}} x_2^2$ で $x_1x_3 \notin (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ ですからこのイデアルは $K[x_1, x_2, x_3]$ 上の lexsegment にはなりません. よって I は $K[x_1, x_2]$ 上 lexsegment ではありますが universal lexsegment ではありません. また, universal lexsegment イデアルの例としては例えば $J = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3)$ 等が挙げられます.

さて, ではどうやって universal lexsegment であることを判定するのでしょうか? 実は次のような簡単な特徴付けができます.

補題 3.2 (M-日比 [4]). I を $K[x_1, \dots, x_n]$ 上の単項式イデアルとする. 次は同値.

- (i) I が universal lexsegment;
- (ii) I が lexsegment でかつ $\#G(I) \leq n$. ($\#$ で個数を表すことにします.)

つまり, **universal lexsegment イデアル**とは生成元の個数が多項式環の変数の数より少ない **lexsegment イデアル**であるということが出来ます. ここまで議論を落としてしまえば universal lexsegment イデアルを具体的に全て記述することも難しくありません. 実際, 次の命題は辞書式順序の定義から簡単に導かれます.

命題 3.3 (Universal lexsegment イデアルの構造定理). 次は同値.

- (i) I が $K[x_1, \dots, x_n]$ 上の universal lexsegment イデアル;
- (ii) ある整数 $1 \leq s \leq n$ 及び $b_1, b_2, \dots, b_s \in \mathbb{N}$ があって,

$$I = (x_1^{b_1+1}, x_1^{b_1}x_2^{b_2+1}, x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3+1}, \dots, x_1^{b_1}x_2^{b_2} \cdots x_{s-1}^{b_{s-1}}x_s^{b_s+1}).$$

証明は [1] や [4] を参照して下さい. さて, 今興味があるのはヒルベルト関数です. 最後に universal lexsegment イデアルの取りうるヒルベルト関数の範囲を決めておくことにします.

補題 3.4 (M-日比 [4]). $S = K[x_1, \dots, x_n]$ とする. 次は同値.

- (i) 関数 $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ が S 上の universal lexsegment イデアルのヒルベルト関数;
- (ii) ある整数 $1 \leq s \leq n$ と $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_s$ があり,

$$(1) \quad H(t) = \binom{t - a_1 + n - 1}{n - 1} + \binom{t - a_1 + n - 2}{n - 2} + \cdots + \binom{t - a_s + n - s}{n - s}.$$

但し $a < b$ の時 $\binom{a}{b} = 0$ とします. さらに, I がヒルベルト関数が (1) の形で与えられる universal lexsegment イデアルなら, a_1, \dots, a_s は I の生成元の次数を小さい順に並べたものに一致.

定理 2.4 において, 任意の斉次イデアル I に対し同じヒルベルト関数を持つ lexsegment イデアル $\text{Lex}(I)$ が一意的存在するということを紹介しました. さて $\text{Lex}(I)$ が universal lexsegment となるような斉次イデアル I を **critical イデアル**と呼ぶことにしましょう. (これは I のヒルベルト関数が (1) の形でかけることに同値です.) 次のセクションではこの critical イデアルについて学ぶことにします.

4. Critical イデアル

初めに, 我々の元々の問題意識を紹介しておきたいと思います. イデアル I が斉次イデアルである時, その (包含関係で) 極小な生成系の元の個数は一定であることが知られています. (斉次でない時は成り立たないこともあります.) ところで, 実は lexsegment イデアルの生成元の個数は同じヒルベルト関数を持つイデアルの中で最も多いことが知られています. 大抵の場合は lexsegment イデアルの生成元の数はかなり極端に多いのですが, 定理 3.2 で見たように universal lexsegment イデアルというのは生成元の数の少ない lexsegment イデアルです. このことを踏まえて, 我々はなんとなく次のようなことを考えました.

予想 2. I が critical イデアルなら I と $\text{Lex}(I)$ の極小生成系の元の個数は一致する.

結論から言うと、上の予想は肯定的に解決されました. 実は、予想の解決よりずっと強く、**critical イデアルを具体的に全部決定する** という結果が得られました. 以下で詳細を紹介することにします. $S = K[x_1, \dots, x_n]$ とします. 斉次イデアル $I \subset S$ が **canonical critical イデアル** であるとは、ある整数 $1 \leq s \leq n$ と多項式 f_1, \dots, f_s があって (i) 各 i について $f_i \in K[x_i, \dots, x_n]$ であり、かつ (ii) $\deg(f_s) > 0$ を満たし、

$$(2) \quad I = (f_1x_1, f_1f_2x_2, \dots, f_1f_2 \cdots f_{s-1}x_{s-1}, f_1f_2 \cdots f_{s-1}f_s)$$

とできる時にいうことにします. 例えば、定理 3.3 を使えば全ての universal lexsegment イデアルは canonical critical イデアルであることがわかります. ($i < s$ の時 $f_i = x_i^{b_i}$ とし $f_s = x_s^{b_s+1}$ とすれば良い.) Canonical critical イデアルが本当に critical イデアルになっているかどうかは自明ではありませんが、線形代数の知識だけで十分証明できます.

実は、適当な線形変換によって全ての critical イデアルが canonical critical イデアルにできるというのが我々の結果です. 結果のを述べる前に線形変換をきちんと定義しておきましょう. n 次正則行列 $\varphi = (a_{ij}) \in GL_n(K)$ があった時、任意の多項式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$ に対し

$$\varphi(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f\left(\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i\right)$$

と定めます. するとこの φ は (逆行列で元に戻るので) 多項式環 S の自己同型写像となります. この自己同型写像 φ を S 上の **線形変換** と呼ぶことにします.

定理 4.1 ([5]). 任意の critical イデアル $I \subset S$ に対し、ある線形変換 $\varphi \in GL_n(K)$ があって、 $\varphi(I) = \{\varphi(f) : f \in I\}$ は canonical critical イデアルとなる.

線形変換というのは本質的にイデアルの構造を何も変えませんが、**定理 4.1 は全ての critical イデアルを決定している** といっても差し支えないものです. 特に定理 4.1 から予想 2 が正しいことも簡単な計算から導かれます. また、斉次イデアル I の極小生成系の元の数が $\text{Lex}(I)$ の極小生成系の元の数と一致している時 I は **Gotzmann** であると言われます. すると定理 4.1 は生成元の数が多項式環の変数の個数以下となる Gotzmann イデアルを全て決定している定理であると見ることも出来ます.

REFERENCES

- [1] E. Babson, I. Novik and R. Thomas, Reverse lexicographic and lexicographic shifting, *J. Algebraic Combin.* **23** (2006), 107-123.
- [2] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen-Macaulay rings," Revised Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [3] F. S. Macaulay, Some properties of enumeration in the theory of modular systems, *Proc. London Math. Soc.* **26** (1927), 531-555.
- [4] S. Murai and T. Hibi, The depth of an ideal with a given Hilbert function, arXiv:math.AC/0608188, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- [5] S. Murai and T. Hibi, Gotzmann ideals of the polynomial ring, in preparation.

DEPARTMENT OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE AND TECHNOLOGY, OSAKA UNIVERSITY, TOYONAKA, OSAKA, 560-0043, JAPAN,
E-mail address: s-murai@ist.osaka-u.ac.jp

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF HAMILTON-JACOBI EQUATIONS WITH STATE CONSTRAINTS

早稲田大学大学院理工学研究科 M2 三竹 大寿

1. HAMILTON-JACOBI 方程式について

まず, 本講演で取り扱われる Hamilton-Jacobi 方程式 (HJ 方程式) について説明する. HJ 方程式とは,

$$u_t(x, t) + H(x, D_x u(x, t)) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \quad (1)$$

の形で書かれる偏微分方程式のことである. ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は領域, $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は与えられた連続関数, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ は未知関数とする. また, $u_t = \partial u / \partial t$, $D_x u = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$ とする.

後で H に対して仮定を与えるが, この方程式は, 線形性を一切課さない完全非線型偏微分方程式であり, 一般的に滑らかな解を望むことは難しい.

一般的に, このような偏微分方程式を研究したい場合, 我々は解の概念を一般化した, 弱解を利用する.

弱解として最も有名なものは, L. Schwartz により 1930 年ころ導入された超関数を用いた解であるだろう. これはその定義が, 部分積分に基づいているため, 発散型の方程式に対して有効であるが, 非発散型の方程式に対してはあまり有効でない.

そこで, 1980 年前半に M. G. Crandall, P.-L. Lions らが HJ 方程式に対して粘性解と呼ばれる弱解を導入した. その後, この弱解は 2 階の完全非線型退化楕円型, 放物型偏微分方程式に対して有効であることが分かっている.

粘性解の理論について興味のある方は, [4], [14] 等を参考されたい.

ここで, 粘性解の定義を紹介しておく. 解に連続性を必要としない定義もあるが, ここでは簡単のため, 連続なものだけ考える.

定義 1. $u : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする.

- (1) u が (1) の粘性劣解 (粘性優解) であるとは, 任意の $\phi \in C^1(\Omega \times (0, \infty))$ に対して, $u - \phi$ が $(\hat{x}, \hat{t}) \in \Omega \times (0, \infty)$ で極大値 (極小値) を取るならば,

$$\phi_t(\hat{x}, \hat{t}) + H(\hat{x}, D\phi(\hat{x}, \hat{t})) \leq 0, \quad (\phi_t(\hat{x}, \hat{t}) + H(\hat{x}, D\phi(\hat{x}, \hat{t})) \geq 0)$$

を満たす時を言う.

- (2) u が (1) の粘性解とは, 粘性劣解かつ粘性優解であるときを言う.

注意 1. $u \in C^1(\Omega \times (0, \infty))$ が (1) を満たしている時, すなわち u が古典解の時, 粘性解の意味でも解である. 実際, 任意の $\phi \in C(\Omega \times (0, \infty))$ に対して, $u - \phi$ が (\hat{x}, \hat{t}) で極大値 (極小値) を取る時, $\partial_t(u - \phi)(\hat{x}, \hat{t}) = D(u - \phi)(\hat{x}, \hat{t}) = 0$ である. これより,

$$\phi_t(\hat{x}, \hat{t}) + H(\hat{x}, D\phi(\hat{x}, \hat{t})) = u_t(\hat{x}, \hat{t}) + H(\hat{x}, Du(\hat{x}, \hat{t})) = 0.$$

以下, 劣解, 優解, 解は, それぞれ, 粘性劣解, 粘性優解, 粘性解を意味するものとする.

2. 漸近問題について

HJ 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_t(x, t) + H(x, D_x u(x, t)) = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

を考える。

近年この問題の解の時間無限大に対する漸近挙動についての研究が盛んになっている。主結果を先に述べると、上の初期値問題の解 $u(x, t)$ に対して、ある定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在し、定常問題 $H(x, Dv(x)) = c$ のある解 $v \in C(\Omega)$ に対して、 $t \rightarrow \infty$ とした時に、 Ω 上局所一様に

$$u(x, t) + ct - v(x) \rightarrow 0 \quad (3)$$

と収束する。ここで、 $v(x) - ct$ を u に対する漸近解と呼ぶ。

このような解の時間無限大における収束が、コンパクト多様体上ではかなり一般の H に対して言えることが分かってきた。

漸近解の解の存在を考える時に、次の加法的固有値問題または、セル問題と呼ばれる問題が非常に関連している。方程式

$$H(x, D_x u(x)) = a \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

を考える。ここで、 $u \in C(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}$ は未知関数、未知定数であり、(4) の解となる組 (u, a) を求めるといのがこの問題である。

ここで、簡単な考察から $v(x) - ct$ が (1) の解であることと、 (v, c) が (4) の解であることが同値であることが分かる。すなわち、主結果が述べていることは、加法的固有値問題は問題 (2) の解の“定常状態”を与えていることが分かる。(1) の解が $v(x) - ct$ の形で書けたとき、これを HJ 方程式の漸近解と呼ぶ。

この問題は、[16] において、 H が第 1 変数に対して周期的な場合に次の形で解決されている。

定理 1 (Lions-Papanicolaou-Varadhan [16]). $\Omega = \mathbb{R}^n$ とする。 $H \in C(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ は強圧的で、第 1 変数に関して周期的であるとす。この時、任意の $p \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$H(x, p + D_x u(x)) = a \quad \text{in } \Omega$$

が解 $u \in C(\Omega)$ を持つような $a \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ存在する。

次に漸近問題の歴史について触れる。加法的固有値問題よりも少し時代はさかのぼるが、HJ 方程式の漸近問題の研究は、Kruřkov [14] の研究に始まる。彼は、解を半凹関数のクラスで考え、方程式の解をほとんど到る点で方程式が満たされる時に解であるとしている。次に粘性解を用いて、Lions [15], Barles [1] らがこの漸近問題の研究を始めている。

彼らは主に $u_t(x, t) + H(D_x u(x, t)) = 0$ の形の HJ 方程式を扱っている。さらに、[15], [1] では、任意の $p \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $H(p) \geq H(0) = 0$ が成り立つと仮定している。

H が x, p 変数に依存している時は、Roquejoffre [19], Namah-Roquejoffre [18] らがこの漸近問題の研究を始めている。

このような背景がある上で、Fathi が [6] において、かなり一般的な HJ 方程式に対して、彼が開拓した弱 KAM 理論 ([7]) を用いて、この漸近問題を次のように解決した。

定理 2 (Fathi [6], [7]). M は境界なしのコンパクト多様体とする。 $H : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は各変数に対して、 C^2 級、 $\lim_{r \rightarrow \infty} \inf \{H(x, p)/|p| \mid (x, p) \in M \times \mathbb{R}^n \setminus U(0, r)\} = \infty$, 強凸性を満たすとす。この時、(2) の解 u ($\Omega = M$ とする) に対して、定数 c が存在し、 $u(x, t) + ct$ の $t \rightarrow \infty$ に対する極限が存在する。また、この収束は M 上一様である。

Roquejoffre [20], Davini-Siconolfi [5] らはこの結果をさらに進歩させた。[5] では、 H の滑らかさに対する仮定もはずされている。

弱 KAM 理論において、Aubry 集合と呼ばれる、定常問題の解の構造を決定するために大切な集合が発見された。Aubry 集合についての詳しい定義や、その性質については、[7], [10], [13] を参照されたい。彼らは Aubry 集合上で解の一意収束を示し、さらに、この集合の特性から全体での一意収束していることを示している。

Barles-Souganidis [2] は、Fathi らとは異なった方法で、同種の結果を得ている。ただし、仮定は異なり、凸性がない場合も扱われている。

ここで、全ての HJ 方程式について、上の収束が成り立つことはないことが分かっていることを注意しておく。例えば、[1], [2], [3], 等に反例があるので参照されたい。

領域が有界でない場合については、Fujita-Ishii-Loreti [9], Barles-Roquejoffre, Ishii [11], Ichihara-Ishii [12] らが研究している。[9] では特別な形の HJ 方程式について考えられており、[11] では、Aubry 集合がコンパクトになるような仮定がされている。[12] では、半周期的な HJ 方程式に対して考えられている。また、Fujita [8] によって収束の早さについても研究されている。

3. 本題

一方で、初期値問題に境界条件を付け加えた問題に対しては、あまり研究されていない。筆者が知っている限りだと、[1, 20] において Dirichlet 問題が考えられているだけである。

本講演では、状態拘束条件という境界条件を加えた HJ 方程式の漸近問題について考える。状態拘束条件は最適制御の観点から見た時に、自然に出てくる条件で、HJ 方程式の境界条件として Soner [21] により導入された。正確には、我々は

$$(C) \quad \begin{cases} u_t(x, t) + H(x, D_x u(x, t)) \leq 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), & (5) \\ u_t(x, t) + H(x, D_x u(x, t)) \geq 0 & \text{on } \bar{\Omega} \times (0, \infty), & (6) \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{on } \bar{\Omega}, & (7) \end{cases}$$

について考える。(6) で境界における挙動が要求されている。また、後で定義する変分公式 (11) が (C) の自然な解になっている。この変分公式のコントロール集合が Ω に制限されていることから、このような条件が状態拘束条件と呼ばれることは自然であるように思われる。

以下、次を仮定する。

(H1) $H \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$.

(H2) 各 $x \in \bar{\Omega}$ に対して、関数 $p \mapsto H(x, p)$ は狭義凸関数である。

(H3) 第 1 変数に対して一様に、第 2 変数に関して強圧的である。すなわち、

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \{H(x, p) \mid x \in \bar{\Omega}, p \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, r)\} = \infty$$

が成り立つ。

(u₀) $u_0 \in C(\bar{\Omega})$.

(B) Ω は有界な Hölder 領域である。ここで Hölder 指数 α は、 $\alpha > 2/3$ を満たすものとする。

まず始めに次の比較定理を述べる。

定理 3. $T > 0$ に対して、 $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])$, $v \in \text{LSC}(\bar{\Omega} \times [0, T])$ はそれぞれ

$$u_t + H(x, Du) \leq 0 \text{ in } \Omega \times (0, T), \quad v_t + H(x, Dv) \geq 0 \text{ on } \bar{\Omega} \times (0, T),$$

を粘性解の意味で満たすとする。このとき、 $u \leq v$ on $\bar{\Omega} \times \{0\}$ ならば、 $u \leq v$ on $\bar{\Omega} \times [0, T]$ である。

これより, 問題 (C) の解の一意性が分かる. 上記の比較定理については, 文献 [21], Theorem 2.2 に, Lipschitz 領域における結果がある. ここでは, Hölder 指数が $2/3$ より真に大きい Hölder 領域を扱っているため, 文献 [21] の結果より少し一般的である. これは H の強圧性 (H3) によるものである.

次に, 状態拘束条件の下での加法的固有値問題

$$(S)_a \quad \begin{cases} H(x, Du(x)) \leq a & \text{in } \Omega, \\ H(x, Du(x)) \geq a & \text{on } \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (8)$$

について考える.

定数 c_H を

$$c_H := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid H(x, Du(x)) \leq a \text{ は解をもつ}\} \quad (10)$$

と定義する.

定理 4. 問題 $(S)_a$ は, a が c_H に等しい時のみ解 $v \in C(\bar{\Omega})$ を持つ.

注意 2. $H_c = H - c_H$, $L_c = L + c_H$ と考えることで, H_c の加法的固有値は 0 となる. これより H, L の代わりに, H_c, L_c を考えることで, $c_H = 0$ としてよい. 以下では $c_H = 0$ と仮定する.

次に, 関数 $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$u(x, t) := \inf\left\{\int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + u_0(\gamma(0)) \mid \gamma \in \mathcal{C}(x; t)\right\}, \quad (11)$$

と定義する. ここで, 任意の $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ に対して,

$$L(x, \xi) := \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{\xi \cdot q - H(x, q)\},$$

$\mathcal{C}(x; t) := \{\gamma \in AC([0, t]) \mid \text{任意の } s \in [0, t] \text{ に対して } \gamma(s) \in \bar{\Omega} \text{ かつ } \gamma(t) = x\}$ と置いている.

定理 5. u は $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$ 上連続で, (C) の解である.

最後に, u の時間無限大における収束について考える. 次の二つの補題を用意する.

補題 6. 任意の $x \in \bar{\Omega}$, $(S)_0$ の解 $\phi \in C(\bar{\Omega})$ に対し, ある $\gamma \in C((-\infty, 0], \bar{\Omega})$ が存在し, $\gamma(0) = x$ かつ, 任意の $[a, b] \subset (-\infty, 0]$ に対して,

$$\gamma \in AC([a, b], \bar{\Omega}) \text{ かつ } \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)) \quad (12)$$

を満たす.

(12) を満たす曲線を極値曲線と呼ぶ.

補題 7. ある定数 $\delta \in (0, 1)$, 関数 $\omega \in C([0, \infty))$ (非減少かつ $\omega(0) = 0$) が存在し, 任意の $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $(S)_0$ の解 ϕ , 極値曲線 γ , $t > \tau \geq 0$, $\frac{\tau}{t-\tau} \leq \delta$ に対して,

$$u(\gamma(0), t) - u(\gamma(-t), \tau) \leq \phi(\gamma(0)) - \phi(\gamma(-t)) + \frac{\tau t}{t-\tau} \omega\left(\frac{\tau}{t-\tau}\right).$$

が成り立つ.

これらの補題は文献 [11, Theorem 6.1, Proposition 7.1] の結果を境界がある場合に書き直したものである. 以上の準備より, 次の解の収束に関する主結果を得る.

定理 8. 任意の初期値 u_0 に対して, (C) の解を $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ とすると, ある漸近解 $(v, c) \in C(\Omega) \times \mathbb{R}$ が存在し, $t \rightarrow \infty$ とした時に, $\bar{\Omega}$ 上一様に,

$$u(x, t) + ct - v(x) \rightarrow 0$$

が成立する.

REFERENCES

1. G. Barles, *Asymptotic behavior of viscosity solutions of first Hamilton Jacobi equations*, Ricerche Mat. 34 (1985), no. 2, 227–260.
2. G. Barles and P. E. Souganidis, *On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Math. Anal. 31 (2000), no. 4, 925–939.
3. G. Barles and P. E. Souganidis, *Some counterexamples on the asymptotic behavior of the solutions of Hamilton-Jacobi equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330 (2000), no. 11, 963–968.
4. M. G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, *User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 (1992), no. 1, 1–67.
5. A. Davini and A. Siconolfi, *A generalized dynamical approach to the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Math. Anal, 2006.
6. A. Fathi, *Sur la convergence du semi-groupe de Lax-Oleinik*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 327 (1998), no. 3, 267–270.
7. A. Fathi, *Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics*, book to appear, Cambridge University Press, Cambridge (2004).
8. Y. Fujita, work in progress.
9. Y. Fujita, H. Ishii and P. Loreti, *Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean n space*, Indiana Univ. Math. J., 55 (2006), no. 5, 1671–1700.
10. A. Fathi and A. Siconolfi, *PDE aspects of Aubry-Mather theory for quasiconvex Hamiltonians*, Calc. Var. Partial Differential Equations 22 (2005), no. 2, 185–228.
11. H. Ishii, *Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean n space*, preprint.
12. N. Ichihara and H. Ishii, *Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations with semi-periodic Hamiltonians*, preprint.
13. H. Ishii and H. Mitake, *Representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations*, preprint.
14. S. Koike, *A beginner’s guide to the theory of viscosity solutions*, MSJ Memoirs. Tokyo, Math. Soc. Japan, 2004.
15. P.-L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research Notes in Mathematics, Vol. 69, Pitman, Boston, Masso. London, 1982.
16. P.-L. Lions, G. Papanicolaou and S. Varadhan, *Homogenization of Hamilton-Jacobi equations*, unpublished preprint (1987).
17. H. Mitake, *Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations with state constraints*, preprint.
18. G. Namah and J.-M. Roquejoffre, *Remarks on the long time behaviour of the solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Comm. Partial Differential Equations 24 (1999), no. 5-6, 883–893.
19. J.-M. Roquejoffre, *Comportement asymptotique des solutions d’équations de Hamilton-Jacobi monodimensionnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 326 (1998), no. 2, 185–189.
20. J.-M. Roquejoffre, *Convergence to steady states or periodic solutions in a class of Hamilton-Jacobi equations*, J. Math. Pures Appl. (9) 80 (2001), no. 1, 85–104.
21. H. M. Soner, *Optimal control with state-space constraint*, I. SIAM J. Control Optim. 24 (1986), no. 3, 552–561.

The characterizations of weighted function spaces by wavelets and scaling functions

出来 光夫 (北海道大学大学院理学研究科)

概要

We explain the basic theory of wavelets associated with a multiresolution analysis and some classes of weights. We also state some interesting results on the characterizations of weighted function spaces by means of wavelets and scaling functions with suitable properties.

本講演全体を通して、 s は正の整数、指数 p の範囲は $1 < p < \infty$ 、 p' は p の共役指数、すなわち、 p' は $1/p + 1/p' = 1$ を満たすものとする。また、本講演では簡単の為に \mathbb{R} 上の 1 変数の函数の場合について述べるが、 \mathbb{R}^n 上の多変数の場合についても同様の結果が成立する事に注意しておく。

1 Wavelet と scaling function

Definition 1.1 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、 $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^jx - k)$ ($j, k \in \mathbb{Z}$) と定める。 $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ における正規直交基底を成す時、 $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ を *wavelet* 基底、 ψ を *wavelet* と云う。

Definition 1.2 $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間族 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ が *MRA (multiresolution analysis, 多重解像度解析)* であるとは、以下の 6 条件を満たす事を云う;

- (a) 任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して、 $V_j \subset V_{j+1}$.
- (b) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ は $L^2(\mathbb{R})$ において稠密である。
- (c) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
- (d) 任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して、 $f \in V_j$ と $f(2^{-j}x) \in V_0$ は同値である。
- (e) $f \in V_0$ と、任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $f(x - k) \in V_0$ が成り立つことは同値である。
- (f) $\varphi \in V_0$ で、 $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が V_0 における正規直交基底を成すものが存在する。 φ を $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ の *scaling function* と云う。

Scaling function φ を持つ MRA $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ が与えられた時, 函数 ψ を

$$\psi(x) := \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \langle \varphi(\cdot - l), \varphi(\cdot/2) \rangle \varphi(2x + l + 1) \quad (1)$$

によって定める. ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は L^2 -内積を表す. この時 ψ は wavelet であり, 更に各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して, $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は W_j の正規直交基底を成す. 但し, W_j は V_{j+1} における V_j の直交補空間である ([4, 9, 11]). すなわち, wavelet 基底 $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ および, 任意に固定した $m \in \mathbb{Z}$ に対して, 函数列 $\{\varphi_{m,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j,k} : j \geq m, k \in \mathbb{Z}\}$ は, ともに $L^2(\mathbb{R})$ における正規直交基底を成す. また, scaling function φ が適当な減少度や滑らかさ, 台のコンパクト性などの性質を持つ時, (1) で与えられる wavelet ψ も同様の性質を持つ函数となる事も注意しておきたい.

ここで, 代表的な scaling function と wavelet を 2 例挙げておく.

Example 1.3

(a) Meyer は, Schwartz class $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属する scaling function φ を構成した. この時, (1) で与えられる wavelet ψ も $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属する函数となる. この φ を Meyer scaling function, そして ψ を Meyer wavelet と呼ぶ ([9, 11]).

(b) 各整数 $N \geq 2$ に対して, Daubechies は scaling function φ で, $\varphi \in C^{r(N)}(\mathbb{R})$ かつ $\text{supp } \varphi = [0, 2N - 1]$ を満たすものを構成した. 今, 函数 ψ を

$$\begin{aligned} \psi(x) &:= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \langle \varphi(\cdot - l), \varphi(\cdot/2) \rangle \varphi(2(x - N) + l + 1) \\ &= \sum_{l=0}^{2N-1} (-1)^l \langle \varphi(\cdot - l), \varphi(\cdot/2) \rangle \varphi(2x - 2N + l + 1) \end{aligned}$$

で定める. ここで, $r(N) > 0$ は $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} r(N) = 1 - \log 3 \cdot (2 \log 2)^{-1} \simeq 0.2075$ を満たす値である. この時 ψ は wavelet であり, $\psi \in C^{r(N)}(\mathbb{R})$ かつ $\text{supp } \psi = [0, 2N - 1]$ を満たす. この φ を Daubechies scaling function, そして ψ を Daubechies wavelet と呼ぶ ([3]).

2 A_p weight と A_p^{loc} weight

Definition 2.1 $w > 0$ a.e. かつ $w^{-1/(p-1)} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ を満たす函数 $w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ を考える.

(a) Weight のクラス A_p を次を満たす w 全体で定める;

$$A_p(w) := \sup_{I: \text{interval}} \frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < \infty.$$

ここで、 $|I|$ は I の *Lebesgue* 測度を表す。各 $w \in A_p$ を A_p weight と呼ぶ。
 (b) *Weight* のクラス A_p^{loc} を次を満たす w 全体で定める;

$$A_p^{\text{loc}}(w) := \sup_{\substack{|I| \leq 1, \\ I: \text{interval}}} \frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < \infty.$$

各 $w \in A_p^{\text{loc}}$ を A_p^{loc} weight と呼ぶ。

3 The characterizations of $L^{p,s}(w)$

Definition 3.1 $w > 0$ a.e. である $w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ に対して、重み付き L^p 空間 $L^p(w) := L^p(\mathbb{R}, w(x)dx)$ を、可測関数 f で、 $\|f\|_{L^p(w)} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} < \infty$ を満たすもの全体によって定義する。

Definition 3.2 $w > 0$ a.e. かつ $w^{-1/(p-1)} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ を満たす $w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ に対して、重み付き *Sobolev* 空間 $L^{p,s}(w) := L^{p,s}(\mathbb{R}, w(x)dx)$ を、可測関数 f で、 $L^p(w)$ に属し、かつ任意の $1 \leq \alpha \leq s$ に対して弱微分 $D^\alpha f$ も $L^p(w)$ に属するもの全体によって定義する。

$L^{p,s}(w)$ は、ノルム $\|f\|_{L^{p,s}(w)} := \|f\|_{L^p(w)} + \sum_{\alpha=1}^s \|D^\alpha f\|_{L^p(w)}$ に関して、Banach 空間となる。

主結果の紹介の為に、以下の記号を準備しておく。 $j, k \in \mathbb{Z}$ に対して、dyadic interval を $I_{j,k} := [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ で定める。また、可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ の特性関数を χ_E で表し、 $\chi_{j,k} := 2^{j/2} \chi_{I_{j,k}}$ と定める。更に、次のような関数のクラスを定義しておく。

Definition 3.3 $r \in \mathbb{N}$ に対して、関数 f が r -regular であるとは、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して定数 $0 < C_m < \infty$ が存在して、全ての $x \in \mathbb{R}$ と $1 \leq \alpha \leq r$ に対して、 $|f(x)|, |D^\alpha f(x)| \leq C_m(1 + |x|)^{-m}$ を満たす事を云う。

ここで、 $L^p(w)$ の特徴付けに関するこれまでの研究に関して少し触れておきたい。Lemarié-Rieusset は、 $w \in A_p$ の場合に Calderón-Zygmund 作用素の $L^p(w)$ 上における有界性を用いて、Daubechies wavelet による $L^p(w)$ の特徴付けを与えた ([8])。その後、同様の方法による特徴付けが、1-regular である wavelet を用いて得られる事が Aimar, Bernardis および Martín-Reyes 達によって示された ([1])。一方、 $w \in A_p^{\text{loc}}$ の場合の $L^p(w)$ の特徴付けについても Lemarié-Rieusset によって Daubechies wavelet を用いた研究がされている。この場合、Daubechies wavelet だけではなく、その構成の素

である **Daubechies scaling function** も用いる事によって特徴付けが得られる事が証明されている ([8]).

以下で紹介するのは、これら $L^p(w)$ の特徴付けに関する結果を、**weight** のクラスが A_p と A_p^{loc} の各場合について、それぞれ $L^{p,s}(w)$ へ一般化した結果である ([6]).

Theorem 3.4 $w \in A_p$, ψ をある **MRA** に基づいて構成された $(s+1)$ -regular な **wavelet** とする. この時, $p, A_p(w), s$ および ψ のみに依存にした定数 $0 < c \leq C < \infty$ が存在して, 任意の $f \in L^{p,s}(w)$ に対して, 次が成立:

$$c\|f\|_{L^{p,s}(w)} \leq \left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+2^{2js}) |\langle f, \psi_{j,k} \rangle \chi_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^{p,s}(w)}.$$

Theorem 3.5 $w \in A_p^{\text{loc}}$, φ を $C^{s+1}(\mathbb{R})$ に属する **Daubechies scaling function**, そして ψ を φ から構成される **Daubechies wavelet** とする. この時, $p, A_p^{\text{loc}}(w), s$ および φ のみに依存した定数 $c, C, c', C' > 0$ が存在して, 任意の $f \in L^{p,s}(w)$ に対して, 次が成立:

$$\begin{aligned} c\|f\|_{L^{p,s}(w)} &\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \varphi_{0,k} \rangle \|\varphi_{0,k}\|_{L^p(w)}|^p \right)^{1/p} \\ &\quad + \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |2^{js} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \chi_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \\ &\leq C\|f\|_{L^{p,s}(w)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c'\|f\|_{L^{p,s}(w)} &\leq \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \varphi_{0,k} \rangle \varphi_{0,k}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \\ &\quad + \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |2^{js} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \chi_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \\ &\leq C'\|f\|_{L^{p,s}(w)}. \end{aligned}$$

これらのような函数空間の特徴付けに関する結果から, **wavelet** (および **scaling function**) によって, その函数空間における無条件基底を構成する事ができる ([1, 8]). 更なる応用として, その無条件基底を正規化する事により, **greedy** 基底 ([7]) と呼ばれる優れた性質を持った基底が得られる ([2, 5, 6]).

参考文献

- [1] H. A. Aimar, A. L. Bernardis and F. J. Martín-Reyes, *Multiresolution approximations and wavelet bases of weighted L^p spaces*, J. Fourier Anal. Appl. **9** (2003), 497-510.
- [2] A. Cohen, R. A. DeVore, and R. Hochmuth, *Restricted nonlinear approximation*, Constr. Approx. **16** (2000), 85-113.
- [3] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 909-996.
- [4] E. Hernández and G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, Boca Raton, FL., 1996.
- [5] M. Izuki, *The Haar wavelets and the Haar scaling function in weighted L^p spaces with $A_p^{\text{dy},m}$ weights*, to appear in Hokkaido Math J..
- [6] M. Izuki, *The characterizations of weighted Sobolev spaces by wavelets and scaling functions*, preprint.
- [7] S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, *A remark on greedy approximation in Banach spaces*, East. J. Approx. **5** (1999), 365-379.
- [8] P. G. Lemarié-Rieusset, *Ondelettes et poids de Muckenhoupt*, Studia Math. **108** (1994), 127-147.
- [9] Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [10] V. S. Rychkov, *Littlewood-Paley theory and function spaces with A_p^{loc} weights*, Math. Nachr. **224** (2001), 145-180.
- [11] P. Wojtaszczyk, *A Mathematical Introduction to Wavelets*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

M -matrices of the ternary Golay code and the Mathieu group M_{12}

君塚 磨

日本大学大学院理工学研究科数学専攻

1. はじめに

26個存在する散在型単純群の1つである Mathieu 群 M_{12} は, Ternary Golay code \mathcal{C}_{12} の自己同型群の剰余群 $\text{Aut}(\mathcal{C}_{12})/\langle -1 \rangle$ と同型であることは一般的に知られている. 本稿では, Ternary Golay code \mathcal{C}_{12} 上に M -行列 (Binary Golay code の場合は近藤 武 [10] を参照) なるものを定義し, それを用いて M_{12} の基本的性質を解説すると共に, Mathieu 群 M_{12}, M_{11} を生成する位数3の元を与えることを目的とする. なお, 本研究は佐々木隆二氏 (日本大学) との共同研究である.

2. 準備

集合 $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ とし, Ω により生成される \mathbb{F}_3 上のベクトル空間 V を次のように定義する:

$$V = \sum_{i=1}^{12} \mathbb{F}_3 \omega_i.$$

V の任意の元 $v = \sum_i a_i \omega_i$ に対して, $\text{supp}(v) := \{\omega_i \in \Omega \mid a_i \neq 0\}$ と定義し, v の **support** 呼ぶ. また $\text{wt}(v) := |\text{supp}(v)|$ と定義し, v の **weight** 呼ぶ.

ベクトル空間 V の d 次元部分空間 C が次の条件を満たすとき, C は **ternary** $[12, d, w]$ **code** という:

$$w = \min\{\text{wt}(v) \mid v \in C - \{0\}\}.$$

w を C の **minimum weight** と呼ぶ.

ベクトル空間 V に内積 \cdot を以下のように定義する:

$$v \cdot u := \sum_{i=1}^{12} a_i b_i, \quad (v = \sum_i a_i \omega_i, u = \sum_i b_i \omega_i \in V).$$

ternary code C に対し, $C^\perp = \{u \in V \mid u \cdot v = 0 \ (\forall v \in C)\}$ と定義し, $C = C^\perp$ を満たすとき C は **self-dual** であるという.

$\text{Mon}(12, \mathbb{F}_3)$ を単項行列 (すなわち各行各列の 0 でない \mathbb{F}_3 の成分が 1 つある行列) 全体の集合とする. ベクトル空間 V 上の ternary code C, D について, 次の条件を満たすとき C と D は同型であるという:

$$C^m = D, \quad (\exists m \in \text{Mon}(12, \mathbb{F}_3)).$$

ベクトル空間 V 上の任意の ternary code C に対し, C の自己同型群を以下のように定義する:

$$\text{Aut}(C) = \{m \in \text{Mon}(12, \mathbb{F}_3) \mid C^m = C\}.$$

3. Ternary Golay code, Mathieu 群, M -行列について

C を ternary $[12, 6, 6]$ code とする. このとき C の weight 6 の元 v の support を hexad と呼ぶ.

補題 1 C を ternary $[12, 6, 6]$ code とする. このとき以下のことが成立する.

1. C は 264 個の weight 6 の元を持つ.
2. u, v を C の weight 6 の元とする. このとき $\text{supp}(u) = \text{supp}(v)$ ならば $u = \pm v$ である. 特に C の hexad の個数は 132 個である.
3. \mathcal{B} を C の hexad を全て集めた集合とする. このとき (Ω, \mathcal{B}) は Steiner system $S(12, 6, 5)$ になる.

Remark Ω の任意の 5 点集合 $T := \{t_1, t_2, \dots, t_5\}$ に対して, T を含む \mathcal{B} の元 B が一意的に存在するとき, 集合の組 (Ω, \mathcal{B}) を Steiner system $S(12, 6, 5)$ という.

写像 $\phi: \mathbb{F}_3 \times \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{12}\}$ を全単射とする. 任意の $(c, i) \in \mathbb{F}_3 \times \{1, 2, 3, 4\}$ に対して, $m(c, i)$ を V の 1 次元部分空間 $\mathbb{F}_3\phi(c, i)$ に含まれる 0 でないベクトルとする. このとき 3×4 行列

$$M = (m(c, i)) = \begin{pmatrix} m(0, 1) & m(0, 2) & m(0, 3) & m(0, 4) \\ m(1, 1) & m(1, 2) & m(1, 3) & m(1, 4) \\ m(-1, 1) & m(-1, 2) & m(-1, 3) & m(-1, 4) \end{pmatrix}$$

に対して, 以下の 6 個のベクトルが C に含まれるとき, 行列 M を C の M -行列という.

$$(1) \quad A_{i-1} = \begin{pmatrix} m(0, 1) & -m(0, i) \\ m(1, 1) & -m(1, i) \\ m(-1, 1) & -m(-1, i) \end{pmatrix}, \quad 2 \leq i \leq 4,$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= \begin{pmatrix} -m(0,1) & m(0,2) & m(0,3) & m(0,4) \\ m(1,1) & & & \\ m(-1,1) & & & \end{pmatrix}, \\
A_5 &= \begin{pmatrix} m(0,1) & m(0,2) & & \\ -m(1,1) & & m(1,3) & \\ m(-1,1) & & & m(-1,4) \end{pmatrix}, \\
A_6 &= \begin{pmatrix} m(0,1) & & m(0,3) & \\ -m(1,1) & & & m(1,4) \\ m(-1,1) & m(-1,2) & & \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Remark V に含まれる6個のベクトル A_i は \mathbb{F}_3 上一次独立であることが直ちにわかる. したがって A_i ($1 \leq i \leq 6$) は ternary $[12, 6, 6]$ code C の基底である. さらに $A_i \cdot A_j = 0$ ($1 \leq i, j \leq 6$) をみたしているので, C は self-dual であることもわかる.

主定理 C を V 上の任意の ternary $[12, 6, 6]$ code とし, $X := \{-x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, z_1\}$ を weight 6 である C に任意の元とする. このとき以下をみたす M -行列が一意的に存在する:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & & & \\ z_1 & & & \end{pmatrix}.$$

系 2 C, D を V 上の任意の ternary $[12, 6, 6]$ code とする. このとき C と D は同型である.

Remark ternary $[12, 6, 6]$ code は系 2 により一意的であり, 一般に **ternary Golay code** と呼ばれる. 本稿では以下 ternary Golay code を \mathcal{C}_{12} で表すことにする.

\mathcal{C}_{12} の自己同型群 $\text{Aut}(\mathcal{C}_{12})$ は Ω 上に作用するので, 以下の準同型写像を得ることができる:

$$f : \text{Aut}(\mathcal{C}_{12}) \longrightarrow \text{Sym}(\Omega) \simeq S_{12}.$$

補題 3 準同型写像 f の核は $\langle -1 \rangle$ である. ここで -1 は $\mathcal{C}_{12} \ni x \mapsto -x \in \mathcal{C}_{12}$ で定義される $\text{Aut}(\mathcal{C}_{12})$ に含まれる位数 2 の元である.

定理 4 $\mathcal{S} := \{(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) : 5 \text{点順列} \mid a_i \in \Omega\}$ とする. このとき剰余群 $\text{Aut}(\mathcal{C}_{12}) / \langle -1 \rangle$ は \mathcal{S} に正則に作用する. 特に $|\text{Aut}(C) / \langle -1 \rangle| = |\mathcal{S}| = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ である.

Remark 剰余群 $\text{Aut}(C)/\langle -1 \rangle$ を **Mathieu 群** M_{12} といひ M_{12} で表す. 補題 3 により M_{12} は Ω 上の置換群である. Ω の元 i を固定し, M_{12} の安定部分群 $M_{11} := \{g \in M_{12} \mid i^g = i\}$ と定義する. このとき定理 4 により, i のとり方によらず M_{11} の構造は定まる. M_{11} を **Mathieu 群** M_{11} といひ M_{11} で表す.

4. Mathieu 群 M_{12} の位数 3 の元について

$I = (m(c, i))$ を C_{12} の M -行列とする.

$$(m(c, i)) = \begin{pmatrix} \infty & -8 & 0 & -1 \\ 7 & -X & 3 & -9 \\ 6 & -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad (X = 10).$$

このとき以下の 3 つの行列も M -行列になることが確認できる:

$$J = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 & -1 \\ 5 & 8 & -X & -9 \\ \infty & 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 5 & -3 & X & -1 \\ 6 & -0 & 8 & -9 \\ 7 & -2 & 4 & -\infty \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 6 & X & -8 & -1 \\ \infty & 3 & -0 & -9 \\ 5 & 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

4 つの M -行列の第 1 列目と符号を取り除くと, 以下の 4 つの 3×3 のボードを得ることができる:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 0 & 1 \\ \hline X & 3 & 9 \\ \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 3 & 1 \\ \hline 8 & X & 9 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & X & 1 \\ \hline 0 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 4 & \infty \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline X & 8 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 9 \\ \hline 2 & 4 & 7 \\ \hline \end{array}.$$

これら 4 つのボードは, N.Chigira [1] で与えられたボードに対応している. N.Chigira [1](cf.Th.1) では, この 4 つのボードを用いて, M_{12}, M_{11} を生成する S_{12} の位数 2 の元をエレガントに与えている.

補題 5 C_{12} の任意の M -行列に対して, $\text{Aut}(C_{12})$ に以下の位数 3 の元が含まれる:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \rightarrow & \rightarrow \\ \hline \bullet & \rightarrow & \rightarrow \\ \hline \bullet & \rightarrow & \rightarrow \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \downarrow & \downarrow \\ \hline \bullet & \downarrow & \downarrow \\ \hline \bullet & \downarrow & \downarrow \\ \hline \end{array}.$$

C_{12} の M -行列 I に対する補題 5 の元を i_1, i_2 とおく:

$$i_1 = (8 \ 0 \ 1)(X \ 3 \ 9)(2 \ 4 \ 5)(6)(\infty)(7), \quad i_2 = (8 \ X \ 2)(0 \ 3 \ 4)(1 \ 9 \ 5)(6)(\infty)(7).$$

このとき $I_3 = \{i_1, i_2\}$ と定義する. M -行列 J, K, L を用いて, 同様に J_3, K_3, L_3 を定義する.

以下の定理は, N.Chigira [1] で与えられた定理 1 を, 補題 5 で与えた位数 3 で行っても成立することを主張している.

定理 6

- (1) $\langle I_3, J_3 \rangle \simeq \langle I_3, K_3 \rangle \simeq \langle I_3, L_3 \rangle \simeq \langle J_3, K_3 \rangle \simeq \langle J_3, L_3 \rangle \simeq \langle K_3, L_3 \rangle \simeq L_2(9) \simeq A_6$.
- (2) $\langle I_3, J_3, K_3 \rangle \simeq \langle I_3, J_3, L_3 \rangle \simeq \langle I_3, K_3, L_3 \rangle \simeq \langle J_3, K_3, L_3 \rangle \simeq M_{11}$.
- (3) $\langle I_3, J_3, K_3, L_3 \rangle \simeq M_{12}$.

References

- [1] N. Chigira, On Involutions Which Generate Mathieu Groups M_{11} and M_{12} , *Comm. Alg.* **32** (2004), 3179–3188.
- [2] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, 1988.
- [3] R.T. Curtis, A new combinatorial approach to M_{24} , *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **79**, 1976.
- [4] R.T. Curtis, The Steiner system $S(5, 6, 12)$, the Mathieu group M_{12} and the "kitten", *Computational Group Theory*, Ac. Press, NY, 1984, 352–358.
- [5] R.T. Curtis, Geometric interpretations of the 'natural' generators of the Mathieu groups, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* (1990) 107, 19–26.
- [6] R.L. Griess, *Twelve Sporadic Groups*, Springer-Verlag, 1998.
- [7] M. Kimizuka and R. Sasaki, Involutions of the Mathieu group M_{24} , to appear in *Hokkaido Math. J.*
- [8] M. Kimizuka and R. Sasaki, M -matrices of the ternary Golay code and the Mathieu group M_{12} , submitted.
- [9] M. Kimizuka, R. Sasaki and T. Satoh, Order three elements which generate the Mathieu groups (in Japanese), *J. Res. Inst. Sci. Technol. Nihon Univ. No.* 108 (2006), 9–13.
- [10] 近藤 武, Mathieu 群と Conway 群, 講義録, 1996.
- [11] R. Sasaki, Codes with standard decomposition, preprint.
- [12] M. Sawabe, A combinatorial approach to the conjugacy classes of the Mathieu simple groups, M_{24}, M_{23}, M_{22} , *J. Math. Soc. Japan* **51** (1999), 661–678.

CROSSCAP NUMBERS OF KNOTS AND LINKS

GENGYU ZHANG

ABSTRACT. The crosscap number of a knot (or a link) is defined to be the minimum first Betti number of non-orientable surfaces bounding the knot (or the link). We will review the known work on crosscap numbers of knots and links. Then we define the concordance crosscap number of a knot as the minimum crosscap number among all the knots concordant to the knot, and study the gap between the concordance crosscap number and 4-dimensional one of a knot.

1. INTRODUCTION

We work in the smooth category. An (*unoriented*) link L of m components ($m \geq 1$) is a union of m pairwise disjoint, simple closed curves in the oriented 3-sphere S^3 . If each component L_i of a link L is assigned a direction going along the circle, the link L is oriented and called an oriented link. By a *knot* we mean a link of one component. A link bounds various surfaces in S^3 or the 4-ball B^4 with $\partial B^4 = S^3$.

The *genus* of a connected, orientable surface is an integer representing the maximum number of cuttings along closed simple curves without rendering the resultant manifold disconnected. It is equal to the number of handles on the surface. The genus of a knot K is defined as the minimal genus of all orientable surfaces for K . It has been shown that the genus of a knot is related to the *degree of the Alexander polynomial*. Namely, the degree of the Alexander polynomial for any knot K is bounded by the twice of the genus of the knot. The genera of many families of links have been already decided. For example, the genera of alternating links and arborescent links were decided by Gabai [3, 4] by using geometric techniques. The evaluation of the genera of 11 crossing knots was done by Rasmussen, using a computer assisted computations of the Ozsváth-Szabó knot Floer homology [12].

Correspondingly the (*non-orientable*) *genus*, the *crosscap number*, of a connected, non-orientable closed surface is a positive integer representing the number of crosscaps attached to a sphere. The crosscap number for a knot was defined by Clark [1] in 1978, and followed by the first concrete calculation for the knot 7_4 by Murakami and Yasuhara [10] in 1995. The crosscap numbers of torus knots are determined by Teragaito [14] in 2004. In 2005 that follows, Hirasawa and Teragaito [7] present an algorithm to determine the crosscap numbers for all the 2-bridge knots and show a table for crosscap numbers of 2-bridge knots up to 12 crossings. In 2006 Ichihara and Mizushima [8] determine the crosscap numbers of pretzel knots. The concept of crosscap number defined for a knot is generalized by the author in her master thesis. Some results on the crosscap numbers of two-component links can also be found in [16].

This draft was written for the 3rd COE Conference for Young Researchers held in Hokkaido University 13th–16th February, 2007. The author is a Research Fellow of Japan Society for the Promotion of Science.

2. PRELIMINARIES

Let L be an oriented link embedded in S^3 . A *Seifert surface* for an oriented link L in the 3-sphere S^3 is a connected, orientable, compact 2-manifold F in S^3 with the boundary the link L . The *genus* of a link L , denoted by $g(L)$, is the least genus of all its Seifert surfaces. Associated to the Seifert surface F for L is the *Seifert pairing* $f : H_1(F; \mathbf{Z}) \times H_1(F; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$ defined by $f(x, y) = \text{lk}(x, y^+)$, where $x, y \in H_1(F; \mathbf{Z})$ and y^+ is the cycle carried by $y \times 1$ in the bicollar $F \times [0, 1]$.

For an oriented knot, we can choose a basis e_1, e_2, \dots , and e_{2g} for $H_1(F; \mathbf{Z})$ as a \mathbf{Z} -module. Then define the associated *Seifert matrix* $V = (v_{i,j})$ to be the $2g$ by $2g$ integral matrix with entries $v_{i,j} = \text{lk}(e_i, e_j^+)$. For a genus g Seifert surface bounding a 2-component link, the associated Seifert matrix should be a $(2g + 1) \times (2g + 1)$ integral matrix with entries defined similarly.

For an oriented link in S^3 with Seifert matrix V , define the *signature* of L to be $\sigma(L) = \sigma(V + V^T)$ where $\sigma(M)$ is the difference between the number of the positive eigenvalues and that of the negative eigenvalues of a symmetric matrix M . Note that the signature of a link is independent of the choice of Seifert matrix but up to the relative orientation for each component.

For an unoriented (orientable or non-orientable) surface F bounding a link L , let $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ be a generator system for $H_1(F; \mathbf{Z})$. Then the (i, j) -entry of the Goeritz matrix $G_F(L)$ is defined as $\text{lk}(\alpha_i, \tau\alpha_j)$, where $\tau\alpha_j$ is the orientation double cover of α_j . Then for an orientable Seifert surface with Seifert matrix V , the relation between the Goeritz matrix G for this surface and V is that $G = V + V^T$. Gordon and Litherland [6] has shown how to define a quadratic form related with Goeritz matrix by using any spanning surface, and related the signature of this form to the signature of a link as follows.

Lemma 2.1 ([6]). *Let F be any surface bounding the knot K . Then the signature $\sigma(K)$ can be calculated out of the Goeritz matrix G_F and the normal Euler number $e(F)$. Namely we have*

$$\sigma(K) = \sigma(G_F) + \frac{1}{2}e(F),$$

where $e(F) := -\text{lk}(K, K')$. Here $K' := \partial N(K) \cap F$ and $N(K)$ denotes the regular neighborhood of the knot K .

3. KNOWN RESULTS ON CROSSCAP NUMBER OF A KNOT

The crosscap number was first introduced only for a knot by Clark in 1978, but it can be generalized to links. Let S be a connected, non-orientable surface which bounds a link L . In the case of bounding a knot, it is the boundary connected sum of some Möbius bands. Define $\gamma(S)$ to be the first Betti number of S .

Definition 3.1 ([1]). Let S be any non-orientable surface bounding L in S^3 . Define the *crosscap number* for the link L in the way as $\gamma(L) := \min \gamma(S)$.

A necessary and sufficient condition for the crosscap number 1 knots is known as follows.

Proposition 3.2 ([1]). *A knot K has crosscap number 1 if and only if it is a $(2, n)$ -cable knot.*

Here a (p, q) -cable knot (see for example [13]) about some knot K is a satellite knot which runs p times around the *meridian* of K , a non-separating simple closed curve in

$\partial N(K)$ that bounds a disk in $N(K)$, and at the same time runs q times around the *longitude* of K , a simple closed curve in $\partial N(K)$ that is homologous to K in $N(K)$ and null-homologous in the knot exterior $S^3 \setminus N(K)$.

Clark also proved the inequality $\gamma(K) \leq 2g(K) + 1$ and asked whether there exist some knots for which the equality holds. Until in 1995, Murakami and Yasuhara [10] brought forward the first example for which the above equality holds by showing that $\gamma(7_4) = 3$.

For the behavior of the crosscap number of a knot under the connected sum, Clark gives the following inequality:

Proposition 3.3 ([1]). *We have*

$$\gamma(K_1) + \gamma(K_2) - 1 \leq \gamma(K_1 \# K_2) \leq \gamma(K_1) + \gamma(K_2).$$

Murakami and Yasuhara [10] gives a necessary and sufficient condition for the equalities, which is stated as:

Proposition 3.4 ([10]). *Let K_1 and K_2 denote any two knots, then we have $\gamma(K_1 \# K_2) = \gamma(K_1) + \gamma(K_2)$ if and only if $\gamma(K_1) = \Gamma(K_1)$ and $\gamma(K_2) = \Gamma(K_2)$, where $\Gamma(K)$ denotes the minimum first Betti number of unoriented surfaces, including orientable and non-orientable ones, bounding the knot K .*

In general, it is hard to determine the crosscap number for a knot. However, Teragaito [14] had the solution for the class of torus knots in 2003. The main theorem in [14] is stated as follows:

Theorem 3.5 ([14]). *Let K be the torus knot $T(p, q)$ ($p, q > 0$). Then $\gamma(K) = N(p, q)$ if pq is even, and $\gamma(K) = N(pq - 1, p^2)$ if pq is odd. Here $N(p, q)$ is the minimum genus of closed, connected, non-orientable surfaces contained in the lens space $L(p, q)$.*

According to [14], the crosscap numbers of torus knots are additive under connected sum, namely, we have

$$\gamma(K_1 \# K_2 \# \cdots \# K_n) = \gamma(K_1) + \gamma(K_2) + \cdots + \gamma(K_n),$$

where K_i ($i = 1, 2, \dots, n$) is a torus knot.

In April 2005, Hirasawa and Teragaito [7] present an algorithm to determine the crosscap numbers for all the 2-bridge knots. Here a two-bridge knot $S(p, q)$ is presented by a pair of coprime integers (p, q) . Given a fraction p/q , consider a continued fraction expansion, $p/q = r + [b_1, b_2, \dots, b_n]$, of it. Namely, $p/q = r + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_n}}}}$. In fact, an

algorithm to obtain a shortest continued fraction expansion is presented in [7], and the crosscap number of the 2-bridge knot $S(p, q)$ can be determined in terms of the length n of this shortest continued fraction expansion.

Theorem 3.6 ([7]). *Let K be a 2-bridge knot denoted by $S(p, q)$. If a shortest expansion of p/q contains an odd coefficient or ± 2 , then we have $\gamma(K) = n$. Otherwise, we have $\gamma(K) = n + 1$.*

Note that in [7] they give an infinite series of 2-bridge knots with $\gamma(K) = 2g(K) + 1$.

Let $K = P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ be a non-trivial pretzel knot. In order to make itself a knot, either of the following conditions must be satisfied:

- (a) one and only one among p_1, p_2, \dots, p_n is even and other are odd;

(b) n is odd and all of p_1, p_2, \dots, p_n are odd.

The result by Ichihara and Mizushima is as follows.

Theorem 3.7 ([8]). *Let $K = P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ be a non-trivial pretzel knot. When the condition (a) is satisfied we have $\gamma(K) = n - 1$, and otherwise when the condition (b) is satisfied we have $\gamma(K) = n$.*

4. CONCORDANCE CROSSCAP NUMBER OF A KNOT

Two knots K_0 and K_1 in S^3 are called *concordant* if they cobound an annulus in $S^3 \times [0, 1]$ with K_0 and K_1 in $S^3 \times \{0\}$ and $S^3 \times \{1\}$ respectively. Concordance is an equivalence relation and the set of the equivalence classes forms an abelian group, the so called *concordance group*. From this point of view, one can define the concordance genus $g_c(K)$ as the minimum genus in the concordance class of K . It is easy to see that $g^*(K) \leq g_c(K) \leq g(K)$ where $g^*(K)$, the 4-genus, is the least genus of orientable surfaces in B^4 bounding K . In response to the question asked by Gordon [5], Nakanishi explained the gap between $g^*(K)$ and $g_c(K)$ in [11]. The relations among these knot invariants are also investigated by Livingston in [9]. Here we define the *concordance crosscap number* from the viewpoint of concordance group.

Definition 4.1. The *concordance crosscap number* of a knot K , denoted by $\gamma_c(K)$, is the minimum crosscap number among all the knots in the same concordance class as K .

Remark 4.2. By convention, the crosscap number of the unknot is defined to be 0 for completeness. So if the knot K is a slice knot, we define $\gamma^*(K) = \gamma_c(K) = 0$, where $\gamma^*(K)$ denotes the 4-dimensional crosscap number, the least first Betti number of non-orientable surfaces in B^4 bounding K .

Clearly $\gamma^*(K) \leq \gamma_c(K) \leq \gamma(K)$, and the inequalities are known to be best possible due to the following proposition.

Proposition 4.3 ([15]). *Let K be a $(2, p)$ -cable knot with $p \neq \pm 1$. Then $\gamma^*(K) = \gamma_c(K) = \gamma(K) = 1$.*

Then we ask whether some knot exists such that all knots in its concordance class have crosscap numbers bigger than the 4-dimensional crosscap number of K , i.e. whether there exists a knot K with $\gamma^*(K) < \gamma_c(K)$. The following theorem gives the question a positive answer.

Theorem 4.4 ([15]). *There exist infinitely many knots with the 4-dimensional crosscap numbers smaller than the concordance crosscap numbers. Precisely speaking we have knots K satisfying $\gamma^*(K) = 1 < \gamma_c(K)$.*

In actuality we give the following necessary condition for pretzel knots of type $P(4 - p, p, 2n - p)$ and $P(-1 - p, p, 2n - p)$ to have concordant crosscap number 1 by calculating and comparing the signatures as in Lemma 2.1 and *knot determinants*, the values of Alexander polynomials at -1 , of those pretzel and $(2, p)$ -cable knots, because the product of determinants of two concordant knots form an odd square according to [2].

Theorem 4.5 ([15]). A. If $\gamma_c(P(4-p, p, 2n-p)) = 1$, there exists some odd number l such that the equalities

$$\begin{cases} p^2 - 8n = l^2 & \text{when } 8n - p^2 < 0, \\ 3(8n - p^2) = l^2 & \text{when } 8n - p^2 > 0 \end{cases}$$

hold;

B. If $\gamma_c(P(-1-p, p, 2n-p)) = 1$, there exists an odd number l such that $(2n+p^2)(2n+1) = l^2$ when $n > 0$.

One will see easily that this necessary condition does not always hold, which means infinitely many of them have concordance crosscap numbers bigger than 1. On the other hand we know that pretzel knots of these two types at least bound a Möbius band in B^4 so that a gap between the concordance and 4-dimensional crosscap number is detected.

REFERENCES

- [1] B. E. Clark, *Crosscaps and knots*, Internat. J. Math. Math. Sci. **1** (1978), no. 1, 113–123. MR 0478131 (57 #17620)
- [2] R. H. Fox and J. W. Milnor, *Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots*, Osaka J. Math. **3** (1966), 257–267. MR 0211392 (35 #2273)
- [3] D. Gabai, *Genera of the alternating links*, Duke Math. J. **53** (1986), no. 3, 677–681. MR 860665 (87m:57004)
- [4] ———, *Genera of the arborescent links*, Mem. Amer. Math. Soc. **59** (1986), no. 339, i–viii and 1–98. MR 823442 (87h:57010)
- [5] C. McA. Gordon, *Problems*, Knot theory (Proc. Sem., Plans-sur-Bex, 1977), Lecture Notes in Math., vol. 685, Springer, Berlin, 1978, pp. 309–311.
- [6] C. McA. Gordon and R. A. Litherland, *On the signature of a link*, Invent. Math. **47** (1978), no. 1, 53–69. MR 0500905 (58 #18407)
- [7] M. Hirasawa and M. Teragaito, *Crosscap numbers of 2-bridge knots*, Topology **45** (2006), no. 3, 513–530.
- [8] K. Ichihara and S. Mizushima, *Crosscap numbers of pretzel knots*, arXiv:math.GT/0608480.
- [9] C. Livingston, *The concordance genus of knots*, Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 1–22 (electronic). MR 2031909 (2005e:57023)
- [10] H. Murakami and A. Yasuhara, *Crosscap number of a knot*, Pacific J. Math. **171** (1995), no. 1, 261–273. MR 1362987 (96k:57006)
- [11] Y. Nakanishi, *A note on unknotting number*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **9** (1981), no. 1, 99–108. MR 634000 (83d:57005)
- [12] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Knot Floer homology, genus bounds, and mutation*, Topology Appl. **141** (2004), no. 1-3, 59–85. MR 2058681 (2005b:57028)
- [13] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series, vol. 7, Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1990. MR 95c:57018
- [14] M. Teragaito, *Crosscap numbers of torus knots*, Topology Appl. **138** (2004), no. 1-3, 219–238. MR 2035482 (2005a:57007)
- [15] G. Zhang, *Concordance Crosscap Number of a Knot*, arXiv:math.GT/0608421.
- [16] ———, *Crosscap Numbers of Two-component Links*, arXiv:math.GT/0608418. To appear in Kyungpook Mathematical Journal.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, TOKYO 152-8551, JAPAN
E-mail address: zhang@math.titech.ac.jp

Stability of standing waves for the Schrödinger-Poisson-Slater equation

菊池弘明 (京都大学大学院理学研究科)

次の Schrödinger 方程式の定在波解の安定性について考える:

$$iu_t + \Delta u - (|x|^{-1} * |u|^2)u + \gamma|u|^{p-1}u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3. \quad (\text{NLS})$$

ここで, $1 < p < 5, \gamma > 0$ とし, $*$ は合成積とする. この方程式は Schrödinger-Poisson-Slater 方程式と呼ばれる (以後 (NLS) と書く). (NLS) は Hartree-Fock 方程式を近似することにより得られ, 半導体中の電子の振る舞いを記述する物理モデルになっている (詳細については [2], [13] を参照されたい).

(NLS) の重要な性質として, 汎関数 E, Q を次のように定義すると, これらが保存量となっている.

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} (|x|^{-1} * |u|^2) |u|^2 dx - \frac{\gamma}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx,$$

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx.$$

ここで汎関数 E, Q が保存量であるとは, $u(t)$ を初期値 u_0 とする (NLS) の解とすると, $E(u(t)), Q(u(t))$ がそれぞれ時間に依存しない定数 $E(u_0), Q(u_0)$ になることである. 汎関数 E はエネルギー, 汎関数 Q は電荷とそれぞれ呼ばれる. そこで解 $u(t)$ の属する関数空間としては次の Sobolev 空間

$$H^1(\mathbb{R}^3) = \{v \mid \|v\|_{H^1} < \infty\}, \quad \|v\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \{|\nabla v|^2 + |v|^2\} dx$$

を考えるのが自然である. Sobolev の埋め込み定理から $2 \leq q \leq 6$ に対し, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|v\|_{L^q} \leq C \|v\|_{H^1} \quad \text{for all } v \in H^1$$

が成立するので, $1 < p < 5$ の時は保存量 E, Q は H^1 上で意味を持つ. 次の proposition でこれまでの議論をきちんと数学的に述べる.

Proposition 1. $1 < p < 5$ とする. 任意の $u_0 \in H^1$ に対して, ある $T = T(u_0) > 0$ が存在し, $u(0) = u_0$ とする (NLS) の解 $u \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ が一意的に存在する. さらに $u(t)$ は次を満たす:

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad Q(u(t)) = Q(u_0) \quad \text{for all } t \in [0, T].$$

この proposition の証明については, 例えば, Cazenave [3] を参照のこと.

定在波解とは $u(t, x) = \exp(i\omega t)\phi_\omega(x)$, $\omega \in \mathbb{R}$ という特別な形をした (NLS) の解である. この時, ϕ_ω は次の楕円型方程式を満たす:

$$-\Delta\phi + \omega\phi + (|x| * |\phi|^2)\phi - \gamma|\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

定在波解は物理的にも重要な (NLS) の解である. さらに, 現実の世界では安定な定在波解のみが観測されるので. 定在波の存在だけでなく, 安定性を解析することは重要である. 以下で定在波解が安定であることの定義を述べる.

Definition 2. (i) 定在波解 $u(t, x) = \exp(i\omega t)\phi_\omega(x)$ が安定であるとは任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して $\inf_{\theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^3} \|u_0 - \exp(i\theta)\phi_\omega(\cdot - y)\|_{H^1} < \delta$ ならば, $u(0) = u_0$ とした (NLS) の解は時間大域的に存在して, さらに $\sup_{t \geq 0} \inf_{\theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^3} \|u(t) - \exp(i\theta)\phi_\omega(\cdot - y)\|_{H^1} < \epsilon$ を満たすことである.

(ii) 定在波解 $u(t, x) = \exp(i\omega t)\phi_\omega(x)$ が安定でないとき不安定であるという. 特に, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $u_0 \in H^1$ が存在して $\inf_{\theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^3} \|u_0 - \exp(i\theta)\phi_\omega(\cdot - y)\|_{H^1} < \epsilon$ かつ $u(0) = u_0$ となる (NLS) の解が有限時間で爆発するとき強不安定であるという.

Remark 3. 安定性の定義で θ や y について下限をとることは必要不可欠である. 例えば ϕ を (1) の解, $|y| = 1$ となる $y \in \mathbb{R}^3$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\phi_\epsilon = \exp(i\epsilon x \cdot y)\phi(x)$, $u_\epsilon(t, x) = \exp(i\epsilon(x \cdot y - et)) \exp(i\omega t)\phi(x - 2ety)$ とすれば, u_ϵ は ϕ_ϵ を初期値とする (NLS) の解であり, $\phi_\epsilon \rightarrow \phi$ in H as $\epsilon \rightarrow 0$ であるが, $\sup_{t > 0} \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|u_\epsilon - \exp(i\theta)\phi\|_{H^1} = 2\|\phi\|_{H^1}$ となる. よって y について下限をとらないと, 常に不安定である (θ についても同様).

最初に定在波の存在, つまり定常問題 (1) の解の存在について説明する. 汎関数 $S_\omega \in C^2(H^1, \mathbb{R})$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} S_\omega(u) &= E(u) + \omega Q(u) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{\omega}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} (|x|^{-1} * |u|^2) |u|^2 dx \\ &\quad - \frac{\gamma}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

すると, 定常問題 (1) は汎関数 S_ω の Euler-Lagrange 方程式である. つまり, (NLS) の解であることと汎関数 S_ω の臨界点であることは同値である. 今回は簡単のため球対称解, つまり, $u(x) = u(|x|)$ となる (1) の解だけを考える. そこで, (NLS) の非自明な球対称解全体の集合を \mathcal{X}_ω とすると, \mathcal{X}_ω は

$$\mathcal{X}_\omega = \{v \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\} \mid S'_\omega(v) = 0\}.$$

と表せる. ここで, ' は Frechet 微分, $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^3) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) \mid u(x) = u(|x|)\}$ である. (1) の非自明な解の中で S_ω の臨界値が最小となる解を基底状態と言う. (1) の基底状態全体の集合を \mathcal{G}_ω とおく. つまり

$$\mathcal{G}_\omega = \{w \in \mathcal{X}_\omega \mid S_\omega(w) \leq S_\omega(v) \text{ for all } v \in \mathcal{X}_\omega\}$$

である. これまでのほとんどの安定性に関する結果は \mathcal{G}_ω の元によって生成される定在波解についてのものであったが, 今回は次のような (1) の解の集合で生成される定在波の安定性を考える:

$$\mathcal{M}_\omega = \left\{ w \in X_\omega \mid S_\omega(w) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} S_\omega(\gamma(t)) \right\}.$$

ここで, $\Gamma = \{ \gamma \in C([0,1], H_{\text{rad}}^1) \mid \gamma(0) = 0, S_\omega(\gamma(1)) < 0 \}$ である. mountain pass theorem と呼ばれる定理を用いることにより得られた (1) の解の臨界値は $\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} S_\omega(\gamma(t))$ で与えられる (例えば, Willem [14] を参照のこと). つまり, \mathcal{M}_ω は mountain pass theorem で得られる臨界値以下の臨界値をもつ (1) の解全体の集合である. 定義から $\mathcal{M}_\omega \neq \emptyset$ ならば, $\mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{M}_\omega$ であることが分かる.

これまでに定在波の存在については以下のことが知られている. D'Aprile and Mugnai [4] により $0 \leq p \leq 2$ または $p \geq 5$ の時はすべての $\omega > 0$ について $\mathcal{X}_\omega = \emptyset$ であり, Kikuchi [10], Ruiz [12] により $1 < p < 2$ の時は十分大きな $\omega_0 > 0$ が存在して, $\omega \geq \omega_0$ ならば $\mathcal{X}_\omega = \emptyset$ である. \mathcal{G}_ω については Ruiz [12] により $2 < p < 5$ の時はすべての $\omega > 0$ に対して $\mathcal{G}_\omega \neq \emptyset$ であり, $1 < p < 2$ の時はある十分小さな $\omega_1 > 0$ が存在して $\omega \in (0, \omega_1)$ ならば, $\mathcal{G}_\omega \neq \emptyset$ である. \mathcal{M}_ω についても同様に, Ambrosetti and Ruiz [1], Kikuchi [10] により $2 < p < 5$ の時はすべての $\omega > 0$ に対して $\mathcal{M}_\omega \neq \emptyset$ であり, Ruiz [12] により $1 < p < 2$ の時はある十分小さな ω_2 が存在して $\omega \in (0, \omega_2)$ ならば $\mathcal{M}_\omega \neq \emptyset$ であり, さらに $\mathcal{G}_\omega \subsetneq \mathcal{M}_\omega$ である.

次に定在波解の安定性について, まず, (NLS) に関連した非線形項に対する既知の結果を紹介する. 次のような非線形 Schrödinger 方程式について考える:

$$iu_t + \Delta u - f(u) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

(NLS) の第3項を無くした $f(u) = |u|^{p-1}u$ ($1 < p < 5$) の場合は, $1 < p < 7/3$ の時は安定であり, $7/3 \leq p < 5$ の時は不安定である事が知られている ([3] 及びそのReferencesを参照されたい). また, [5] により, (NLS) の第3項を冪剰型にした2重冪 $f(u) = |u|^{p-1}u - |u|^{q-1}u$ ($1 < p < q < 5$) の時は, $1 < p < 7/3$, かつ, $\omega > 0$ が十分小さい時は安定であることが知られている (空間一次元の二重冪の安定性については Ohta [11] を参照のこと). 今回は次の結果を得た.

定理 4. $\gamma > 0, \phi_\omega \in \mathcal{M}_\omega$ とする.

- (i) $1 < p < 2$ とする. ある $\omega_s > 0$ が存在して, $\omega \in (0, \omega_s)$ ならば, 定在波解 $\exp(i\omega t)\phi_\omega(x)$ は安定である.
- (ii) $2 < p < 7/3$ とする. ある $\omega_{s'} > 0$ が存在して, $\omega > \omega_{s'}$ ならば, 定在波解 $\exp(i\omega t)\phi_\omega(x)$ は安定である.

定理 5. $\gamma > 0, \phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とし, $7/3 < p < 5$ とする. すべての $\omega > 0$ に対して, 定在波解 $\exp(i\omega t)\phi_\omega(x)$ は強不安定である.

次に, $p = 2$ についての結果を述べるために記号を用意する. 各 $\mu > 0$ に対し, $I_\mu = \inf \{ E(v) \mid v \in H^1, \|v\|_{L^2}^2 = \mu \}$, $\Sigma_\mu = \{ v \in H^1 \mid E(v) = I_\mu, \|v\|_{L^2}^2 = \mu \}$ とする. すると, 次が成り立つ.

定理 6. ある $\gamma_0 > 0$ が存在して, $\gamma > \gamma_0$ ならば, 任意の $\mu > 0$ に対して, $\Sigma_\mu \neq \emptyset$ である. さらに, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $\inf_{\phi \in \Sigma_\mu} \|u_0 - \phi\|_{H^1} < \delta$ ならば, $\sup_{t \geq 0} \inf_{\phi \in \Sigma_\mu} \|u(t) - \phi\|_{H^1} < \epsilon$ となる. ここで, $u(t)$ は u_0 を初期値とする (NLS) の解である

Remark 7. (i) ϕ_ω を (1) の解とする. 任意の $\mu > 0$ に対して, ある一意的な $\omega_\mu (= \mu^2 / \|\phi_1\|_{L^2}^4)$ が存在して, $\phi_{\omega_\mu} \in \Sigma(\mu)$ である.

(ii) $\Sigma(\mu)$ の一意性 (平行移動と位相の変動を除いて) が示されれば, $\Sigma(\mu) = \{\exp(i\theta)\phi_{\omega_\mu}(\cdot - y) \mid \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^3\}$ となる. つまり, 定在波 $\exp(i\omega t)\phi_{\omega_\mu}$ が安定であることが分かる.

(iii) $p = 2$ の時. 十分小さな $\gamma_1 > 0$ に存在して $\gamma \in (0, \gamma_1)$ ならば $\mathcal{X}_\omega = \emptyset$ である.

定理 4 の証明では Grillakis, Shatah, and Strauss [6, 7] による次の proposition を用いる (Fukuizumi [5], Iliev and Kirchev [8] も参照されたい).

Proposition 8. $\gamma > 0, 1 < p < 5$ とし, $\phi_\omega \in \mathcal{X}_\omega$ とする. 次の条件 (A) を考える:

(A) ある $\delta > 0$ が存在して次を満たす:

$$\langle S''_\omega(\phi_\omega)v, v \rangle \geq \delta \|v\|_{H^1}^2$$

for any $v \in H^1$ satisfying $\langle \phi_\omega, v \rangle = \langle i\phi_\omega, v \rangle = 0$ and $\langle (\partial/\partial x_l)\phi_\omega, v \rangle = 0$ for $l = 1, 2, 3$.

この時, 条件 (A) が成り立てば定在波解 $\exp(i\omega t)\phi_\omega$ は安定である.

つまり, 条件 (A) は安定であるための十分条件である. 条件 (A) を確かめるには次の事実を用いる事がポイントである. $\phi_\omega(x) = \omega^{1/(p-1)}\tilde{\phi}_\omega(\omega^{1/2}x)$ とすれば, $\tilde{\phi}_\omega$ は次の方程式の解である:

$$-\Delta\phi + \phi + \omega^{\frac{2(2-p)}{p-1}}(|x|^{-1} * |\phi|^2)\phi - \gamma|\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

Jeanjean and Le Coz[9] のアイデアを用いて, mountain pass theorem で得られる変分法的特徴づけを利用すると, $\tilde{\phi}_{\omega_j}(\cdot - y_j) \rightarrow \psi_1$ in H^1 as $\omega_j^{2(2-p)/(p-1)} \rightarrow 0$ となる部分列 $\{\tilde{\phi}_{\omega_j}\}$ と $\{y_j\} \subset \mathbb{R}^3$ が存在する. ここで, ψ_1 は (3) の第 3 項を無くした, 非線形項が冪剰型のみからなる楕円型方程式

$$-\Delta\phi + \phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

の正値解である.

References

- [1] A. Ambrosetti, D. Ruiz, Multiple bound states for the Schrödinger-Poisson problem, preprint.

- [2] J. Asch, A. Joye (eds), *Mathematical Physics of Quantum Mechanics*, Springer, 2006.
- [3] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics 10, New York University, New York, 2003.
- [4] T. D'Aprile, D. Mugnai, Non-Existence results for the coupled Klein-Gordon-Maxwell equations, *Adv. Nonlinear Stud.* **4** (2004), 307–322.
- [5] R. Fukuizumi, Remarks on the stable standing waves for nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity, *Adv. Math. Sci. Appl.* **13** (2003), 549–564.
- [6] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I, *J. Funct. Anal.* **74** (1987), 160–197.
- [7] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II, *J. Funct. Anal.* **94** (1990), 308–348.
- [8] I. D. Iliev and K. P. Kirchev, Stability and Instability of Solitary waves for one-dimensional singular Schrödinger equations, *Differential and Integral Eqs.* **6** (1993), 685–703.
- [9] L. Jeanjean, S. Le Coz, An existence and stability result for standing waves of nonlinear Schrödinger equations, *Adv. Differential Equations* **11** (2006), 813–840.
- [10] H. Kikuchi, On the existence of solutions for elliptic system related to the Maxwell–Schrödinger equations, to appear in *Nonlinear. Anal.*
- [11] M. Ohta, Stability and instability of standing waves for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity, *Kodai Math. J.* **18** (1995), 68–74.
- [12] D. Ruiz, The Schrödinger-Poisson equation under the effect of a nonlinear local term, *J. Funct. Anal.* **237** (2006), 655–674.
- [13] J. C. Slater, A simplification of the Hartree-Fock method, *Phys. Rev.* **81(3)** (1951), 385–390.
- [14] M. Willem, *Minimax theorems*, Boston, Birkhäuser, 1996.

Asymptotic Expansions of the Solutions to the Heat Equations with Generalized Functions Initial Value

KUNIO YOSHINO † and YASUYUKI OKA ‡

† ‡ Department of Mathematics, Sophia University, Tokyo, 102-8554, Japan

We will drive the asymptotic expansions of solutions of the heat equation with generalized functions initial data.

Keywords: Heat Equation, Asymptotic expansion, *Tempered Distributions*, *Distributions of exponential growth* and *Fourier Hyperfunctions*

1 Introduction

In[4], T.Matsuzawa characterized tempered distributions as the initial value of the solutions to the heat equation .

Theorem 1 For $u \in \mathcal{S}'$, $U(x, t) = (u * E)(x, t)$ satisfies

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) U(x, t) &= 0, \\ U(x, t) &\in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty)), \\ \exists M, \exists N, |U(x, t)| &\leq Ct^{-N}(1 + |x|)^M, \quad (x \in \mathbb{R}^d, 0 < t < 1). \end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned} U(x, t) &\rightarrow u, \quad (t \rightarrow 0) \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \\ \text{i.e. } \langle u, \varphi \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} U(x, t)\varphi(x)dx, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)), \end{aligned} \quad (\#)$$

where $E(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $(x \in \mathbb{R}^d, 0 < t < +\infty)$.

We analyze (#) more precisely. Namely, we will drive the asymptotic expansions of solutions of the heat equation with generalized functions initial data in this paper.

Main Theorem 1 Let $U(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$ satisfy the following conditions :

- (i) $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) U(x, t) = 0$,
- (ii) $\exists C > 0, \exists \nu \geq 0$ and $\exists k \geq 0$ s.t. $|U(x, t)| \leq Ct^{-\nu}(1 + |x|)^k$,
 $(x \in \mathbb{R}^d, 0 < t < 1)$,

Then $U(x, t)$ has the following asymptotic expansion :

$$U(x, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta_x^k u, \quad \left(u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \text{ such that } u = \lim_{t \rightarrow 0} U(x, t) \right).$$

i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} | \langle U(x, t), \varphi \rangle - \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \frac{t^k}{k!} \langle \Delta_x^k u, \varphi \rangle | t^{-\frac{N}{2}} = 0, \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)),$$

where $\Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_d}^2$.

Corollary 1 For $u \in \mathcal{S}'$, Put $U(x, t) = (u * E)(x, t)$, then $\langle u, \varphi \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} U(x, t) \varphi(x) dx$ ($\forall \varphi \in \mathcal{S}$).

We obtain the similar consequences with regard to distributions of exponential growth and Fourier Hyperfunctions by using the results of Suwa[5] and K.W.Kim *et al* [3] respectively.

- This is a joint work with Professor Kunio YOSHINO.

2 Preliminaries

We use the multi-index notations such as

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \text{ for } \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d,$$

where \mathbb{Z}_+ is the set of nonnegative integers and

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (j = 1, \cdots, d).$$

Definition 1 We put $E(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, ($x \in \mathbb{R}^d$, $0 < t < +\infty$), $E(x, t)$ is called heat kernel and have the following properties :

$$\begin{aligned} & \cdot E(x, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^d), \quad (t > 0), \\ & \cdot \int_{\mathbb{R}^d} E(x, t) dx = 1, \quad (t > 0), \\ & \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) E(x, t) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < t < \infty), \\ & \text{where } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}. \end{aligned}$$

Definition 2 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall \alpha, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^d, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty \}$.

Definition 3 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ denotes the dual space of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1 Let u be a linear form from \mathcal{S} to \mathbb{C} . Then the following statements (i) and (ii) are equivalent.

(i) $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,

(ii) $\exists C > 0$ s.t. $|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\beta|+k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^k |\partial^\beta \varphi(x)|$, ($\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

3 Asymptotic expansions of the solutions to the heat equations with the tempered distributions initial data

Theorem 2 Let $U(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$ satisfy the following conditions :

- (i) $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)U(x, t) = 0$,
- (ii) $\exists C > 0, \exists \nu \geq 0$ and $\exists k \geq 0$ s.t. $|U(x, t)| \leq Ct^{-\nu}(1 + |x|)^k$,
($x \in \mathbb{R}^d, 0 < t < 1$),

Then $U(x, t)$ has the following asymptotic expansion :

$$U(x, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta_x^k u, \quad \left(u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \text{ such that } u = \lim_{t \rightarrow 0} U(x, t)\right).$$

i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} | \langle U(x, t), \varphi \rangle - \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \frac{t^k}{k!} \langle \Delta_x^k u, \varphi \rangle | t^{-\frac{N}{2}} = 0, \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)),$$

where $\Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_d}^2$.

Lemma 1 Let φ be in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ and $t > 0$. Then

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} z^\alpha \left\{ \int_0^1 (1-\theta)^N \partial_y^\alpha \varphi(y + \sqrt{4tz}\theta) d\theta \right\} dz$$

is in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proof:

$$\begin{aligned} & (1 + |y|^2)^\gamma |\partial_y^\beta \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} z^\alpha \left\{ \int_0^1 (1-\theta)^N \partial_y^\alpha \varphi(y + \sqrt{4tz}\theta) d\theta \right\} dz| \\ &= (1 + |y|^2)^\gamma \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} z^\alpha \left\{ \int_0^1 (1-\theta)^N \partial_y^{\alpha+\beta} \varphi(y + \sqrt{4tz}\theta) d\theta \right\} dz \right| \\ &\leq (1 + |y|^2)^\gamma \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} |z|^\alpha \left\{ \int_0^1 |1-\theta|^N |\partial_y^{\alpha+\beta} \varphi(y + \sqrt{4tz}\theta)| d\theta \right\} dz. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Since $\varphi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, we have the following estimate,

$$(1 + |y|^2)^\gamma |\partial_y^{\alpha+\beta} \varphi(y)| \leq C_{\gamma, \beta}.$$

So we obtain

$$|\partial_y^{\alpha+\beta} \varphi(y + \sqrt{4tz}\theta)| \leq C_{\gamma, \beta} (1 + |y + \sqrt{4tz}\theta|^2)^{-\gamma}.$$

Thus,

$$\begin{aligned}
(3.1) &\leq C_{\gamma,\beta}(1+|y|^2)^\gamma \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} |z|^\alpha (1+|y+\sqrt{4tz}\theta|^2)^{-\gamma} dz. \\
&\leq C_{\gamma,\beta} \cdot 2^\gamma \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} |z|^\alpha (1+|\sqrt{4tz}\theta|^2)^\gamma dz, \text{ (by Peetre's inequality)} \\
&\leq C_{\gamma,\beta} \cdot 2^\gamma \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} |z|^\alpha (1+|2z|^2)^\gamma dz \\
&= C_{\gamma,\beta} \cdot 2^\gamma \sum_{\delta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\delta} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} |z|^\alpha |2z|^{2(\gamma-\delta)} dz \\
&\leq C_{\gamma,\beta} \cdot \sum_{\delta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\delta} \left(\frac{1}{2}\right)^d \prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha_j + 2(\gamma_j - \delta_j) + 1)\right).
\end{aligned}$$

Hence we have

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} z^\alpha \left\{ \int_0^1 (1-\theta)^N \partial_y^\alpha \varphi(y + \sqrt{4tz}\theta) d\theta \right\} dz \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

This completes the proof of Lemma 1 . \square

Proof of Theorem 2 : By Matsuzawa's result[4], There exists $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ such that $U(x, t) = (u * E)(x, t)$. For any $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle U(x, t), \varphi \rangle = \langle (u * E)(x, t), \varphi \rangle$$

$$= \langle u_y, E(x, t) * \varphi \rangle$$

$$= \langle u_y, \int_{\mathbb{R}^d} \pi^{-\frac{d}{2}} e^{-z^2} \varphi(y + \sqrt{4tz}z) dz \rangle.$$

By Taylor's formula ,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \pi^{-\frac{d}{2}} e^{-z^2} \varphi(y + \sqrt{4tz}z) dz &= \int_{\mathbb{R}^d} \pi^{-\frac{d}{2}} e^{-z^2} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{(\sqrt{4t})^{|\alpha|}}{\alpha!} z^\alpha \partial_y^\alpha \varphi(y) \right. \\
&\quad \left. + (\sqrt{4t})^{N+1} \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{(N+1)z^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^N \partial_y^\alpha \varphi(y + \sqrt{4tz}\theta) d\theta \right\} dz \\
&= \pi^{-\frac{d}{2}} \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{(\sqrt{4t})^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_y^\alpha \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} z^\alpha dz \\
&\quad + \pi^{-\frac{d}{2}} (\sqrt{4t})^{N+1} \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{(N+1)}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} z^\alpha \left\{ \int_0^1 (1-\theta)^N \partial_y^\alpha \varphi(y + \sqrt{4tz}\theta) d\theta \right\} dz. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Then we obtain the following equality :

$$(3.5) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \frac{t^k}{k!} \Delta^k \varphi(y) + \pi^{-\frac{d}{2}} (\sqrt{4t})^{N+1} \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{(N+1)}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} z^\alpha \left\{ \int_0^1 (1-\theta)^N \partial_y^\alpha \varphi(y + \sqrt{4t}z\theta) d\theta \right\} dz ,$$

where $\Delta = \partial_{y_1}^2 + \dots + \partial_{y_d}^2$.

Thus ,

$$\begin{aligned} \langle U(x, t) , \varphi \rangle &= \langle u_y , \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \frac{t^k}{k!} \Delta^k \varphi(y) \rangle \\ &+ \langle u_y , \pi^{-\frac{d}{2}} (\sqrt{4t})^{N+1} \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{(N+1)}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} z^\alpha \left\{ \int_0^1 (1-\theta)^N \partial_y^\alpha \varphi(y + \sqrt{4t}z\theta) d\theta \right\} dz \rangle \end{aligned}$$

Therefore we have the following equality :

$$\begin{aligned} |\langle U(x, t) , \varphi \rangle - \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \frac{t^k}{k!} \langle \Delta^k u , \varphi \rangle| & t^{-\frac{N}{2}} \\ &= \left| \langle u_y , \pi^{-\frac{d}{2}} (\sqrt{4t})^{N+1} \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{(N+1)}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} z^\alpha \left\{ \int_0^1 (1-\theta)^N \partial_y^\alpha \varphi(y + \sqrt{4t}z\theta) d\theta \right\} dz \right| t^{-\frac{N}{2}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

We obtain the following estimate by Proposition 1 and Lemma 1. For any $n \in \mathbb{N}$,

$$(3.3) \leq C_{\alpha, \beta, \gamma, d} t^{\frac{N+1}{2}} t^{-\frac{N}{2}} = C_{\alpha, \beta, \gamma, d} t^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

This completes the proof of Theorem 2 \square

Remark 1 We obtain the similar result for the distributions of exponential growth and Fourier hyperfunctions in [6]

References

- [1] I.M.Gel'fand and G.E.Shilov, *Generalized Functions, Volume 2, Space of Fundamental and Generalized Functions*, Academy of Sciences Moscow, U.S.S.R, (1958).
- [2] M.Hasumi, *Note on the n-dimensional tempered ultra-distributions*, Tohoku.Math.J.13,(1961),94-104.
- [3] K.W.Kim, S.Y.Chung and D.Kim, *Fourier hyperfunctions as the boundary values of smooth solutions of the heat equation*, Publ, RIMS, Kyoto Univ. 29 (1993), 289-300.
- [4] T.Matsuzawa, *A calculus approach to the hyperfunctions III*, Nagoya Math. J., 118 (1990), 133-153.
- [5] M.Suwa, *Distributions of exponential growth with support in a proper convex cone*, Publ, RIMS, Kyoto Univ. 40 (2004),no.2, 565-603.
- [6] K.Yoshino and Y.Oka, *Asymptotic expansions of solutions to heat equations with Generalized Functions initial value*, preprint.

Classical and Quantum isomonodromic deformation with affine Weyl group symmetry of type $C_l^{(1)}$

名古屋 創 [東京大学大学院数理科学研究科]

1 Introduction

本レポートでは、C型の対称性を持つモノドロミー保存変形とその量子化を構成する。モノドロミー保存変形の特例な場合に Painlevé 方程式が現れることが 20 世紀初頭に R. Fuchs によって示された。その後 80 年代に岡本和夫は Painlevé 方程式がアフィン Weyl 群の作用を解に移す変換として持つことを示した。90 年代に野海・山田は Painlevé 方程式の対称性をアフィン Lie 環を用いて系統的に説明することに成功した。

Painlevé 方程式はハミルトニアン系として書かれ Poisson 括弧を交換子に置き換える意味での量子化が考えられる。しかし一般にその量子化は一意的には定まらないのだが、その量子化の中でアフィン Weyl 群対称性を持つものが存在することが筆者によって示された。

一方、モノドロミー保存変形の量子化に関しては、シュレジンガー系と呼ばれる確定特異点型の場合にはその量子化が共形場理論における相関関数の満たす微分方程式、KZ 方程式、とみなせることが Reshetikhin によって示された。シュレジンガー系の特例な場合が第六 Painlevé 方程式であることから Painlevé 方程式の量子化は共形場理論から理解されると筆者は期待している。またこのレポートで扱うモノドロミー保存変形の量子化はちょうど共形場理論で理解されている場合より拡張されている場合となっている。つまり、現在知られている理論に含まれない新しい対象であるということであり面白いと考えている。

2 $C_N^{(1)}$ 型対称性を持つ微分方程式系

この節では古典系の場合を構成する。基礎となるリー環は次である。

$$C_n = \{X \in gl(n, \mathbb{C}) \mid XJ + JX^t = 0\}.$$

ただし $n = 4, 6, \dots$, に対して $N = n/2$ とし

$$E_N = \sum_{i=1}^n E_{i, N+1-i}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & E_N \\ -E_N & 0 \end{bmatrix}.$$

たとえば $n = 4$ のとき

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であって,

$$C_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & x & y \\ c & d & z & x \\ s & u & -d & -b \\ t & s & -c & -a \end{bmatrix} \in \text{Mat}(4,4) \right\}.$$

基礎になる有理関数体を定義しよう. \mathbb{C} 上の有理関数体 $\mathcal{C}_{m,n}$ ($m < n$) を生成元が $\epsilon_i, f_{i,i+j}$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$) であって次の関係式

$$\epsilon_i = s(i, i)\epsilon_{1-i}, \quad f_{i,j} = s(i, j)f_{1-i,1-j}, \quad f_{n+i,n+j} = f_{i,j} \quad (2.1)$$

を満たすものとする. ここで, $s(i, j)$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の $s(i, j) = s(j, i)$ を満たす関数で次で定まる.

$$s(i, j) = \begin{cases} -1 & (1 \leq i, j \leq N \text{ or } N+1 \leq i, j \leq n) \\ 1 & (1 \leq i \leq N, N+1 \leq j \leq n) \end{cases}.$$

次に要素が $\mathcal{C}_{m,n}[z, z^{-1}]$ の元である $n \times n$ 行列 L を次で定める.

$$L_{ii} = \epsilon_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.2)$$

$$L_{i,j} = f_{i,j} \quad (i < j), \quad L_{i,j} = z f_{i,j+n} \quad (i > j). \quad (2.3)$$

この L を Lax operator と呼ぶ. L は ϵ_i をパラメータ, $f_{i,j}$ を関数とみたとき, $C_n \otimes \mathcal{C}_{m,n}[z, z^{-1}]$ の上三角部分に値をとる. すなわち $g = C_n \otimes \mathcal{C}_{m,n}[z, z^{-1}]$ とし, $g = g_{\geq 0} \oplus g_{< 0}$ となる部分空間 $g_{\geq 0}, g_{< 0}$ を次で定めたとき,

$$g_{\geq 0} = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \cdot & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix} + z^2 \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix} + \cdots \right\}, \quad (2.4)$$

$$g_{< 0} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdot & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 \end{bmatrix} + z^{-1} \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix} + z^{-2} \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix} + \cdots \right\} \quad (2.5)$$

L は $g_{\geq 0}$ に含まれる. $X \in g$ にたいして, $X = X_+ + X_-$ を $g = g_{\geq 0} \oplus g_{< 0}$ にあわせた表示とする.

例として $n = 4$ の場合を挙げよう.

$$L = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ z f_{25} & \epsilon_2 & f_{23} & f_{24} \\ z f_{35} & z f_{36} & \epsilon_3 & f_{34} \\ z f_{45} & z f_{46} & z f_{47} & \epsilon_4 \end{bmatrix}.$$

独立なものだけで書くと,

$$L = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ z f_{25} & \epsilon_2 & f_{23} & f_{13} \\ z f_{35} & z f_{36} & -\epsilon_2 & -f_{12} \\ z f_{45} & z f_{35} & -z f_{25} & -\epsilon_1 \end{bmatrix}.$$

次に Poisson 括弧を次で定める.

$$\{f_{ij}, f_{kl}\} = \frac{1}{2}(\delta_{j,k}f_{i,j+l-k} + \delta_{j,1-l}s(k,l)f_{i,j+l-k} - \delta_{l,i}f_{k,j+l-i} - \delta_{1-k,i}s(k,l)f_{1-l,1+j-i-k}). \quad (2.6)$$

$-s(i,k) = s(i,j)s(j,k)$ から上の定義関係式は矛盾なく定義される. また, $\delta_{j,k}$ は

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & (j \equiv k \pmod{n}) \\ 0 & (j \not\equiv k \pmod{n}) \end{cases} \quad (2.7)$$

とする.

Poisson 括弧の例も述べよう. $\{a, b\}$ の a を一列目に b を二行目に書いた. f_{14}, f_{25}, f_{36} は全てと Poisson 可換である.

$$\begin{array}{cccccc} & f_{12} & f_{23} & f_{45} & f_{13} & f_{35} \\ f_{12} & 0 & f_{13} & -f_{35} & \frac{1}{2}f_{14} & -\frac{1}{2}f_{36} \\ f_{23} & -f_{13} & 0 & 0 & 0 & f_{25} \\ f_{45} & f_{35} & 0 & 0 & -f_{25} & 0 \\ f_{13} & -\frac{1}{2}f_{14} & 0 & f_{25} & 0 & 0 \\ f_{35} & \frac{1}{2}f_{36} & -f_{25} & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (2.8)$$

この例からも推察されるように, Poisson 括弧は Lax operator の座標から決められている. たとえば, $\{f_{12}, f_{23}\}$ は $[1/2(E_{12} - E_{34}), E_{23}]$ と対応している. ここで, E_{ij} は (i, j) 成分が 1 で他の成分が 0 の行列である.

\mathbb{C} 上の derivation $\partial_{s,k}$ $s, k \in \mathbb{N}$ (k は奇数) を Lax 方程式

$$\partial_{s,k}(L) = [L, B_{s,k}] + \kappa z \partial_z(B_{s,k}) \quad (2.9)$$

で定める. ただし, $B_{s,k} = (L^k z^{-s})_+$, $\kappa \in \mathbb{C}$ とし, ∂_z は $\mathcal{C}_{m,n}$ 上の z を 1 に動かす derivation とする. k が奇数である必要は L の偶数べきは一般に g の元でないことからくる. k が奇数であるから (2.9) の右辺は g に含まれるので定義ができる.

次に対称性を構成しよう. $G_i \in g$ ($i = 0, 1, \dots, N$) を次で定める.

$$G_i = \exp\left(\frac{\alpha_i^\vee}{f_{i,i+1}} \frac{E_{i+1,i} - E_{n+1-i,n-i}}{2}\right) \quad (i = 1, \dots, N-1), \quad (2.10)$$

$$G_0 = \exp\left(\frac{\alpha_0^\vee}{f_{n,n+1}} E_{1,n} z^{-1}\right), \quad G_N = \exp\left(\frac{\alpha_N^\vee}{f_{N,N+1}} E_{N+1,N}\right), \quad (2.11)$$

ただし, $\alpha_i^\vee = 2(\epsilon_i - \epsilon_{i+1})$ ($i = 1, \dots, N-1$), $\alpha_0^\vee = -2\epsilon_1 - \kappa$, $\alpha_N^\vee = 2\epsilon_N$ とする.

この G_i を用いて $\mathcal{C}_{m,n}$ 上の準同型 s_i ($i = 0, 1, \dots, N$) を次の式で定める.

$$\kappa z \partial_z + s_i(L) = G_i(\kappa \partial_z + L)G_i^{-1}. \quad (2.12)$$

このとき, Lax 方程式が

$$[\kappa z \partial_z + L, \partial_{s,k} + B_{s,k}] = 0 \quad (2.13)$$

と書き直せることと上の定義から, s_i と $\partial_{s,k}$ は可換であることがわかり, すなわち s_i は Lax 方程式の解を保存する変換であることがわかる. また s_i は関係式

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i \quad |i - j| \geq 2, \quad (2.14)$$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad i = 1, \dots, N-2, \quad (2.15)$$

$$s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0, \quad s_{N-1} s_N s_{N-1} s_N = s_N s_{N-1} s_N s_{N-1} \quad (2.16)$$

を満たし, $C_N^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群をなす. このことをもって, Lax 方程式 (2.9) は $C_N^{(1)}$ 型対称性を持つという. このアフィン Weyl 群の表現の構成方法は野海・山田の一連のパンルヴェ方程式に関する対称性の研究によるものである.

次にハミルトニアンを構成しよう. 多項式 $h \in \mathcal{C}_{m,n}[z]$ に対して h_s を s 次の項の係数とさだめる. このときハミルトニアンは Lax operator L の冪のトレースで定めることができる:

$$H_{s,k} = \frac{\text{tr}(L^{k+1})_s}{k+1} \quad s, k \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

これらがハミルトニアンであるのは次の命題が成り立つからである.

Proposition 2.1 自然数 s, s' , 奇数 k, k' に対して次が成り立つ.

$$(1) \quad \partial_{s,k}(f_{i,j}) = \{H_{s,k}, f_{i,j}\} + (\kappa z \partial_z(B_{s,k}))_{i,j}, \quad (2.18)$$

$$(2) \quad \{H_{s,k}, H_{s',k'}\} = 0. \quad (2.19)$$

この命題の証明は直接計算によって容易に示すことができる. この命題から $\kappa = 0$ のとき上の微分方程式系は可積分系であることがわかる.

Lax operator の冪のトレースがその系の保存量になるという事実は可積分系においてよく知られた事実である. しかし筆者の知る限り上記の構成方法を陽に述べた論文は C 型の場合はない. A 型の場合は [2].

Example 2.2 例として, $n = 4, m = 3, s = 2, k = 3$ のときを書き下そう. この場合が最も簡単でかつ非自明な最初の例であり, 野海 [1] により *Coupled P_{II}* であることが知られている. なお *Coupled* の意味は二つの P_{II} のハミルトニアンによってこれから書き下す例のハミルトニアンが書けることを意味する.

有理関数体 $\mathcal{C}_{m,n}$ の生成元は

$$\epsilon_1, \epsilon_2, f_{12}, f_{23}, f_{45}, f_{13}, f_{35}, f_{14}, f_{25}, f_{36} \quad (2.20)$$

であり, Poisson 括弧は表 (2.8) にあるとおりである. 以下では, 簡単のため $f_1 = f_{12}, f_{23} = f_2, f_0 = f_{45}, g_1 = f_{13}, g_2 = f_{35}, f_{14} = 1, f_{25} = 1, f_{36} = 1$ とする.

Lax 行列 L は

$$L = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & f_1 & g_1 & 1 \\ z & \epsilon_2 & f_2 & g_1 \\ z g_2 & z & -\epsilon_2 & -f_1 \\ z f_0 & z g_2 & -z & -\epsilon_1 \end{bmatrix}$$

となる.

Lax 方程式

$$\partial_{2,3}(L) = [L, B_{2,3}] + \kappa z \partial_z(B_{2,3}) \quad (2.21)$$

と

$$B_{2,3} = \begin{bmatrix} g_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -g_2 & 1 \\ -z & 0 & 0 & -g_1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

であることから各従属変数 f_i, g_i に対する微分 $\partial_{2,3}$ の作用を書き下すと,

$$\partial_{2,3}(f_1) = f_1 g_2 - g_1 f_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad (2.23)$$

$$\partial_{2,3}(f_2) = -f_2 g_2 - g_2 f_2 - 2\epsilon_2, \quad (2.24)$$

$$\partial_{2,3}(f_0) = f_0 g_1 + g_1 f_0 + 2\epsilon_1, \quad (2.25)$$

$$\partial_{2,3}(g_1) = -f_1 + f_2 - g_1 g_2 - g_1^2, \quad (2.26)$$

$$\partial_{2,3}(g_2) = f_1 - f_0 + g_2 g_1 + g_2^2 \quad (2.27)$$

となっている.

アフィン Weyl 群の作用も書き下そう. 書き下すには次の式を使うのが良い.

$$s_i(f_{k,l}) = f_{k,l} + \{f_{i,i+1}, f_{k,l}\} \frac{\alpha_i^\vee}{f_{i,i+1}} + \{f_{i,i+1}, \{f_{i,i+1}, f_{k,l}\}\} \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_i^\vee}{f_{i,i+1}} \right)^2 + \dots \quad (2.28)$$

上式を用いてアフィン Weyl 群の作用は次のように書き下せる.

	f_0	f_1	f_2	g_1	g_2
s_0	f_0	$f_1 + g_2 \frac{\alpha_0^\vee}{f_0}$	f_2	$g_1 - \frac{\alpha_0^\vee}{f_0}$	g_2
s_1	$f_0 - g_2 \frac{\alpha_1^\vee}{f_1} + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha_1^\vee}{f_1} \right)^2$	f_1	$f_2 + g_1 \frac{\alpha_1^\vee}{f_1} + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha_1^\vee}{f_1} \right)^2$	$g_1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_1^\vee}{f_1}$	$g_2 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1^\vee}{f_1}$
s_2	f_0	$f_1 - g_1 \frac{\alpha_2^\vee}{f_2}$	f_2	g_1	$g_2 + \frac{\alpha_2^\vee}{f_2}$

また α_i^\vee に対しては

	α_0^\vee	α_1^\vee	α_2^\vee
s_0	$-\alpha_0^\vee$	$\alpha_1^\vee + 2\alpha_0^\vee$	α_2^\vee
s_1	$\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee$	$-\alpha_1^\vee$	$\alpha_2^\vee + \alpha_1^\vee$
s_2	α_0^\vee	$\alpha_1^\vee + 2\alpha_2^\vee$	$-\alpha_2^\vee$

となり, α_i^\vee はコルートとみなせることがわかる.

3 $C_N^{(1)}$ 型対称性を持つ微分方程式系の量子化

この節では前節で構成したハミルトニアン系の量子化を行う. 前節と同様の記号を用い, 量子化された変数等を $\hat{f}_{i,j}$ などと書く.

基礎になる斜体を定義しよう. \mathbb{C} 上の斜体 $\hat{\mathcal{C}}_{m,n}$ ($m < n$) を次で定める.

$$\text{生成元: } h, \epsilon_i, \hat{f}_{i,i+j} \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m) \quad (3.1)$$

$$\text{関係式: } \epsilon_i = s(i, i)\epsilon_{1-i}, \quad \hat{f}_{i,j} = s(i, j)\hat{f}_{1-i,1-j}, \quad \hat{f}_{n+i,n+j} = \hat{f}_{i,j}, \quad (3.2)$$

$$[\hat{f}_{ij}, \hat{f}_{kl}] = \frac{\hbar}{2} (\delta_{j,k} \hat{f}_{i,j+l-k} + \delta_{j,1-i} s(k, l) \hat{f}_{i,j+l-k} - \delta_{l,i} \hat{f}_{k,j+l-i} - \delta_{1-k,i} s(k, l) \hat{f}_{1-l,1+j-i-k}). \quad (3.3)$$

これらの交換子 (定義関係式) は前節の Poisson 括弧と $\{, \} \leftrightarrow 1/\hbar[,]$ と対応している. このレポートでの量子化とは上記の置き換えによるもののことであり, もとの Poisson 代数から得られる非可換代数をその Poisson 代数の量子化という.

古典系と同様に $\widehat{\mathcal{C}}_{m,n}[z, z^{-1}]$ の元である $n \times n$ 行列 \widehat{L} を次で定める.

$$\widehat{L}_{ii} = \epsilon_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.4)$$

$$\widehat{L}_{i,j} = \widehat{f}_{i,j} \quad (i < j), \quad \widehat{L}_{i,j} = z\widehat{f}_{i,j+n} \quad (i > j). \quad (3.5)$$

また, $\widehat{g} = C_n \otimes \widehat{\mathcal{C}}_{m,n}[z, z^{-1}]$ とし, $\widehat{g} = \widehat{g}_{\geq 0} \oplus \widehat{g}_{< 0}$ となる部分空間 $\widehat{g}_{\geq 0}, \widehat{g}_{< 0}$ を前節と同様に定める.

Lax 方程式を用いて derivation を定義しよう.

Proposition 3.1 $s, k \in \mathbb{N}$, $ns > m(k-1)$ に対して $\widehat{\mathcal{C}}_{m,n}$ 上の \mathbb{C} -derivation $\partial_{s,k}$ を次で定めることができる.

$$\partial_{s,k}(\widehat{L}) = [\widehat{L}, \widehat{B}_{s,k}] + \kappa z \partial_z(\widehat{B}_{s,k}), \quad (3.6)$$

ただし, $\widehat{B}_{s,k} = (L^k z^{-s})_+$, $\kappa \in \mathbb{C}$ とする.

derivation $\partial_{s,k}$ が $\widehat{\mathcal{C}}_{m,n}$ の定義関係式を保存するというのが命題 3.1 の主張である. また, 量子の場合ではもはや $A, B \in \widehat{g}$ であっても一般に $[A, B] \in \widehat{g}$ とは限らないが $[L, B_{s,k}] \in \widehat{g}$ であるので定義ができる. 命題 3.1 は直接計算することによって示すことができる.

次にアフィン Weyl 群対称性を構成しよう. 古典の場合と平行に定義することができる. $\widehat{G}_i \in g$ ($i = 0, 1, \dots, N$) を次で定める.

$$\widehat{G}_i = \exp\left(\frac{\alpha_i^\vee}{\widehat{f}_{i,i+1}} \frac{E_{i+1,i} - E_{n+1-i,n-i}}{2}\right) \quad (i = 1, \dots, N-1), \quad (3.7)$$

$$\widehat{G}_0 = \exp\left(\frac{\alpha_0^\vee}{\widehat{f}_{n,n+1}} E_{1,n} z^{-1}\right), \quad \widehat{G}_N = \exp\left(\frac{\alpha_N^\vee}{\widehat{f}_{N,N+1}} E_{N+1,N}\right), \quad (3.8)$$

ただし, $\alpha_i^\vee = 2(\epsilon_i - \epsilon_{i+1})$ ($i = 1, \dots, N-1$), $\alpha_0^\vee = -2\epsilon_1 - \kappa$, $\alpha_N^\vee = 2\epsilon_N$ とする.

この \widehat{G}_i を用いて $\widehat{\mathcal{C}}_{m,n}$ 上の準同型 s_i ($i = 0, 1, \dots, N$) を次の式で定める.

$$\kappa z \partial_z + s_i(\widehat{L}) = \widehat{G}_i(\kappa \partial_z + \widehat{L})\widehat{G}_i^{-1}. \quad (3.9)$$

古典系と同様に Lax 方程式が

$$[\kappa z \partial_z + \widehat{L}, \partial_{s,k} + \widehat{B}_{s,k}] = 0 \quad (3.10)$$

と書き直せることと上の定義から, s_i と $\partial_{s,k}$ は可換であることがわかり, すなわち s_i は Lax 方程式 (3.6) の解を保存する変換であることがわかる. また s_i は関係式

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i \quad |i - j| \geq 2, \quad (3.11)$$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad i = 1, \dots, N-2, \quad (3.12)$$

$$s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0, \quad s_{N-1} s_N s_{N-1} s_N = s_N s_{N-1} s_N s_{N-1} \quad (3.13)$$

を満たし, $C_N^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群をなす. このことをもって, Lax 方程式 (3.6) は $C_N^{(1)}$ 型対称性を持つという. このアフィン Weyl 群の表現は野海・山田が構成した Poisson 代数上の表現をちょうど $\{, \} \leftrightarrow 1/h[,]$ の関係で置き換えたものになっている.

ハミルトニアンの構成も古典と同様である.

$$\widehat{H}_{s,k} = \frac{\text{tr}(\widehat{L}^{k+1})}{k+1} \quad s, k \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

古典の場合は $H_{s,k}$ がハミルトニアンであることの証明は容易であったが, 少なくとも現段階では, 直接計算以外の方法が理解されていないため量子の場合は難関を極める.

Theorem 3.2 自然数 s と奇数 k で $ns > m(k-1)$ を満たすものに対して次式が成り立つ.

$$[\widehat{H}_{s,k}I, \widehat{L}] = \frac{1}{\hbar} [\widehat{L}, \widehat{B}_{s,k}]. \quad (3.15)$$

ここで I は単位行列である.

ハミルトニアンの可換性は今のところ予想である.

Conjecture 3.3 自然数 s, s' と奇数 k, k' で $ns > m(k-1)$ かつ $ns' > m(k'-1)$ を満たすものに対して次式が成り立つ.

$$[\widehat{H}_{s,k}, \widehat{H}_{s',k'}] = 0. \quad (3.16)$$

参考文献

- [1] Noumi, M.: private communication
- [2] Nagoya, H.: Quantum Painlevé Systems of Type $A_{n-1}^{(1)}$ with higher degree Lax operators, preprint
- [3] Nagoya, H.: Quantum isomonodromic deformation with affine Weyl group symmetry of type $C_l^{(1)}$, in preparing

The lower bound of the w -indices of surface links via quandle cocycle invariants

¹ 岩切 雅英 (MASAHIDE IWAKIRI)

広島大学大学院理学研究科数学専攻
日本学術振興会特別研究員 (PD)

1. 序

4次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^4 に局所平坦に埋め込まれた向き付けられた閉曲面を**曲面絡み目**といいます。2つの曲面絡み目 F, F' が同型であるとは、同相写像 $h: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ が存在して、 $h(F) = F'$ が成り立つことです。2つの2次元円板の直積 $D_1 \times D_2$ に、プロパーに局所平坦に埋め込まれたコンパクトな向きのついた曲面 S が**次数 m の曲面ブレイド** ([13, 20]) であるとは、次の2条件をみたすときをいいます; (i) 射影 $\pi: D_1 \times D_2 \rightarrow D_2$ の制限写像 $\pi|_S$ が単純な m 次の分岐被覆写像であること、(ii) S の境界は $\partial S = P_m \times \partial D_2$ となること、ただし P_m は D_1 の m 個の内部の固定点です。2つの曲面ブレイド S と S' が**同値**であるとは、 D_2 上の D_1 束としてのファイバーを保つ $D_1 \times \partial D_2$ を止めた $D_1 \times D_2$ の全アイソトピーが存在して、 S を S' に移すときをいいます。古典次元の場合と同様に、4次元空間においてもアレクサンダーの定理—すべての曲面絡み目 F に対して、曲面ブレイド S が存在して、 S の閉包が F と同型—が成り立ちます。(閉包の定義は、[13] 参照)

曲面ブレイド S の3重点の最小数を S の w -index といい、 $w(S)$ で表します。また、曲面絡み目 F に対して、閉包が F と同型な曲面ブレイドの w -index の最小数を F の w -index といい、 $w(F)$ で表します。S. Kamada により、曲面絡み目 F がリボン絡み目であることと、 $w(F) = 0$ であることは必要十分条件であることが示されました ([11])。I. Hasegawa により、リボンでない曲面絡み目の w -index が4以上であること、リボンでない S^2 -絡み目 (連結成分がすべて2次元球面) の w -index が6以上であることを示しました ([5])。また、T. Nagase, M. Ochiai, A. Shima により、 w -index が5である曲面絡み目が存在しないことが知られています ([15])。

J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito らは、**カンドルコサイクル不変量**と呼ばれるカンドル3-コサイクルを用いた曲面絡み目の不変量を定義しました ([2])。カンドルコサイクル不変量はその3-コサイクルの値域の元からなる multi-set を値を取ります (cf. §2)。S. Satoh, A. Shima により、2-ツイストスパン三葉結び目の3重点数が4であり ([17])、3-ツイストスパン三葉結び目の3重点数が6であること ([18])、E. Hatakenaka により、2-ツイストスパン8の字結び目の3重点数が6以上であることが示されました ([6])。それらの議論において、カンドルコサイクル不変量が用いられました ([19])。ここでは、曲面絡み目の w -index に対して、同様の結果が得られました。

定理 1.1. F を曲面絡み目とする。 Q を $x * y = x \implies x = y$ を満たすカンドルとする。 Q の3-コサイクル θ に関するカンドルコサイクル不変量 $\Phi_\theta(F)$ が単位元でない元を含むとき、 $w(F) \geq 6$ を満たす。

注 1.2. リボンでない S^2 -絡み目の w -index が6以上です ([5])。定理 1.1 の仮定は、リボンでないことを意味するので、定理 1.1 は S^2 -絡み目のときは成り立つことは知られていました。ここでは、種数によらず成り立つことを主張しています。

¹iwakiri@hiroshima-u.ac.jp

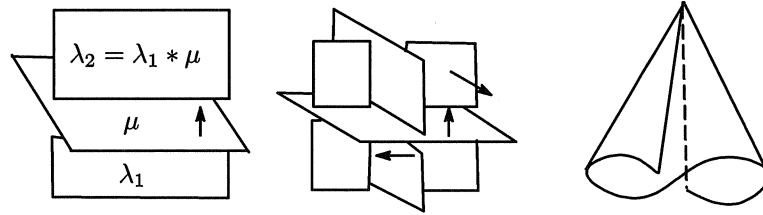


図 1

系 1.3. 任意の自然数 n と、任意の 0 以上の整数 g_1, \dots, g_n に対して、 n 成分曲面絡み目 $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ で、 F_i の種数が g_i かつ $w(F) = 6$ であるものが存在する。

2. 曲面絡み目のカンドルコサイクル不変量

次の3つの条件をみたす2項演算 $*$ が与えられている集合 Q をカンドルといいます。

- (1) 任意の $q \in Q$ に対して、 $q * q = q$ が成り立つ。
- (2) 任意の $q_1, q_2 \in Q$ に対して、 $q_3 \in Q$ が一意的に存在して $q_1 = q_3 * q_2$ が成り立つ。
- (3) 任意の $q_1, q_2, q_3 \in Q$ に対して、 $(q_1 * q_2) * q_3 = (q_1 * q_3) * (q_2 * q_3)$ が成り立つ。

例 2.1. p を奇素数とします。 $\mathbf{Z}_p \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ は、2項演算 $a * b = 2b - a$ のもとでカンドルです。このカンドルのことを **2面体カンドル** といい、 R_p で表します。

曲面結び目の射影図とは、 \mathbf{R}^3 へのジェネリックな射影による像において、2重点曲線の周りで下方の像を切断することで交点の上下の情報を入れたものをいいます(図1)。射影図の連結成分をシートといい、曲面結び目 F の射影図 D のシートの集合を $\Sigma(D)$ で表します。 F と \mathbf{R}^3 の向きから、各シートの法線方向を決めます。射影図 D の Q -彩色とは、カンドル Q への写像 $C: \Sigma(D) \rightarrow Q$ のことで次を満たすものとします:各2重点曲線の周りの上方シートの色を μ 、下方シートのうち上方シートの法線方向に関して裏側にある下方シートの色を λ_1 、表側にある下方シートの色を λ_2 としたとき、 $\lambda_1 * \mu = \lambda_2$ となる(図1)。 D の Q -彩色全体を $Col_Q(D)$ で表します。

命題 2.2. D を曲面結び目 F の射影図としたとき、 $|Col_Q(D)|$ は曲面結び目の不変量です。

Q をカンドルとします。 $n > 0$ に対して、 Q^n を基底とする自由加群 $C_n^R(Q) := \mathbf{Z}Q^n$ とおきます。また、 $C_0^R(Q) := \mathbf{Z}$ とおき、 $n < 0$ に対して $C_n^R(Q) := 0$ とします。また、境界準同型 $\partial_n: Q^n \rightarrow Q^{n-1}$ を

$$\partial_n(q_1, \dots, q_n) := (-1)^n \sum_{i=1}^n \{ (-1)^i (q_1, \dots, \hat{q}_i, \dots, q_n) - (-1)^i (q_1 * q_i, \dots, q_{i-1} * q_i, q_{i+1}, \dots, q_n) \}$$

と定義します。このとき、 $C_n^R(Q) = \{C_n^R(Q), \partial_n\}$ はチェイン複体です。また、 $n > 1$ に対して、 $C_n^D(Q)$ を、 $\{(q_1, \dots, q_n) | q_i = q_{i+1} \text{ for some } i\}$ を基底とする自由加群とし、 $C_n^Q(Q) := C_n^R(Q)/C_n^D(Q)$ とおき、 $n \leq 0$ に対して、 $C_n^Q(Q) := C_n^R(Q)$ とします。このとき、 $C_n^Q(Q) = \{C_n^Q(Q), \partial_n\}$ もチェイン複体です。このとき、チェイン複

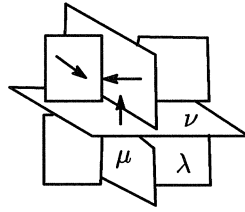


図 2

体 $C_n^Q(Q)$ から、カンドルホモロジー群とカンドルコホモロジー群を定義します。このホモロジー群、コホモロジー群は、[2] で定義されました。カンドルホモロジー群は、[4] におけるラックホモロジー群の変更したものとみることできます。

A をアーベル群のとき、次の 2 つの等式を満たす写像 $\theta : Q \times Q \times Q \rightarrow A$ は、自然に 3-コサイクルを誘導します:

$$\begin{aligned} & \theta(x, y, z) + \theta(x * z, y * z, w) + \theta(x, z, w) \\ &= (\theta(x * y, z, w) + \theta(x, y, w) + \theta(x * w, y * w, z * w)), \\ & \theta(x, x, y) = \theta(x, y, y) = 0 \end{aligned}$$

例 2.3. [14] において、作用が自明である 3 次元コホモロジー $H^3(R_p, \mathbf{Z}_p) \cong \mathbf{Z}_p$ であり、その生成元となるような Mochizuki's 3-コサイクル

$$\theta_p(x, y, z) = (x - y) \frac{y^p + (2z - y)^p - 2z^p}{p}$$

が与えられました。

Q を有限カンドルとし、 θ をアーベル群 A に値をとる Q の 3-コサイクルとします。 D を曲面結び目 F の射影図とします。彩色 C に対して、3 重点 t のボルツマンウエイトを

$$B(C, t) = \epsilon(t)\theta(x, y, z) \in A$$

で定義します。ただし、シート λ, μ, ν が、3 重点 t の周りのシートの法線方向に関して図 2 の位置にあるとき、シート λ, μ, ν の色をそれぞれ x, y, z とします。さらに、 $\epsilon(t)$ を 3 重点 t の符号とします。そのとき、

$$\Phi_\theta(F) = \left\{ \sum_t B(C, t) \right\}_{C \in \text{Col}_Q(D)}$$

が D の取り方によらないことが知られており、カンドルコサイクル不変量といいます (cf. [2])。ここで、 \sum_t は D のすべての 3 重点を取ります。 $\Phi_\theta(F)$ は M の multi-set の元として考えます。

例 2.4. 例 2.3 で与えられた 3-コサイクル θ_p に関する、いろいろな曲面絡み目 F のカンドルコサイクル不変量 $\Phi_{\theta_p}(F)$ が計算されています ([1, 2, 7, 9, 10])。例えば、 F が 2-ツイストスパン 3 葉結び目のとき、

$$\Phi_{\theta_p}(F) = \{0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$$

となります。

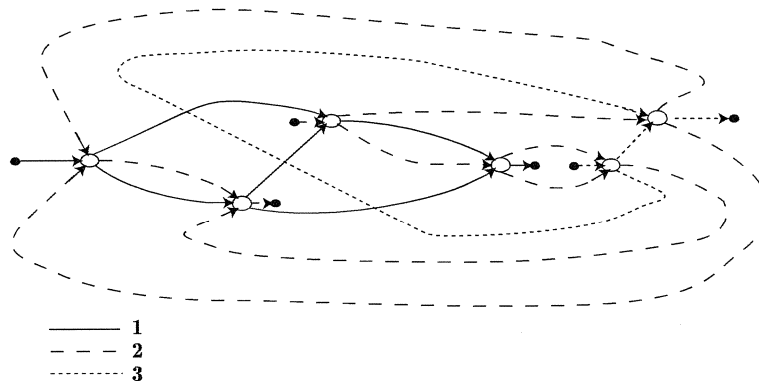


図 3

注 2.5. カンドルコサイクル不変量は様々な曲面絡み目の性質を調べるのに役に立ちます。 F が 2-ツイストスパン 3 葉結び目とし、 F と向きが逆の曲面結び目を $-F$ とすると、

$$\Phi_\theta(F) = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

となります。このことは、2-ツイストスパン 3 葉結び目が非可逆であることを意味しています ([1, 2, 7, 10])。ほかにも、§1 で述べたような 3 重点数や、シート数、リボンコンコルダンス性 ([3])、3 重点解消数 ([8]) などの性質が、カンドルコサイクル不変量を用いることで調べられています。

3. 曲面ブレイドの射影図

2次元円板 D_1 を区間 I_1, I_2 の直積 $I_1 \times I_2$ と同一視します。 $p_2 : (I_1 \times I_2) \times D_2 \rightarrow I_1 \times D_2$ と $p_1 : I_1 \times D_2 \rightarrow D_2$ を自然な射影とすると、 $\pi = p_1 \circ p_2$ となります。 S を曲面ブレイドとおき、 $p_2|_S$ を考えると、必要とあれば S を少し (同値の意味で) 動かすことで、特異点が 2 重点曲線、3 重点、branch point のどれかにできます。このとき、曲面絡み目のときと同様に射影図を定義できます。また、特異点集合 C の p_1 による像を考えると、2次元円板 D_2 上の 1-6 価グラフです。このとき、3 重点は 6 価の頂点に、branch point は 1 価の頂点に対応します。

4. チャート表示

§3 で述べたグラフには、向きとラベルを与えることができ、チャート表示と呼ばれるものになります。この章ではチャート表示について詳しく述べたいと思います。

2次元円板 D_2 上にはめ込まれた 1-6 価有限グラフ (空でも可) で、以下の条件を満たすものを、 m -chart という。

- (1) すべての辺は向きと整数 $\{1, 2, \dots, m-1\}$ によるラベルがついている。
- (2) すべての 6 価の頂点 W において、並んだ 3 つの辺は W の方に向きが付いていて、残り 3 つの辺は W から出る方に向きが付いている；6 つの辺は整数 i と $i+1$ で交互にラベル付けされている。
- (3) すべてのはめ込みの特異点は横断的な 2 重点で、その 2 つの辺に付いているラベルの差は 2 以上となっている。

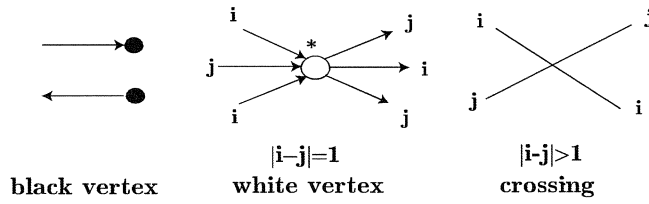


図 4

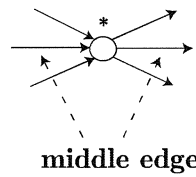


図 5

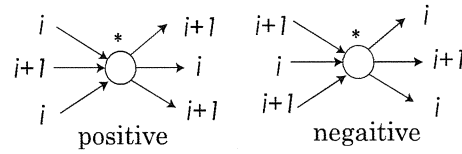


図 6

図 3 は 4-chart の例です。1 価の頂点を **black vertex** といい、6 価の頂点を **white vertex**、特異点を **crossing** といいます (図 4)。white vertex W において、 W に向かう一番左側の辺の左の領域に ‘*’ で印を付けておきます。white vertex W に接合する向きの同じ 3 つの辺のうち、真ん中の辺を **middle edge** といい、それ以外の辺を **non-middle edge** といいます (図 5)。 W のラベルが i と $i+1$ のとき、 W に向かう辺のうちの middle edge のラベルが $i+1$ のとき、 W は **positive** といい、 i のとき **negative** という (図 6)。 m -chart Γ に対して、 Γ 内の white vertex の数、crossing の数を、それぞれ $w(\Gamma)$ 、 $c(\Gamma)$ で表す。S. Kamada により、 m -chart Γ に対して、次数 m の曲面ブレイド $S(\Gamma)$ を構成する方法を与えました。これは、同値な意味で一意的です。§3 で述べたように、white vertex, black vertex が $I_1 \times D_2$ 内における 3 重点、branch point に対応していることに注意しておきます。図 3 の 4-chart が表す曲面ブレイドの閉包は、曲面絡み目としては、2-ツイストスパン 3 葉結び目です。

図 7 で表された m -chart の局所変形はそれぞれ、 C_I -、 C_{II} -、 C_{III} -move といい、まとめて C -move といいます。2 つの m -chart Γ と Γ' が有限回の C -move と D_2 のアンビエントアイソトピーで移りあうとき、 Γ と Γ' は C -move 同値といいます。

定理 4.1 ([12, 13]). 2 つの曲面ブレイドを表す m -chart が C -move 同値であることと、それらが表す曲面ブレイドは同値であることは必要十分条件である。

注 4.2. チャート表示を用いて、曲面絡み目 F の w -index は次のように表すことができます。

$$w(F) := \min\{w(\Gamma) \mid S(\Gamma) \text{ の閉包が } F \text{ を表す}\}.$$

5. チャート表示とカンドルコサイクル不変量

チャート表示を用いて、§2 で定義されたカンドルによる彩色やカンドルコサイクル不変量を表すことができます。

Γ を m -chart とし、 $D_2 \setminus \Gamma$ の連結成分 (領域) がなす集合を $\Sigma(\Gamma)$ で表します。写像 $C: \Sigma(\Gamma) \rightarrow Q^m$ が Γ の Q -coloring とは、次の条件を満たすときいいます；任意の辺 e に対して、 e のラベルが i で、 e の左側と右側の領域をそれぞれ λ_1 と λ_2 とすると

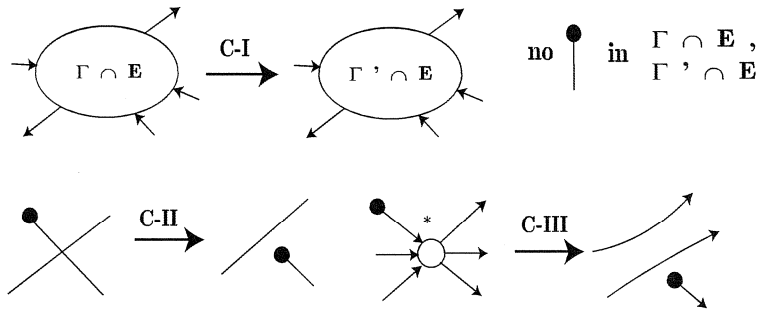


図 7

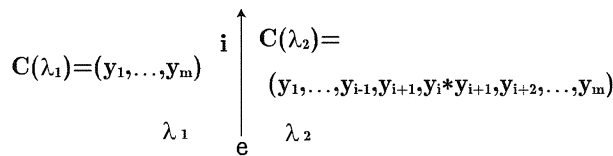


図 8

き、 $C(\lambda_1) = (y_1, \dots, y_m)$ かつ $C(\lambda_2) = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, y_i * y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_m)$ となる (図 8)。 Γ の Q -colorings の集合を $Col_Q(\Gamma)$ で表すことにします。

Q を有限カンドル、 θ を Q の 3-コサイクルとする。 C を Q -coloring とおく。 C に関する各 white vertex W のボルツマンウエイトを

$$W_\theta(W; C) = \theta(y_i, y_{i+1}, y_{i+2})^{\epsilon(W)} \in A$$

と定義する。ただし、 W のまわり*付きの領域を λ のとき、 $C(\lambda) = (y_1, \dots, y_m)$ とします。 $W_\theta(C) = \sum W_\theta(W; C) \in A$ とおきます。 A の multi-set

$$S_\theta(\Gamma) = \{W_\theta(C)\}_{C \in Col_Q(\Gamma)}$$

とおきます。

定理 5.1 (cf. [2]). m -chart Γ に対して、 $S(\Gamma)$ の閉包が表す曲面絡み目を F とおく。 θ を有限カンドルの 3-コサイクルとする。そのとき、 $\Phi_\theta(F) = S_\theta(\Gamma)$ を満たす。

注 5.2. このチャート表示を用いたカンドルコサイクル不変量の定義は、[2] におけるものの言い換えになっています。

6. 定理 1.1、系 1.3 について

図 3 で与えられた 4-chart を表す曲面ブレイドの閉包は、2-ツイストスパン 3 葉絡み目 F です。 $w(F) = 6$ であることは、I. Hasegawa により知られています。定理 1.1 は、 $w(F) = 6$ の別証明になっています (例 2.4 より $\Phi_{\theta_p}(F)$ は 0 でない元を持つ)。 F に g_1 個の自明な 1-ハンドルを接着することで得られる曲面結び目 F_1 とし、 F_1 に種数 g_2, \dots, g_n の自明な曲面 F_2, \dots, F_n を、分離和することで得られる曲面絡み目 F' は $\Phi_{\theta_p}(F') \ni 2 \neq 0$ を満たします。 F' は図 9 の $(2n+3)$ -chart が表す曲面ブレイドの閉包です。このことと定理 1.1 から、 $w(F') = 6$ となり、系 1.3 は成立することがわかります。

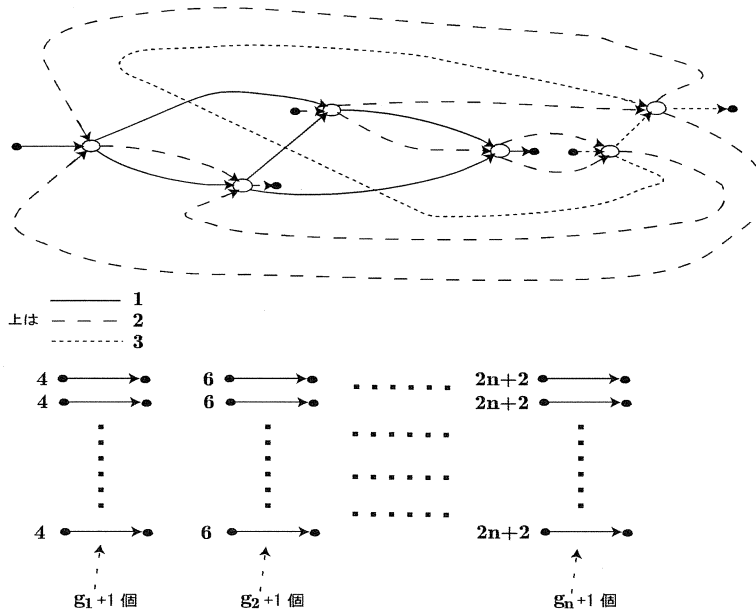


図 9

REFERENCES

- [1] S. Asami and S. Satoh, *An infinite family of non-invertible surfaces in 4-spaces*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), 285–296.
- [2] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **355** (2003), 3947–3989.
- [3] J. S. Carter, M. Saito and S. Satoh, *Ribbon concordance of surface-knots via quandle cocycle invariants*, J. Aust. Math. Soc. **80** (2006), 131–147.
- [4] R. Fenn, C. Rourke and B. Sanderson, *James bundles and applications*, preprint.
- [5] I. HasegawaHa: *The lower bound of the w -indices of non-ribbon surface-links*, Osaka J. Math., **41** (2004), no. 4, 891–909.
- [6] E. Hatakenaka: *An estimate of the triple point numbers of surface-knots by quandle cocycle invariants*, Topology Appl. **139** (2004), no. 1–3, 129–144.
- [7] M. Iwakiri, *Calculation of dihedral quandle cocycle invariants of twist spun 2-bridge knots*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005), 217–229.
- [8] M. Iwakiri, *Triple point cancelling numbers of surface links and quandle cocycle invariants*, to appear in Topology Appl.
- [9] M. Iwakiri, *Quandle cocycle invariants of pretzel links*, to appear in Hiroshima Math. J.
- [10] M. Iwakiri, *Quandle cocycle invariants of torus links*, to appear in the the proceedings of the international conference “Intelligence of Low Dimensional Topology 2006”, World Sci. Publishing Co..
- [11] S. Kamada: *Surfaces in R^4 of braid index three are ribbon*, J. Knot Theory Ramifications, **1** (1992), 137–160.
- [12] S. Kamada: *An observation of surface braids via chart description*, J. Knot Theory Ramifications, **4** (1996), 517–529.
- [13] S. Kamada: *Braid and knot theory in dimension four*, Math. Surveys Monogr. **95**, Amer. Math. Soc., 2002.
- [14] T. Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 287–330.

- [15] M. Ochiai, T. Nagase, A. Shima: *There exists no minimal n -chart with five white vertices*, Proc. Sch. Sci. Tokai Univ. **40** (2005), 1–18.
- [16] L. Rudolph: *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*, Comment. Math. Helv, **58** (1983) 1-37.
- [17] S. Satoh, A. Shima, *The 2-twist-spun trefoil has the triple point number four*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 1007-1024.
- [18] S. Satoh, A. Shima, *Triple point numbers and quandle cocycle invariants of knotted surfaces in 4-space*, New Zealand J. Math. **34**(2005), 71-79.
- [19] K. Tanaka, *On surface-links represented by diagrams with two or three triple points*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005), 963-978.
- [20] O. Ya. Viro: Lecture given at Osaka City University, September, 1990.

Classification of behavior induced by noise in a spatio-temporal intermittency model

越坂部 恭史* (Osakabe Yasushi)

abstract

It has been reported that a spatially extended model of the van der Pol oscillator shows spatio-temporal intermittency. Recently the influence of external additive noise on the model was investigated, where a re-entrant phenomenon was observed. In this study, we present a phase diagram of the model to review the behavior of these dynamics.

1 はじめに

自然界では常に外部からのノイズにさらされている。このようなノイズは系を乱すこと以外にどのような役割があるのだろうか。非平衡系のパターン形成におけるノイズが与える影響には様々なものがある。早瀬らは時空間欠性を示す Coulet-Kramar(CK) モデル [1] にノイズを与え、その影響を調べる研究を行った [2]。ノイズ強度を上げていくと時空間欠性は消え、ノイズだけの状態になる。さらにノイズ強度を上げると再び時空間欠性が現れるリエントラント転移が見られた。早瀬らの結果はあるパラメーターに限られたものであったが、様々なパラメーターで同様のシミュレーションを行ったところ、あるパラメーター範囲に限ってリエントラント転移が見られることがわかった。今回 CK モデルにおけるリエントラント転移が起こるメカニズムやノイズが与える影響について説明する。

2 シミュレーション

シミュレーションに用いた CK モデルは、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v + \xi_u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\gamma(u)v - \frac{\partial V(u)}{\partial u} + u_{xx} + v_{xx} + \xi_v, \quad t > 0. \quad (2)$$

*北海道大学大学院理学研究科数学専攻

ただし, $\alpha, \lambda \in \mathbf{R}$ はパラメーターで

$$\gamma(u) = 1 - \alpha u^2 + u^4, \quad (3)$$

$$V(u) = -\lambda \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6}, \quad (4)$$

とする.

シミュレーションは周期境界条件の下, $\lambda = 0.1$ で固定する. 空間の大きさは $L = 200$, 時間の長さは $T = 200$ とし, 刻み幅はそれぞれ $dx = 0.2, dt = 0.001$ とした. 初期条件は j を空間刻みのセル番号とすると, $u_j, v_j \in [-1, 1]$ のランダムに与えている. また, ξ_u, ξ_v はそれぞれ u, v におけるノイズを表し, 同じ強度とする. ノイズは平均が 0 で, 時間的にも空間的にも無相関な $\xi(x, t)$ を加えることにし, その強度 ξ_0 を $\langle \xi(x, t)\xi(x + dx, t + dt) \rangle = \xi_0^2 \delta(dx)\delta(dt)$ で定義する. α と ξ_0 をそれぞれ変化させたときの時空間パターンは主に図 1 ~ 図 8 にある 8 パターンとなり, 相図にまとめたものが図 9 である. 時空間欠性のリエントラント転移は図中で (A) \rightarrow (B) \rightarrow (C) \rightarrow (D) \rightarrow (E) \rightarrow (F) と変化している場合である. また, この系の最大リアプノフ指数は $\alpha \geq 2.69$ で正となり, カオス的な時空間パターンを示す. 図 7 は時空間欠性は見られないが, 正と負の時空間カオスが入り混じったパターンであり, 図 8 では時空間カオスではない単純なパターンとなっている.

3 結論と今後の展望

CK モデルにおける時空間欠性のリエントラント転移は非常に限られたパラメーター範囲でしか観察されない. これは $\alpha > 2.0$ の時に現れるリミットサイクルが非常に大きい場合でないと時空間欠性が見られないためである. 時空間欠性を示さないパラメーター範囲 ($2.69 \leq \alpha < 3.4$) でもノイズ強度を上げていくとこの系ががもつ $(0, 0)$ のサドルは安定化し, リエントラント転移に非常に似たパターンの変化を起こす. これらのことより時空間カオスを示すパラメーター範囲 ($\alpha \geq 2.69$) ではノイズを与えることはサドルを安定化させるという早瀬らの主張を広いパラメーター範囲で確認することができた. 本研究では CK モデルのあるパラメーター範囲に限ってノイズ強度によって変化する時空間パターンについて分類したが, ここで見られたノイズを与えることで時空間欠性のリエントラント転移を起こす一般化したモデルというものはまだできていない. さらに解析を進め, この現象が一般に見られるモデルを作ることは大変興味深い課題である. また, CK モデルにおいて $\alpha \geq 2.69$ で時空間カオスを示しているが, カオスになるまでの道筋に関しては未だわかっていない. このことについてもさらに調べる必要があると言える.

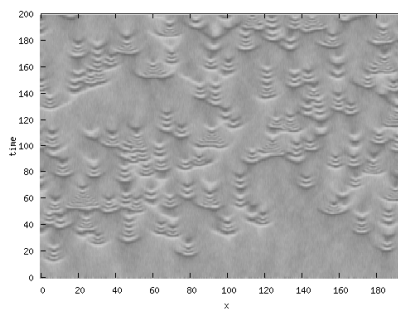


Figure 1: $\alpha = 3.8, \xi_0 = 0.01$

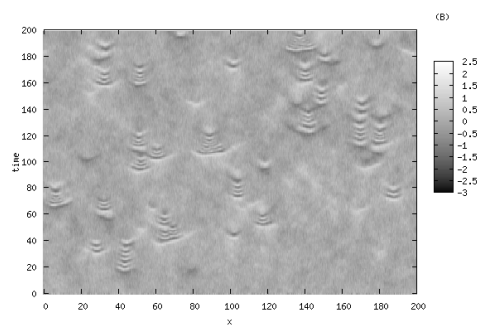


Figure 2: $\alpha = 3.8, \xi_0 = 0.015$

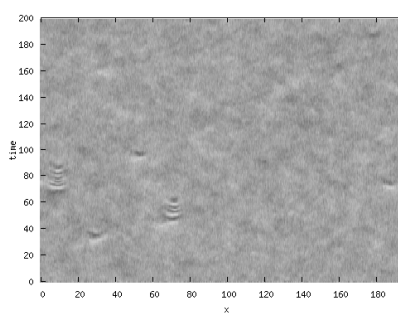


Figure 3: $\alpha = 3.8, \xi_0 = 0.019$

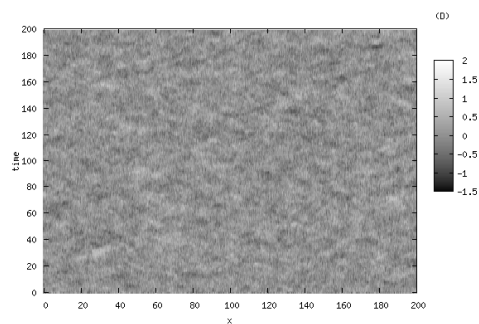


Figure 4: $\alpha = 3.8, \xi_0 = 0.022$

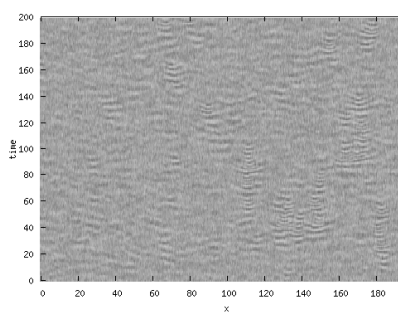


Figure 5: $\alpha = 3.8, \xi_0 = 0.032$

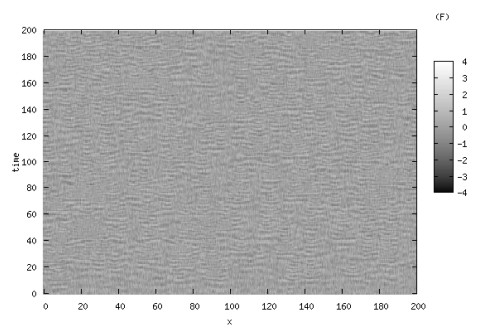


Figure 6: $\alpha = 3.8, \xi_0 = 0.04$

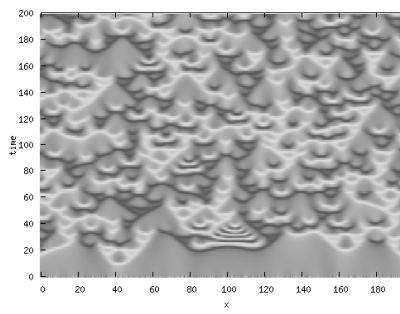


図 7: $\alpha = 3.0, \xi_0 = 0.0$

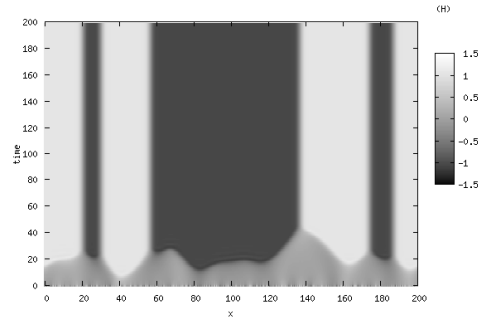


図 8: $\alpha = 1.5, \xi_0 = 0.0$

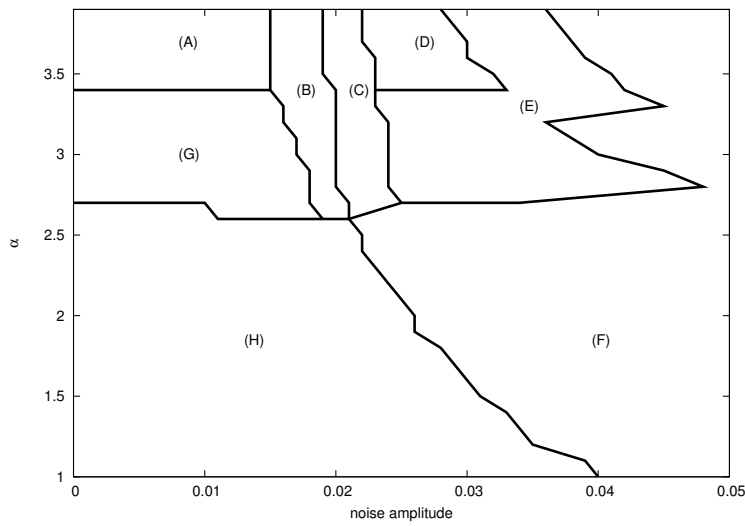


図 9: ノイズ強度と α の相図 . $\lambda = 0.1$ で固定 .

参考文献

- [1] P.Coullet and L.Kramer, *Chaos*, **14**, 244 (2004).
- [2] Y.Hayase and H.R.Brand, *Europhys.Lett.* **66**, 881 (2004).

Anisotropic and weighted total variation for image restoration
(重み付き・異方性全変動汎関数最小化を用いた画像修復)

川俣 弘治 (新潟大学自然科学研究科)

まえがき 全変動汎関数の最小化を用いた Rudin-Osher-Fatemi による画像修復モデル [7] の離散的・異方性・重み付全変動汎関数への一般化を考え, 条件なしの最小化問題から, 制約付最小化問題の解を導く. さらに, この方法による画像修復のための Hybrid 最急降下法を用いたアルゴリズムを示す.

1 準備

1.1 画像空間, 離散的勾配・発散

N を正の整数とし, $X = R^{N \times N}$, $Y = X \times X$ とおく. X の各元 $u = (u_{i,j})$ が 1 つの画像を表す. 画像空間 X とその直積空間 Y の内積とノルムを次のように定義する.

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i,j=1}^N u_{i,j} v_{i,j}, \quad \|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (u, v \in X)$$

$$\langle p, q \rangle_Y := \sum_{i,j=1}^N (p_{i,j}^1 q_{i,j}^1 + p_{i,j}^2 q_{i,j}^2), \quad \|p\|_Y := \sqrt{\langle p, p \rangle_Y} \quad (p = (p^1, p^2), q = (q^1, q^2) \in Y)$$

また, $p \in Y$ に対し $|p_{i,j}| = \sqrt{(p_{i,j}^1)^2 + (p_{i,j}^2)^2}$ ($i, j = 1, \dots, N$) と定義する.

ここで, $u \in X$ に対し, 離散的勾配 $\nabla: X \rightarrow Y$ を次のように定義する.

$$(\nabla u)_{i,j} := ((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

$$(\nabla u)_{i,j}^1 := \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \dots & i < N \\ 0 & \dots & i = N \end{cases}, \quad (\nabla u)_{i,j}^2 := \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \dots & j < N \\ 0 & \dots & j = N \end{cases}$$

また, 離散的発散作用素 $\text{div}: Y \rightarrow X$ を次のように定義する.

$$\text{div} := -\nabla^* \quad (\text{共役作用素})$$

具体的には, 任意の $p \in Y$ に対し次のようになる.

$$(\text{div})_{ij} = \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & \dots & 1 < i < N \\ p_{i,j}^1 & \dots & i = 1 \\ -p_{i-1,j}^1 & \dots & i = N \end{cases} + \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & \dots & 1 < j < N \\ p_{i,j}^2 & \dots & j = 1 \\ -p_{i,j-1}^2 & \dots & j = N \end{cases}$$

$(i, j = 1, 2, \dots, n)$

また, $\bar{X} := \{v \in X : \sum_{i,j=1}^N v_{i,j} = 0\}$ とおく. $\text{div}(Y) = \bar{X}$ である. (参考文献 [2])

1.2 全変動汎関数

$\phi: R^2 \rightarrow R$ を連続かつ凸な偶関数で, 次の条件 (A) を満たす関数とする.

$$(A) \quad \begin{cases} (i) & \phi(x, y) > 0 \quad ((x, y) \neq (0, 0)) \text{ かつ } \phi(0, 0) = 0 \\ (ii) & \text{positively } -1 \text{ - homogeneous} \quad (\text{i.e. } \phi(tx, ty) = t\phi(x, y), (x, y) \in R^2, t \geq 0) \end{cases}$$

ここで, $\alpha = (\alpha_{i,j})$, $\alpha_{i,j} > 0$ ($i, j = 1, \dots, N$) とし, 異方性・重み付き離散全変動汎関数を次のように定義する.

$$(TV) \quad J(u) = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{i,j} \phi((\nabla u)_{i,j}), \quad u \in X$$

このとき, $J(\cdot)$ は連続, 凸, かつ, *positively* - 1 - *homogeneous* な汎関数である.

重み関数 重み関数 $\alpha = (\alpha_{i,j})$ は, あらかじめ観測画像 $g = (g_{i,j}) \in X$ から定める.

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{1 + \eta |\hat{g}(i, j)|^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$\hat{g}(i, j) = - \sum_{l, m=-2, (l, m) \neq (0, 0)}^2 \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2}} g(i-l, j-m) \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$$

$\alpha_{i,j}$ は画像 g のエッジの近傍では小さく、平坦な部分では大きな値をとる。

Wulff 集合 条件 (A) を満たす関数 ϕ に対し、次のように定義した集合 W_ϕ を Wulff-Shape と呼ぶ。

$$W_\phi := \{(x, y) \in R^2 : xu + yv \leq \phi(u, v) \quad \forall (u, v) \in R^2\}$$

W_ϕ は R^2 の有界閉凸集合であり、 0 は W_ϕ の内点、かつ、 $-W_\phi = W_\phi$ である。また、次が成り立つ。

$$\phi(x, y) = \sup_{(u, v) \in W_\phi} xu + yv, \quad (x, y) \in R^2$$

ϕ と W_ϕ の具体例

$$(1) \quad \phi(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} \text{ のとき } W_\phi = \{(x, y) \in R^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$

$$(2) \quad \phi(u, v) = |u| + |v| \text{ のとき } W_\phi = \{(x, y) \in R^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$$

$$(3) \quad \phi(u, v) = \max\{|u|, |v|\} \text{ のとき } W_\phi = \{(x, y) \in R^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

Legendre-Fenchel 変換 $J^*(v) := \sup_{u \in X} \{ \langle u, v \rangle - J(u) \}$, $v \in X$

命題 1 J と J^* について次が成り立つ。

$$(1) \quad J(u) = \sup_{v \in K} \langle u, v \rangle, \quad u \in X \quad (K \text{ の支持関数})$$

$$K := \{ \text{div}(p) : p \in Y, p_{i,j} \in \alpha_{i,j} W_\phi, i, j = 1, 2, \dots, N \}$$

$$(2) \quad J^*(v) = \chi_K(v) = \begin{cases} 0 & \dots v \in K \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (K \text{ の定義関数})$$

1.3 Hybrid 最急降下法

定義 H を Hilbert 空間、 \langle, \rangle をその内積とし、 $\| \cdot \|$ をこの内積から誘導されたノルムとする。写像 $T : H \rightarrow H$ に対し、 $\text{Fix}(T)$ で T の不動点の集合を表わす。

(1) $\|T(u) - f\|_Y < \|u - f\|_Y$, $f \in \text{Fix}(T) \neq \emptyset$, $u \in Y \cap (\text{Fix}(T))^c$ を満たす非拡大写像 T を attracting nonexpansive な写像という。

(2) $\langle T(u) - T(v), u - v \rangle \geq 0$ ($u, v \in H$) かつ、 $\langle T(u) - T(v), u - v \rangle = 0$ ならば $T(u) = T(v)$ が成り立つとき、 T を paramonotone な写像という。

Hybrid 最急降下法 [4] H を有限次元 Hilbert 空間とする。写像 $T : H \rightarrow H$ は attracting nonexpansive な写像であり、 $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ とする。また、写像 $\Psi : H \rightarrow R$ は微分可能とし、 $\Psi' : H \rightarrow H$ は Lipschitz 連続かつ paramonotone な写像とする。 $\{\gamma_m\}$ は $\sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_m)^2 < \infty$ かつ $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m = \infty$ を満たす非負数列とする。このとき、初期値 $p_0 \in Y$ を任意にとるとき、

$$(T) \quad p_{m+1} = T(p_m) - \gamma_{m+1} \Psi'(T(p_m)), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

によりつくられた点列 $\{p_m\}$ は、 $\Psi(p) = \inf_{v \in \text{Fix}(T)} \Psi(v)$ を満たす $p \in \text{Fix}(T)$ に収束する。

2 画像修復

$\sigma > 0$ とし、観測画像 g は piecewise smooth な原画像 $u \in X$ と、平均が 0 ($\bar{n} = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N n_{i,j} = 0$),

分散 $\sigma^2 (= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N (n_{i,j} - \bar{n})^2)$ の白色ガウスノイズ σ からなるものとする。 (i.e. $g = u + n$)

我々は観測画像 g からノイズを消去し修復する問題を、次の制約付極値問題として捉える。

$$(VP1)_\sigma \quad \min\{J(v) : v \in B\}$$

ここで、 $B := \{v \in X : \|v - g\|^2 \leq N^2 \sigma^2\}$ である。 $\partial B := \{v \in B : \|v - g\|^2 = N^2 \sigma^2\}$ とおく。

以後、 u と n には相関が無いとすれば、すなわち、 $\langle u, n \rangle = 0$ とすると、

$$(H) \quad \|g - \bar{g}\|^2 \geq N^2 \sigma^2$$

が成り立つ。以後、これを仮定する。

定理 1 $(VP1)_\sigma$ は唯 1 つの解 u をもち、次の条件を満たす。

$$(1) \quad \|u - g\| = N\sigma$$

$$(2) \quad \bar{u} = \bar{g}$$

次に, $\lambda > 0$ を固定し, 条件なしの最小化問題 $(VP2)_\lambda$ を考える.

$$(VP2)_\lambda \quad \min_{u \in X} \left(\frac{\|u - g\|^2}{2\lambda} + J(u) \right)$$

定理 2 $(VP2)_\lambda$ は唯一解 $u = g - \lambda P_K(\frac{1}{\lambda}g)$ をもつ. ここで, $P_K : X \rightarrow X$ は射影作用素である.

定理 3 $((VP1)_\sigma$ と $(VP2)_\lambda$ の関係)

$\sigma > 0$ に対し $\|P_{\lambda K}(g)\| = N\sigma$ となる $\lambda > 0$ が存在し, $u = g - P_{\lambda K}(g)$ は $(VP1)_\sigma$ の解である.

3 画像修復アルゴリズム

最適な λ の求め方 $f(s) = \|P_{sK}(g)\|$ ($s \geq 0$) とおき, $\{\lambda_n\}$ を以下のように帰納的に定める.

(i) $f(\lambda_0) \neq 0$ となるような $\lambda_0 > 0$ を任意に定め, $v_0 = P_{\lambda_0 K}(g)$, $f_0 = f(\lambda_0) = \|v_0\|$ とおく.

(ii) $\lambda_{n+1} = \frac{N\sigma}{f_n} \lambda_n$, $v_{n+1} = P_{\lambda_{n+1} K}(g)$, $f_{n+1} = \|v_{n+1}\|$, $n = 0, 1, 2, \dots$

このとき, 次が成り立つ.

定理 4 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \bar{\lambda}$ となる $\bar{\lambda}$ が存在し, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f(\bar{\lambda}) = N\sigma$, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} g - v_n = \hat{u}$ (\hat{u} は $(VP1)_\sigma$ の唯一解)

$P_{\lambda K}(g)$ の求め方 Hybrid 最急降下法を用いて射影 $P_{\lambda K}(g) = \lambda P_K(\frac{1}{\lambda}g)$ を計算する.

$W = \{p \in Y : p_{i,j} \in \alpha_{i,j} W_\phi, \forall i, j = 1, 2, \dots, N\}$ は Y の閉凸部分集合であり, $K = \text{div}(W)$ である.

$$P_K(\frac{1}{\lambda}g) = \text{arc min}_{v \in K} \|v - \frac{1}{\lambda}g\|$$

$\Psi_\lambda(p) := \|\text{div}(p) - \frac{1}{\lambda}g\|^2$ とおく. $\Psi'_\lambda(p) = -2\nabla(\text{div}(p) - \frac{1}{\lambda}g)$ である.

$\Psi'_\lambda : Y \rightarrow Y$ は次を満たす.

(i) $\|\Psi'_\lambda(p) - \Psi'_\lambda(q)\|_Y \leq 2\|\nabla\| \|\text{div}\| \|p - q\|_Y$, $p, q \in Y$

(ii) Ψ'_λ は paramonotone な写像である.

又, 凸射影 $P_W : Y \rightarrow Y$ は attracting nonexpansive な写像である.

よって, $T(p) := P_W(p)$, $p \in Y$ とおくと, T と Ψ'_λ は Hybrid 最急降下法の仮定を満たし, アルゴリズム (T) によって得られる点列 $\{p_m\}$ の極限 $p \in W$ は $\|\text{div}(p) - \frac{1}{\lambda}g\|^2 = \inf_{v \in W} \|\text{div}(v) - \frac{1}{\lambda}g\|^2$ を満たす. すなわち, $P_K(\frac{1}{\lambda}g) = \text{div}(p)$ である.

$(VP1)_\sigma$ の近似解を求めるアルゴリズム $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ とする.

$f(\lambda_0) \neq 0$ となるような $\lambda_0 > 0$ を任意に定める.

(1) λ_n が定まったとき, λ_{n+1} を次のように定める.

(i) $p_0 = (p_0^1, p_0^2) = (0, 0) \in Y$ とおく.

(ii) $\{p_m\} \subset Y$ を次のようにして帰納的に求める.

$$p_{m+1} = P_W(p_m) - \gamma_{m+1} \Psi'_{\lambda_n}(P_W(p_m)), \quad m = 0, 1, \dots$$

(iii) $|p_{m+1} - p_m| \leq \varepsilon_1$ となる m が得られたら停止し,

$$v_n = \lambda_n \text{div}(p_{m+1}), \quad f_n = \|v_n\|, \quad \lambda_{n+1} = \frac{N\sigma}{f_n} \lambda_n \text{ とおく.}$$

$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| > \varepsilon_2$ ならば (1) へ戻り, λ_n を λ_{n+1} で置き換える.

$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leq \varepsilon_2$ ならば終了.

以上のアルゴリズムにより得られた $\hat{u} = g - v_n$ を $(VP1)_\sigma$ の近似解とする.

4 画像の修復例

$u = (u_{i,j})$ を修復画像, $f = (f_{i,j})$ を原画像とする。

PSNR(Peak Signal to Noise Ratio)

画像の場合, 画素の取りうる最大値を用いた PSNR がよく用いられ, 単位をデシベル [db] とし, 次の式で定義される。

$$PSNR := 10 \log_{10} \frac{255^2}{MSE} \quad , \quad MSE := \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N (u_{i,j} - f_{i,j})^2$$

PSNR の値が大きいほど原画像に近い修復がされているとみなされる。一般に $PSNR \geq 40$ だと原画像と修復画像の違いを視認できない。

実験例

Wulff 集合の違いによる修復の差

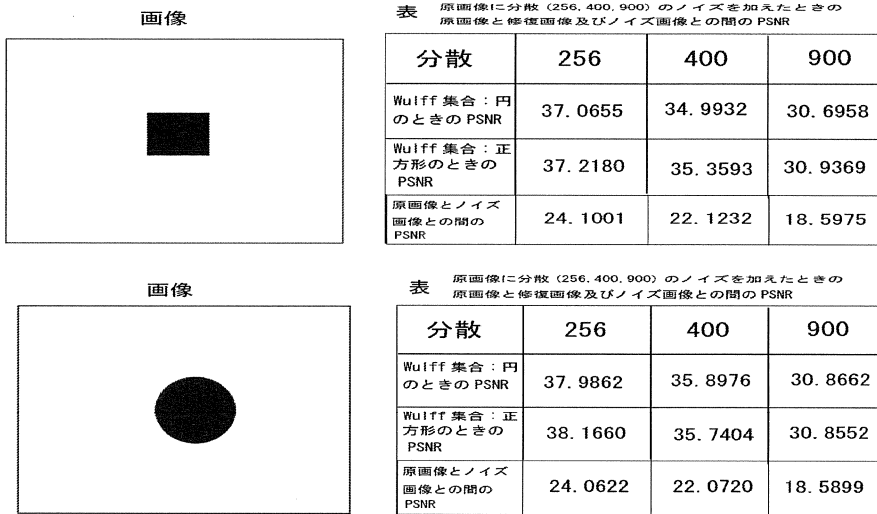
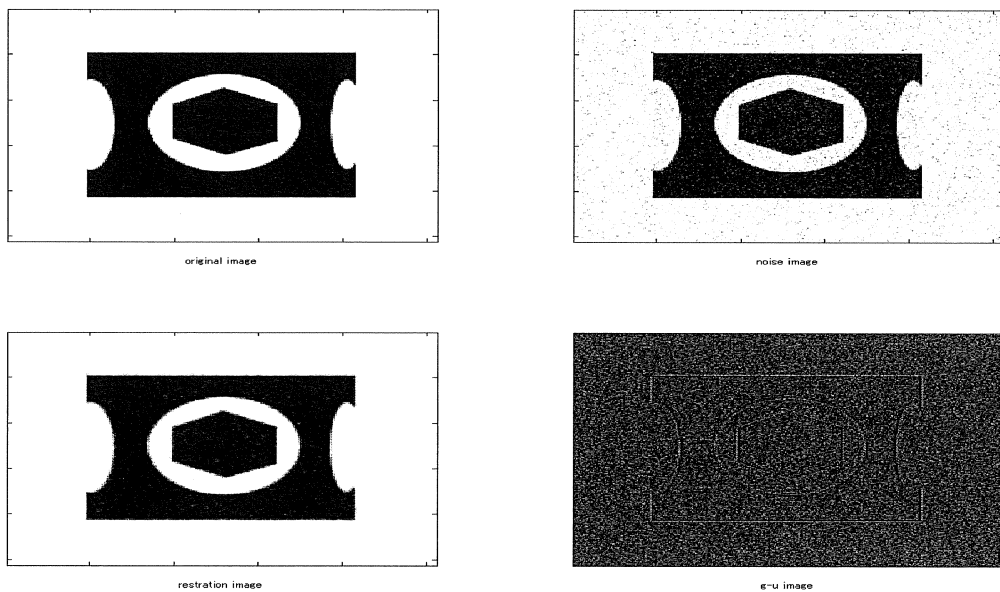


図 原画像と修復画像の比較

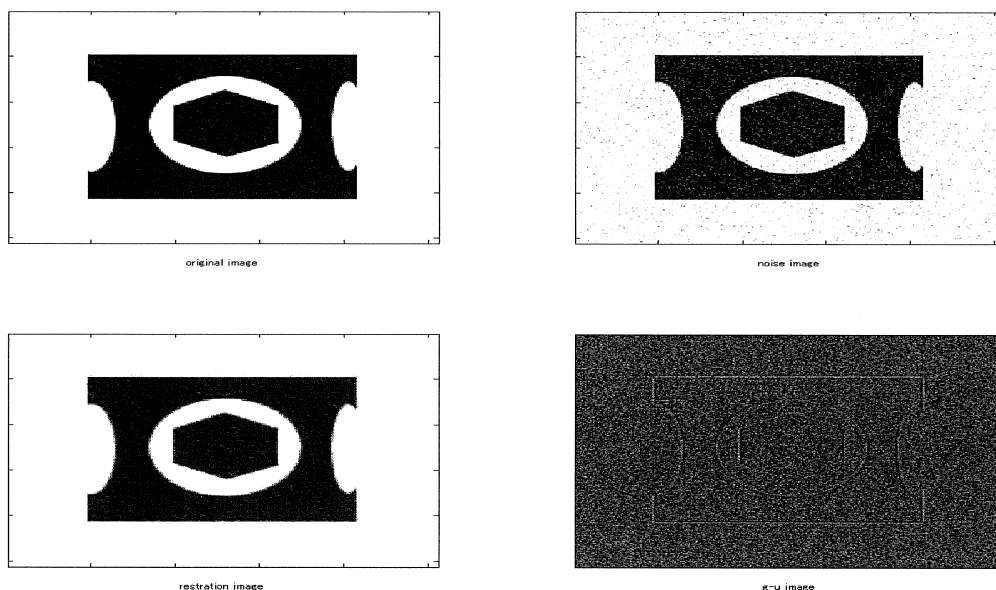
$$\phi(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} \quad , \quad W_\phi = \{(x, y) \in R^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$

分散 $\sigma^2 = 900$ のとき, $PSNR = 27.9956$



$$\phi(u, v) = |u| + |v|, \quad W_\phi = \{(x, y) \in R^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$$

分散 $\sigma^2 = 900$ のとき, $PSNR = 28.3376$



5 まとめ

本論分では画像修復のために Rudin-Osher-Fatemi モデルを修正したモデルを提案し, 実際にシミュレーションを行った.

anisotropic function ϕ に関しては Rudin-Osher-Fatemi モデルの幅を広げたが, 今回用いた種類の ϕ では視認による修復画像の改善はなかった. 今後修復効果のある ϕ を見つけることが課題となった.

文献

- (1) Antonin Chambolle, "An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications", Journal of Mathematical Imaging and Vision 20:89-97,2004
- (2) J.F.Aujol, G.Aubert, L.Blanc-Feraud, A.Chambolle, "Decomposing an image: Application to textured images and SAR images" INRIA Research Report 4704,to appear in JMIV , <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4704.html> ,2003
- (3) Stanley J. Osher , Selim Esedoglu, "Decomposition of Image by the Anisotropic Rudin-Osher-Fatemi Model", Mathematics Department, UCLA, July 24 ,2003
- (4) Nobuhiko Ogura, Isao Yamada, "Nonstrictly Convex Minimization over the Bounded Fixed Point Set of a Nonexpansive Mapping", Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol24,No.1&2:pp129-135, 2003
- (5) V.Barbu and Th.Precupanu,University of Jassy(Romania)" CONVEXITY and OPTIMIZATION in BANACH SPACES",1978
- (6) Y.Chen , T.Wunderli, "Adaptive total variation for image restoration in BV space", J.Math.Anal.Appl.272 ,117-137 ,2002
- (7) L.Rudin, S.Osher, and E.Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithm" , Physica D, 60:259-268,1992

Geodesics on Sub-Riemannian manifolds

東京理科大学理工学部 PD, 北川 友美子 (Yumiko KITAGAWA)

Department of Mathematics,
Tokyo University of Science

1 Introduction.

滑らかな多様体上の接分布と、その上のリーマンファイバー計量の組をサブリーマン多様体と呼びます。このリーマンファイバー計量はカルノ・カラテオドリ計量とも呼ばれ、工学の世界では制御理論における最適制御に深く関係しています。例えば、テザーと呼ばれる細い紐のようなものでつながれた二つの衛星の伸展・回収制御の最適制御を議論するうえで用いられるようです。

ここでは特に接分布が、そのセクションのブラケット積達で接空間全体を張るという条件をみたすようなものを考えます。この条件は、bracket-generating または非ホロミーと呼ばれています。このようなサブリーマン多様体の測地線を調べました。

多様体上の接分布の構造は、サブリーマン多様体に密接に関係していて様々な問題を考える上での出発点となりますので、少し紹介をしておきます。非ホロミーであるような接分布の代表的なものとして、Martinet 分布、接触構造、Engel 構造、カルタンの分布などが挙げられます。Martinet 分布は 3 次元の多様体上の 2 次元の分布ですが、特異点をもつため、2 回のブラケット積でやっと 3 次元の接空間を張ることができます。これは非常に扱いにくい分布です。接触構造は、よく知られていますが、余次元 1 で非退化なものです。これは 1 回のブラケット積で 1 次元ずつ次元が上がっていくという美しい構造をしています。Martinet 分布に比べても非常に扱いやすい対象です。Engel 構造は 4 次元の多様体上の 2 次元の接分布で、これも 1 回のブラケット積によって 1 次元ずつ次元が上がります。つまり、2 回ブラケットを繰り返すと 4 次元の接空間を張ります。Engel 構造は、接触構造と同様に局所的な不変量をもたない珍しい分布のひとつです。そして、カルタンの分布というのは、5 次元の多様体上の 2 次元の分布で、1 回のブラケット積で 1 次元上がり 2 回目を施すと 5 次元の接空間を張ってしまうような、特徴的な構造を持っています。E.Cartan によりその自己同型群は 14 次元以下であり、最大次元を持つものは例外型のリー群 G_2 に同型となることが示されています。簡単に言うと、これらの分布にリーマンファイバー計量を入れたものが、サブリーマン多様体です。

リーマン多様体において2点を結ぶ最短線は測地線によって与えられ、測地線は局所的には最短となることが知られています。測地線は、通常、局所座標を用いて2階の常微分方程式で定義されますが、シンプレクティックの言葉を用いると、ハミルトンベクトル場の積分曲線を多様体に落としたものが測地線です。

サブリーマン幾何においては、2点を結ぶ最短線を求める問題はリーマン幾何の場合より複雑な問題となります。リーマン幾何では変分法が用いられ、曲線を摂動させることによって求められますが、サブリーマン幾何では摂動を許さない曲線が存在することがあり、変分法では解くことができなくなるためです。

接分布とその上のリーマンファイバー計量から決まるエネルギーをとり、それに対応するベクトル場の積分曲線を多様体に射影したものを考えます。これを *normal geodesic* といいます。これは、リーマン幾何の場合と同様に、局所的には最短となります。最初、サブリーマン幾何における測地線はこれだけだと思われていましたが、1990年代に、R. Montgomery らによって局所的にも最短とならないような特殊なものが発見されました。これは *abnormal geodesic* と呼ばれ、リーマン幾何には現れないサブリーマン幾何特有のもので、注目すべき研究対象です。余接束上に、計量にはよらずに接分布のみから決まる特性方程式が定義され、これをみたす余接束上の曲線を多様体に射影したものを *abnormal geodesic* と呼びます。Optimal Control Theory における最大値原理によりサブリーマン多様体の最短線は *normal geodesic* であるか、*abnormal geodesic* のどちらかであることが知られています。そこで、カルタンの分布にたいするサブリーマン多様体において、*normal* と *abnormal* の様子を詳しく調べました。余次元が2より小さい接分布に対しては、*abnormal geodesic* は現れないので、余次元2以上の接分布を対象にしてこれらの例を作ることが今後の課題です。

2 Nonholonomic distributions.

多様体 M 上の接分布 D が、非ホロノームまたは *bracket-generating* であるとは、 M の開集合 U 上の D の基底 $\{X_1, \dots, X_r\}$ にたいして、 X_i のブラケット積達で生成されるベクトル場全体の集合 $\{X_i, [X_i, X_j], [X_i, [X_j, X_k]], \dots\}$ が接束 TU を張るときをいう。

M が連結で、 D が *bracket-generating* であるとき、 M の任意の2点 p, q を結ぶ D の積分曲線が必ず存在することが知られている (Chow の定理)。

3 The Sub-Riemannian distance.

M を滑らかな多様体、 D をその上の接分布とし、 g を D 上のリーマンファイバー計量とするとき、組 (M, D, g) をサブリーマン多様体と呼ぶ。 (M, D, g) の点 $p \in M$

と $v \in D_p$ にたいして v の長さ $\|v\|_g$ を,

$$\|v\|_g = g_p(v, v)^{\frac{1}{2}}$$

で定める. また, $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ を D の積分曲線とすると, γ の長さを

$$\|\gamma\|_g = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt$$

で定める. ただし, γ が積分曲線でないときは, $\|\gamma\|_g = +\infty$ とする. さらに, 関数 $d_g: M \times M \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ を

$$d_g(p, q) = \inf\{\|\gamma\|_g; \partial\gamma = (p, q)\}$$

で定める. ここで $\partial\gamma = (\gamma(a), \gamma(b))$ である.

M が連結かつ D が bracket-generating であるとき, 関数 $d_g: M \times M \rightarrow \mathbf{R}$ は M 上の距離関数となり, M の位相を引き起こす. この関数 d はサブリーマン距離またはカルノカラテオドリ距離と呼ばれる. D の積分曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ が $d_g(\gamma(a), \gamma(b)) = \|\gamma\|_g$ をみたすとき, γ を *minimizer* と呼ぶ.

4 Normal geodesics.

(M, D, g) をサブリーマン多様体とする. $(p, \lambda) \in T^*M$ にたいして $\|\lambda\|_g$ を $\lambda|_{g_p}$ のノルムとする. このとき (D, g) のエネルギー関数 $E: T^*M \rightarrow \mathbf{R}$ が

$$E(x, \lambda) = -\frac{1}{2}\|\lambda\|_g^2$$

で与えられる. このエネルギーにたいして, *normal geodesic* が次のように定義される:

$\Gamma: I \rightarrow T^*M$ で

(i) $\dot{\Gamma}(t) = \vec{E}_{\Gamma(t)}$

(ii) E は Γ に沿って消えない.

を満たすものを M に射影したものを *normal geodesic* とよぶ.

すべての *normal geodesic* は *local minimizer* であることが知られている.

5 Abnormal geodesics.

(M, D, g) をサブリーマン多様体とし, $\{X_1, \dots, X_r\}$ を $U \subset M$ 上の D の基とする. また, 関数 $H_{X_i}: T^*M \rightarrow \mathbf{R}$ を $H_{X_i} = \langle \lambda, X_i(p) \rangle$ で定める. このとき, D の *abnormal geodesic* は以下のように定義される:

曲線 $\Gamma : I \rightarrow T^*M \setminus \{O\}$ で

$$\begin{cases} \text{(i) } H_{X_i}(\Gamma(t)) = 0 & \text{for all } t \in I \text{ and } i = 1, \dots, r \\ \text{(ii) } \dot{\Gamma}(t) \in \langle (\overrightarrow{H_{X_1}})_{\Gamma(t)}, \dots, (\overrightarrow{H_{X_r}})_{\Gamma(t)} \rangle & \text{for almost all } t \in I \end{cases}$$

を満たすものを M に射影したものを *abnormal geodesic* とよぶ。

6 The standard Cartan distribution.

$(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ を \mathbf{R}^5 の標準座標としベクトル場 X_1, \dots, X_5 を

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - (x^3 - \frac{1}{2}x^1x^2) \frac{\partial}{\partial x^4} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} - (x^3 + \frac{1}{2}x^1x^2) \frac{\partial}{\partial x^4} \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial x^4}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial x^5}. \end{aligned}$$

で定める。

これらのベクトル場は次の関係を満たしている：

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 \\ [X_1, X_3] = X_4 \\ [X_2, X_3] = X_5 \\ \text{The others are trivial} \end{cases}$$

また, X_1, \dots, X_5 の双対基底 $\omega^1, \dots, \omega^5$ は以下で与えられる：

$$\begin{cases} \omega^1 = dx^1 \\ \omega^2 = dx^2 \\ \omega^3 = dx^3 - \frac{1}{2}(x^1dx^2 - x^2dx^1) \\ \omega^4 = dx^4 + (x^3 - \frac{1}{2}x^1x^2)dx^1 \\ \omega^5 = dx^5 + (x^3 + \frac{1}{2}x^1x^2)dx^2. \end{cases}$$

このとき以下の構造方程式が得られる：

$$\begin{cases} d\omega^1 = 0 \\ d\omega^2 = 0 \\ d\omega^3 + \omega^1 \wedge \omega^2 = 0 \\ d\omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^3 = 0 \\ d\omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^3 = 0. \end{cases}$$

また, D を X_1 と X_2 で張られるように取る. つまり,

$$\Gamma(D) = \langle X_1, X_2 \rangle = \{\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = 0\}$$

とする. このとき, D のリーマンファイバー計量 g を $\{X_1(p), X_2(p)\}$ が D_p の正規直交基となるようにとる. このようなサブリーマン多様体 (\mathbf{R}^5, D, g) を考え, この上の normal geodesic と abnormal geodesic の様子を詳しく調べました.

MathML-Library for Ruby, and its applications

黒田 拓

平成 19 年 1 月 11 日

1 MathML とは

MathML[8] は XML 応用言語の一つであり、数式を XML によって記述するためのものである。

Web ページを記述するための言語の一つである XHTML に MathML を含めることでページ中に数式を記述することが出来る。このページを対応する Web ブラウザで閲覧することで、美しく描画される数式を含む文書を表示できる。リスト 1 は単純な MathML の例であり、数式

$$x + 1 = 0$$

を表している。

MathML に対応する Web ブラウザとしては、Microsoft の Internet Explorer[5] にプラグインの MathPlayer[1] を組み合わせたものや、Mozilla Firefox[6] がある。これらのブラウザでは数式の描画にスケラブルフォントを用いるため、細かな添え字などを含む数式も自由に拡大して表示させることが出来る。

2 MathML ライブラリについて

筆者が開発した MathML ライブラリは、スクリプト言語 Ruby[10] によるソフトウェア開発において、 \LaTeX の記法に従った数式を MathML に変換する処理を提供するライブラリである。次のような特徴を持つ。

再現性 `array` 環境において `\hline` 命令などによる罫線をサポートするなど、 \LaTeX の数式を可能な限り再現するようにしている

記号命令 \LaTeX 標準の記号命令のほか、`amssymb` パッケージおよび `amsfonts` パッケージのソースから記号命令を半自動的に抽出して組み込んでいる。

拡張性 `\newcommand`、`\newenvironment` によるマクロをサポートしている。また、ライブラリの使用者が新しい \LaTeX の命令 Ruby で実装して追加できるように API を公開している。

```
<math xmlns='http://www.w3.org/1998/Math/MathML'>
  <mi>x</mi>
  <mo>+</mo>
  <mn>1</mn>
  <mo>=</mo>
  <mn>0</mn>
</math>
```

リスト 1: 単純な MathML の例

数式を構成する記号を、その分類を表すタグとともに記述している。ここでは、'x' が識別子 (Identifier)、'+ 'と '=' が演算子 (Operator)、'1' と '0' が数値 (Number) であることを、タグを使って表している。

基本的な使い方は次のようになる。

1. 変換機能を提供するクラス `MathML::LaTeX::Parser` のインスタンスを作成
2. (必要に応じて) マクロを登録
3. ユーザー入力などから $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ の数式を取得
4. `MathML::LaTeX::Parser` を使って変換

具体的な使用例をリスト 2 に挙げる。

また、Web ページを出力する Wiki や掲示板などの CGI プログラムにおける実際の使用に際しては

1. テキスト形式の文章から数式部分を抽出
2. 数式抽出後のテキスト文書を HTML に整形
3. 抽出した数式を MathML に変換
4. MathML を HTML に埋め込む

といった手順が必要になるが、この処理をおこなうためのサブルーチン `MathML::Util::SimpleLaTeX` を提供している。

他に、Ruby の文字列クラス `String` を拡張して直接 MathML への変換を行うメソッド `String#to_mathml` を追加するモジュール `MathML::String` を提供している。これを用いると例えばリスト 2 と同等の処理をリスト 3 のように簡略化することができる。

```
#!/usr/bin/env ruby
require "math_ml"

# 変換機能を提供するクラスのインスタンスを作成
mlp = MathML::LaTeX::Parser.new

# マクロのソースを用意
macro = '\newcommand{\test}{x}'

# マクロを登録
mlp.macro.parse(macro)

# LaTeX の数式を用意
src = 'x+1=0'

# 変換を実行
math = mlp.parse(src)

# 出力
puts math
```

```
001 : <math display='inline'
      xmlns='http://www.w3.org/1998/Math/MathML'>
002 : <mi>x</mi>
003 : <mo>+</mo>
004 : <mn>1</mn>
005 : <mo>=</mo>
006 : <mn>0</mn>
007 : </math>
```

リスト 2: MathML ライブラリの基本的な使用例

上:事前に`\newcommand`によるマクロを登録し、与えられた`LATEX`の数式を`MathML`に変換している。下:スクリプトの実行例。変換後の`MathML`が出力されている。ページ内に収めるため、出力例は1行目の途中で改行を行っている。各行の左側の数値は参考のために追記した行番号であり、実際の出力には含まれない。

```
#!/usr/bin/env ruby
require "math_ml/string"

puts "x+1=0".to_mathml
```

リスト 3: MathML::String による String クラスの拡張

文字列リテラルを直接 MathML に変換できるようになる。出力結果はリスト 2 と同じである。

3 MathML ライブラリの応用

本ライブラリを実際に使用する例として、tDiary と Hiki で数式を用いるためのプラグインを作成・公開している。

tDiary[7] は ‘ただただし’ による Web 日記作成ツールである。Web ブラウザからの操作だけでインターネット上で公開する日記を作成することが可能であり、コメント (tDiary ではツッコミと呼んでいる) を受け付ける機能や、TrackBack の送受信などブログとして使用するための機能もを備えている。

Hiki[2] は ‘Hiki 開発チーム’ による Wiki エンジンである。Wiki エンジンとは誰でも自由にページの追加や編集を行うことが出来るシステムの総称であり、有名なものでは Wikipedia[9] がある。

これらのソフトウェアはどちらも Ruby を使って作成されており、外部の開発者が機能を拡張するためのプラグインを作成できるようになっている。そこで、本ライブラリを使用して数式を扱うためのプラグインを作成した [3][4]。このプラグインを使用することで、日記や Wiki ページ中に \LaTeX の記法による数式を書き込むことが出来るようになる。閲覧の際には使用されるブラウザに応じて MathML による数式が表示されるか、元の \LaTeX 数式が表示されるかを自動的に切り替えるようになっている。

参考文献

- [1] Design Science. Mathplayer.
<http://www.dessci.com/en/products/mathplayer/>.
- [2] Hiki 開発チーム. Hiki.
<http://hikiwiki.org/>.
- [3] 黒田拓. Hiki xhtml 化キット.
<http://www.hinet.mydns.jp/~hiraku/hiki/?x-hiki>.

- [4] 黒田拓. tdiary xhtml 化キット.
<http://www.hinet.mydns.jp/~hiraku/20010102.html>.
- [5] Microsoft. Windows Internet Explorer.
<http://www.microsoft.com/japan/windows/ie/>.
- [6] Mozilla.org. Mozilla Firefox.
<http://www.mozilla.com/firefox/>.
- [7] ただただし 他. tDiary.
<http://www.tdiary.org/>.
- [8] W3C. Mathematical Markup Language (MathML) Version 2.0
(Second Edition), 2003.
<http://www.w3.org/TR/2003/REC-MathML2-20031021/>.
- [9] ウィキメディア財団. Wikipedia.
<http://www.wikipedia.org/>.
- [10] まつもとゆきひろ 他. オブジェクト指向スクリプト言語 ruby.
<http://www.ruby-lang.org/>.

境界要素法を用いた核融合プラズマ平衡解析

Boundary element method applied to the equilibrium analyses of nuclear fusion plasma

北海道大学大学院工学研究科量子理工学専攻
下田啓詞(Hiroshi Shimoda)

Abstract. The boundary element method has been applied to solve the Grad-Shafranov equation that governs the magnetohydrodynamic equilibrium in tokamak plasmas. The above equation is transformed into two types of boundary integral equations (BIE), i.e., the standard and the hyper-singular ones, respectively with the fundamental solution and its derivative at a singular point. Numerical calculations demonstrate the high accuracy of magnetic flux solutions attained by each formulation for these two BIEs.

はじめに

トカマク型核融合装置では、トーラス状の真空容器内にプラズマを閉じ込める。プラズマを構成する荷電粒子は磁力線に巻きついて進む性質があり、容器内の磁力線の配位を適切にすることが良好な閉じ込めの決め手となる。

トーラス断面を囲むコイルを多数、トーラス円周に沿って並べて電流を流すと個々のコイルの真ん中を通り抜けるドーナツ形の磁力線ができる。これが図1のトロイダル磁場である。一方、プラズマ自身に電流を流し、プラズマ電流を囲むように一周するポロイダル磁場を作る。2種類の磁場が合成され、図1に示すようにトーラスに沿って周回するひねり磁力線ができる。この磁力線が作る仮想的な環の表面を磁気面と呼び、プラズマ中には無数の磁気面が入れ子状に配置された構造となる[1]。

図1より類推できるように、3次元空間に置かれたトーラス状プラズマは回転軸対称とみなせるので、上述の磁気面構造を2次元の r - z 体系で解析することに支障はない。このような軸対称プラズマの磁気流体力学(MHD)平衡は磁束 ψ に関する Grad-Shafranov 方程式で記述される[2]。この方程式の数値解を求めることはプラズマの形状を調べる上で重要である。

この方程式を解くために広く使われている数値解法は差分法や有限要素法などの領域型解法であるが[3, 4]、近年、境界要素法を適用する試みも現れている[5-8]。境界要素法の最大の利点は境界のみを離散化すれば事足りることにある。この利点は形状データの作成と修正を繰り返すような解析においては極めて重要となる。すなわち、核融合装置の運転においてプラズマ形状の変遷に伴って頻繁に要求されるプラズマ平衡解析に境界要素法が適していると考えられる。

Grad-Shafranov 方程式を境界積分方程式に変換する際、プラズマ電流に関わる非斉次項 $\mu_0 r j_\phi$ がネックとなる。何らの考慮もされないと、この項の寄与が領域積分のまま残り、境界要素法の利点が損なわれる。しかし、Grad-Shafranov 方程式を境界要素法で解く試みのほとんどは、非斉次項の領域積分を境界積分に変換することなく扱うもの[8]や、元々非斉次項の無い真空磁場に適用したものに限られていた[5-7]。

Itagaki らは非斉次項を多項式展開し、その領域積分に Green の第2公式を適用することによって、この非斉次項に起因する領域積分を等価な境界積分に変換することに成功した[9]。この変換において主要な役割を演じるのは、多項式を非斉次項に持つ Grad-Shafranov 方程式の特解である。

固定境界問題として Grad-Shafranov 方程式を解くことは、プラズマ電流密度が未知の磁束の関数となるため、同時に固有値問題となる。この種の固有値探索は多数回の反復計算となるが、全体行列作成

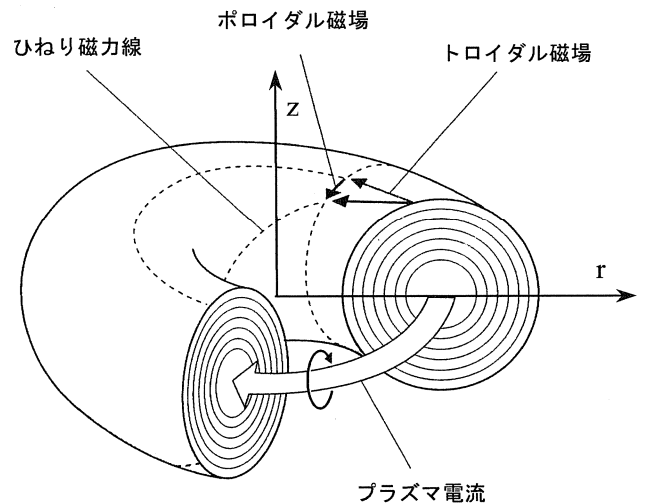


図1 トカマク型装置における磁場のあらまし
(文献[1]より転写)

のための境界積分の計算は反復初回にしておけば更新の必要はない．多項式展開の係数のみが反復によって更新される．展開係数を決定するために必要なもう一つの行列も反復によらず不変である．したがって，固有値反復の回数はトータル計算時間には大きく寄与しない．この固有値を決めるために別種の領域積分が必要となるが，この領域積分も境界積分に変換可能なことが示される．よってここで示す手法はいかなる領域積分の計算も必要としない．

Grad-Shafranov 方程式

アンペールの法則 $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ をトーラス軸対称(r - z)系に焼き直した偏微分方程式として

$$-\left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \psi = \mu_0 r j_\phi \quad (1)$$

が導かれる[2]．ここに j_ϕ はプラズマ電流密度のトロイダル成分， μ_0 は真空中の透磁率， ψ はプラズマ電流に起因して形成される磁束である．ベクトルポテンシャルのトロイダル成分 A_ϕ を用いれば $\psi = r A_\phi$ とかかれる．ところでプラズマを理想気体とみなせば $p = nkT$ の圧力を持つので，磁気閉じ込め方式ではプラズマ周囲の磁場が圧力(磁気圧)として作用し，プラズマと閉じ込め磁場との圧力平衡

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (2)$$

が保たなければならない．式(2)をも軸対称系に適用すると，式(1)の右辺はさらに詳しく書き直され，

$$-\left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \psi = \mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} + \frac{d}{d\psi} \left(\frac{F^2}{2} \right) \equiv \mu_0 r j_\phi \quad (3)$$

のようになる[2]．ここに， F はポロイダル電流関数と呼ばれる量であり，圧力 p とともに磁束 ψ のみの関数(磁気面関数)である．式(3)は Grad-Shafranov 方程式と呼ばれる．ただし，本稿では便宜上，式(1)と(3)の両方をともに Grad-Shafranov 方程式と呼ぶことにする．

通常境界積分方程式(SBIE)

式(1)に対応させて，点 $i(a, b)$ に単位トロイダル電流が置かれたときに考察フィールド点 (r, z) における磁束，すなわち基本解 ψ^* を与える補助方程式

$$-\left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \psi^* = r \delta_i \quad (4)$$

を導入する．ここに δ_i は $\delta(r-a)\delta(z-b)$ を表わし，基本解 ψ^* は第1種と第2種の完全楕円積分 $K(k)$ ， $E(k)$ を用いて，

$$\psi^* = \frac{\sqrt{ar}}{\pi k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right] \quad (5)$$

で与えられる．ただし，

$$k^2 = \frac{4ar}{(r+a)^2 + (z-b)^2} \quad (6)$$

である．式(1)(4)左辺の微分演算子をラプラス演算子を含む形に書き直すと，式(1)(4)はそれぞれ，

$$-r \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\psi}{r} \right) = \mu_0 r j_\phi \quad (7a)$$

$$-r \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\psi^*}{r} \right) = r \delta_i \quad (7b)$$

となる．そこで， $\psi^*/r^2 \times$ 式(7a)－ $\psi/r^2 \times$ 式(7b)を領域 $\Omega(r, z)$ にわたって積分し，さらに，Green の第2公式

$$\int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (8)$$

を適用する． $d\Omega = 2\pi r dr dz$ および $d\Gamma = 2\pi r \sqrt{dr^2 + dz^2}$ であるが，途中，両者の 2π が割愛できるので，改めて $d\Omega = r dr dz$ ， $d\Gamma = r \sqrt{dr^2 + dz^2}$ と書き，かつ， r を省いた $d\Omega' = dr dz$ と $d\Gamma' = \sqrt{dr^2 + dz^2}$ なる量を定義すれば，

$$c_i \psi_i = \int_{\Gamma'} \left(\frac{\psi^*}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\psi}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right) d\Gamma' + \int_{\Omega} \frac{\psi^*}{r^2} (\mu_0 r j_{\phi}) d\Omega \quad (9)$$

を得る．ここに $\partial/\partial n$ はトーラスの断面において外向きを正とした法線方向微分を表わす．特異点パラメータ c_i は領域内部で 1.0，滑らかな境界上で 1/2 となる．

式(9)の右辺第2項は未だ領域積分のかたちで残されている．そこで，式(1)の右辺を

$$\mu_0 r j_{\phi} = \sum_{l, m} \alpha_{l, m} \xi^l \eta^m \quad (l \geq 0, m \geq 0) \quad (10)$$

のように多項式展開し，ここに， L_r, L_z, z_0 を任意の定数として無次元量 $\xi = r/L_r$ ， $\eta = (z - z_0)/L_z$ を用いる．いま，

$$-r \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\varphi^{(l, m)}}{r} \right) = \xi^l \eta^m \quad (11)$$

を満たす特解 $\varphi^{(l, m)}$ として，

$$\varphi^{(l, m)} = -\frac{L_z^2 \xi^l \eta^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \times \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{s=1}^k \left\{ \frac{-(l-2s+2)(l-2s)}{(m+2s+1)(m+2s+2)} \left(\frac{L_z \eta}{L_r \xi} \right)^2 \right\} \right] \quad (12)$$

を選ぶことができる[9]．式(11)と Green の第2公式を適用すると，式(9)の右辺第2項は

$$\int_{\Omega} \frac{\psi^*}{r^2} (\xi^l \eta^m) d\Omega = c_i \varphi_i^{(l, m)} - \int_{\Gamma'} \left[\frac{\psi^*}{r} \frac{\partial \varphi_i^{(l, m)}}{\partial n} - \frac{\varphi_i^{(l, m)}}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right] d\Gamma' \quad (13)$$

のように境界積分に変換できるので，多項式近似したソース項を持つ Grad-Shafranov 方程式を

$$c_i \psi_i - \int_{\Gamma'} \left(\frac{\psi^*}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\psi}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right) d\Gamma' = \sum_{l, m} \alpha_{l, m} \left\{ c_i \varphi_i^{(l, m)} - \int_{\Gamma'} \left(\frac{\psi^*}{r} \frac{\partial \varphi^{(l, m)}}{\partial n} - \frac{\varphi^{(l, m)}}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right) d\Gamma' \right\} \quad (14)$$

のように，プラズマ境界 Γ に沿った積分のみで表わすことができる[9]．以上の導出過程は Poisson 型方程式に対する二重相反法(DRM) [10]とほぼ同様なものである．

Hyper-Singular 境界積分方程式

Hyper-Singular 境界積分方程式(HBIE)は，偏微分方程式の境界値問題に対応する従来の境界積分方程式(SBIE)を特異点位置でもう1回微分することで得られ，従来の境界積分方程式と連立させることで，一般に固有値解析や逆解析における解のロバスト性を高め得る[11]．この方程式は基本解の2階微分を含むので所謂「強い特異性」よりさらに強い“hyper singularity”を呈し，具体的な定式化には個々の工学問題に応じて十分な工夫を要する．

式(14)を点*i*で微分すると，

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial m} - \int_{\Gamma'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial m} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\psi}{r} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial m \partial n} \right) d\Gamma' = \sum_{l, m} \alpha_{l, m} \left\{ \frac{\partial \varphi_i^{(l, m)}}{\partial m} - \int_{\Gamma'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial m} \frac{\partial \varphi^{(l, m)}}{\partial n} - \frac{\varphi^{(l, m)}}{r} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial m \partial n} \right) d\Gamma' \right\}. \quad (15)$$

が得られる。ここでは m を任意の単位方向ベクトルとする。

今、式(15)を境界上の点 i に拡張するため、特異点である点 i を中心とした半径 ε の扇形に膨らませた小さな境界 Γ_ε を作り、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限操作を行う。この時、式(15)を点 i において任意の方向 m で微分する。以下、点 i の位置を ξ 、境界上の積分点を \mathbf{x} と表す。 ξ の近傍で $\psi, \partial\psi/\partial n$ を Taylor 展開し、極限における基本解の挙動に着目すれば

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi^*}{\partial m} \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial m} d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi^*}{\partial m} \frac{\partial\psi(\xi)}{\partial m} d\Gamma, \quad \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi^*}{\partial m} \frac{\partial\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})}{\partial m} d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi^*}{\partial m} \frac{\partial\varphi^{(l,m)}(\xi)}{\partial m} d\Gamma,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\psi(\mathbf{x})}{r} \frac{\partial^2\psi^*}{\partial m \partial n} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\psi(\xi)}{r} \frac{\partial^2\psi^*}{\partial m \partial n} d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial\psi(\xi)}{\partial n} \frac{\partial^2\psi^*}{\partial m \partial n} d\Gamma,$$

$$\text{および} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})}{r} \frac{\partial^2\psi^*}{\partial m \partial n} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi^{(l,m)}(\xi)}{r} \frac{\partial^2\psi^*}{\partial m \partial n} d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial\varphi^{(l,m)}(\xi)}{\partial n} \frac{\partial^2\psi^*}{\partial m \partial n} d\Gamma$$

が得られる。次に、磁束が至るところで一様な場を仮定すると

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi}{\partial m \partial n} d\Gamma = - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi}{\partial m \partial n} d\Gamma$$

の関係がわかる。滑らかな境界に対してこれらを適用し、かつ、プラズマ境界上で磁束が一定の条件を用いれば、考えている Hyper-Singular 境界積分方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial\varphi_i(\xi)}{\partial m} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi^*}{\partial m} \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma \\ & = \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial\varphi_i^{(l,m)}(\xi)}{\partial m} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi^*}{\partial m} \frac{\partial\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})}{\partial n} - \frac{\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x}) - \varphi_i^{(l,m)}(\xi)}{r} \frac{\partial^2\psi^*}{\partial m \partial n} \right) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

と整理される。式(16)では”hyper singularity”が解析的に取り除かれている。任意の単位方向ベクトル m を点 i における境界の法線方向と定めれば、従来の境界積分方程式と同様の手順で離散化を進めることができる。

数値計算例

以上 2 つの境界積分方程式の妥当性を検証するためそれぞれの境界積分方程式で数値計算を行い、結果を比較した。

まず、図 2 のような仮想的な矩形プラズマを考える。矩形境界に沿って Dirchlet 条件 $\psi = 0$ が課せられているとき、電流密度項を単項式 $r^l z^m$ とした Grad-Shafranov 方程式

$$-\left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \psi = r^l z^m \quad (l \geq 0, m \geq 0)$$

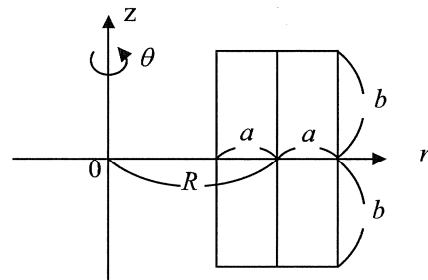


図 2 矩形プラズマ

には解析解が存在する[9].

一例として、単項式 $r^3 z^2$ に基づく方程式を考える。境界上における $\partial\psi/\partial n$ の解析解と、通常境界積分方程式と Hyper-Singular 境界積分方程式の結果を図 3 に示す。境界上で、2 つの境界積分方程式を用いた計算結果が、解析解と良く一致している。図 4 は通常境界積分方程式を使った境界要素解、図 5 は解析解との相対偏差の分布である。領域内の大部分において相対偏差は 0.01% を下回っている。1% を超える相対偏差が矩形のかどや辺の近傍で見られるが、これらの位置での ψ の絶対値は極めて小さい。

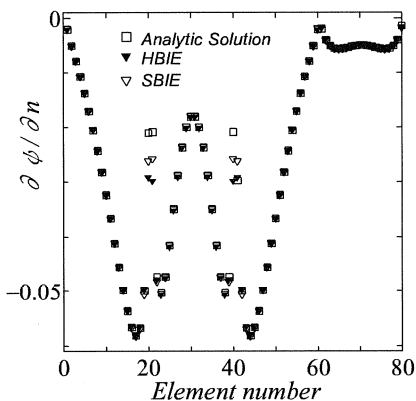


図3 境界上の $\partial\psi/\partial n$ の比較

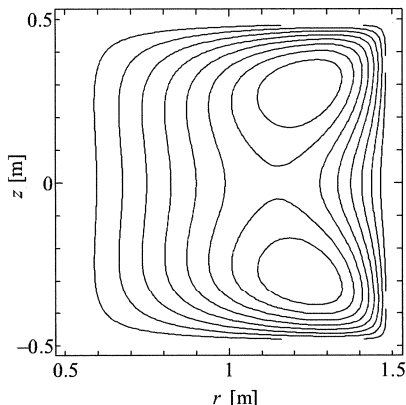


図4 $r^3 z^2$ に対する磁束の境界要素解

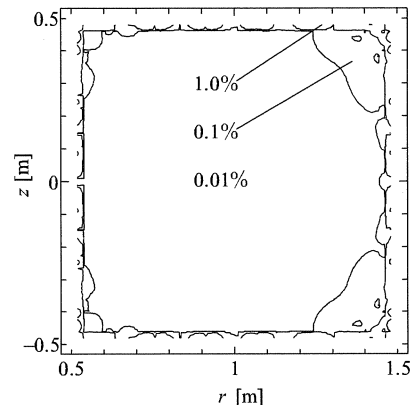


図5 境界要素解と解析解の相対偏差

結言と今後の課題

テスト計算の結果、ここで示した二つの境界積分のみからなる定式化がそれぞれ、高精度な解を与えることが示された。本稿には載せていないが、より現実的なトカマク型プラズマを固有値問題として解いた場合にも、高精度の解が得られている[9],[12]。

今後は、この二つの境界積分方程式を連立して得られるロバストな解が、プラズマ電流密度分布の逆推定に有用かどうかを探っていく予定である。

参考文献

- [1] 狐崎晶雄, 吉川庄一, ブルーボックス B-1404 新・核融合への挑戦, (2003) 講談社.
- [2] WESSON, J., "Tokamaks (Second edition)", The Oxford Engineering Series 48, Clarendon Press, Oxford (1997).
- [3] TAKEDA, T., TSUNEMATSU, T., A Numerical Code SELENE To Calculate Axisymmetric Toroidal MHD Equilibria, JAERI-M 8042, Japan Atomic Energy Research Institute (1978).
- [4] McCLAIN, F.W., BROWN, B.B., GAQ, A Computer Program to Find and Analyze Axisymmetric MHD Plasma Equilibria, GA-A 14490, General Atomic Company (1977).
- [5] BRAAMS, B.J., Interpretation of tokamak magnetic diagnostics, report IPP 5/2, Max Plank Institute fur Plasma Physics (1985).
- [6] HAKKARAINEN, S.P., FREIDBERG, J.P., Reconstruction Of Vacuum Flux Surfaces From Diagnostic Measurements In A Tokamak, report PFC/RR-87-22, MIT Plasma Fusion Center (1987).
- [7] KURIHARA, K., A New Shape Reproduction Method Based on the Cauchy-Condition Surface for Real-Time Tokamak Reactor Control, *Fusion Eng.Des.*, **51-52** (2000) 1049.
- [8] KURIHARA, K., Tokamak Plasma Shape Identification on the Basis of Boundary Integral Equations, *Nuclear Fusion*, **33**[3] (1993) 399.
- [9] ITAGAKI, M., KAMISAWADA, J., OIKAWA, S., Boundary- only integral equation approach based on polynomial expansion of plasma current profile to solve the Grad-Shafranov equation, *Nuclear Fusion*, **44** (2004) 427.
- [10] PARTRIDGE, P.W., BREBBIA, C.A., WROBEL, L.C., *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, Southampton / Boston, Co-published with Elsevier Applied Science, London / New York (1992).
- [11] Mansur, W.J. et al., "A vector approach to the hyper-singular BEM formulation for Laplace's equation in 2D", *The International Journal of BEM Communications*, **8** (1997) 239-250.
- [12] Itagaki, M., Fukunaga, T., Boundary element modeling to solve the Grad-Shafranov equation as an axisymmetric problem, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **30** (2006) 747-757.

LOGARITHMIC DERIVATIVES OF CURVATURE OF CURVES AND ISOMETRIC IMMERSIONS

TADASHI SUGIYAMA

An isometric immersion $f : M \rightarrow \widetilde{M}$ between Riemannian manifolds is called *isotropic* in the sense of O'Neill if at each point $x \in M$ the norm of the second fundamental form $\|\sigma(u, u)\|$ does not depend on the choice of unit tangent vector $u \in T_x M$. We call the function λ_f of M showing this norm at each point of x the function of isotropy. It is clear that totally umbilic immersions are isotropic, but not vice versa if $\dim(\widetilde{M}) \geq \dim(M) + 2$. It is well known that the k -th Veronese embedding $f_k : \mathbb{C}P^n(\tilde{c}/k) \rightarrow \mathbb{C}P^N(\tilde{c})$ is constant isotropic with isotropic constant $\lambda_f \equiv c(k-1)/2k$. More generally, we can easily find that every G -equivariant isometric immersion of a rank one symmetric space G/K into a homogeneous space is constant isotropic. These examples show that isotropic submanifolds are important objects in submanifold theory. In this note we can characterize isotropic immersions in view of logarithmic derivatives of curvature of smooth curves.

1. LOGARITHMIC DERIVATIVES OF CURVATURE OF CURVES

For a smooth curve $\gamma : I \rightarrow M$ parameterized by its arclength, we define a positive function κ_γ by $\kappa_\gamma = \|\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\|$ and call it the (first) *curvature function* of γ . We say this curve γ does not have *inflection points* if κ_γ does not vanish along γ . For such a curve γ , we define a unit vector field Y_γ along γ which is orthogonal to $\dot{\gamma}$ by $Y_\gamma = (1/\kappa_\gamma)\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$. We then find it satisfies

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \kappa_\gamma Y_\gamma, \quad \nabla_{\dot{\gamma}}Y_\gamma = -\kappa_\gamma\dot{\gamma} + Z_\gamma,$$

with some vector field Z_γ along γ which is orthogonal to both $\dot{\gamma}$ and Y_γ . We say a smooth curve γ without inflection points is of *proper order 2* at $\gamma(t_0)$ if Z_γ vanishes at this point. When κ_γ is a positive constant function and $Z_\gamma \equiv 0$, this curve is called a *circle* of positive curvature. We say a geodesic to be a circle of null curvature.

We here give relationships between curvatures of curves and their extrinsic shapes. Let $f : M \rightarrow \widetilde{M}$ be an isometric immersion. We denote by ∇ and $\widetilde{\nabla}$ the Riemannian connections of M and \widetilde{M} , respectively. Their relations are given as Gauss and Weingarten formulae

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \quad \widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi,$$

for vector fields X, Y on \widetilde{M} tangent to M and a vector field ξ on \widetilde{M} normal to M . Here, σ is the second fundamental form, A is the shape operator, and $\nabla_X^\perp \xi$ denotes the normal component of $\widetilde{\nabla}_X \xi$. We define the covariant differentiation $\widetilde{\nabla}$

of the second fundamental form σ with respect to the connection of $TM \oplus TM^\perp$ by

$$(\bar{\nabla}_X \sigma)(Y, Z) = \nabla_X^\perp(\sigma(Y, Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(X, \nabla_X Z).$$

For a smooth curve γ on M we denote by $\tilde{\kappa}_\gamma$ the curvature function of the extrinsic shape $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ of γ . By use of Gauss and Weingarten formulae, we can obtain the following by direct calculation (see [5]).

Lemma 1. *Curvature functions of a smooth curve γ on M and its extrinsic shape $f \circ \gamma$ satisfy $\tilde{\kappa}_\gamma^2 = \kappa_\gamma^2 + \|\sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\|^2$. Hence $f \circ \gamma$ does not have inflection points if γ does not have inflection points.*

For a smooth curve γ without inflection points, we denote by l_γ the logarithmic derivative of κ_γ , that is $l_\gamma = \kappa'_\gamma / \kappa_\gamma$. For its extrinsic shape $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ by an isometric immersion $f : M \rightarrow \tilde{M}$, we denote by \tilde{l}_γ its curvature logarithmic derivative.

Lemma 2. *For a smooth curve γ which is parameterized by its arclength and does not have inflection points, we have*

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \kappa_\gamma^2(\tilde{l}_\gamma - l_\gamma) + \tilde{l}_\gamma \|\sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\|^2 &= \tilde{\kappa}_\gamma^2(\tilde{l}_\gamma - l_\gamma) + l_\gamma \|\sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\|^2 \\ &= 2\kappa_\gamma \langle \sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}), \sigma(\dot{\gamma}, Y_\gamma) \rangle + \langle (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \sigma)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}), \sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \rangle. \end{aligned}$$

The reason why we stick on logarithmic derivatives of curvature of curves lies on the following Nomizu-Yano's Theorem. We denote by \mathfrak{h} the mean curvature vector for an isometric immersion f which is defined as

$$M \ni x \longmapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma(e_i, e_i) \in \nu(M),$$

where $\{e_i\}$ is an orthonormal basis of tangent space $T_x M$ and $\nu(M)$ is the normal bundle of M . We say M is umbilic at a point x if $\sigma(u, v) = \langle u, v \rangle \mathfrak{h}$ holds for orthonormal basis $u, v \in T_x M$ at $x \in M$. We call M totally umbilic when all points are umbilic. A Riemannian submanifold is called an *extrinsic sphere* if it is totally umbilic and has parallel mean curvature vector. We here recall a characterization of extrinsic spheres due to Nomizu and Yano [4], which is a foundation of our study.

Nomizu-Yano's Theorem. *A Riemannian submanifold M is an extrinsic sphere in \tilde{M} if and only if all circles on M are circles on \tilde{M} .*

For a standard sphere S^2 in a Euclidean space \mathbb{R}^3 , geodesics and circles on S^2 can be seen as circles in \mathbb{R}^3 . Nomizu-Yano's Theorem shows such a property holds for general extrinsic spheres. We can generalize their result in the following manner.

Theorem 1 ([5]). *An isometric immersion $f : M \rightarrow \tilde{M}$ is umbilic at a point $x \in M$ if for each orthonormal pair (u, v) of tangent vectors of M at x there exist two curves $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ parameterized by their arclength which satisfy the following four conditions:*

- i) γ_1, γ_2 do not have inflection points,

- ii) $\gamma_i(0) = x$, $\dot{\gamma}_i(0) = u$, $\nabla_{\dot{\gamma}_i}\gamma_i = (-1)^{i-1}\kappa_{\gamma_i}(0)v$,
- iii) *their extrinsic shapes $f \circ \gamma_1$ and $f \circ \gamma_2$ are of proper order 2 at $f(x)$,*
- iv) $\ell_{\gamma_1}(0) = \ell_{\gamma_2}(0)$.

In our study for immersions which preserve the order 2 property of curves, curvature logarithmic derivatives of curves play quite important role. So we shall concentrate our mind on this quantity and study isotropic immersions.

2. CHARACTERIZATION OF ISOTROPIC IMMERSIONS

For an orthonormal pair (u, v) of tangent vectors of M , we denote by $\mathcal{G}(u, v)$ a family of smooth curves defined by the following condition: A curve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ parameterized by its arclength is an element of $\mathcal{G}(u, v)$ if it does not have inflection points and satisfies the following conditions;

- i) $\dot{\gamma}(0) = u$ and $Y_\gamma(0) = v$,
- ii) the logarithmic derivative of curvature at x is preserved by f ,
(i.e. $\tilde{\ell}_\gamma(0) = \ell_\gamma(0)$).

We consider curvature logarithmic derivatives of such curves. We put

$$\mathcal{B}(u, v) := \{\ell_\gamma(0) \mid \gamma \in \mathcal{G}(u, v)\},$$

$$\mathcal{B}(u) := \bigcup \{\mathcal{B}(u, v) \mid v \text{ is a unit vector orthogonal to } u\}.$$

We can characterize isotropic immersions by the property that some curvature logarithmic derivatives are preserved.

Theorem 2. *An isometric immersion $f : M \rightarrow \widetilde{M}$ is isotropic at a point $x \in M$ if and only if $\mathcal{B}(u, v) \cap \mathcal{B}(u, -v) \neq \emptyset$ for every orthonormal pair $(u, v) \in T_x M \times T_x M$ of tangent vectors.*

Proof. “Only if” part. We take curves $\gamma \in \mathcal{B}(u, v)$ and $\rho \in \mathcal{B}(u, -v)$ satisfying that $\ell_\gamma(0) = \tilde{\ell}_\rho(0) \in \mathcal{B}(u, v) \cap \mathcal{B}(u, -v)$. By Lemma2 we see

$$\begin{aligned} \ell_\gamma(0)\|\sigma(u, u)\|^2 + 2\kappa_\gamma(0)\langle\sigma(u, u), \sigma(u, v)\rangle + \langle(\bar{\nabla}_u\sigma)(u, u), \sigma(u, u)\rangle &= 0, \\ \ell_\rho(0)\|\sigma(u, u)\|^2 - 2\kappa_\rho(0)\langle\sigma(u, u), \sigma(u, v)\rangle + \langle(\bar{\nabla}_u\sigma)(u, u), \sigma(u, u)\rangle &= 0. \end{aligned}$$

We hence obtain $\langle\sigma(u, u), \sigma(u, v)\rangle = 0$.

We now consider a function φ on the unit tangent space $U_x M$ at x defined by $\varphi(u) = \|\sigma(u, u)\|^2$, we see its differential is given as $v(\varphi)_u = 4\langle\sigma(u, u), \sigma(u, v)\rangle$. Thus we find f is isotropic at x if and only if $\langle\sigma(u, u), \sigma(u, v)\rangle = 0$ for every orthonormal pair $(u, v) \in U_x M \times U_x M$.

“if” part. When f is isotropic at x , for every $u \in U_x M$ we see by Lemma2 that

$$\tilde{\kappa}_\gamma^2(0)(\tilde{\ell}_\gamma(0) - \ell_\gamma(0)) + \tilde{\ell}_\gamma(0)\|\sigma(u, u)\|^2 = \langle(\bar{\nabla}_u\sigma)(u, u), \sigma(u, u)\rangle.$$

for every smooth curve γ with $\dot{\gamma}(0) = u$. If $\sigma(u, u) = 0$ we find $\tilde{\ell}_\gamma(0) = \ell_\gamma(0)$ for every γ . If $\sigma(u, u) \neq 0$, for every smooth curve with

$$\ell_\gamma(0) = \langle(\bar{\nabla}_u\sigma)(u, u), \sigma(u, u)\rangle\|\sigma\|^{-2},$$

we also have $\tilde{\ell}_\gamma(0) = \ell_\gamma(0)$. Thus we obtain the conclusion. \square

Theorem 3. *An isometric immersion $f : M \rightarrow \widetilde{M}$ is geodesic at a point $x \in M$ if and only if the following two conditions hold:*

- i) $\mathcal{B}(u, v) \cap \mathcal{B}(u, -v) \neq \emptyset$ for every orthonormal pair $(u, v) \in U_x M \times U_x M$,
- ii) $\mathcal{B}(u)$ contains at least two distinct numbers for every $u \in U_x M$.

3. KÄHLER IMMERSIONS

If we restrict ourselves on Kähler immersions between Kähler manifolds, we can weaken the conditions. We put

$$\mathcal{B}_c(u) := \{ \ell_\gamma(0) \mid \gamma \in \mathcal{G}(u, Ju) \cup \mathcal{G}(u, -Ju) \}.$$

Theorem 4. *A Kähler isometric immersion $f : M \rightarrow \widetilde{M}$ is geodesic at x if and only if the set $\mathcal{B}_c(u)$ contains at least two distinct numbers for every unit tangent vector $u \in U_x M$.*

As an application of Theorem 2, we can characterize Veronese embeddings. We define a Kähler full isometric immersion $f_k : \mathbb{C}P^n(\tilde{c}/k) \rightarrow \mathbb{C}P^N(\tilde{c})$ of a complex projective space of constant holomorphic sectional curvature \tilde{c}/k into a complex projective space of holomorphic sectional curvature \tilde{c} by

$$[z_i]_{0 \leq i \leq n} \mapsto \left[\sqrt{k!/(k_0! \cdots k_n!)} z_0^{k_0} \cdots z_n^{k_n} \right]_{k_0 + \cdots + k_n = k},$$

where $N = N(n, k) := (n+k)!/(n!k!) - 1$ and $[*]$ denotes homogeneous coordinates. We call this the k -th Veronese embedding. It is well-known that it is constant isotropic with isotropy constant $\lambda_f \equiv \tilde{c}(k-1)/(2k)$. We denote by $M^n(\tilde{c}; \mathbb{C})$ a complex space form of constant holomorphic sectional curvature \tilde{c} , which is a complex projective space $\mathbb{C}P^n(\tilde{c})$, a complex Euclidean space \mathbb{C}^n and a complex hyperbolic space $\mathbb{C}H^n(\tilde{c})$ according to \tilde{c} is positive, zero and negative.

Theorem 5. *Let $f : M \rightarrow M^N(\tilde{c}; \mathbb{C})$ be a non-totally geodesic Kähler isometric full immersion of a Kähler manifold M of complex dimension $n \geq 2$. Then the following conditions are equivalent:*

- 1) *There is a positive integer k satisfying that $N = N(n, k)$, the ambient space $M^N(\tilde{c}; \mathbb{C})$ is $\mathbb{C}P^N(\tilde{c})$, the submanifold M is locally congruent to $\mathbb{C}P^n(\tilde{c}/k)$ and f is locally equivalent to the k -th Veronese embedding f_k ;*
- 2) *For every orthonormal pair (u, v) of tangent vectors of M , we have $\mathcal{B}(u, v) \cap \mathcal{B}(u, -v) \neq \emptyset$.*

Since every holomorphic curve on $M^N(\tilde{c}; \mathbb{C})$ is isotropic, the same result does not hold when $n = 1$. But we can say the following (c.f. [2]):

Proposition 1. *Let $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^N(\tilde{c})$ be a full isometric immersed holomorphic curve. The set $\mathcal{B}(u, Ju) \cap \mathcal{B}(u, -Ju)$ contains zero for every $u \in UM$ if and only if there is a positive integer k satisfying that $N = N(1, k)$, the submanifold M is locally congruent to $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}/k)$ and f is locally equivalent to f_k .*

We should note that in these results in this section we only need the ambient space only to be of constant holomorphic sectional curvature.

REFERENCES

- [1] T. Adachi and T. Sugiyama, *A characterization of isotropic immersions by extrinsic shapes of smooth curves*.
- [2] S. Maeda, *A characterization of constant isotropic immersions by circles*, Arch. Math. (Basel) 81(2003), 90–95.
- [3] S. Maeda and H. Tanabe, *Totally geodesic immersions of Kähler manifolds and Kähler Frenet curves*, Math. Z. 252(2006), 787–795.
- [4] K. Nomizu and K. Yano, *On circles and spheres in Riemannian geometry*, Math. Ann. 210(1974), 163–170.
- [5] T. Sugiyama and T. Adachi, *Totally umbilic isometric immersions and curves of order two*, to appear in Monat. math..
- [6] ———, *Logarithmic derivatives of geodesic curvature for smooth curves and isometric immersions*, Far East J. Math. Sci. 23(2006), 181–192.

DIVISION OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL SCIENCE, DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING, GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING, NAGOYA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, GOKISO, NAGOYA, 466-8555, JAPAN

E-mail address: tadashi@zelus.ics.nitech.ac.jp

ヘリオトロン型核融合装置における粒子軌道解析

Particle Orbit Analysis in Heliotron Type Nuclear Fusion Device

北海道大学大学院工学研究科

關 良輔

ABSTRACT The charged-particle orbits are analyzed in the Large Helical Device that is the largest heliotron type fusion device in the world. Particle orbit characteristics are clarified in two types of magnetic fields. One is a vacuum magnetic field (plasma pressure = 0). The other is the plasma equilibrium magnetic field which configuration has been changed by the finite plasma pressure. The particle orbit characteristics are almost the same between these two type magnetic fields. The charge-exchange between the charged particles and the neutral ones in the peripheral region is investigated. The number of the charge-exchange reactions in the plasma equilibrium magnetic field is larger than that in the vacuum magnetic field.

【はじめに】

ヘリオトロン型核融合装置とは、外部コイルのみで閉じ込め磁場を生成するトーラス型(ドーナツ型)磁場閉じ込め核融合装置の1種であり、本質的に定常運転が可能であるなどの利点がある。中でも、大型ヘリカル装置(LHD)は、岐阜県土岐市の核融合科学研究所にある世界最大のヘリオトロン型装置で、理論と実験の両面から研究が進められている[1]。

この磁場閉じ込めによる核融合炉を実現するためには、高いベータ値(プラズマ圧力と磁気圧との比)の達成が必要である。そのためには、プラズマ中において、電磁流体的に平衡が存在し、安定であること、個々の荷電粒子が長時間保持できることが必要とされる。特に、ベータ(プラズマ圧力)の増加によって磁場構造が変化した場合、プラズマ加熱や核融合反応で生成された高エネルギーの荷電粒子が長時間保持できるか、その荷電粒子が装置内でどのような挙動を示すかを、粒子軌道解析を用いて検証することは、磁場閉じ込め核融合装置の性能を評価する上で、きわめて重要である。

これまで、LHDでの高ベータプラズマにおける高エネルギー粒子の振舞いのほとんどは、図1に示すLHDの磁場構造において、最外殻磁気面内の運動に限って解析が行われてきた[2]。しかし、LHDのようなヘリオトロン型プラズマでは、ベータの上昇と共に周辺の磁気面が乱れることが指摘されている[3]。また、現在、LHDにおいて3%以上の高ベータが達成されている低磁場中では、粒子軌道の磁気面からのズレである「ドリフト」が大きくなり、プラズマ中心(磁気軸)付近の粒子も最外殻磁気面外側に出ると予測できる。このような場合、最外殻磁気面外側の周辺磁場領域に出ても再び最外殻磁気面内部に戻ってくる Re-entering particle(再突入粒子)が重要な役割を果たす可能性が高く、周辺磁場領域も含めた高エネルギー粒子の振舞いを解析する必要がある。そこで本研究では、LHDにおける高エネルギー粒子の軌道を追跡し、その軌道の特性や Re-entering の影響などを調べることを目的とした。

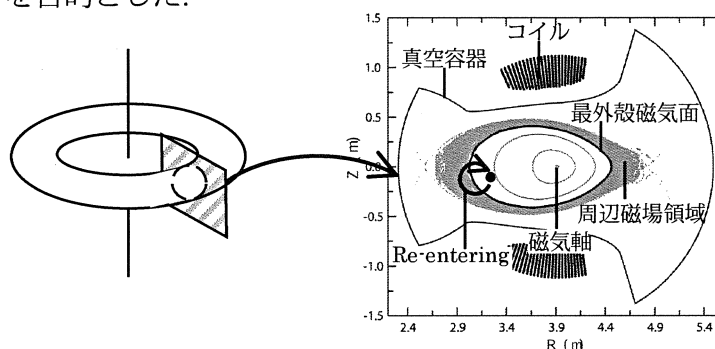


図 1. LHD の磁場構造($\beta = 3.2\%$)

【粒子軌道追跡コード】

本研究では、粒子の軌道を追跡するため案内中心(磁場中での荷電粒子の旋回中心)の運動を記述する

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \left(\frac{\mu B}{q} + \frac{M}{q} v_{\parallel}^2 \right) \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3} \quad (1)$$

および

$$M \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla B}{B} \quad (2)$$

を数値的に解くコードを開発した。ここで、 \mathbf{x} は粒子の位置、 M は粒子の質量、 q は粒子の電荷、 μ は磁気モーメント、 v_{\parallel} は磁場に平行方向の粒子の速度、 \mathbf{B} は磁場をそれぞれ表している。

開発したコードでは、まず初期条件として粒子のエネルギー、初期ピッチ角(磁力線と粒子速度とのなす角)、出発点、追跡時間を与え、式(1)、(2)を6次精度のRunge-kutta法[4]を用いて数値的に解いた。その際に必要となる粒子の現在位置における磁場、磁場強度の勾配を3次精度スプライン補間法[5]を用いて求めた。また、追跡中の粒子が真空容器壁に到達した場合、その粒子は損失粒子とみなし、計算を終了した。

【計算条件】

本研究では、プラズマ平衡解析コードによって得られた4種類の磁場配位(表1(a)-(d))において、高エネルギープロトンの案内中心軌道を30 ms追跡した。このとき、プロトンの出発位置、初期ピッチ角を様々に変化させ、軌道特性などを検討した。

表1 計算で使用した磁場配位

	磁気軸上磁場強度 B_{ax} (T)	ベータ値 (%)
(a)	3	0
(b)	3	3.2
(c)	0.5	0
(d)	0.5	3.2

【粒子の分類】

本研究では、粒子をその軌道の様子から通過粒子、バナナ粒子、カオス軌道粒子、即損失粒子の4種類に分類した。これらの軌道の例を図2に示す。図2から、通過粒子とバナナ粒子は閉じた軌道を描いていることがわかる。カオス軌道粒子は、磁気ミラーによる反射と通過を繰り返しながら運動可能領域全体を運動している。

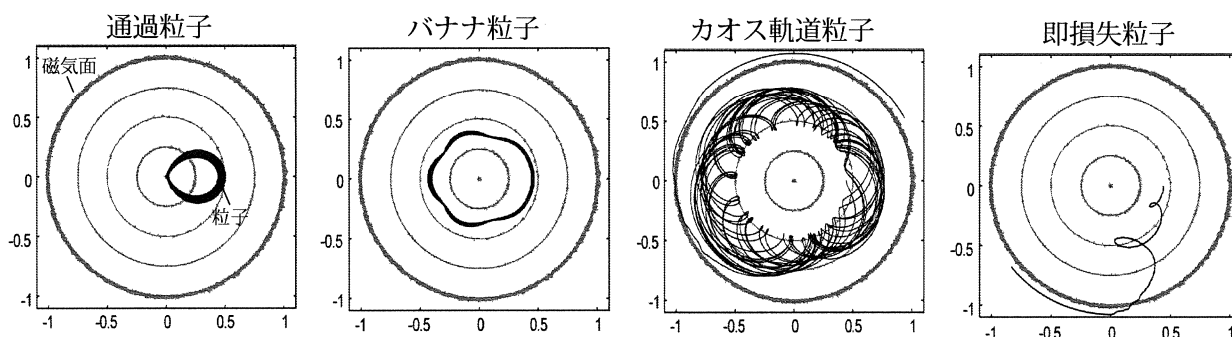
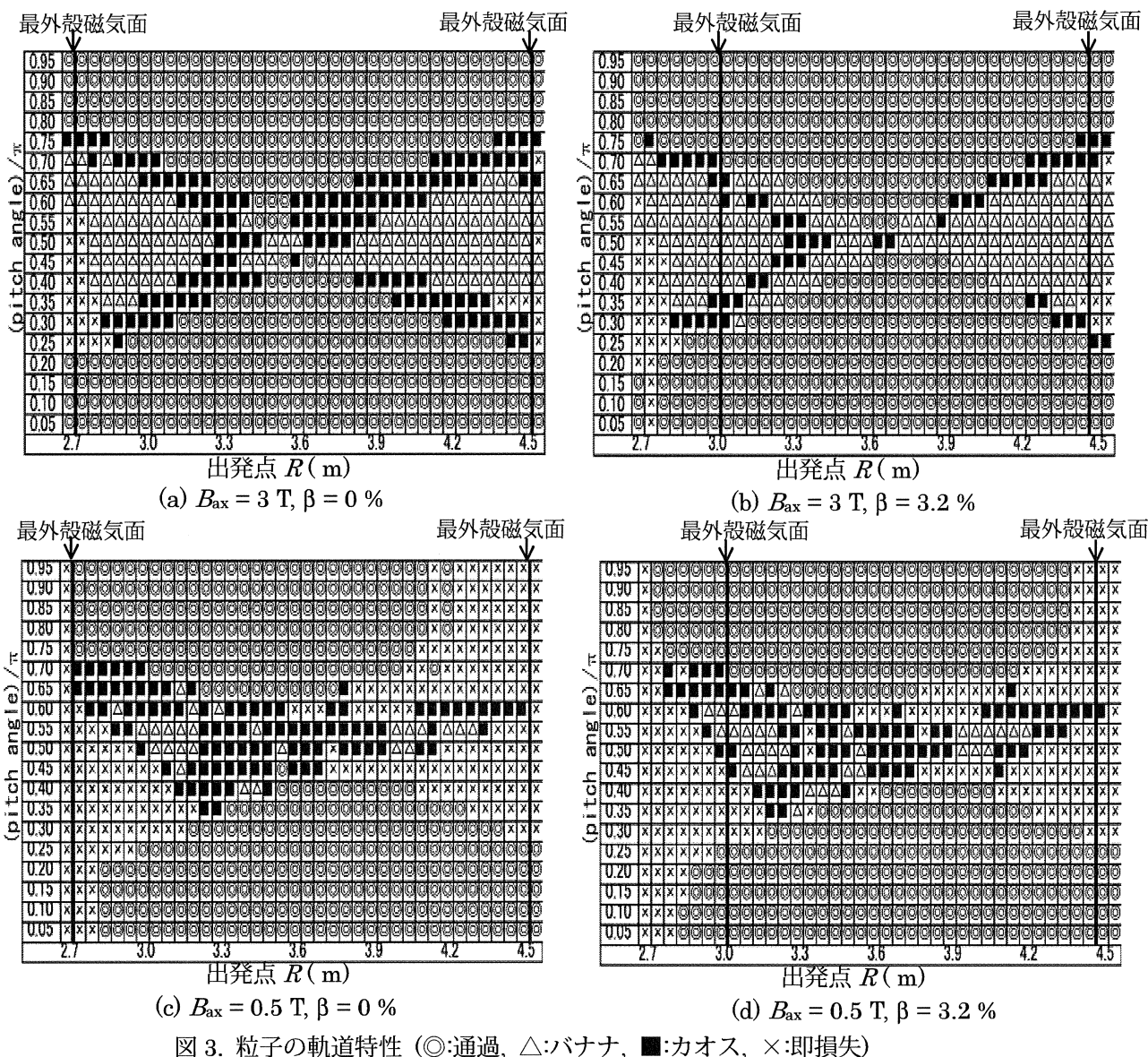


図2. 粒子軌道の例($B_{ax} = 3$ T, $\beta = 0$ %)

【粒子の軌道特性】

上記の4つの分類に基づいた、LHDにおける粒子の軌道特性を図3に示す。これら図の横軸は、 $Z = 0$ mでの出発点を表しており、縦軸は π で規格化された初期ピッチ角を表している。これらの図から、 $\beta = 0$ %と $\beta = 3.2$ %とでは、最外殻磁気面の位置が異なるだけで粒子軌道の特性がほぼ同じにな

ることがわかる. また, $B_{ax} = 3 \text{ T}$ と $B_{ax} = 0.5 \text{ T}$ での軌道特性を比較すると $B_{ax} = 0.5 \text{ T}$ では, 即損失粒子が多数存在することがわかる.



【Re-entering particle の検討】

高ベータプラズマにおける Re-entering particle の挙動を調べるため, 本研究では, 30 ms の追跡時間中に粒子が最外殻磁気面外側の周辺磁場領域を通過した際の飛程の総和を求めた. 各出発点ごとにピッチ角平均された周辺磁場領域での飛程の総和を図 4, 5 に示す. これらの図から, $\beta = 0 \%$, 3.2% 双方において, 最外殻磁気面内部を出発点とする粒子に Re-entering particle が存在することがわかる. また, Re-entering particle の飛程の総和は, 最大で十数 km のオーダーまで達している. さらに, $B_{ax} = 3 \text{ T}, 0.5 \text{ T}$ 双方で, $\beta = 3.2 \%$ の方が Re-entering particle が存在する領域が広く, 特に, $\beta = 3.2 \%$ では, よりプラズマ内部の出発点から Re-entering する粒子が存在している. また, $B_{ax} = 3 \text{ T}$ での Re-entering particle の飛程の総和は, 最外殻磁気面近傍を出発する粒子が大きく, $B_{ax} = 0.5 \text{ T}$ の場合では, トーラス内側の内側の $R = 3.25 \text{ m}$ 付近を出発する粒子が大きいことがわかる.

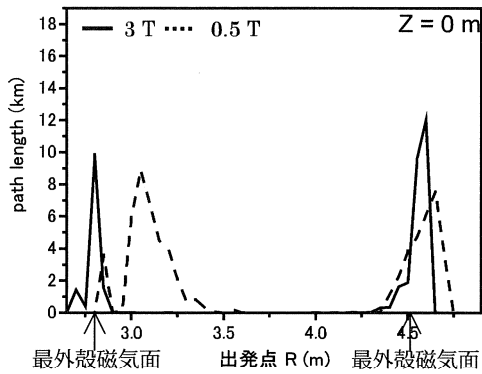


図 4. 周辺磁場領域での飛程の総和($\beta = 0\%$)

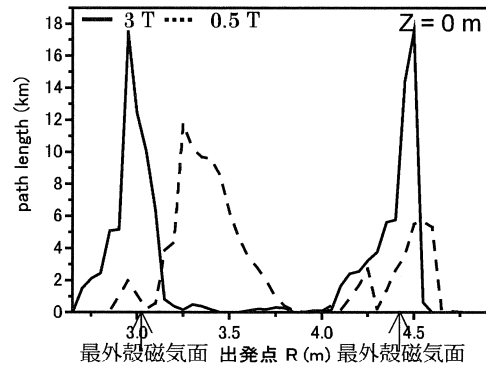
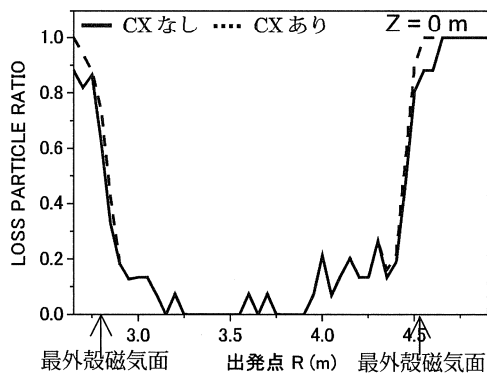
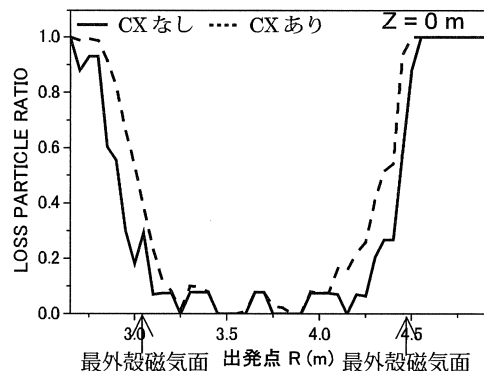


図 5. 周辺磁場領域での飛程の総和($\beta = 3.2\%$)

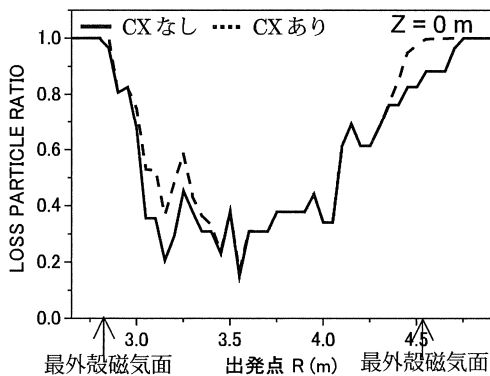
Re-entering particle は、プラズマ外部から浸入する中性粒子の密度が大きい周辺磁場領域において荷電交換(CX)によって損失すると考えられる。そこで、周辺磁場領域での中性粒子密度を一定と仮定し、Re-entering particle に対する荷電交換の影響を検討した。得られた損失粒子の割合を図 6 に示す。これらの図から、 $B_{ax} = 3\text{ T}$, 0.5 T 双方において、 $\beta = 0\%$ では実線の荷電交換なしと破線の荷電交換ありとが、ほぼ重なっており、荷電交換の影響がほとんどないことがわかる。また、 $B_{ax} = 3\text{ T}$, 0.5 T 双方で $\beta = 3.2\%$ の方が、 $\beta = 0\%$ と比べて荷電交換の影響が大きい。加えて、 $B_{ax} = 3\text{ T}$ の場合には、最外殻磁気面近傍を出発点とする粒子に荷電交換の影響が大きく、 $B_{ax} = 0.5\text{ T}$ の場合には、最外殻磁気面内部のトーラス内側を出発点とする粒子に荷電交換の影響が大きいことがわかる。



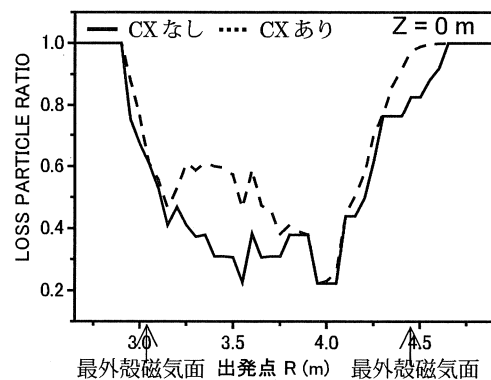
(a) $B_{ax} = 3\text{ T}$, $\beta = 0\%$



(b) $B_{ax} = 3\text{ T}$, $\beta = 3.2\%$



(c) $B_{ax} = 0.5\text{ T}$, $\beta = 0\%$



(d) $B_{ax} = 0.5\text{ T}$, $\beta = 3.2\%$

図 6. 損失粒子の割合

【まとめ】

本研究では、ヘリオトロン型核融合装置の1つであるLHDの4種類の磁場配位において、高エネルギー粒子の軌道解析を行った。その結果、粒子の軌道特性はベータが増加してもほとんど変化しないことがわかった。また、 $B_{ax} = 0.5$ Tの場合、ベータによらず即損失粒子が多数存在することがわかった。また、磁場強度によらずベータの増加にともなって、Re-entering粒子の数が増加することがわかった。さらに、 $B_{ax} = 0.5$ Tでの荷電交換の影響は、トーラス内側を出発した粒子に大きく表れ、特に $\beta = 3.2$ %でそれが顕著になることがわかった。今後は、実験において発生する高エネルギープロトンの分布などを考慮した場合でのRe-entering、荷電交換の再検討や本研究では一定と仮定していた中性粒子密度の分布などを考慮した場合での荷電交換の影響の再検討を行う予定である。

- [1] O. Motojima *et al.*: Nucl. Fusion, **43**, 1674 (2003)
- [2] S. Murakami: J. Plasma Fusion Res., **80**, 725 (2004).
- [3] M. Wakatani: *Stellarator and Heliotron Devices* (Oxford University Press 1998), chap. 5.
- [4] D. Sarafyan: J. Math, Anal and Appl. **40** 436 (1972).
- [5] 渡辺二太: 日本応用数学会論文誌 **1** 101 (1991).

The Schrödinger equation of a quantum system embedded on a curved surface

Hisao Taira and Hiroyuki Shima

Department of Applied Physics, Graduate School of Engineering, Hokkaido University,
Sapporo 060-8628, Japan

E-mail: taira@eng.hokudai.ac.jp

Abstract. Quantum-mechanical properties of electrons confined to a deformed cylindrical surface are theoretically investigated by the Schrödinger's approach. The quantum confinement of electrons normal to the surface induces a curvature-dependent potential energy, which results in a drastic change in the electronic structures of the system at low energies. Our finding suggests the possibility of controlling the electric conductivity of low-dimensional nanostructures by inducing a local geometric deformation.

1. Introduction

An electron moving in a conducting solid (e.g., a metal) exhibits two distinct properties — of a particle and a wave. Which property among these is dominant is determined by the condition of the system. For instance, when temperature of the system is typically less than 1 mK or when the volume of the system is reduced to less than $1 \mu\text{m}^3$, an electron can no longer be considered as a classical charged particle, since its wave nature possibly begin to dominate. In the latter quantum-mechanical condition, the motion of an electron is described by the Schrödinger equation:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \quad (1)$$

where m is the mass of an electron, $\hbar \sim 1.05 \times 10^{-34}$ J·s is the Planck constant, $U(\mathbf{r})$ is the potential, $\Psi(\mathbf{r})$ and E are the eigenfunction and eigenenergy of the system, respectively. It is noteworthy that this equation holds under the assumption that an electron can move in three-dimensional space. The rapid developments in nanotechnology, however, have made it possible to manufacture quasi one- and two-dimensional nanostructures with novel geometries [1-8]. These experimental achievements naturally pose theoretical problems with regard to the effect of structural geometry on the quantum-mechanical properties. In fact, thus far, several attempts have been made to formulate the motion of quantum particles whose motion is strongly confined to low dimensions [9-19]. These studies suggested that when the electron is strongly constrained to a smoothly curved surface, the quantization of the motion perpendicular to the surface results in an effective potential energy whose magnitude depends on the local curvatures along the surface. This implies that an alteration in the local geometric curvature induces a novel change in the quantum transport properties of the low-dimensional nanostructures. In this

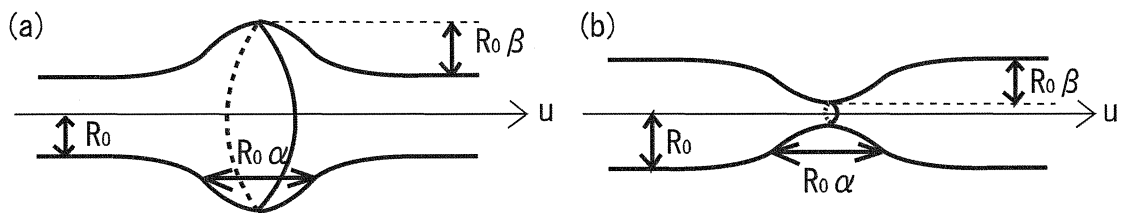


Figure 1. Schematic illustration of deformed cylindrical surfaces. The parameter α determines the spatial extent of the deformed part along the u -axis, and β determines the extent of a bulge or constriction.

context, thorough understandings of these geometric effects are crucially important to develop new-generation nanoscale devices.

The current work concentrates on the quantum properties of electrons confined to a cylindrical surface with a variable diameter. We have found that the local deformation of the cylindrical surface significantly affects the electronic structures in the lowest-energy region. This indicates the occurrence of a curvature-induced alteration in the electron transport along nanoscale surfaces with cylindrical geometry.

2. Schrödinger Equation for Curved Surfaces

In what follows, we focus on a specific situation in which electrons are constrained to move along a curved surface. Let (x^1, x^2, x^3) be a three-dimensional curvilinear coordinate that allows the parameterization of a curved surface of interest by $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$. Then, a point \mathbf{p} in this space can be determined through the relation

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}(x^1, x^2) + x^3 \mathbf{n}(x^1, x^2), \quad (2)$$

where $\mathbf{n}(x^1, x^2)$ is the vector normal to the curved surface.

We now introduce a confining potential $V(x^1, x^2, x^3)$ that confines the electrons within a thin layer of constant thickness d . By taking the limit $d \rightarrow 0$ [10], the potential becomes $V = 0$ if $x^3 = 0$ and $V = \infty$ otherwise. This allows us to separate the x^3 dependence in the Hamiltonian of the confined system and eventually provides the Schrödinger equation for curved surfaces:¹

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - (H^2 - D) \right] \sigma = E \sigma. \quad (3)$$

Here, $\sigma(x^1, x^2)$ is the wave function of the confined particles, $g_{ij} = \partial \mathbf{r} / \partial x^i \cdot \partial \mathbf{r} / \partial x^j$ are the components of the metric tensor, $g = \det[g_{ij}]$, $g^{ij} = [g_{ij}]^{-1}$, and $H(x^1, x^2)$ and $D(x^1, x^2)$ are the mean and Gaussian curvatures of the surface, respectively. The most striking feature is the occurrence of the non-trivial potential term, $-(H^2 - D)$, in Eq. (3). This is a direct consequence of the quantization of the motion normal to the surface. It is noteworthy that the resulting potential depends only on the local surface geometry and not on the mass or charge of the particle.

3. Model and Methods

Equation (3) has a broad applicability to general curved surfaces. Among various choices, we restrict our concern to locally deformed cylindrical surfaces depicted in Figs. 1(a) and 1(b).

¹ This limiting procedure was initially suggested by da Costa [10], and has been successfully applied to quantum mechanical problems involving novel geometries [20-25].

These surfaces are parameterized by

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, \phi) = [R(u) \cos \phi, R(u) \sin \phi, u], \quad (4)$$

where the radius of the cylinder is assumed to vary with u as

$$R(u) = R_0 \left[1 + \beta \exp \left(\frac{-2u^2}{\alpha^2 R_0^2} \right) \right]. \quad (5)$$

Due to the rotational symmetry of the surfaces, the Schrödinger equation (3) can be further simplified by means of the variable-separation method. By substituting

$$\sigma(u, \phi) = \frac{\eta(u)}{\sqrt{R(u)f(u)}} \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{with} \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + (dR/du)^2}} \quad (6)$$

into Eq. (3), we obtain the reduced Schrödinger equation for $\eta(u)$ as

$$-f(u)^2 \frac{d^2\eta}{du^2} - V_d(u)\eta(u) = \epsilon\eta(u), \quad (7)$$

where

$$V_d(u) = f(u)^2 \left[\frac{d\Gamma}{du} - \Gamma(u)^2 \right] + H(u)^2 - D(u) - \frac{m^2}{R(u)^2}, \quad (8)$$

and

$$\Gamma(u) = -\frac{1}{2R(u)f(u)} \frac{d(Rf)}{du}. \quad (9)$$

In actual calculations, we numerically evaluated spatial profiles both of the potential $V_d(u)$ and the ground-state eigenfunction $\eta(u)$ belonging to $\epsilon = \epsilon_{\min}$. As demonstrated below, the presence of the term V_d turns out to significantly affect the static and transport properties of the ground state of the confined electrons.

4. Results and Discussions

Figures 2(a) and 2(b) depict the spatial profile of $V_d(u)$ and that of the square amplitude of the ground-state eigenfunction $|\eta(u)|^2$. In the language of quantum mechanics, the latter represents the probability of finding a electron at a point u with $m = 0$. The parameters are $\alpha = 1.0$ for (a) and $\alpha = 1.5$ for (b), and $\beta = 1.0$ for both the figures. Figure 2(a) shows that V_d provides a steep potential well in which the ground-state wavefunction is strongly bounded. The occurrence of the potential well is attributed to the fact that for certain values of α and β , the term $f^2(d\Gamma/du - \Gamma^2)$ involved in V_d (see Eq. (8)) assumes a considerably large positive value at $u=0$. As α increases, the magnitude of this potential well monotonically decreases; in fact, when $\alpha > 1.5$, V_d gives only slight contributions that are no longer sufficient to bound the ground eigenstates of $m = 0$, as shown in Fig. 2(b).

Interestingly, the spatial profiles of $|\eta(u)|^2$ (as well as $V_d(u)$) change marked by depending on the values of α and β , and also the quantum number of the angular momentum m . This is illustrated by Figs. 3(a) and 3(b); these are contour plots of the localization length $\xi = \left(\int_0^L |\eta(u)|^2 du \right)^{-2}$ of the lowest-energy eigenstate with $m = 0$ (a) and $m = 1$ (b). The localization length ξ provides a measure of the spatial extent of the wavefunction in question; $\xi \ll L$ if the eigenfunction is spatially localized, while $\xi \sim L$ if it extends over the whole system. Hence, by examining the dependence of ξ on the geometric parameters α and β , we obtain an understanding of the geometric effect on the electron system on cylindrical surfaces. Figures

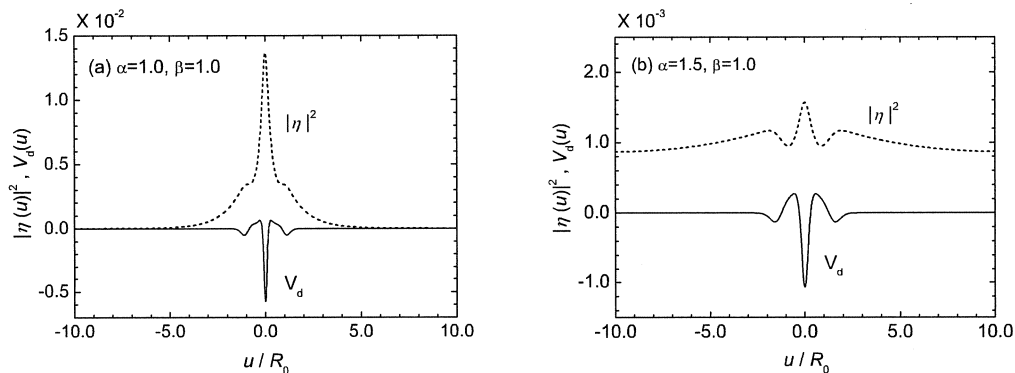


Figure 2. Spatial profiles of the potential V_d (solid line) and that of the squared amplitude of the ground-state eigenfunction $|\eta|^2$ (dotted line) for $m = 0$. The scales of the vertical axis are (a) 10^{-2} and (b) 10^{-3} .

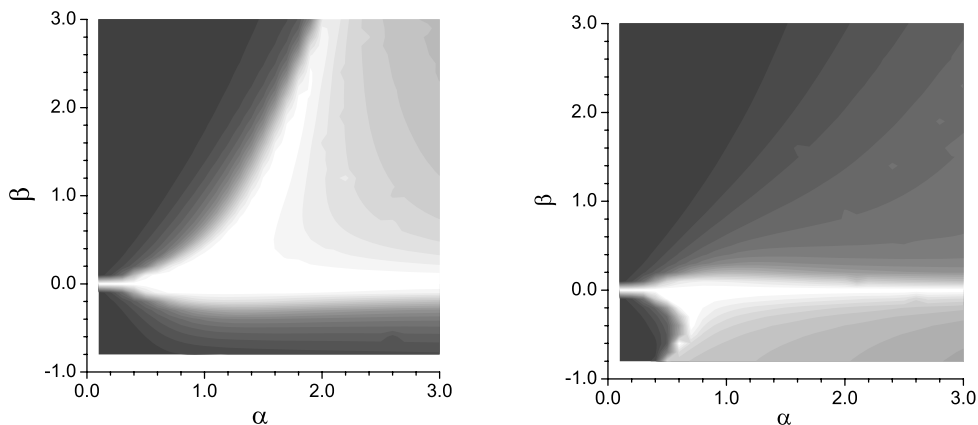


Figure 3. Contour plots of the localization length ξ of the lowest-energy eigenstate in the α - β plane: (a) $m = 0$ and (b) $m = 1$. The eigenstate is strongly localized in the dark region and extends over the entire system in the light region.

3(a) and 3(b) show that the ground-state eigenfunction may be strongly bounded (the dark region) or may extend over the entire system (the light region) depending on the values of α and β .

Importantly, in both the cases $m = 0$ and $m = 1$, the α -dependence of ξ is completely different between the regions $\beta > 0$ (bulgy deformation) and $\beta < 0$ (constricted deformation). With $m = 0$, for instance, ξ for $\beta > 0$ tends to increase with α , and eventually becomes equal to the system length L at $\alpha \sim 1.5$ (followed by a slight decrease at $\alpha > 2.0$). This indicates that the ground-state becomes extended ($\xi \sim L$) when reforming the bulgy part to be more stretched in the direction of u -axis. On the other hand, ξ for $\beta < 0$ is almost invariant with regard to changes in α , and its value is always smaller than L . In short, (i) the crossover behaviour of ξ from bound to extended states is observed only in the case of bulgy deformation ($\beta > 0$), and in that case, (ii) the magnitude of ξ for a fixed β rapidly increases at $\alpha \sim 1.5$. These two findings suggest the possibility of controlling the ballistic electron transport in cylindrical nanostructures

by introducing a subtle geometric deformation.

It is to be noted that a similar crossover behaviour of ξ was observed in the case of $m = 1$ where, in contrast to the case of $m = 0$, the crossover occurs for negative β . In fact, we have confirmed that when $m \geq 1$, the extended low-energy states occur only at $\beta < 0$ which is in contrast to the case of $m = 0$ where the extended states occur only at $\beta > 0$. This difference as well as the global behaviour of $\xi(\alpha, \beta)$ depicted in Figs. 3(a) and 3(b) can be accounted for by considering the contribution from each term in the expression for $V_d(u)$ (see (8)); detailed analyses will be presented elsewhere [26, 27].

5. Conclusion

In the present study, we have investigated the effect of local geometric deformation on the electronic states strongly confined to a thin cylindrical surface with a variable rotational radius. The spatial profile of the deformation-induced potential and that of the square amplitude of the lowest-energy eigenstates were numerically evaluated. The localization length of the eigenstate was calculated as a function of the geometric parameters α and β ; the results indicate that a subtle geometric deformation could induce a drastic change in the ballistic electron transport along nanoscale cylindrical surfaces. We hope that our findings prove to be a fundamental basis for further fruitful studies on the development of quantum devices based on low-dimensional nanostructures.

References

- [1] V. Y. Prinz, D. Grutzmacher, A. Beyer, C. David, B. Ketterer and E. Deckardt, *Nanotechnology* **12**, S1 (2001)
- [2] O. G. Schmidt and K. Eberl, *Nature* **410**, 168 (2001)
- [3] S. Tanda, T. Tsuneta, Y. Okajima, K. Inagaki, K. Yamaya and N. Hatakenaka, *Nature* **417**, 397 (2002)
- [4] K. T. Shimizu, W. K. Woo, B. R. Fisher, H. J. Eisler and M. G. Bawendi, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 117401 (2002)
- [5] X. F. Duan, C. M. Niu, V. Sahi, J. Chen, J. W. Parce, S. Empedocles and J. L. Goldman, *Nature* **425**, 274 (2003)
- [6] M. Law, D. J. Sirbuly, J. C. Johnson, J. Goldberger, R. J. Saykally and P. D. Yang, *Science* **305**, 1269 (2004)
- [7] C. B. Jin, J. E. Yang and M. H. Jo, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 193105 (2006)
- [8] S. Mendach, O. Schumacher, H. Welsch, C. Heyn, W. Hansen and M. Holz, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 212113 (2006)
- [9] H. Jensen and H. Koppe, *Ann. Phys.* **63**, 586 (1977)
- [10] R. C. T. da Costa, *Phys. Rev. A* **23**, 1982 (1981); *ibid.* **25**, 2893 (1982)
- [11] M. Ikegami, Y. Nagaosa, S. Takagi and T. Tanzawa, *Prog. Theor. Phys.* **88**, 229 (1992)
- [12] P. Duclos and P. Exner, *Rev. Math. Phys.* **7**, 73 (1995)
- [13] M. Encinosa and B. Eternadi, *Phys. Rev. A* **58**, 77 (1998)
- [14] K. A. Mitchell, *Phys. Rev. A* **63**, 042112 (2001)
- [15] P. Duclos, P. Exner and D. Krejcirik, *Commun. Math. Phys.* **223**, 13 (2001)
- [16] K. Yakubo, Y. Avishai and D. Cohen, *Phys. Rev. B* **67**, 125319 (2003)
- [17] M. Encinosa and L. Mott, *Phys. Rev. A* **68**, 014102 (2003)
- [18] J. Gravesen, M. Willatzen and L. C. L. Y. Voon *J. Math. Phys.* **46**, 012107 (2005)
- [19] L. I. Magarill, A. V. Chaplik and M. V. Entin, *Phys. Usp.* **48**, 953 (2005)
- [20] G. Cantele, D. Ninno and G. Iadonisi, *Phys. Rev. B* **61**, 13730 (2000)
- [21] H. Aoki, M. Koshino, D. Takeda, H. Morise and K. Kuroki *Phys. Rev. B* **65**, 035102 (2002)
- [22] M. Koshino and H. Aoki, *Phys. Rev. B* **71**, 073405 (2005)
- [23] A. Marchi, S. Reggiani, M. Rudan and A. Bertoni, *Phys. Rev. B* **72**, 035403 (2005)
- [24] N. Fujita and O. Terasaki, *Phys. Rev. B* **72**, 085459 (2005)
- [25] R. Dandoroff and R. Balakrishnan, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 6121 (2005)
- [26] H. Taira and H. Shima in *Proceedings of the International Symposium on Topological Aspects of Critical Systems and Networks* (World Scientific Pub.) *in press*.
- [27] H. Taira and H. Shima, *J. Phys. Conf. in press*.

フラットバンド不規則電子系における局在-非局在転移

Localization-delocalization transition in a flat band disordered electronic system

西野 信也*

北海道大学大学院 工学研究科 応用物理学専攻

We propose a disorder-induced localization-delocalization transition of one-electron states. We first make a highly degenerated localized states by constructing a three-dimensional periodic system possessing only flat dispersion relations. When we introduce a disorder into it, a finite-size scaling of the level statistics shows localization-delocalization-localization transition for a wide range of the energy, with increasing the degree of disorder.

KEYWORDS: flat band, metal-insulator transition, level statistics, disordered electronic system.

1. 序論

結晶中の電子はブロッホ波として結晶全体に広がっているが、ここに不純物を加えていくと、電子の波動関数(固有状態)は指数関数的に局在する。1958年にP. W. Andersonが指摘して以来、このアンダーソン転移に関する研究は盛んに行われている¹⁾。

この分野における最初のブレイクスルーは、いわゆる4人組によるスケール理論である²⁾。この理論によれば、1次元及び2次元の不規則電子系においては全ての固有状態が局在し、系は絶縁体になる。また、3次元の不規則電子系では、不規則性の増加とともに波動関数が非局在から局在状態へと転移する非局在-局在体転移が存在する。

一方で、フラットバンドモデルと呼ばれる、周期系においても波動関数が局在している奇妙なモデルが1990年代に提案された³⁾。フラットバンドモデルでは、不規則性がない場合にも局在波動関数が縮退した固有状態として存在するが、これらの局在波動関数の線形結合をとることによってブロッホ波を作り出すことも可能である。そのため、フラットバンドモデルの固有状態は局在とも非局在とも捉えることができる。

本研究では、3次元のフラットバンドモデルに不規則性を導入した場合の非局在-局在転移に関する研究を行う。上述したように、不規則性が含まれていないフラットバンドモデルにおいては、局在波動関数が固有状態になり得る。では、ここに局在効果を引き起こす不規則性を加えた場合にはどのような現象が起こるであろうか?系の固有状態が元々局在状態であったとみなせば、不規則性の増加によっても転移は起こらず、局在状態がそのまま維持されることが期待される。一方で、周期系においては局在状態の線形結合であるブロッホ状態が固有状態に選ばれれば、通常非局在-局在転移が生じることが予想される。本研究ではこのような観点に注目し、準位統計といった手法を用い、3次元フラットバンド不規則電子系における局在-非局在転移の存在を明らかにする。

本テクニカルレポートは次のように構成されている。2章において、フラットバンドモデルについての簡単な解説を行い、3章では本研究で用いる解析方法である準位統計の手法を説明する。数値計算の結果を4章で示し、5章はまとめに当てられている。

2. フラットバンドモデル

適当な格子のtight-bindingモデルを考えた場合に、バンド構造の中に平坦な分散曲線が現れることがある。このような分散曲線をフラットバンドと呼び、フラットバンドを持つようなtight-bindingモデルをフラットバンドモデルと呼ぶ。このようなモデルにおいて、フェルミ準位がフラットバンドにかかり、バンドが部分占有され、フント則が適用可能だとすると強磁性基底状態の出現が期待される。図1は、この概念図である。このような概念は、強磁性状態が基底状態になり得るといふ点は正しくとらえているが、スピンのバラバラな状態も基底状態になり得るといふ点は考慮されていない。そこで、多体問題を扱う際には、強磁性基底状態が唯一の基底状態であることを示す必要がある。そして実際に、このような格子上のハバードモデルを考えた場合に強磁性状態が現れることが厳密に示されている。Liebのフェリ磁性の証明にはじまり、Mielke、田崎の強磁性の証明にいたる厳密な理論はFBモデルを用いた重要な結論である^{4,5)}。

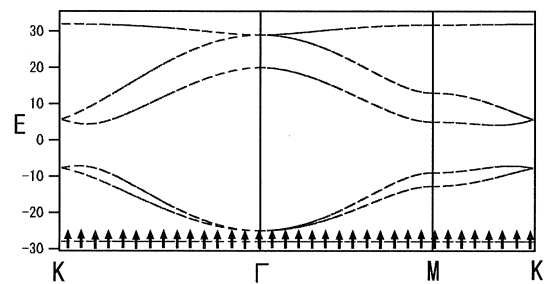


Fig. 1. フラットバンド強磁性の概念図。バンド構造の最下端にフラットバンドが現われている。フント則に従い電子をつめていけば、スピンの向きが揃った強磁性基底状態が実現する。

本研究では、図2に示すダイヤモンド格子上の4準位系を扱う。軌道間の飛び移り積分としては、図3に示した $t_0 \sim t_4$ を考える。ここで、飛び移り積分に $t_0 = 0, t_1 = -t_2 = t_3 = t_4$ を満たす値を用いると全てのバンドをフラットにすることができる。このようなパラメータを用いたときの分散曲線が図4になる。本研究では、不規則性としてon siteランダムネスを考え、サイトエネルギーを幅 W の箱型一様乱数を与える。この時、 W がランダムネスの強さを決めるパラメータとなる。系のハミルトニアン

*E-mail address: nishino@topology.coe.hokudai.ac.jp

は以下のように表される。

$$H = \sum_x \varepsilon_x a_x^\dagger a_x + \sum_{\langle x,y \rangle} t_{x,y} \{a_x^\dagger a_y + h.c.\}. \quad (1)$$

ε_x がサイトエネルギー、 $t_{x,y}$ が飛び移り積分を表す。 a_x^\dagger, a_x はサイト x における生成演算子と消滅演算子を表している。

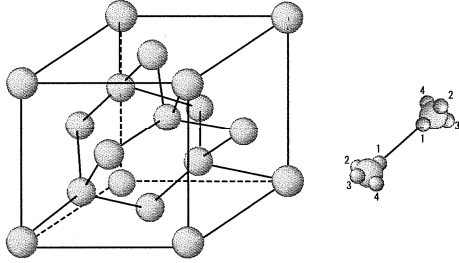


Fig. 2. ダイヤモンド格子上の4準位系。各サイトには、4個の軌道が配置されている。

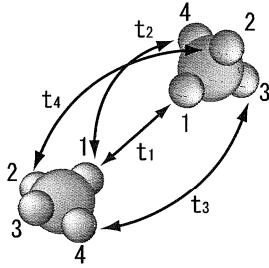


Fig. 3. 軌道間の飛び移り積分。 $t_0 \sim t_4$ を通じ、電子は軌道間を飛び移っていく。

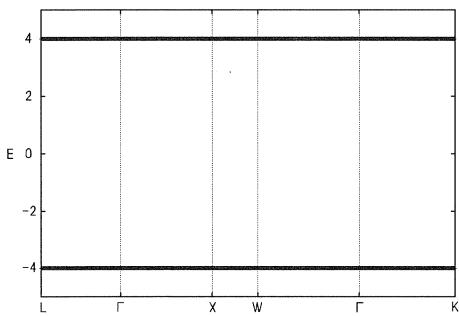


Fig. 4. 3次元フラットバンドモデルの分散曲線。 $E = \pm 4$ にフラットバンドが現われ、各バンドは4重に縮退している。

3. 準位統計

アンダーソン転移における転移点の決定方法としては、転送行列やグリーン関数を用いた方法が有名だが、エネルギー準位の情報から局在・非局在の判定を行う方法として準位統計がある。局在・非局在といったものは波動関数の広がり方によって定義されるのだが、その情報はエネルギー固有値にも含まれているはずであり、その情報を準位

間隔分布などを調べることによって引き出そうというのが準位統計の方法である。この考えは、E. Wigner や F. Dyson らが重い原子核のエネルギースペクトルをランダムなハミルトニアン行列の固有値スペクトルに関連付けようとしたことにはじまり、その後、ランダム行列理論へと発展し多くの研究分野に用いられてきた^{6,7)}。

アンダーソン転移に準位統計の方法を用いる際には、局在状態と非局在状態におけるそれぞれの準位間隔分布を知る必要がある。局在状態と非局在状態における準位間隔分布が異なるのは、空間的に重なりあった状態間に準位反発が生じるためである。非局在状態では、波動関数間に重なりがあるために準位反発が働き、小さな準位間隔は現れにくくなる。Wigner は、このようなことに着目して非局在状態における準位間隔分布 $P(s)$ は次のような式で与えられるだろうと予想した。

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4} s^2}. \quad (2)$$

これは、時間反転対称性及びスピン回転対称性がともに満たされている場合についての準位間隔分布である。この式は、Wigner surmise と呼ばれ、厳密な証明は得られていないが数値計算による結果を良く再現することが知られている⁷⁾。局在状態では、波動関数の重なりを無視することができるためエネルギー準位は互いに相関なく分布しており、準位間隔分布は次のようなポアソン分布で与えられる。

$$P(s) = e^{-s}. \quad (3)$$

数値計算によって非局在-局在転移を解析する際には、有限系のデータから無限系での系の振舞いを予想しなければならない。準位間隔分布でいえば、有限系における金属側での準位間隔分布は完全なウィグナー分布にはならず、同様に絶縁体側での準位間隔分布も完全なポアソン分布にはならない。そこで、いくつかのサイズを用いて解析を行い、サイズを大きくしていった場合にどちらの極限(ポアソン分布またはウィグナー分布)に近づくかを調べる。この手法を有限サイズスケリングという。B. I. Shklovskii らは、ポアソン分布及びウィグナー分布への準位間隔分布の近づき方を測る量として、

$$\gamma(W, L) = \frac{A - A_W}{A_P - A_W}, \quad (4)$$

$$A = \int_2^\infty P(s) ds, \quad (5)$$

を考え、準位統計によってアンダーソン転移の解析を初めて行った⁸⁾。 $\gamma(W, L)$ は、得られた準位間隔分布がウィグナー分布からどの程度はなれているかを測る量である。 $\gamma(W, L)$ は、次のような振舞いを示す。

$$\text{非局在状態 (ウィグナー分布)} \rightarrow \gamma(W, L) = 0.$$

$$\text{局在状態 (ポアソン分布)} \rightarrow \gamma(W, L) = 1.$$

一般に γ は不規則性の強さ W に対して単調増加関数になっている。これは、 W が大きくなるにつれて波動関数の局在傾向が強くなり、準位間隔分布がポアソン分布に近づくためである。 W が金属側に対応するパラメータの場合には、 γ はサイズを大きくするに従って小さい値をとる。 W が絶縁体側に対応するならば、 γ はサイズを大きくするに従って1に近づく。また、転移点上では特徴的長さがなくなり物理量が系のサイズに依存しなくなることを考慮すると、曲線群が交差するところ、つまり γ のサイズ

依存性がなくなる点がアンダーソン転移の転移点になる。このようにして、準位統計を用いてアンダーソン転移の転移点を見つけることができる。

4. フラットバンド不規則電子系における局在-非局在転移

準位統計を用いてフラットバンドランダム系を解析する際には、ユニットセルの数を $N \times N \times N$ とした時に、系のサイズとしては $N = 5, 6, 7, 8, 10$ を考えた。サンプル数は、準位統計に用いた全エネルギー準位数が、あるエネルギー領域を考えた場合に、(用いたエネルギー固有値の数) \times (サンプル数) $\geq 10^5$ となるようにサンプル数を選んだ。不規則性の強さ W は $1.0 \sim 50.0$ の範囲で変化させた。

不規則性の強さ W を変化させていった場合の、サイズ $L = 8$ 、エネルギー $E = 0.0$ における準位間隔分布を図5に示す。 W を大きくするに従って $P(s)$ がポアソン分布 \rightarrow ウィグナー分布 \rightarrow ポアソン分布と移り変わっていく様子が見てとれる。

転移点の位置を決定するために $\gamma(W, N)$ を計算した。 $E = 0.0$ における $\gamma(W, N)$ を図6に示す。 W が小さい領域においては γ は1に近い値をとり、 W が大きくなるにつれて γ の値は0に近づくが、さらに W を大きくすると γ は再び1に近い値をとる。また、曲線群が $W_{c1} : W \approx 13.5$ 及び $W_{c2} : W \approx 37.0$ の2箇所で交わっていることから、二つの転移が存在することがわかる。

5. 結論

準位統計による解析結果から、3次元フラットバンド不規則電子系においては、2つのアンダーソン転移が存在することがわかった。ここで、2つの転移点 W_{c1} と W_{c2} が、どのような転移を意味しているかを考える。準位統計の結果から、 W が小さい領域では $\gamma(N, W)$ が1に近い値をとっていることが分かる。 $\gamma(N, W)$ は、系が局在状態にある場合に1に近づくことから、 W が小さい領域においては3次元フラットバンドランダム系の波動関数は局在しているものと考えられる。そして、 W が中間程度の大きさの場合には $\gamma(N, W)$ が0に近づいている。 $\gamma(N, W)$ は系が非局在状態にある場合に0に近づくことから、 W が中間程度の大きさの場合には系の状態は非局在状態であることが分かる。このことから、 W_{c1} における転移は局在-非局在転移であると理解される。また、 W が大きい領域における $\gamma(N, W)$ が1に近づくことから、 W が大きい領域において系は局在状態にある。よって、 W_{c2} における転移は非局在-局在転移である。以上のことから、3次元フラットバンドランダム系においては局在-非局在-局在転移が起きることが分かった。3次元フラットバンドランダム系における W_{c2} でおこる非局在-局在転移は、不規則性が局在効果を生み出すというアンダーソン転移として理解することができる。これに対し、 W_{c1} で起きる局在-非局在転移は次のように理解できる。フラットバンドを構成している固有状態は局在状態と考えることもできるが、それらの線形結合をとることによって広がっている状態を作りだすこともできる。しかし、ここにランダムネスによる無限小の摂動が加わると固有状態は局在状態の方へと傾く。フラットバンドを構成していた局在波動関数は、行列要素の値をうまく調整することによって波の干渉効果を作りだし、指数関数的局在よりも強い局在状態 (δ 関数的) となっている。そのため、ランダムネスが加わることによってフラットバンド条件がわずかに壊れても局在状態は残ったままとなる。しかし、ランダムネスの強さがある程度よりも大きくなると、フラットバンド条件が大きく壊

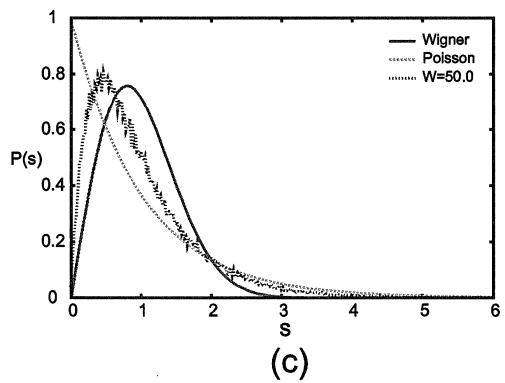
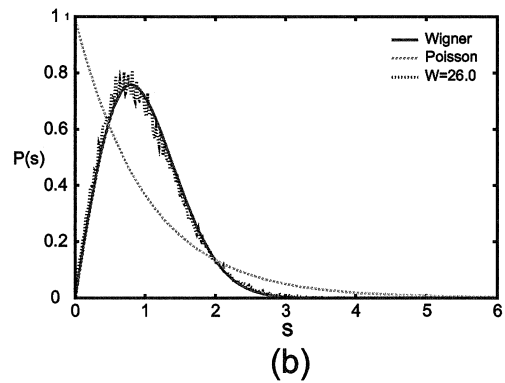
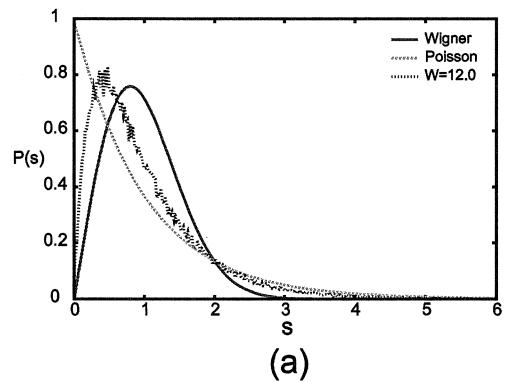


Fig. 5. 3次元フラットバンド不規則電子系における準位間隔分布。不規則性の強さは (a) $W = 12.0$, (b) $W = 26.0$, (c) $W = 50.0$ である。比較のために、ウィグナー分布とポアソン分布も表示してある。

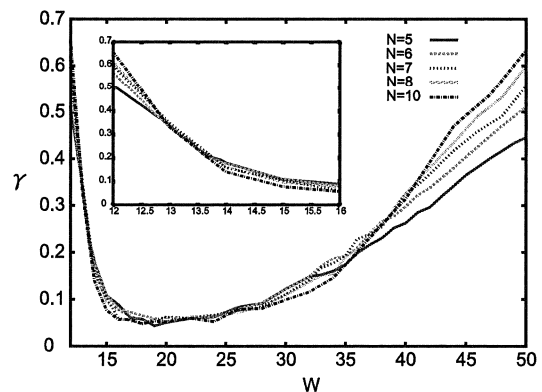


Fig. 6. γ の振舞い。通常の系とは異なり、 γ は下に凸の関数になる。

れだし、非局在状態が現れる。このような、状態の変化が W_{c1} における局在-非局在転移を引き起こしていると考えることができる。

- 1) P. W. Anderson: Phys. Rev., **109** (1958) 1492.
- 2) E. Abrahams and P. W. Anderson and D. C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan: Phys. Rev. Lett., **42** (1979) 673.
- 3) H. Tasaki: Prog. Theor. Phys., **99** (1998) 489.
- 4) E. H. Lieb: Phys. Rev. Lett., **62** (1989) 1201.
- 5) A. Mielke and H. Tasaki: Commun. Math. Phys., **158** (1993) 341.
- 6) C. E. Porter: "Statistical theories of spectral fluctuations", (Academic Press, 1965).
- 7) M. L. Mehta: "Random Matrices" (Academic Press, 1991).
- 8) B. I. Shklovskii and B. Shapiro and B. R. Sears and P. Lambrianides and H. B. Shore: Phys. Rev. B, **47** (1993) 11487.

微分方程式の同値問題 (Equivalence problem of differential equations)

名古屋大学多元数理科学研究科 D1

氏名：野田 尚廣

1 序文

微分方程式の同値問題とそれに付随する幾何構造の研究は Sophus, Lie や Elie, Cartan 等によって始められた。それ以降, いろいろな研究者の努力によって, 様々な幾何構造との関連性が調べられており, 最近になって深い結果が続々と得られている。この発表では, Lie や Cartan 等が研究した古典的な 2 階の常微分方程式の同値問題について概説しようと思う。

2 本文

二階の常微分方程式の正規型を考えよう:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

ここで, f は 1-jet 空間 $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上の C^∞ 関数。この微分方程式に対して Sophus, Lie は次の問題を考えた。

Problem 2.1

$\text{ContDiff}(\mathbb{R}^3) \curvearrowright X = \{y'' = f(x, y, y')\}$ の軌道分解の様子を探れ。ただし, $\text{ContDiff}(\mathbb{R}^3)$ は \mathbb{R}^3 上の接触微分同相群を表す。

Lie はこの問題について考察し, その結果この作用が推移的であることを示した。すなわち, すべての微分方程式に対し, ある接触微分同相が存在

し、平坦な方程式と呼ばれる最も単純な方程式

$$y'' = 0 \quad (2)$$

に移りあえることを示したのである。さてこのような結果から、Lie の弟子である Tresse と Elie Cartan がそれぞれ独立に次の問題を考えた。

Problem 2.2

$\text{Diff}(\mathbb{R}^2) \curvearrowright X = \{y'' = f(x, y, y')\}$ の軌道分解の様子を探れ。ただし、ここで $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ は正確には、この元である微分同相の $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上への (非特異な) 接触リフト全体のことを指す。

これは、詳しくは、次のように述べる事が出来る。まず、 \mathbb{R}^2 上の微分同相写像 ϕ を考えよう:

$$\phi : (x, y) \mapsto (X(x, y), Y(x, y)) \quad (3)$$

そして、この微分同相 ϕ の $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上への自然な接触リフト $\tilde{\phi}$ を考える。

$$\tilde{\phi} : (x, y, z) \mapsto (X, Y, Z) \quad (4)$$

ここで、

$$z = y', \quad Z = \frac{Y_x + Y_y z}{X_x + X_y z}.$$

Problem 2.2 はこの (非特異な) 接触リフトのもとでどのように常微分方程式 (1) が移りあえるかを見よという趣旨のものである。この問題に対し、Tresse と Cartan はそれぞれ独立にこの問題に対する解答を得た。今回は、主に Cartan がどのようにこの問題に取り組んだかを見ていく。まず、Cartan は上の微分方程式を特徴づける次の微分式系を考えた。

$$\mathcal{I} := \{\theta_0, \theta_1\}_{\text{diff}} \quad \text{with } \omega \neq 0 \quad (5)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \theta_0 &= dy - zdx, \\ \theta_1 &= dz - f(x, y, z)dx, \\ \omega &= dx \end{aligned}$$

とおいた。すなわち、 $\omega \neq 0$ を満たす θ_0, θ_1 によって生成される微分イデアルである。これは次の幾何学的意味を持つ。 θ_0, θ_1 によって消され、 ω

によっては消えない $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上のベクトル場の積分曲線が微分方程式の解のグラフ (解曲線) に他ならない. このような事実から, (5) は微分方程式 (1) に対応した微分式系といえる. また, この積分曲線の族は $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上に余次元 2 の葉層構造を引き起こす. そこでこの葉層構造の無限小自己同型群 G を構造群にもつような $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上の主 G 束を考える. 今の場合, この群 G は次の Lie 群になる.

$$G = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} A & 0 & 0 \\ B & C & 0 \\ D & 0 & E \end{array} \right] \mid A = CE \right\} \quad (6)$$

この主 G 束を微分方程式に付随する G 構造と呼ぶ. さて今までの話の流れから, 微分方程式が与えられると, それに対して自然に G 構造が定まるので, この対応から先程の微分方程式の同値問題は対応する G 構造の同型類を決定する問題に置き換える事ができる. したがって, この G 構造の上で何らかの (テンソル) 解析を行い, 不変量 (曲率) を得る事で, この (同値) 問題に対する解を得ようというのが Cartan の思想である. この曲率を求める手法として, Cartan が独自に考案した Cartan's equivalence method と呼ばれる手法がある. この手法を用いると, 今回の G 構造に関する曲率は次のものになる:

$$K_1 := f_{yy} + \frac{1}{6} \left\{ \frac{d^2}{dx} f_{zz} - 4 \frac{d}{dx} f_{zy} + f_z (4f_{zy} - \frac{d}{dx} f_{zz}) - 3f_y f_{zz} \right\}$$

$$K_2 := f_{zzzz},$$

ただし, ここで

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial f}{\partial z}.$$

とした. すると G 構造の一般論から, この曲率の消滅により次の結果が得られる.

Theorem 2.3

二階の常微分方程式の正規型 (1) が平坦な方程式と微分同相の接触リフトのもとで移り合える (同値である) ための必要十分条件は $K_1 = K_2 = 0$ となる事である.

参考文献

- [1] C. Grissom, G. Thompson, G. Wilkens, Linearization of second order ordinary differential equations via Cartan's equivalence method, *J. Differential Equations*, **77**, (1989), 1–15.
- [2] Thomas, A. Ivey, J. M. Landsberg, *Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*,
- [3] スターンバーグ, *微分幾何学*, 高橋恒郎訳, 吉岡書店 (1974)

核融合プラズマ解析へのニューラルネットワークの適用 Application of neural network to the fusion plasma analysis

北海道大学大学院工学研究科量子理工学専攻
若狭有光 (Arimitsu WAKASA)

Abstract. A neoclassical transport database, DCOM/NNW, has been constructed using the neural network (NNW) method to analyze the plasma in Large Helical Device (LHD). As the "training data" used in the "learning" for the NNW, the mono-energetic neoclassical transport coefficients were evaluated using a Monte Carlo code, DCOM. The database has been prepared for two typical magnetic field configurations in LHD: the standard and the inward shifted configurations. The neoclassical transport coefficients for the thermal plasma can now be given quickly by the DCOM/NNW.

背景

トーラス型磁場閉じ込め核融合方式では、現在、軸対称磁場配位を用いたトカマク型が主流となっており、国際熱核融合実験炉(ITER)[1]がトカマク型装置とし計画されるなど、将来の核融合炉に向けた研究が進められている。一方、近年、新たなトーラス型装置として、非軸対称磁場配位を用いたヘリカル型核融合炉に関する実験および理論的研究が進んできている。ヘリカル型装置の特徴としては、外部コイルにより閉じ込め磁場を生成するため、プラズマ内部電流を必要とせず、定常運転が可能であり、また、プラズマ中の自由エネルギーが小さいため、炉壁や構造物に影響を与えるプラズマの崩壊現象の危険性が低いことがあげられる。

核融合科学研究所の大型ヘリカル実験装置(Large Helical Device: LHD)[2]は、世界最大級のヘリカル型核融合実験装置である。LHD プラズマは磁気軸の位置によって大きく粒子閉じこめ特性やプラズマの平衡・安定性が変化する。LHD では、磁気軸位置 $R_{ax}=3.75$ m の標準磁場配位と呼ばれる配位と、磁気軸位置 $R_{ax} = 3.60$ m の内寄せ磁場配位と呼ばれる配位の2つの配位を中心に実験が行われている。

プラズマ中の荷電粒子は磁力線を中心とした回転運動を行っており、この過程でクーロン衝突に伴う古典拡散、磁場の強弱に起因する新古典拡散、

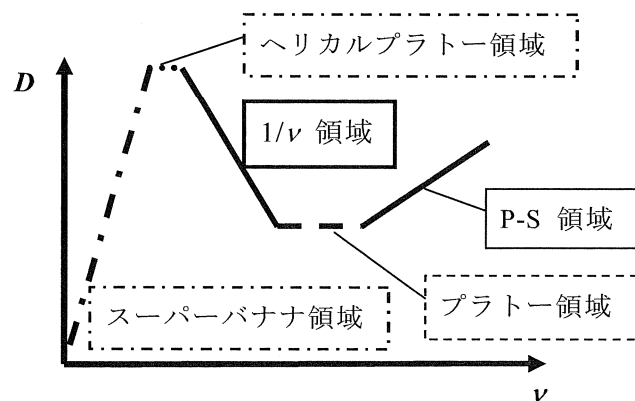


Fig. 1 ヘリカル型核融合装置の拡散係数

さらにこれらでは説明できない、より大きな異常拡散の拡散現象を引き起こし、プラズマの閉じ込めを阻害する。ヘリカル型核融合装置では、Fig.1 に示すように、衝突周波数が低い場合に、新古典拡散係数が衝突周波数に反比例して増大する $1/\nu$ 領域が存在する。衝突周波数は温度の $3/2$ 乗に反比例するので、高温のプラズマを考えた場合、新古典輸送が異常輸送程度まで大きくなってしまい、核融合プラズマの閉じ込めを劣化させる原因となってしまう。このため、ヘリカル型装置では新古典輸送の正確な把握が重要となる。

私は、粒子のドリフト運動方程式をモンテカルロ法で解いて粒子軌道を追跡し、拡散係数を計算するコード、Diffusion Coefficient Calculator by Monte Carlo Method (DCOM) [3]を新たに開発した。DCOM は単一エネルギー粒子のピッチ角散乱による局所的な拡散係数を算出するコードである。DCOM は、多数の粒子を追跡しその散らばりから拡散係数を計算するので、大きな計算時間が必要になる。特に衝突時間の長い低衝突周波数領域では、必要な粒子の追跡時間も長くなり、このために計算機による計算時間も増大する。実験データ解析や理論解析を行う場合に、様々に衝突周波数や径方向電場、小半径位置を変更するたびに DCOM で計算を行うのは現実的ではない。そこで何らかの手法で拡散係数のデータベースを構築する必要がある。従来、この内挿手段としては、単純な線形補間や、衝突周波数に応じた領域毎の解析解を利用した内挿が行われてきた。ヘリカル型の核融合装置の拡散係数は、衝突周波数や径方向電場、小半径位置などの非線形関数となっており、線形補間では正しく内挿を行うことができない。また、ヘリカル型核融合装置の拡散係数は、衝突周波数の大きさに応じて異なった振る舞いをするため、 $1/\nu$ 領域やプラトー領域、P-S 領域などの各領域に応じて、解析解を選択し内挿を行う必要がある。また各領域間の接続領域においては解析解が存在しないため、満足な内挿を行うことができない。

近年、ニューラルネットワーク(NNW)[6]と呼ばれる手法が発展してきた。NNW は生体の脳細胞を模した技術で、強い非線形性を持っており、任意の非線形関数を表現できることが証明されている[7]。そこで本研究では、DCOM の計算結果の内挿に NNW を利用し、新古典輸送係数のデータベースを構築した。

ニューラルネットワークを用いた新古典輸送データベースの構築

本研究では、Fig. 2 に示すような階層型 NNW を使用した。階層型の NNW は、入力信号を受け取り、他のニューロンへ信号を伝達する入力用ニューロンと、外部へ

出力信号を出す出力用ニューロン、および、その中間で信号の伝達を行う中間ニューロンの3種類のニューロンから構成される。それぞれの領域を入力層、中間層、出力層と呼ぶ。Fig. 2は中間層が1つの、3層 NNW を表している。この NNW において、入力層 x_1 と中間層 h_m を接続する重みを w^1_{lm} 、中間層 h_1 と出力層 y_n を接続する重みを w^2_{ln} とすると、

$$y_n(x_1, x_2, \dots, x_l) = f\left(\sum_{m=0}^m w^2_{nm} f\left(\sum_{l=0}^l w^1_{ml} x_l\right)\right) \quad (1)$$

で表すことができる。ここで、bias として出力 1 のニューロンを想定し、その重み w_0 が各ニューロンの閾値となっている。また関数 f として、

$$f(x) = \tanh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (2)$$

を使用した。式(1)から、階層型 NNW において、重み w を正しく決定すれば、入力値に対する適切な出力値を得ることができる。NNW の学習の指針となる、ある入力信号に対する NNW の望ましい出力を教師信号と呼ぶ。いくつかの入力信号と学習信号の組を用意しておき、入力信号に対するネットワークの出力信号が、教師信号となるように各ニューロンの重みを形成する。

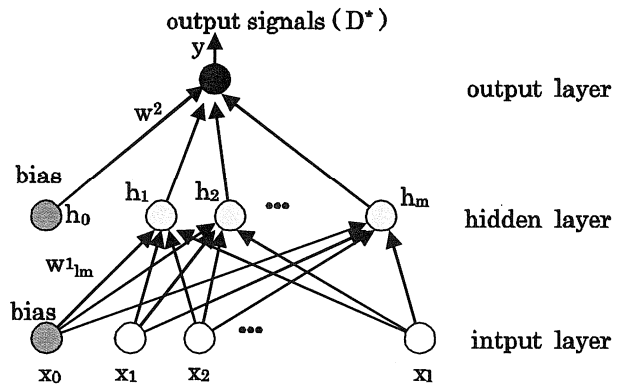


Fig.2 Schematic view of MLP1 neural network used in calculations of normalized D^* .

本研究では、LHD の標準磁場配位、内寄せ磁場配位それぞれについて、衝突周波数 ν^* 、径方向電場 G 、小半径位置 r/a を入力、拡散係数 D^* を出力とする、中間層 1 層の階層型の NNW を標準磁場配位と内寄せ磁場配位の 2 つの磁場配位それぞれに構築した。ネットワークの学習に使用する教師データには DCOM で計算した各 (ν^* , G , r/a , D^*) の組を用意した。標準磁場配位については、574 組の計算データを、内寄せ配位は 518 組の計算データを用意し、教師データとして使用し、BFGS 逆更新公式[8]を利用した準ニュートン法[8,9]を用いて、重み w を更新した。階層型 NNW は、中間層のユニット数によってその性質が決定される。特に、中間層のユニット数が多すぎると、ネットワークの学習に時間がかかるだけでなく、過学習[10]という問題が生じる。これを避けるためには、必要最小限のユニット数を選択する必

要がある。Fig. 3 に示すように中間層のユニット数を増やすと、最初は急激に誤差が減少し、中間層の数が約 15 程度以下になると、誤差は緩やかに減少していく。中間層のユニット数を 100 とした場合、二乗誤差は非常に小さな値になっていて、精度が高く感じられるが、この場合の NNW からの出力結果は、Fig. 4 のように、教師データのある点においては、非常に良く一致しているが、教師データの無い領域の内挿は正しく行われぬ。これは中間層のユニット数の増加によってネットワークの自由度が上がり、過学習の問題が発生したためである。本研究では、誤差の値の減少速度が変化する中間層 15 個を採用し、標準磁場配位、内寄せ磁場配位についてそれぞれ 15 個の中間層を用いたネットワークを構築した。

標準磁場配位における $r/a=0.5$ での NNW データベースからの出力結果を Fig. 5 に示す。Fig. 5(a) の各点は NNW の学習に使用された DCOM による計算結果であり、図中の線は NNW からの出力結果である。

NNW からの出力は、 $1/\nu$ 領域から Plateau 領域を経て P-S 領域まで全領域にわたって DCOM の結果とよく一致していることが分かる。また DCOM の計算結果が存在しない ν 領域と呼ばれる、 $\nu^* < 10^{-5}$ の領域に関しても NNW の外挿が適切に行われている。Fig. 5(b) の破線は、NNW の学習に使用しなかった電場における拡散係数を NNW データベースを用いて出力した結果を示している。Fig. 5(b) には、DCOM で拡散係数を計算した結果（正解値）もあわせて示した。この図から、NNW によるデータベースは、電場に関しても精度良く内挿を行っていることがわかる。NNW を用いて、標準磁場配位、内寄せ磁場配位、それぞれの拡散係数を $D^*(\nu^*, G, r/a)$ という関数で表すことができた。これにより、任意の $\nu^*, G, r/a$ における拡散係数を瞬時に得ることが可能になり、両配位の拡散係数のデータベースが構築できたこと

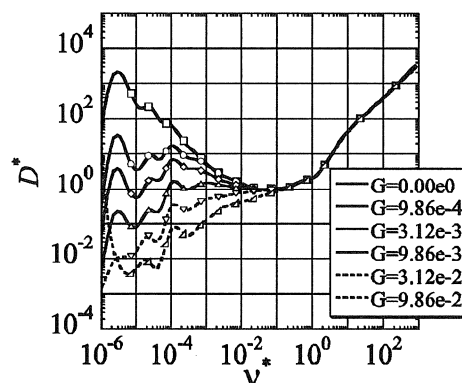


Fig. 4 Overlearning of NNW when number of hidden unit is assumed to be 100. The open symbols are training data and the lines are NNW results.

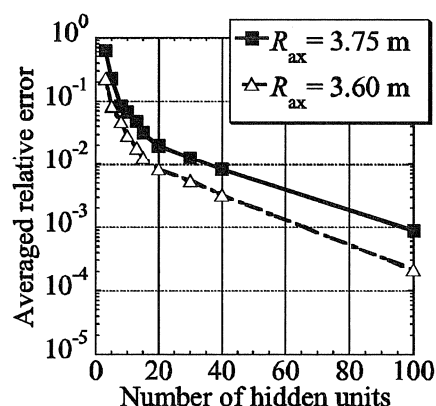


Fig. 3 Averaged relative error as function of number of hidden units of NNW for two magnetic configurations; $R_{ax}=3.75$ m and $R_{ax}=3.60$ m.

になる。

まとめ

NNW を利用し、LHD の標準磁場配位および内寄せ磁場配位の新古典拡散係数のデータベースの構築を行った。DCOM で計算した(v^* , G , r/a , D^*)の組を学習データとし、標準磁場配位と内寄せ磁場配位の2つの磁場配位についてデータベースを構築した。NNW の学習には、BFGS 公式を利用した準ニュートン法を使用した。中間層のニューロンの数は、過学習の問題を避けるため、15 個に決定した。

本研究で構築したデータベースからの出力値と DCOM の計算結果を比較し、データベースの評価を行った結果、両者はよく一致した

この NNW を利用した新古典輸送係数データベースの構築に関しては、論文 [11-12] に公表されている。

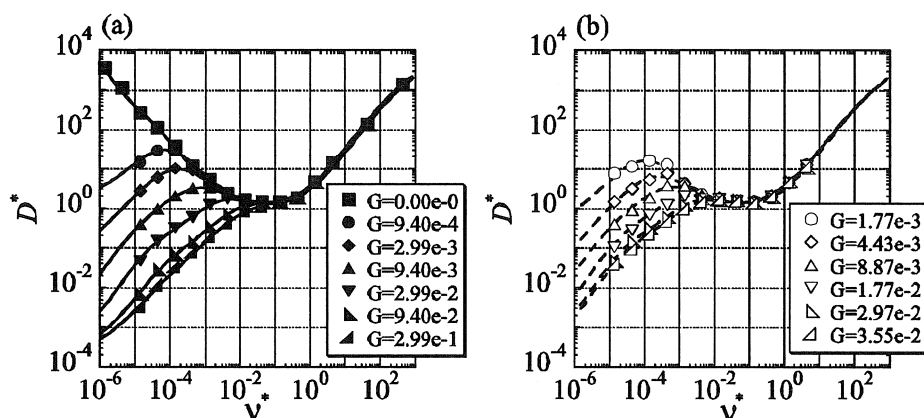


Fig. 5 (a) Diffusion coefficients evaluated using NNW database (solid lines), which is trained using DCOM results (square symbols) in $R_{ax}=3.75$ m configuration. (b) Diffusion coefficients obtained using NNW database, which is NNW interpolation of electric field G and DCOM results (open symbols) calculated to evaluate interpolation.

Reference

- [1] ITER Physics Basis Editors: Nucl. Fusion **39** (1999) 2137.
- [2] 藤原正巳: プラズマ・核融合学会誌 第74 巻増刊 (1998) 10.
- [3] A. Wakasa, et al., J. Plasma Fusion Res. SERIES **4** (2001) 408.
- [4] C.M. Bishop, Rev. Sci. Instrum. **65** (1994) 1803.
- [5] K. Funabashi, Neural Networks **2** (1989) 183.
- [6] 岩崎学: 『統計データ解析のための数値計算法入門』(朝倉書店, 2004) 102.
- [7] 茨木俊秀, 福島雅夫著: 『最適化プログラミング』(岩波書店, 1991) 141.
- [8] C. M. Bishop, *Neural Network for Statistical Pattern Recognition* (Oxford University Press, Oxford, 1994).
- [9] A. Wakasa, et. al., J. Plasma Fusion Res. SERIES **6** (2004) 203
- [10] A. Wakasa, et. al., Japanese Journal of Applied Physics, (accept 済. 未発行)

トーラス多様体上の余次元 0 または 1 の軌道を持つコンパクト群作用の分類 (CLASSIFICATION OF COMPACT GROUP ACTIONS ON TORUS MANIFOLDS WHICH HAVE CODIMENSION 0 OR 1 ORBITS)

黒木 慎太郎 (SHINTARÔ KUROKI)

ABSTRACT. $2n$ 次元の多様体 M でその半分次元のトーラス T がある条件を満たして作用しているものをトーラス多様体 (M, T) と言う。この講演では、どの (M, T) が変換群 (M, G) へ拡張可能かどうかについて講演する。ここで G は極大トーラスとして T を持つコンパクトリー群とし、変換群 (M, G) は余次元 0 の軌道を持つ (推移的に作用する) か余次元 1 の軌道を持って作用するものとする。

The torus manifold (M, T) is a $2n$ -dimensional manifold M and has some n -dimensional torus T action. In this talk we study the question of what torus manifolds (M, T) can have an extension (M, G) with codimension zero (transitive) or codimension one principal orbits and classify such (M, G) , where G is a compact Lie group which has T as a maximal toral subgroup.

1. トーラス多様体

$2n$ 次元の向きつけられたコンパクト連結多様体 M とその上に作用する n 次元のトーラス¹ T との組を (M, T) と書く。 (M, T) が次の三つの条件を満たす時にトーラス多様体 [Ha-Ma03] と言う。

- (1) T の作用は効果的かつ滑らかである。
- (2) T 作用による不動点集合 M^T が空ではない (自動的に M^T は有限集合になる)。
- (3) M が *omnioriented*.

T の作用が効果的とは M の全ての点を動かさない T の元が単位元のみ ($\bigcap_{x \in M} T_x = \{e\}$) のときをいい²、滑らかとは作用を定義する写像 $T \times M \rightarrow M$ が可微分写像になる時を言う (もちろん T はリー群なので群の構造だけでなく可微分多様体の構造も持っている)。また、不動点集合とは $M^T = \{x \in M \mid T(x) = x\}$ なる T 作用で動かない M の点の集合の事である。最後に T の作用を持つ多様体 M が *omnioriented* であることを定義しておく。まず M の特性部分多様体 M_i とは次の三つの条件を満たす部分多様体のことである。

- $\dim M_i = 2n - 2$.
- $M_i = (M^C)^\circ$, つまり T の部分群 $C (\simeq S^1)$ による不動点集合の連結成分。

The author was partially supported by OCAMI (Osaka City university Advanced Mathematical Institute) and the Fujyukai foundation.

¹ n 次元のトーラスと言うのは群 S^1 の n 個の直積の事、つまり n 次元のコンパクトな可換リー群のことである。

²作用から定義される表現 $T \rightarrow \text{Diff}(M)$ が単射になると言い換えられる ($\text{Diff}(M)$ とは M 上の微分同相写像全体)。

- $M_i \cap M^T \neq \emptyset$.

M に対する向きと全ての特性部分多様体 M_i に対する向きが指定されている時 M は **omnioriented** と呼ばれる。今回の研究では **omnioriented** の条件は本質的ではないので条件 (1),(2) を満たすものを **トーラス多様体** と呼ぶことにする。以下にいくつか例をあげる。

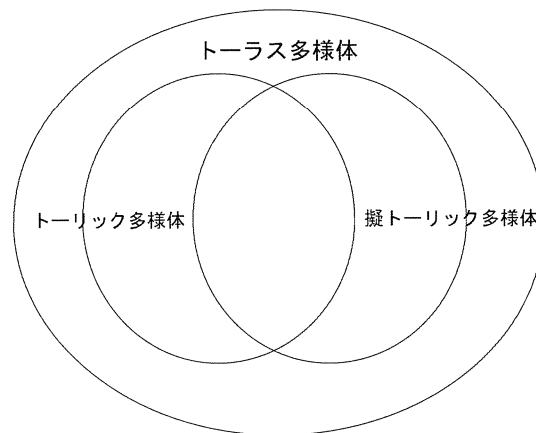
Example 1. T の元 (t_1, \dots, t_n) を複素射影空間 $CP(n)$ の斉次座標 $[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$ の後ろの n コの成分に掛ける $[z_0 : t_1 z_1 : \dots : t_n z_n]$ 。これで定義された作用で $(CP(n), T)$ はトーラス多様体になる。

Example 2. トーリック多様体 [小田 85] や擬トーリック多様体 [Da-Ja91], [Bu-Pa02] はトーラス多様体。

ここで、 M がトーリック多様体³とは、 M が複素 n 次元正規代数多様体で $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用をもち、その作用が稠密な軌道を持つとき (つまり $(\mathbb{C}^*)^n$ の $(\mathbb{C}^*)^n$ への自然な作用が M へ拡張しているとき) のことを言う。 $(\mathbb{C}^*)^n$ の極大コンパクト群が T なので、 T への制限作用によりトーラス多様体だと思える。

また、 M が擬トーリック多様体とは、 M は $2n$ 次元の多様体で n 次元のトーラス作用を持ち、その作用の軌道空間 M/T が単純凸多面体で不動点集合 M^T の各点の近傍での T 作用が **locally standard** (\mathbb{C}^n への自然な T 作用と同型) の時を言う⁴。この T 作用によって擬トーリック多様体はトーラス多様体になる。今後トーリック多様体と擬トーリック多様体をあわせて (擬) トーリック多様体と呼ぶことにする。

トーラス多様体と (擬) トーリック多様体との関係は以下の図に示したようになっている。



上図における (擬) トーリック多様体の各領域に入る多様体については [Bu-Pa02] に詳しく書いてある。次の例は簡単な例だがトーラス多様体の重要な例である。

Example 3. $2n$ 次元の球面 $S^{2n} \subset \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R} (\cong \mathbb{R}^{2n+1})$ に対して、 T を \mathbb{C}^n への標準的な掛け算と思って T の S^{2n} 上への作用を定義すると (S^{2n}, T) はトーラス多様体。 $n \geq 2$ ならばこれは (擬) トーリック多様体でない例になっている。

³以後コンパクトで非特異なもののみを考える。

⁴ M に概複素構造が入るとは限らないことに注意する。つまり、トーリック多様体とは異なるものも擬トーリック多様体になる。

以上よりトーラス多様体は（擬）トーリック多様体の位相幾何的な一般化であることがわかる⁵。今回はこのトーラス多様体について次の章にあるような問題を考え Theorem A と Theorem B を得た。

2. 問題と結果

Demazure は 1970 年にトーリック多様体 M に関する $\text{Aut}(M)$ の構造に関して研究を行った [De70]。もちろん M に元々作用していた $(\mathbb{C}^*)^n$ は $\text{Aut}(M)$ の中に含まれている。Demazure の研究を次のような問題として見直してみよう。

Problem 1. トーリック多様体 M 上の $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用はどんな群 G の作用に拡張するか？

Demazure の研究は代数幾何的に最も広い $G (= \text{Aut}(M))$ の構造を研究しているといえる。トーラス多様体についてこの問題はどうか？代数的なトーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の極大なコンパクト群 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ が位相的なトーラスに当たる物であるので、次のように言い換えることができる。

Problem 2. トーラス多様体 (M, T) の T 作用はどんな群 G の作用へ拡張するか？

位相幾何的に最も広い G は同相写像全体 $\text{Homeo}(M)$ であるがその構造をいきなり考えるのは難しいので、今回の講演では研究しやすいように制限をつけた次の問題を考えてみる。

Problem 3. コンパクトリー群 G は T を極大可換部分群（極大トーラス）として含み変換群 (M, G) は推移的または余次元一の主軌道をもつものとする。 G 作用を T へ制限した変換群 (M, T) がトーラス多様体になるような変換群 (M, G) を分類せよ。

ここで推移的な作用とは G 作用によって一点の軌道が M と一致する時のことを言う。この場合ある部分群 H で $M \cong G/H$ となることがわかる。余次元一の主軌道を持つとは次元が最も高い軌道（主軌道）の次元が $\dim M - 1$ に一致する時のことを言う。それぞれの場合について Problem 3 を解いていこう。

2.1. 推移的な場合. この場合は次の結果からリー群論の範疇に入る問題になる。リー群論に関しては [戸田-三村] を参照のこと。

Theorem 2.1 ([Gu-Ho-Za06]). M に G が推移的に作用すると仮定すると、次は同値。

- (1) (M, T) が GKM 多様体 (T は G の極大トーラスとする)。
- (2) $\chi(M) = \sum_i \text{rank } H^i(M) \neq 0$ 。
- (3) $M = G/H$ で H は G の閉連結部分群で T を含む (このような H を最大階数部分群と言う)。

⁵トーラス多様体の定義からわかるようにトーラス多様体には作用の仮定があるのみで、代数的な構造や局所的な構造をほとんど仮定していない。ここでは構造を忘れるような方向に一般化することを位相幾何的な一般化と呼んでいる。また紙数の都合により省略するがトーラス多様体から多重扇 (multi-fan) と言うものが定義できる [Ha-Ma03]。多重扇とはコーンが重複を持ってもよいように扇を一般化した物である。トーリック多様体が扇と一対一に対応することと異なりトーラス多様体と多重扇は一対一には対応していない。トーラス多様体については [Ha-Ma03] と [柘田 06] を参照のこと

GKM 多様体とは不動点と一次元軌道の集合の軌道空間が、不動点を頂点、その間を結ぶ一次元軌道の集合を辺とみなすことで、グラフになるような物のことを言う。トーラス多様体は GKM 多様体になっているのでこの定理を満たしている。よって推移的な場合は次の問題を解けばよい。

Problem . コンパクト連結リー群 G とその最大階数部分群 H の組 (G, H) を分類せよ。但し、 G の極大トーラス T に対して $(G/H, T)$ がトーラス多様体になるものとする (つまり $n = \dim T = \frac{1}{2} \dim G/H = \frac{1}{2}(\dim G - \dim H)$ を満たすとする)。

リー群論の結果を使ってこの問題を解こう。

Fact 2.2. G をコンパクトリー群とすると、有限被覆を取って $\hat{G} = G_1 \times \cdots \times G_k \times T'$ の形にすることができる。また $H \subset G$ が最大階数部分群なら $\hat{H} = H_1 \times \cdots \times H_k \times T'$ とできる。ここで G_i は単連結単純リー群で H_i はその最大階数部分群、 T' はトーラス。

よって分類したい $(G/H, T)$ は $(G_1/H_1 \times \cdots \times G_k/H_k, T_1 \times \cdots \times T_k)$ の形になることがわかる。ここで T_i は G_i と H_i に含まれる極大トーラスである。次の補題が成立している。

Lemma 2.3. もしも $(G/H, T)$ がトーラス多様体なら、それぞれの $(G_i/H_i, T_i)$ ($i = 1, \dots, k$) はトーラス多様体 (つまり $2 \dim T_i = \dim G_i/H_i$) になる。

省略して書くが、次のリー群論の基本的な大定理を使えば分類はすぐに完成する。

Fact 2.4. G_i を単連結単純リー群、 H_i をその最大階数部分群とすると、 (G_i, H_i) は全て分類されている。

以上から次の定理が成り立つ。

Theorem A . G をコンパクト連結リー群とし、 T をその極大トーラスとする。トーラス多様体 (M, T) が推移的な変換群 (M, G) に拡張するなら、 M と G は次のような物になる。

$$M \cong \prod_{i=1}^a \mathbb{C}P(l_i) \times \prod_{j=1}^b S^{2m_j}, \quad G \approx \prod_{i=1}^a \mathrm{SU}(l_i + 1) \times \prod_{j=1}^b \mathrm{SO}(2m_j + 1),$$

但し、 \approx でリー環が同型と言う意味、 $\mathbb{C}P(l_i)$ は $2l_i$ 次元の複素射影空間、 S^{2m_j} は $2m_j$ 次元の球面。

また G の M への作用は標準的なものであり、 $\sum_{i=1}^a l_i + \sum_{j=1}^b m_j = n = \dim T = \frac{1}{2} \dim M$ を満たす。

2.2. 余次元一の主軌道を持つ場合. 推移的な場合はほとんどリー群論の大定理を用いることで分類が完成した。研究として面白くなるのは余次元一の主軌道を持つ場合からである。この場合はリー群論だけでは解けない。変換群論が必要になる。変換群論については [Br72] と [川久保 87] を参照のこと。

最初に変換群論において最も基本的な可微分スライス定理を準備する。

Theorem 2.5 (可微分スライス定理). G をコンパクトなリー群、 M を滑らかな G 作用を持つ多様体とする。その時任意の $x \in M$ の軌道 $G(x) \cong G/K$ に対して閉不変管状近傍 X が存在し、以下の多様体と G -微分同相になる。

$$X \cong G \times_K D_x = (G \times D_x)/K$$

但し D_x は閉円盤 (次元は $\dim M - \dim G(x)$) で K がスライス表現 $\sigma: K \rightarrow O(D_x)$ を通して作用している。

次の定理を用いるためにトーラス多様体のコホモロジーが $H^1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ となることを仮定しておこう。

Theorem 2.6 ([Br72], [Uc77]). G をコンパクト連結リー群、 M をコンパクトな多様体で $H^1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ を満たし、 G が M に滑らかに作用しているとする。もしも G 作用が余次元一の軌道を持てば、その軌道 $G(x) \cong G/K$ は主軌道となり、 (G, M) はちょうど二つの特異軌道 $G(x_1) \cong G/K_1$ と $G(x_2) \cong G/K_2$ を持つ。また $G(x_s)$ の閉不変管状近傍 X_s ($s = 1, 2$) について以下が成り立つ。

- $M = X_1 \cup X_2$,
- $X_1 \cap X_2 = \partial X_1 = \partial X_2$.

つまりこの問題の中に出てくる軌道の型は余次元1の主軌道 G/K と二つの特異軌道 G/K_1 , G/K_2 の三種類になることがわかる (特異軌道とは主軌道よりも次元の低い軌道のこと)。まずは特異軌道についてどうなるのかを考えてみよう。次の補題が成立する。

Lemma 2.7. T 作用による不動点 $p \in M^T$ の軌道は特異軌道になる。

Proof. p 上の軌道 $G(p)$ のイソトロピー群を考えれば $T \subset G_p$ になっている。よって G_p は最大階数部分群なので G/G_p の次元は偶数になるのでこれは特異軌道。□

この補題から次がわかる。

Lemma 2.8. 不動点 $p \in M^T$ の軌道を G/K_1 とすると、 T ある部分群 T'' によって $(G/K_1, T/T'')$ はトーラス多様体になる。

つまり、少なくとも一つの特異軌道 G/K_1 に対しては推移的な場合の分類 (**Theorem A**) を用いることができ、軌道型が完全にわかる。また次の補題が成立する。

Lemma 2.9. $G = G' \times G''$, $K_1 = K'_1 \times G''$ と分解できて、**Lemma 2.8** の T'' は G'' の極大トーラスになる。また G'' は G/K_1 の閉不変管状近傍の一つのファイバー D^{2k_1} の境界 $\partial D^{2k_1} \cong K_1/K$ に推移的に作用する。

よって G'' の形が球面に推移的に作用するコンパクトリー群の分類 [Hs-Hs65] からわかるので、 G/K_1 を調べることで G と K_1 の形を完全に知ることができる。

次のステップでやることは、 G/K_2 がトーラス多様体になるかどうかで場合わけをして考えていくことである。簡単のために本稿では G/K_2 がトーラス多様体になる場合のみを考える。もしも (M, T) が (擬) トーリック多様体ならば、 $(G/K_1)/T$ が M/T の次元の低い面を張ることを考慮すれば G/K_2 もトーラス多様体となることがわかる。

よって、二つの特異軌道 G/K_1 , G/K_2 に対して先の議論を適用すると、次のようになる。

Lemma 2.10. (G, K_j) ($j = 1, 2$) は次のいずれか。

$$(G' \times \text{Spin}(2k_j), K'_j \times \text{Spin}(2k_j))$$

$$(G' \times \text{SU}(k_j) \times T^1, K'_j \times \text{SU}(k_j) \times T^1)$$

但し、 G'/K'_j は **Theorem A** に出てくる多様体になる。

$j = 1, 2$ と Lemma 2.10 から 4 つの場合になることがわかる。

次のステップでやることは得た 4 つの場合に対して、スライス表現 $\sigma_j : K_j \rightarrow O(2k_j)$ を計算し ($2k_j = \dim M - \dim G/K_j$) 閉不変管状近傍 X_j を全てピックアップすることである。そして X_1, X_2 の境界の張り合わせ f を考えて G 多様体 $X_1 \cup_f X_2 = M(f)$ を実際に構成する。構成した多様体が G 微分同相かどうかは次の補題で調べることができる。

Lemma 2.11. 次のいずれかが成立すれば $M(f) \cong M(f')$ (G 微分同相)。

- (1) f が f' に G -diffeotopic
- (2) $f^{-1}f'$ が G -equivariant diffeomorphism on X_1 に拡張可能
- (3) $f'f^{-1}$ が G -equivariant diffeomorphism on X_2 に拡張可能

以上により次の結果を得る。

Theorem B. G をコンパクト連結リー群とし、 T をその極大トーラス、 $H^1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ とする。トーラス多様体 (M, T) が余次元 1 の軌道を持つ変換群 (M, G) に拡張するなら、 M と G は次のような物になる。

$$\begin{aligned} M &\cong G \times_H P(\mathbb{C}_\alpha^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2}), & G &\approx G' \times S(U(k_1) \times U(k_2)), \\ M &\cong G \times_H S(\mathbb{C}_\alpha^k \oplus \mathbb{R}), & G &\approx G' \times U(k), \quad k = k_1 = k_2 \text{ or} \\ M &\cong G \times_H S(\mathbb{C}_\alpha^{k_1} \oplus \mathbb{R}^{2k_2+1}), & G &\approx G' \times U(k_1) \times SO(2k_2) \end{aligned}$$

但し、 $G/H \cong G'/H' \cong \prod_{i=1}^a \mathbb{C}P(l_i) \times \prod_{j=1}^b S^{2m_j}$ で、 H はファイバーにスライス表現から決まる表現を通して作用する。

Theorem B の最後の場合が G/K_2 がトーラス多様体にならない場合である。自動的に次の系が導ける。

Corollary B. Theorem B の仮定の下 (M, T) を (擬) トーリック多様体とすると、 M と G は次のように書ける。

$$\begin{aligned} M_\alpha &\cong \left(\prod_{h=1}^a (\mathbb{C} - \{0\})^{l_h} \right) \times_{(\mathbb{C}^*)^a} P(\mathbb{C}_\alpha^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2}), \\ G &\approx \prod_{i=1}^a SU(l_i + 1) \times S(U(k_1) \times U(k_2)) \end{aligned}$$

G は M に標準的に作用し $\sum_{i=1}^a l_i + k_1 + k_2 - 1 = n = \dim T$ である。

但し $(\mathbb{C}^*)^a$ は $P(\mathbb{C}_\alpha^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2})$ の $\mathbb{C}_\alpha^{k_1} (= \mathbb{C}^{k_1})$ 成分に次の \mathbb{C}^* への表現を通してスカラー倍で作用する。

$$(\mathbb{C}^*)^a \ni (t_1, \dots, t_a) \mapsto t_1^{\alpha_1} \dots t_a^{\alpha_a} \in \mathbb{C}^*$$

ここで $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_a) \in \mathbb{Z}^a$ 。

Corollary B で出てきた多様体は Hirzebruch 曲面の一般化と見ることもできる。実際 $k_1 = k_2 = a = 1 = l_1$ の場合が Hirzebruch 曲面である。

3. 今後の課題

最後に今後の課題を述べて終わりにしたい。

3.1. 余次元 2 以上の主軌道をもつ場合. 今回の研究は推移的 (余次元 0 の軌道を持つ)、余次元 1 の軌道を持つ場合の分類だった。これらの分類が成功した理由は軌道空間 M/G の構造が大変簡単だった事にある (推移的なら一点、余次元 1 なら円か区間)。

余次元 2 以上となると、軌道空間 M/G の構造がより複雑になる (余次元 2 なら多角形が出てくる)。その上、管状近傍同士の張り合わせも複雑なために一般に分類するのは難しい。だが最も簡単な余次元 2 の場合にさえ、 (M, T) の $\dim M = 4$ の場合の分類を含む結果になる。これの意味することは、出てくる M は球面と複素射影空間とを組み合わせたバンドルの構造だけではないということである⁶。余次元 2 以上の場合も考える価値はあると思っている。

3.2. (擬) トーリック多様体の分類. 今まで話してきたこととは少し毛色が変わるが、次の **Problem** を研究するための最初のステップとして、(擬) トーリック多様体の良いクラスを見つけようと言う動機も今回の研究にはある。

Problem ([Ma06]). 二つの (擬) トーリック多様体 M, M' が微分同相 $M \cong M'$ であることと、それらのコホモロジー環が同型 $H^*(M) \simeq H^*(M')$ であることは必要十分か?

もちろん一般の多様体に関してはこのような事は起こらない⁷。しかし (擬) トーリック多様体と言うクラスで考えれば、(言葉の定義は省略するが) 次の定理を背景としてこの **Problem** の答えは Yes である可能性がある。

Theorem 3.1 ([Ma06]). 二つの (擬) トーリック多様体 $(M, T), (M', T)$ が同変微分同相 $(M, T) \cong (M', T)$ であることと、それらの同変コホモロジーが $H^*(BT) (\simeq \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n])$ *algebra* として同型 $H_*^*(M) \simeq H_*^*(M')$ であることは必要十分である。

実際、最も簡単な場合である $S^2 \times \dots \times S^2$ や Hirzebruch 曲面⁸については **Problem** は肯定的に解かれている ([Ma-Pa06])。またトーラス作用による軌道空間を単体の積と仮定した時も肯定的に解かれている ([Ma-Su])。

今回得た (擬) トーリック多様体は複素射影空間の直積の上の複素射影空間バンドルの形をとるので大変調べやすい。例えばコホモロジー環は次のような形になる。

Proposition 3.2. (擬) トーリック多様体 $M_\alpha = (\prod_{h=1}^a (\mathbb{C} - \{0\})^{l_h}) \times_{(\mathbb{C}^*)^a} P(\mathbb{C}_\alpha^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2})$ のコホモロジー環は、

$$H^*(M_\alpha) \simeq \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_a, \chi] / \langle x_1^{l_1+1}, \dots, x_a^{l_a+1}, \chi^{k_2}(\chi + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_a x_a)^{k_1} \rangle$$

⁶実際 4 次元の擬トーリック多様体は全て分類されている。それは $CP(2)$ と Hirzebruch 曲面とのいくつかの T 同変な連結和となる [Bu-Pa02]。連結和をたくさん取っていけばバンドルの構造を持ち得ないと言うことはオイラー数等をみればわかる。

⁷例えば $CP(n)$ ($n \geq 3$) と同じホモトピー型を持つ (このときコホモロジー環は同型) が同相でない多様体が無数あることが高次元多様体の手術理論から知られている [Wa70]。また球面と同相だが微分同相でないエキゾチック球面 (同相なのでコホモロジー環は同型) もその例 [Mil-St74]。

⁸この場合に Theorem 4.1 と Problem の差を比べてみると面白い。Hirzebruch 曲面の同変微分同相型は無数 (Z 分) 出てくるがトーラス作用を忘れた微分同相型はちょうど二つ $S^2 \times S^2$ と $CP(2) \# CP(2)$ になる。

となる。但し $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_a)$ 。

Problem を完全に解決するための (小さな) 一歩として今回出てきた多様体の微分同相類を、 α の言葉で書いておくことは、今後の研究の上で何らかの役に立つのではないかと思っている⁹。

REFERENCES

- [Br72] G. E. Bredon: Introduction to compact transformation groups, Academic Press, 1972.
- [Bu-Pa02] V. M. Buchstaber, T. E. Panov: Torus actions and their applications in topology and combinatorics, Amer. Math. Soc., 2002.
- [Da-Ja91] M. Davis, T. Januszkiewicz: *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus action*, Duke. Math. J., **62** (1991), no. 2, 417–451.
- [De70] M. Demazure: *Sous-groupes algebriques de rang maximum du group de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **3**(1970), 507–588.
- [Gu-Ho-Za06] V. Guillemin, T. S. Holm, C. Zara: *A GKM description of the equivariant cohomology ring of a homogeneous space*, J. Algebraic Combin., **23** (2006), no. 1, 21–41.
- [Ha-Ma03] A. Hattori, M. Masuda: *Theory of Multi-fans*, Osaka. J. Math., **40** (2003), 1–68.
- [Hs-Hs65] W. C. Hsiang, W. Y. Hsiang: *Classification of differentiable actions on S^n , R^n and D^n with S^k as the principal orbit type*, Ann. of Math., **82** (1965), 421–433.
- [K1] S. Kuroki: *Classification of compact transformation groups on complex quadrics with codimension one orbits*, preprint.
- [K2] S. Kuroki: *On transformation groups which act on torus manifolds*, preprint.
- [Ma06] M. Masuda: *Equivariant cohomology determines (quasi)toric manifolds*, 数理解析研究所講究録 1517 (2006), 10–13.
- [Ma-Pa06] M. Masuda, T. E. Panov: *Semifree circle actions, Bott towers, and quasitoric manifolds*, arXiv: math.AT/0607094.
- [Ma-Su] M. Masuda, D. Y. Suh: *Classification of Quasi-toric manifolds and small covers over a product of simplices*, preprint.
- [Mil-St74] J. W. Milnor and J. D. Stasheff: Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.
- [Uc77] F. Uchida: *Classification of compact transformation groups on cohomology complex projective spaces with codimension one orbits*, Japan. J. Math. Vol. 3, No. 1, (1977), 141–189.
- [Wa70] C. T. C. Wall, Surgery on compact manifolds, Academic Press, London, 1970. London Mathematical Society Monographs, No. 1.
- [小田 85] 小田忠雄: 凸体と代数幾何学, 紀伊国屋書店 1985.
- [川久保 87] 川久保勝夫: 変換群論, 岩波書店 1987.
- [戸田-三村] 戸田宏, 三村護: リー群の位相 (上, 下), 紀伊国屋書店 1978, 1979.
- [栞田 06] 栞田幹也: トーリックトポロジー, 2006 年度秋季総合分科会 トポロジー分科会講演アブストラクト, 33–43.

OSAKA CITY UNIVERSITY ADVANCED MATHEMATICAL INSTITUTE (OCAMI), SUMIYOSI-KU, OSAKA 558-8585, JAPAN

E-mail address: kuroki@sci.osaka-cu.ac.jp

⁹講演まで間に合ったら発表します。

Lorenz chaotic system and unstable periodic orbits

Yoshitaka SAIKI (斉木 吉隆)

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Keio University

3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan

saiki@math.keio.ac.jp, yoshi.saiki@gmail.com

Keywords: Chaotic dynamical systems, Lorenz system, Unstable periodic orbits, Numerical calculations

キーワード：カオス力学系, ローレンツ系, 不安定周期軌道, 数値計算

概要

さまざまな自然科学・社会科学現象はカオス力学系で記述, モデル化される. カオス力学系には, 一般に無数の不安定周期軌道が埋め込まれていることが知られている. しかし, それらは不安定であるが故に, 時間正方向の積分で同定できないために数値的にも検出困難であるため, これまでに多くの研究がなされているわけではない. 本ノートでは, カオス力学系として非常に有名なローレンツ系を例に挙げて, カオスの基本的性質を, 数値的に検出された不安定周期軌道を通して紹介する.¹ カオス研究には, 数値計算が重要な役割を果たしており, 数値計算手法やその妥当性についても紹介する.

1 カオス力学系

1.1 カオスとは

カオスとは, 科学的には, 決定論的系に支配された初期値敏感性をもつ複雑現象を指す抽象的概念であり, ただ単にデータラメ (無秩序) なものを指しているわけではない. カオスには, 一般に何らかの秩序が埋め込まれており, 実際, カオス現象の典型と思われる気象現象は, 複雑な振舞いを示すが, いくつかの典型的な気象現象の変動傾向があることは, われわれも認識している.

数学分野では, カオスアトラクタ, カオス力学系, カオスの不変集合といった言葉が定義されている. ただ, それらの定義は幾通りかの流儀が混在している. これは, いずれの定義も何らかの意味で不満が残っていることの裏返しである. しかし, カオス現象において, 不安定性と回帰性という二つの性質は不可欠であり, ほぼすべてのカオスに纏わる用語の定義に, これら二性質は何らかの形で組み込まれている. 不安定性は複雑さに対応し, 回帰性は秩序に対応していると考えることもできる.

カオス力学系の研究は, 数学・物理学・経済学・工学等あらゆる分野で行なわれており, 研究の動機もさまざまである. 例えば, 数学ではアトラクタ, 物理学・経済学では動的振舞い, 工学ではカオス制御といったものが精力的に研究されているテーマの代表例である (Ott (1993)).

¹結果は, 部分的に, 京都大学数理解析研究所 山田道夫教授との共同研究に基づく. また, 数値計算の一部は, 東京大学大学院数理学研究科の PC クラスタ (40CPU) による.

²カオス力学系に関連する用語の数学上の定義は, しばしば決定的なものを欠いており, いくつかの流儀が存在するが, それぞれの用語に対して, 研究者の間でほぼ共通のイメージが存在しているという裏事情がある. そこで厳密数学以外の分野におけるカオス力学系研究では, 用語の定義は曖昧なまま議論を進めることも多い.

1.2 用語

本ノートでは, 厳密な数学議論は行なわないため, 言葉の定義を曖昧にしたまま議論を進めることが多い. ただ, 頻繁に用いる用語に関しては, イメージを伝える目的で, 適当な流儀の定義を紹介する (Robinson (1999), 國府 (2000))². 以後の節では特に用いない.

力学系には, 連続 (時間) 力学系と離散 (時間) 力学系がある. 例えば, M を微分可能多様体として, M 上の連続力学系とは, M からそれ自身への 1 パラメタ群 $\{\phi^t\}_{t \in \mathbf{R}}$, すなわち任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して, 微分同相写像 $\{\phi^t\}: M \rightarrow M$ が与えられており, それが,

$$\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}, \quad \phi^0 = \text{id}_M \quad (1)$$

をみたすことである. 言い替えば, 連続力学系は, 加法群 \mathbf{R} の多様体 M への可微分な群作用を考えていることになる. そして, 加法群 \mathbf{Z} の多様体 M への可微分な群作用を M 上の離散力学系という. これらの定義の条件から, 可逆性や微分可能性条件を除いた非可逆な力学系・位相力学系といったものもしばしば用いられる.

次にアトラクタを説明する. これも幾通りかの定義が存在するが, ラフに言えば, 力学系の時間無限大における '極限集合' を意味する. 最も一般的と思われる定義は次のものである. 離散力学系 $f: M \rightarrow M$ の閉不変集合 Λ がアトラクタであるとは, Λ の近傍 U で

$$f(U) \subset U \quad \text{かつ} \quad \Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U) \quad (2)$$

となるものが存在することをいう。但し、 $f(\Lambda) = \Lambda$ であるとき、 Λ は、 f の不変集合であるという。

次に、一番議論の余地があると思われるカオス力学系 (離散力学系) の定義を紹介する。ここで紹介するものは、Devaney によるものである。力学系 $f: M \rightarrow M$ が不変集合 Λ 上で Devaney の意味でカオス的であるとは、

1. Λ 上で f は位相推移的である
2. f の周期点全体の集合は Λ 内で稠密である
3. Guckenheimer の意味で初期値に対する敏感な依存性をもつ

が成り立つことをいう。但し、1. は、任意の開集合 $U, V (\subset \Lambda)$ に対して、 $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ なる自然数 n が取れることを意味し、3. は、任意の $x_0 \in M$ とそれに幾らでも近い点 y_0 は、時間が立てば一定以上離れるという条件、

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \forall x_0 \in M, \forall U : x_0 \text{ の近傍}, \\ \exists y_0 \in U, \exists N > 0, d(f^N(x_0), f^N(y_0)) > C \end{aligned}$$

を意味する。

連続力学系の軌道を解析するために、しばしばポアンカレ写像というものを經由して考える。 \mathbf{R}^n 上の連続力学系とその軌道が与えられたとき、その軌道が横切る $(n-1)$ 次元の曲面 Σ をとり、これをその軌道の横断面と呼ぶ。 Σ の点 x を出る軌道が点 y で再び Σ に戻るとすると、点 x から点 y への対応は、 Σ 上の離散力学系を与え、このような写像をポアンカレ写像と呼び、 Σ をポアンカレ断面と呼ぶ。

2 ローレンツ系

2.1 ローレンツ系とは

ローレンツ系 (もしくは、方程式、モデル) と呼ばれている力学系は、気象予報の限界を示唆する論文 (Lorenz (1963)) において提案された 3 次元の連続力学系であり、最も有名なカオス力学系であると考えられる。2 次元以下の自励系連続力学系においては、アトラクタとして、固定点か周期軌道しか存在しないことがわかっている (cf. ポアンカレ・ベンディクソンの定理)。そのため、3 次元のローレンツ系は、カオスアトラクタを生み出さうる最低次元の自励系の連続力学系であるため、研究も盛んに行なわれてきた (Sparrow (1982))。なお、離散力学系や非自励系の連続力学系の場合、1 次元でもカオスアトラクタが出現しうる (Li and Yorke (1975))。

ローレンツ系は、 \mathbf{R}^3 上に定義された常微分方程式系であり、実変数 x, y, z に対して、

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad (4)$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy, \quad (5)$$

と定まっている。但し、 σ, r, b は正定数である。(古典パラメタは、 $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ であり、本ノートにおいてもこのパラメタ値を採用する。)

なお、ローレンツ系は、以下に示す偏微分方程式系を大胆に単純化して得られたものである。以下の系は、無限に広い

水平な液層を下部から加熱した際に発生する熱対流運動を、流体の速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) (\in \mathbf{R}^3)$ のみならず運動量輸送の式と温度場 $\theta(\mathbf{x}, t) (\in \mathbf{R})$ のみならず熱輸送の式をブジネ近似の下で無次元化してあらわしたものである。

$$Pr^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \theta \lambda + \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = Ra \lambda \cdot \mathbf{v} + \nabla^2 \theta. \quad (8)$$

ここで $p(\mathbf{x}, t) (\in \mathbf{R})$: 静水圧, $\lambda (\in \mathbf{R}^3)$: 重力方向の単位ベクトル, Pr : プラントル数, Ra : レイリー数 である。

2.2 基本性質

2.2.1 平衡点

ローレンツ系には、平衡点 (もしくは、固定点、特異点とも呼ばれる)、

$$O = (0, 0, 0)$$

$$E_{\pm} = (\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (r > 1)$$

が存在する。これらの平衡点はローレンツ系の不変集合であるものの、古典パラメタにおいては不安定であるため、初期値を平衡点上に定めない限りたどり着くことはなく、アトラクタではない。

2.2.2 対称性

ローレンツ系には、

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z).$$

という対称性が内在し、アトラクタの形状等に関係する。

2.2.3 有界性

ローレンツ系の生み出す解が有界におさまることを確認する。 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2\sigma} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - (r+1)z - \mu \quad (9)$$

(但し、 μ は正定数) と定義し、 $f = 0$ で定まる曲面 (楕円体面) を考える。この曲面の法線方向のベクトルと流れのベクトルのスカラー積は、

$$Df = \dot{x}f_x + \dot{y}f_y + \dot{z}f_z \quad (10)$$

$$= -x^2 - y^2 - bz^2 + (r+1)bz \quad (11)$$

となり、楕円体のサイズを定める μ が十分大きいときには $Df < 0$ となり、無限遠方に遠ざかる軌道はないことがわかる。

2.2.4 散逸性

ローレンツ系は散逸的であることを確認する.

$$\frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{d\dot{y}}{dy} + \frac{d\dot{z}}{dz} = -(\sigma + 1 + b), \quad (12)$$

であるので, $t = 0$ で相体積が $\Omega(0)$ の集団が, 時刻 t で,

$$\Omega(t) = \Omega(0) \cdot \exp(-(\sigma + 1 + b)t) \quad (13)$$

となり, $t \rightarrow \infty$ で相体積はゼロに収束する. すなわちアトラクタの体積はゼロである.

2.3 カオス軌道とカオスアトラクタ

2.3.1 カオス軌道

図 1 は, ローレンツ系をルンゲ・クッタ法で数値計算して得られた軌道の断片を x 座標へ射影したものである. 3 つの初期値から発展させた軌道を比較しており, 基準となるカオス軌道 (軌道 1) と, その初期値を x 変数のみ $d_x = 10^{-4}$ 摂動させた軌道 (軌道 2), $d_x = 10^{-3}$ 摂動させた軌道 (軌道 3) を示している. $t = 10$ 周辺で軌道 3 が軌道 1 から大きく離れていき, $t = 15$ 周辺で軌道 2 も軌道 1 から大きく離れていく様子が観察される. これらの軌道の振舞いは, ローレンツ系が, カオス力学系の特徴である初期値鋭敏性を有していることと対応している. 力学系が初期値鋭敏性を持つことをより強く主張するために, リアプノフ指数と呼ばれる安定性指数を数値的に計算し, その指数が正であることによって裏付けることも多い.

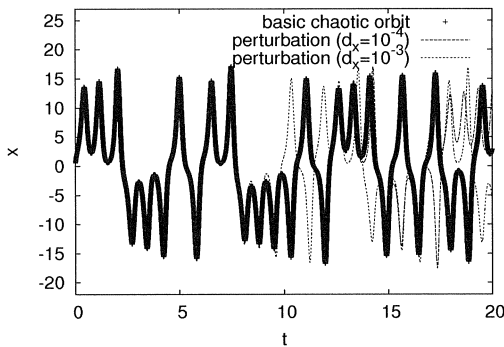


図 1: 数値計算で得られたカオス軌道 (基準となるカオス軌道と初期値 (x 変数) に摂動 ($d_x = 10^{-4}, 10^{-3}$) を与えた場合のカオス軌道)

2.3.2 カオスアトラクタ

図 2 は, 長時間の数値計算によって得られたアトラクタの概形である. アトラクタは, 固定点でも周期軌道でもなく, 奇妙な形態をしているため, ストレレンジアトラクタと呼ばれている. このアトラクタの

形状は, ローレンツ系がもつ対称性を反映している.

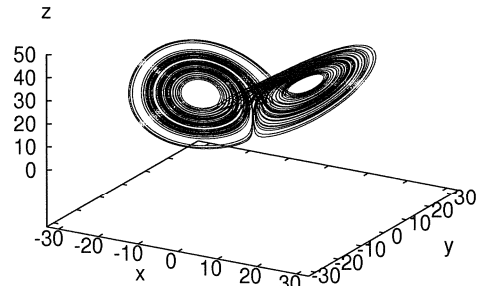


図 2: 数値計算で得られたカオスアトラクタの概形

2.4 その他

連続力学系であるローレンツ系の数学解析は困難なため, ローレンツ系の主要性質を保つと考えられるローレンツ幾何モデルの解析が行なわれてきた (Guckenheimer and Holmes (1983), Hirsch *et al.* (2003)). そして, 最近, 精度保証つき数値計算を援用することによって, ローレンツ系と幾何モデルの間の関係が判明し (Tucker (1999, 2002)), ローレンツ系がカオスアトラクタをもつことが数学的に明らかになった. また, 近年, ローレンツ幾何モデルは, 非双曲力学系の中で特異双曲力学系と呼ばれるクラスの雛型としても重要視されている (Bonatti *et al.* (2004)).

3 不安定周期軌道

3.1 不安定周期軌道とは

局所不安定, すなわち微小摂動に対して不安定な力学系の周期解を不安定周期解と呼び, それがなす軌道を不安定周期軌道という. 連続力学系の周期軌道の局所安定性は, フロケ指数で特徴づけられる. 不安定周期軌道 (Unstable Periodic Orbit) は, しばしば UPO と呼ばれ, 本ノートでも用いる.

カオスアトラクタには, (一般に) 無限個の不安定周期軌道が (良い性質をもつ系に関しては稠密に) 埋め込まれている. そのため, 位相幾何学的研究において, 周期軌道は最重要視されてきたといっても過言ではない (Smale (1967)). 一方, 解析的もしくは応用研究においては, 周期軌道を明示的に知る必要が出てくる. しかし, 数値的にも検出が一般に困難なため, 研究されることが少なかった.

3.2 概形

図 3 は、整数値周期 $N_T (\approx T/0.78)$ が 3 の 3 種類の不安定周期軌道の概形である。 N_T は、平衡点 E_{\pm} の周りを‘まわる’回数を意味し、ローレンツ系の適当なポアンカレ写像 (例えば $z = 27, dz/dt \geq 0$) の周期に対応させることができる。中段と下段の周期軌道は、ローレンツ系がもつ対称性によって移り変わる。不安定周期軌道は、適当な初期値から時間発展させた際には、実現しない軌道であるにも関わらず、図 1, 2 と見比べることによって、カオス軌道の主要な性質を反映していることが想像できる。なお、平衡点 E_+, E_- の周りを‘まわる’順列によって、周期軌道は一意に定まる、すなわち同じ符号列をもつ周期軌道は、同一である。

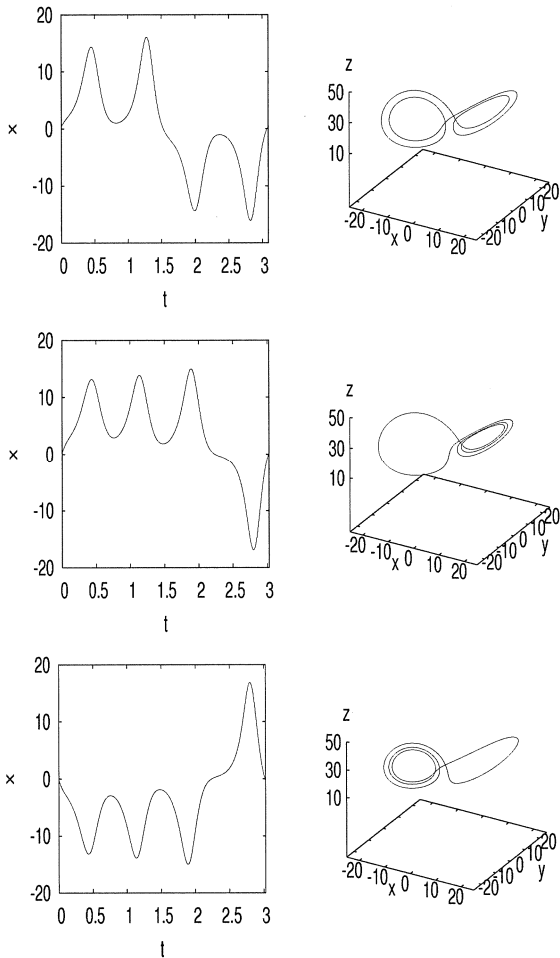


図 3: 数値的に検出された不安定周期解の x 変数の時間発展と軌道

3.3 周期軌道の個数

数値的に検出された周期軌道を、整数値周期 N_T に応じて分類して個数を数え上げると、図 4 に示すように N_T に関して指数的な増大を示すことがわかる。この指数は、位相エントロピー (Bowen(1970)) と呼ばれる、力学系がもつ複雑さを示す指標と関係している。いくつかの性質をもつ力学系に

対して、力学系 f の位相エントロピー h_f と周期軌道の個数の間には、

$$h_f = \limsup_{N_T \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{周期 } N_T \text{ の周期軌道の個数})}{N_T} \quad (14)$$

が成り立つことが知られている (cf. Bowen(1970)). 正の位相エントロピーは、カオスを特徴づけるひとつの指標となっており、カオスの定義に組み込まれている場合もある。なお、周期点の個数が周期に対して指数関数より早く増加する系があることが最近判明している (Kaloshin and Hunt (2007)).

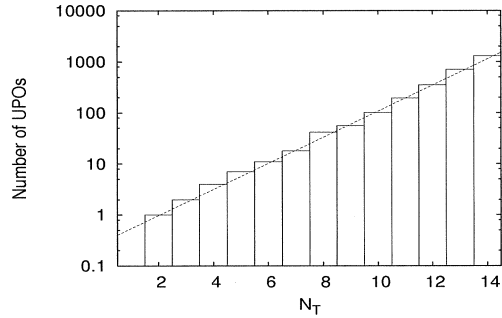


図 4: 数値的に検出された不安定周期軌道の整数値周期 (N_T) 別の個数 (補助線は 1.8^{N_T} の定数倍)

3.4 ポアンカレ断面

本節では、連続系の軌道を断面に焼き直して考察する。図 5 は、数値的に計算されたカオス軌道、ならびに数値的に検出された約 1000 個の不安定周期軌道に関し、ポアンカレ断面 ($x = y$) における (x, z) 値をプロットしたものである。少なくともこの断面で見える限り、カオスアトラクタ全体に周期軌道が散在している様子が確認できる。

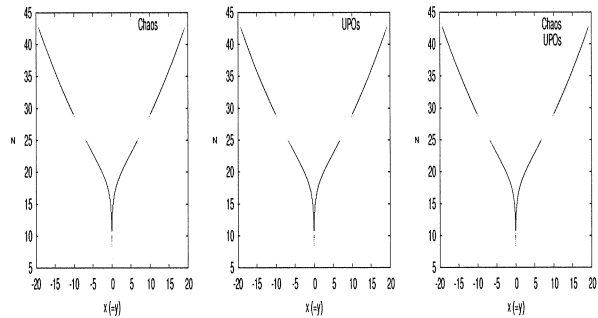


図 5: ポアンカレ断面 ($x = y$) の (x, z) 値 (カオス (左), 不安定周期軌道 (UPO)(中), 両者の比較 (右))

図 6 は、検出された不安定周期軌道が断面 ($x = y$) を通過する際の z 座標を、周期に対してプロットしたものである。図 7 は、検出された不安定周期軌道を整数値周期 N_T によって分類して、各不安定周期軌道が断面 ($x = y$) を通過する際の z 座標の分散の出現分布である。これらの結果は、短い周期の周期軌道を基準にして、相空間に‘フラクタル的’に長い

周期の周期軌道が配置しているのではないかと想像させる。

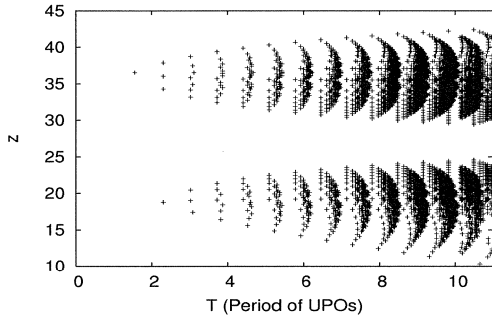


図 6: 不安定周期軌道の周期 T に対するポアンカレ断面 ($x = y$) の通過位置 (z 座標)

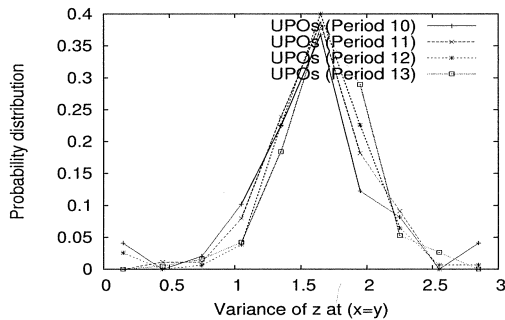


図 7: 整数値周期 N_T ($N_T = 10, \dots, 13$) をもつ不安定周期軌道のポアンカレ断面 ($x = y$) の通過位置 (z 座標) の分散の出現分布

3.5 統計量

本節では、Nusselt 数 ($:= 1 + 2xy/br$) と呼ばれる量に関する統計性質を考察する。図 8 は、数値的に検出された周期軌道 (周期 T) 上の平均 Nusselt 数を示している。カオス軌道上の平均 Nusselt 数は、2.682 であるが、その近辺に散在している。図 9 は、周期軌道を整数値周期 N_T によって分類して、周期軌道上の平均 Nusselt 数の出現分布を描いたものである。図 10 によると、ローレンツ系の Nusselt 数の有限長カオス軌道上の平均値は、軌道長を長く取るにしたがって、一定値に近づく標準偏差は小さくなっていくが、それに比較すると周期軌道の場合は、短い軌道であってもかなり標準偏差は小さいことがわかる。これは、周期軌道は、力学系が生み出すカオスの振舞いの中の秩序構造を短くとも 1 本で表現していることを示唆していると考えられる。この結果は、流体乱流の不安定周期軌道解析の研究 (Kawahara and Kida (2001), Kato and Yamada (2003)) において得られた、検出された短い 1 本の周期軌道ですら、カオスの統計性質を良く近似できるという結果をサポートしている。他の力学系に関する結果も含めて、詳細な議論は、Saiki and Yamada (2007) に述べられている。

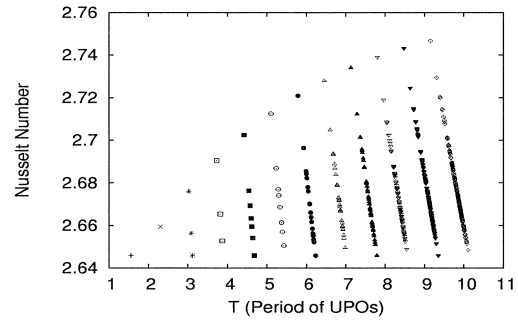


図 8: 周期 T をもつ不安定周期軌道の平均 Nusselt 数

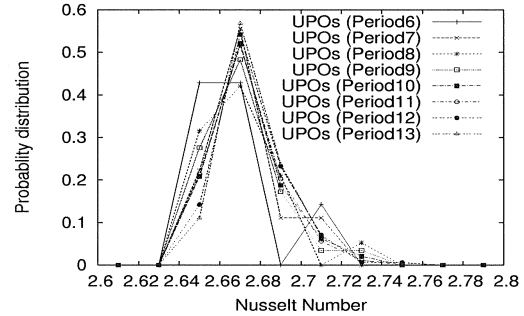


図 9: 整数値周期 N_T ($N_T = 6, \dots, 13$) の各不安定周期軌道をもつ平均 Nusselt 数の出現分布

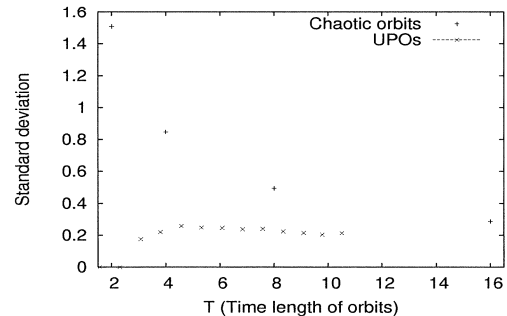


図 10: 時間長 T をもつ多数の有限長カオス軌道の平均 Nusselt 数の標準偏差と整数値周期 N_T ($N_T = 2, \dots, 13$) の不安定周期軌道の平均 Nusselt 数の標準偏差の比較 (後者は、 N_T を T に焼き直してプロット)

3.6 その他

力学系の位相幾何学的アプローチでカオス力学系の不安定周期軌道解析を行なう際には、通常、非遊走集合と呼ばれるアトラクタにほぼ一致する集合上の議論に限定することが多く、特に問題は起きないが、本ノートの様なスタンスで不安定周期軌道解析を行なう際には、カオスアトラクタに埋め込まれた周期軌道か否かということが問題となることに注意されたい (Ishiyama and Saiki (2005)).

ところで、ローレンツ系の不安定周期軌道解析に関する

研究はいくつかの観点でなされてきた。(Eckhardt and Ott (1994), Franceschini *et al.*(1994), Wiklund and Elgin (1996), Zoldi (1998), Viswanath (2003, 2004), Gratrix and Elgin (2004)). 高次元カオス力学系においても, 不安定周期軌道に着目した研究は, 流体乱流の分野等で始まっており, 乱流における秩序構造を捉える目的で有効に働くことが知られてきた (Christiansen *et al.*(1997), Zoldi and Greenside (1998), Kazantsev (2001), Kawahara and Kida (2001), Kato and Yamada (2003), van Veen *et al.*(2006)). ただ, 高次元力学系の不安定周期軌道を検出することは, 極めて難しく, 実際の検出もごく少数に留まっているため, 詳細な理解にまでは達していない. また, 連続力学系であらわされる景気循環モデルに対して, 1000 個程度の不安定周期軌道を数値的に検出し, ダイナミクスの分類等を行なった研究もある (Ishiyama and Saiki (2005), Saiki and Ishiyama (2007)). 一方, 不安定周期軌道を何らかの手段で安定化し, カオス制御を行なうということは, 工学分野を中心に広く行なわれてきている (Ott *et al.*(1990), Pyragas (1992), Kawahara (2005)). その他, 力学系における結び目・組ひも理論 (松岡 (1996)), 量子力学における古典カオスの痕跡を探る量子カオスの研究 (Cvitanović *et al.* (2004)) 等にも不安定周期軌道は用いられている.

力学系がもつ性質の違い (例えば, 双曲力学系と非双曲力学系) によっても, 不安定周期軌道が果たす役割が, 大きく異なると考えられており, その観点の研究も盛んに行なわれている (Zoldi (1998)). 応用数理の側面では, 現象を支配する力学系が有限時間の間に変化することもあり, 時間無限大の‘極限集合’であるアトラクタとは異なる有限時間における遷移的ふるまいも重要となる. それらをトランジエントと呼び, カオスの振舞いをもつトランジエントをカオストランジエント, Chaotic no-attractor と呼ぶことがある. このトランジエント構造を不安定周期軌道によって捉える研究も行なわれはじめている (Chian *et al.*(2006)).

4 数値計算

4.1 ルンゲ・クッタ法

微分方程式を計算機を用いて数値積分するためには, 時間を離散化する必要がある. 4 次のルンゲ・クッタ法 (もしくはアルゴリズム, 積分) (Parker and Chua (1989)) と呼ばれる, 以下に示す手法が, 広く用いられている.

N 次元常微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^N \quad (15)$$

を $x(0) = x_0$ なる初期条件の下で解くことを考える.

時間 $t = t_n$ における x の値が既知なとき,

$$k_1 = hf(x_n, t_n), \quad (16)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}\right), \quad (17)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{h}{2}\right), \quad (18)$$

$$k_4 = hf(x_n + k_3, t_n + h), \quad (19)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5), \quad (20)$$

というアルゴリズムで x_n から x_{n+1} を定める手続きを, 4 次のルンゲ・クッタ法と呼ぶ. ここで h は, 離散化における時間メッシュを意味している. この離散化に伴う誤差は $O(h^4)$ である. この手続きを初期値 $x(t_0) = x_0$ を基に順々に繰り返す.

計算機に乗せる際には, h が小さ過ぎる場合には, 一定時間の積分に多くの計算ステップを要して計算時間を食うことになる. また, 1 ステップ毎に打ち切り誤差の影響が積もるため, $h(> 0)$ を小さくすればするほど精度が上がるわけではない. そこで, 適切な数値積分を行なうためには, f の形に応じた適切な時間メッシュ h を選ぶことが必要となる (伊理・藤野 (1985)).

4.2 不安定周期軌道の検出

本ノートにおける多数の不安定周期軌道の数値的検出には, ニュートン・ラフソン・ミーズ法 (Parker and Chua (1989)) を採用した. 以下では, その計算手法について述べる. n 次元力学系 ($x \in \mathbf{R}^n$)

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \in \mathbf{R} \quad (21)$$

の $t = 0$ のときに x を通る軌道を $\{\phi_t(x) | t \in \mathbf{R}\}$ とし, 周期軌道の検出は,

$$H(x, t) = \phi_t(x) - x. \quad (22)$$

のゼロ点 $(x, t) = (X, T)$, すなわち, 周期軌道上の一点 X と周期 T の $n + 1$ 個の未知数を定めることに対応する. 具体的な計算アルゴリズムは以下の様になる.

$y = H(x, t)$ を線形化すると,

$$\Delta y = D_x H(x, t) \Delta x + D_t H(x, t) \Delta t \quad (23)$$

$$= \{\Phi_t(x) - I\} \Delta x + f(\phi_t(x)) \Delta t. \quad (24)$$

となる. 但し, $\Phi_t(x)$ は, $\phi_t(x)$ を x に関して変分をとった $n \times n$ 行列, I は $n \times n$ の単位行列である. ここで, 線形補間により $H(x + \Delta x, t + \Delta t) \approx 0$ となるように, Δx と Δt に対して $H(x, t) + \Delta y = 0$ なる条件を課すと,

$$\{\Phi_t(x) - I\} \Delta x + f(\phi_t(x)) \Delta t = -H(x, t). \quad (25)$$

となる. ただ, これは n 本の条件であり, $n + 1$ 個の未知数 Δx と Δt は, 一意に定まらない. そこで追加の制約条件として修正ベクトル Δx が軌道に直交するという条件

$$\langle f(x), \Delta x \rangle = 0. \quad (26)$$

を課す (Mees(1981)) ことで, $n + 1$ 個の未知数に対して $n + 1$ 本の条件式とする. この作業を反復することによって周期軌道の検出を行なう. すなわち, 添字 i を反復回数として, 適当な初期予測 $(x, t) = (X^{(i)}, T^{(i)})$ の下,

$$\begin{pmatrix} \Phi_{T^{(i)}}(X^{(i)}) - I & f(\phi_{T^{(i)}}(X^{(i)})) \\ f(X^{(i)})^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X^{(i)} \\ \Delta T^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{(i)} - \phi_{T^{(i)}}(X^{(i)}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

を解いて、

$$(\mathbf{X}^{(i+1)}, T^{(i+1)}) = (\mathbf{X}^{(i)} + \Delta\mathbf{X}^{(i)}/m, T^{(i)} + \Delta T^{(i)}/m)$$

とする作業を繰り返す行なう。

なお、 m は、減速係数であり、検出しようとしている周期軌道の不安定性および周期に応じた値 m を採用することが多くの周期軌道を効率良く求める上で極めて重要となる (Saiki and Ishiyama (2007)).

そして、周期軌道の収束判定条件としては、

- $|H(\mathbf{X}^{(i)}, T^{(i)})| = |\phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)}) - \mathbf{X}^{(i)}|$ (実質誤差)
- $|(\Delta\mathbf{X}^{(i)}, \Delta T^{(i)})|$ (相対誤差)

が共に十分小さくなるというものを採用する。本研究においては、実質誤差が 10^{-8} 以下でかつ相対誤差が 10^{-6} 以下というものを収束条件としている。このアルゴリズムによって数値的に収束させて求めた「周期軌道」は、その十分近傍の点も「周期軌道」の近接軌道を通るという意味で数値的に妥当な軌道であると考えられる。また、初期予測が極めて周期軌道に近い場合を除いて一般にアトラクタに埋め込まれた周期軌道のみを検出するという特徴を持っている。

なお、本手法で検出しようとする不安定周期軌道は、周期軌道の周期 T 、フロケ指数 (不安定性指数) λ 、計算機の丸め誤差 δ として、

$$\delta \exp(\lambda T) \ll 1 \quad (27)$$

をみたすものに限ることに注意されたい。

4.3 数値計算の妥当性

計算精度には、単精度 (32 ビット)、倍精度 (64 ビット)、4 倍精度 (128 ビット) 等がある。本ノートの数値計算は、基本的に倍精度で行なっている。以下では、ローレンツ系に埋め込まれた最も短い周期軌道に関する計算誤差の考察を行なう。以下の図は、数値積分で用いたルンゲ・クッタ法において時間メッシュ dt を用いた際に数値的に検出された不安定周期軌道の周期 ($T(dt)$) の‘真’の周期軌道の周期 (T_0)³ からの誤差 $err_T = |T(dt) - T_0|$ を示す。 $0.0001 < dt < 0.01$ の範囲では、誤差 err_T は時間メッシュ dt の 4 乗に比例することがわかる。これは 4 次のルンゲ・クッタ法を用いていることに由来する。 $dt < 0.01$ の範囲では、4 次のルンゲ・クッタ法の理論に反して、誤差は時間メッシュ dt の 4 乗に比例しなくなるが、これは、計算精度に由来する。これらの作業を通して、本ノートの数値計算の妥当性を確認することが出来る⁴。

なお、数値計算による長時間のカオス軌道は、力学系がもつ指数的不安定性と計算機が有限精度であることにより、軌道としての意味はなくなることに注意されたい。ただし、その場合でも数値的カオス軌道は、短時間カオス軌道の繋ぎ合わせと考えることが可能であり、ある種の統計量などを妥当に計算することは可能である。

³これは、本来未知なものであり、推定値を用いている。

⁴当然のことながら、厳密な数学としての妥当性は保証されない。

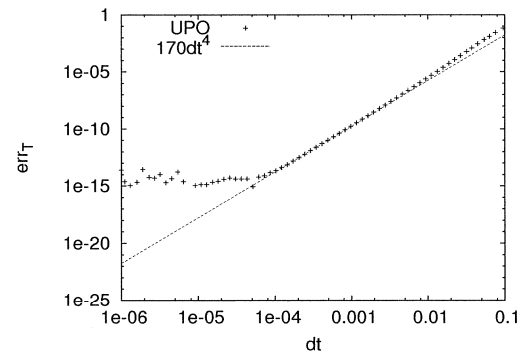


図 11: ルンゲ・クッタ法において時間メッシュ (dt) を用いた際に検出された周期軌道の周期の‘真’の周期からの誤差 $err_T = |T(dt) - T_0|$ (但し、 T_0 は、‘真’の周期軌道の周期) と $170dt^4$

4.4 その他

不安定周期軌道の検出のための数値アルゴリズムの研究は多数あり、ニュートン法的な手法の他、不安定周期軌道を安定化させて同定する手法、変分法的に求める手法などが存在する。ただ、エノン写像など、いくつかの写像に対しては、非常に優れたアルゴリズムが開発されているものの、連続力学系に対しては、現在までのところ、決定的な手法が開発されているとは言い難い。

数値計算においては、プログラムのチューニングや複数 CPU による並列化による高速化なども数値アルゴリズム開発における大きな課題のひとつである。並列化を行なわなくとも、計算機内の動作の仕組みにうまく適応した計算プログラムを書くか否かによって、数倍、場合によっては数百倍の速度差が生み出される (青山 (2004)).

ローレンツ系が真にカオスアトラクタをもつという結果の証明にも用いられた、精度保証つき数値計算と呼ばれる、数学的に結果を保証する数値計算も近年盛んに行なわれている。精度保証つき数値計算は、数値アルゴリズム由来の誤差 (連続力学系の離散化等) と計算機由来の誤差をともに評価して、数学的に厳密な結果を与える数値計算手法である。力学系の不変集合の存在をホモロジー群を用いた計算機を援用して証明することも近年盛んになりつつある (Kaczynski et al. (2004)).

参考文献

論文

- Bowen, R., Topological entropy and Axiom A, Global Analysis (Berkeley, CA, 1968) *Proc. Sympos. Pure Math.*, 14 American Mathematical Society, Providence, RI (1970) 23–41.

Chian, A. C.-L., E. L. Rempel and C. Rogers, Complex economic dynamics: Chaotic saddle, crisis and intermittency, *Chaos, Solitons and Fractals* **29** (2006) 1194–1218.

Christiansen, F., P. Cvitanović and V. Putkaradze, Spatiotemporal Chaos in Terms of Unstable Recurrent Patterns, *Nonlinearity* **10** (1997), 55–70.

Eckhardt, B. and E. Ott, Periodic orbit analysis of the Lorenz attractor, *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, **93** (2) (1994), 258–266.

Franceschini, V., C. Giberti and Z. Zheng, Characterization of the Lorenz attractor by unstable periodic orbits, *Nonlinearity* **6**(2) (1993), 251–258.

Gratrix, S. and J. N. Elgin, Pointwise Dimensions of the Lorenz Attractor, *Physical Review Letters*, **92** (2004), 014101.

Ishiyama, K. and Y. Saiki, Unstable periodic orbits and chaotic economic growth, *Chaos, Solitons and Fractals*, **26** (2005) 33–42.

Kaloshin, V. Y., and B. R. Hunt, Stretched exponential estimate on the growth of the number of periodic points for prevalent diffeomorphisms, *Annales of Mathematics*, **165**(1) (2007) to appear.

Kato, S. and M. Yamada, Unstable periodic solutions embedded in a shell model turbulence, *Physical Review E*, **68**(2) (2003) 25302–25305.

Kawahara, G. and S. Kida, Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst, *Journal of Fluid Mechanics*, **449** (2001) 291–300.

Kawahara, G., Laminarization of minimal plane Couette flow: Going beyond the basin of attraction of turbulence, *Physics of Fluids*, **17-4** (2005), 041702:1-4.

Kazantsev, E., Sensitivity of the attractor of the barotropic ocean model to external influences: approach by unstable periodic orbits, *Nonlinear Processes in Geophysics*, **8** (4/5) (2001), 301–311.

Li, T.-Y. and J. A. Yorke, Period three implies chaos, *American Mathematical Monthly*, **82** (1975), 985–992.

Lorenz, E. N., Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences* **20** (1963) 130–141.

Ott, E., C. Grebogi and J. A. Yorke, Controlling Chaos, *Physical Review Letters*, **64** (1990) 1196–1199.

Pyragas, A., Continuous control of chaos by selfcontrolling feedback, *Physics Letters A*, **170** (1992) 421–428.

Saiki, Y. and K. Ishiyama, Unstable periodic orbits as the skeleton of a chaotic oscillator: Business cycles, *preprint* (2007).

Saiki, Y. and M. Yamada, Statistical Properties of Orbital Averages along Unstable Periodic Orbits in Chaotic Dynamical Systems, *preprint* (2007).

Smale, S., Differential dynamical systems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73** (1967) 747–817.

Tucker, W., The Lorenz attractor exists, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, **328:12** (1999), 1197–1202.

Tucker, W., A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem, *Foundations of Computational Mathematics*, **2** (2002), 53–117.

van Veen, L., S. Kida and Kawahara, G., Periodic motion representing isotropic turbulence, *Fluid Dynamics Research*, **38**(1) (2006) 19–46.

Viswanath, D., Symbolic dynamics and periodic orbits of the Lorenz attractor, *Nonlinearity* **16** (2003), 1035–1056.

Viswanath, D., The fractal property of the Lorenz attractor, *Physica D*, **190** (2004), 115–128.

Wiklund, K. O. and J. N. Elgin, Multifractality of the Lorenz system, *Physical Review E*, **54** (2), (1996), 1111–1119.

Zoldi, S., Unstable Periodic Orbit Analysis of Histograms of Chaotic Time Series, *Physical Review Letters*, **81** (1998), 3375–3378.

Zoldi, S. M. and H. S. Greenside, Spatially localized unstable periodic orbits of a high-dimensional chaotic system, *Physical Review E*, **57** (1998) (3) 2511–2514.

テキスト

カオス・力学系理論

Bonatti, C., L. Diaz and M. Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, 102. (Springer-Verlag, Berlin, 2004).

Guckenheimer, J. and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Applied Mathematical Sciences Vol. 42), (Springer, 1983).

Hirsch, M. W., S. Smale and R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* (Pure and Applied Mathematics, 60), (Academic Press, 2003).

Ott, E., *Chaos in Dynamical Systems*, (Cambridge University Press, United Kingdom, 1993).

Robinson, C., *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, (CRC Press, 1999). (邦訳: 「力学系」 上・下, シュプリンガー東京)

國府 寛司, *力学系の基礎* (朝倉書店, 2000).

ローレンツ系

Sparrow, C., *Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors* (Springer-Verlag, Berlin, 1982) (Applied Mathematical Science Vol.41).

不安定周期軌道

Cvitanović, P., R. Artuso, P. Dahlqvist, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay, N. Whelan and A. Wirzba, *Chaos: Classical and Quantum* (2004) (<http://chaosbook.dk/>).

松岡隆, *組ひもの理論と力学系*, 物性研究 **67-1** (1996-10) 1-56. (<http://jegog.phys.nagoya-u.ac.jp/r/lecture-notes/kumihimo/kougi6.pdf>)

数値計算

Kaczynski, T., K. Mischaikow, and M. Mrozek, *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences 157, (Springer-Verlag, 2004).

Mees, A. I., *Dynamics of Feedback Systems*, (John Wiley & Sons, New York, 1981).

Parker, T. S., L. O., Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems* (Springer-Verlag, 1989).

青山幸也, *チューニング技法入門* (理化学研究所 情報基盤センター, 2004) (http://acc.riken.jp/HPC/training/text.html/scalar_all_2006-03-20.pdf).

伊理正夫・藤野和建, *数値計算の常識* (共立出版, 1985).

On the Congruence in a Finite Group

北海道大学大学院理学院 上條 亮 *

有限群論において、群上の方程式の解の個数に関する合同式やある種の部分群の個数に関する合同式の研究は長い歴史がある。部分群の個数に関する合同式を Sylow 型合同式といい、群上の多項式の解の個数に関する合同式を Frobenius 型合同式とよぶ。Frobenius 型の合同式に関する研究は、19 世紀中頃から 20 世紀中頃まで盛んに研究され、今では時代遅れと思われがちだが、ここ 20 年ほどで新しい合同式や、現代的な幾何学的手法や組み合わせ論的手法を用いた新しい視点からの研究がなされている。

Frobenius 型の合同式として代表的なものの一つに、Frobenius の定理がある。

定理 F (Frobenius の定理) G を有限群, $n \in \mathbb{N}$ とする。このとき,

$$\#\{x \in G \mid x^n = 1\} \equiv 0 \pmod{\gcd(n, |G|)}$$

が成り立つ。

Frobenius の定理の一般化として、Philip Hall による次の定理がある。

定理 H (P.Hall [3]) G を有限群, H をその部分群, $n \in \mathbb{N}$ とする。 G の任意の元 σ に対して,

$$\#\{x \in H\sigma H \mid x^n = 1\} \equiv 0 \pmod{\gcd(n, |H|)}$$

が成り立つ。

今回の講演では、いくつかの Frobenius 型の合同式の紹介と、その中で主に次のような Frobenius 型の合同式について述べる。

G を有限群とし, H を G の部分群, $n \in \mathbb{N}$ とする。このとき, 次のような集合を考える。

$$H^{\frac{1}{n}} := \{x \in G \mid x^n \in H\}$$

この集合に関する合同式として, 次の定理がある。

*博士後期課程 1 年, E-mail:kamijo-a@mail.sci.hokudai.ac.jp

定理 I (Iwasaki [1]) G を有限群, H を G の部分群, $n \in \mathbb{N}$ とするとき,

$$|H^{\frac{1}{n}}| \equiv 0 \pmod{|H|}$$

が成り立つ.

Iwasaki の定理を Frobenius の定理の形で書くと, 次のようになる.

系 1 G を有限群, H をその部分群, $n \in \mathbb{N}$ とする. このとき,

$$|H^{\frac{1}{n}}| \equiv 0 \pmod{\gcd(n, |C_G(H)|)}$$

が成り立つ. ここで, $C_G(H)$ は, H の中心化群.

このことから, Iwasaki の定理は, Frobenius の定理を含んでいない. Frobenius の定理を含むような Iwasaki の定理の改良が今の研究の課題の一つである. また, この Iwasaki の定理は群の表現の指標を用いた方法と, 置換群的解釈の 2 パターンの方法で証明されている. 後に Brauer[2] の次の結果を用いると成り立つこともわかった.

G を有限群, H を G の部分群とする. 任意の G の元 a に対して, $\tilde{H}_a := \bigcap_{i \geq 0} a^i H$ と

定義する. ただし, $a^i H := a^i H a^{-i}$ とする. また, G の任意の二つの元 x, y に対して, すべての実数 r に対し, $x^{-r} \tau y^r \in H$ が成り立つような H の元 τ が存在するとき, x と y は同値関係を満たしている. この同値関係を, H で weakly equivalent であるという. この weakly equivalent による x を含む同値類を W_x で表す. このとき次の命題が成り立つ.

命題 2(Brauer[2]) G を有限群, H を G の部分群とする. 任意の G の元 x に対して, 次のことが成り立つ.

- (1) δ を \tilde{H}_x の元, τ を H の元とすると, W_x の元 y は, $y = \tau^{-1} x \delta \tau$ と書ける.
- (2) $|W_x| = |H|$

$x \in H^{\frac{1}{n}}$ のとき, $W_x \cap H^{\frac{1}{n}} = W_x$ となり, Brauer の命題を用いると, $|W_x \cap H^{\frac{1}{n}}| = |H|$ となる. また, $x \notin H^{\frac{1}{n}}$ のとき, $W_x \cap H^{\frac{1}{n}} = \emptyset$ となり, $|W_x \cap H^{\frac{1}{n}}| = 0$ となる. ゆえに, Iwasaki の定理は成り立つことがわかる.

Frobenius の定理の一般化として Hall の定理があるのにならって, Iwasaki の定理の次のような拡張を考えた.

定理 3 G を有限群, H をその部分群, $n \in \mathbb{N}$ とする. G の任意の元 σ に対して,

$$|H\sigma H \cap H^{\frac{1}{n}}| \equiv 0 \pmod{|H|}$$

が成り立つ.

この定理も Brauer の方法を用いて証明できる. $x \in H\sigma H \cap H^{\frac{1}{n}}$ に対して, weakly equivalent による x を含む同値類を W_x としたとき, $H\sigma H \cap H^{\frac{1}{n}} \supseteq W_x$ となる. ゆえに定理 3 は成り立つ. それとは別に置換群的に解釈して定理 3 を証明することが出来る.

補題 4 G を有限群, H をその部分群とする. G の任意の元 σ に対して,

$$|H\sigma H \cap H^{\frac{1}{n}}| = |H\sigma \cap H^{\frac{1}{n}}| \times \frac{|H|}{|H \cap H^\sigma|}$$

が成り立つ. ただし, $H^\sigma = \sigma^{-1}H\sigma$.

上の補題より, 定理 3 と次の合同式は同値である.

$$|H\sigma \cap H^{\frac{1}{n}}| \equiv 0 \pmod{|H \cap H^\sigma|}$$

このことから, $|H\sigma \cap H^{\frac{1}{n}}|/|H \cap H^\sigma|$ の値を次のように言い換え, それが整数であることを証明することによって定理 3 を示す.

定理 5 G を有限集合 Ω 上の有限可移置換群とし, n を 2 以上の任意の自然数とする. $a \in \Omega$ を任意の一つとり, $a^\sigma \neq a$ となる $\sigma \in G$ を任意の一つとって固定する. $G_a := \{g \in G | a^g = a\}$, $G_{a,\sigma} := \{g \in G | a^g = a, (a^\sigma)^g = a^\sigma\}$ とするとき,

$$\frac{|G_a^{\frac{1}{n}} \cap G_{a,\sigma}|}{|G_{a,\sigma}|} \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ.

Iwasaki の定理の証明は, 置換群の証明のほかに群の指標を用いた証明がある. 定理 3 の表現論的証明が今の課題である.

参考文献

- [1] S.Iwasaki, "A Note on the n th Roots Ratio of a Subgroup of a Finite Group", Journal of Algebra 78 (1982), 460-474
- [2] R.Brauer, "On a theorem of Frobenius", American Math. Monthly 76(1969), 12-15
- [3] P.Hall, "On A Theorem of Frobenius", Proc. London Math. Soc. (2), Vol.19(1935), 468-501.

SINGULAR FIBERS AND CHARACTERISTIC CLASSES

TAKAHIRO YAMAMOTO

1. はじめに

本講演では、滑らかな多様体の特性類に関する情報をその多様体上のジェネリックな写像の特異ファイバーを用いてあらわす研究についてお話します。ここで、滑らかな多様体 M, N の間の写像がジェネリック¹ であるとは、写像空間 $C^\infty(M, N)$ の中で Whitney C^∞ 位相に関して開かつ稠密な部分集合に属するものです。定義から分かるように、どんな写像でも少し摂動すればジェネリックな写像にできます。一方で、ジェネリックな写像の持ちうる特異点² や多重特異点³ に関する情報は横断性定理からわかります。詳しくは、名著 [2] を参照してください。

本研究では特に n 次元多様体 M よりも次元の小さい多様体 (例えば \mathbb{R}^{n-1}) へのジェネリックな写像を考えます。このような状況では、一点の逆像は一般には正の次元を持ちます。さらに Figure 1 からわかるように特異点の逆像の様子は多様体の形をよく反映しています。しかし、逆像のみでは研究道具としては十分ではないので、まわりの情報も込めたものとしてファイバーを次のように導入します。滑らかな多様体 M, N の間の滑らかな写像 $f: M \rightarrow N$ に対して $q \in N$ 上のファイバーとは、 $q \in N$ の逆像 $f^{-1}(q)$ に沿った写像芽⁴

$$f: (M, f^{-1}(q)) \rightarrow (N, q)$$

のことです。このとき、 $q \in N$ が f の正則値であるときは **正則ファイバー** と呼び、そうでないときは **特異ファイバー** と呼ぶことにします。滑らかな写像に対してファイバーを定義し、その理論を作ったのは佐伯修先生 [5] です⁵。

では写像の特異ファイバーを用いた研究で、これまで得られている結果を紹介しましょう。まず最初に、佐伯先生により次の2つのオイラー数公式が得られました。

定理 1.1 (佐伯 [5]). (1) 閉曲面 S 上のジェネリックな関数⁶ $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ を考えます。このとき、 S のオイラー数と関数 f にあられる2つ輪型特異ファイバー \tilde{I}^2 の数とは偶奇を同じにする。

¹ジェネリックな写像と似たニュアンスのもので**安定写像** と呼ばれるものがあります。ジェネリックな写像と安定写像は、本研究の舞台としているような多様体の次元対の間の写像に対しては同じものです。しかし、Mather により得られた nice dimension 対から外れる写像に対しては、これらの2つは一致しないことに注意。詳しくは [4] を参照してください。

²滑らかな写像 $f: M \rightarrow N$ に対して $p \in M$ が f の**正則点** であるとは、 p における f のヤコビ行列 Df_p の階数が多様体 N の次元と等しくなるときであり、そうでないときは**特異点** と呼びます。また、 $q \in N$ が f の**正則値** であるとは、 q の逆像 $f^{-1}(q)$ の各点が f の正則点であるときであり、そうでないときは**特異値** と呼びます。

³滑らかな写像 $f: M \rightarrow N$ の多重特異点とは、特異点集合 $S(f) \subset M$ の像 $f(S(f)) \subset N$ の局所的な形のことと思ってください。

⁴逆像 $f^{-1}(q)$ に沿った写像芽とは、逆像 $f^{-1}(q)$ の管状近傍 U に写像 f を制限した $f|_U$ と思ってください。

⁵それ以前になされた研究 [1] や [3] の中にも特異ファイバーを見ることが出来ます。

⁶安定な Morse 関数とも言い、特異点是非退化なもの (局所表示が

$$(x_1, x_2) \rightarrow \pm x_1^2 \pm x_2^2$$

とかけるもの) しか持たず、各特異点はそれぞれの値を異なるものとします。

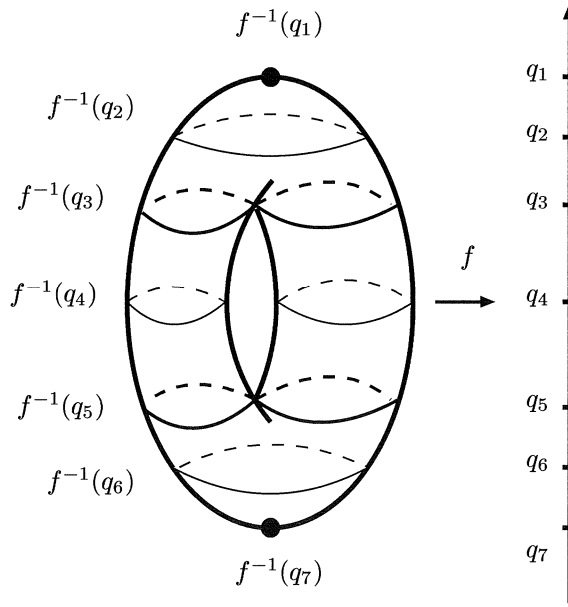


FIGURE 1. トーラス上の高さ関数をとったときの特異ファイバーの様子

(2) 向き付け可能な閉 4 次元多様体 M から連結な 3 次元多様体 N へのジェネリックな写像⁷ $f: M \rightarrow N$ を考える. このとき, M のオイラー数と写像 f にあらわれる 3 つ輪型特異ファイバー $\widetilde{\text{III}}^{12}$ ⁸ の数とは偶奇を同じにする. $\widetilde{\text{I}}^2, \widetilde{\text{III}}^{12}$ 型特異ファイバーの絵は Figure 2 にあります.

次に定理 1.1 (2) を向き付け不可能でも適用できるように拡張した次の定理が得られました.

定理 1.2 (Y [9]). 閉 4 次元多様体 M から連結な 3 次元多様体 N への 2 色付けされた⁹ ジェネリックな写像 $(f, (R, B)): M \rightarrow N$ を考える. このとき, M のオイラー数と写像 $(f, (R, B))$ にあらわれる $\widetilde{\text{III}}^{2,2,2}, \widetilde{\text{III}}^{2,7}, \widetilde{\text{III}}^{12}, \widetilde{\text{III}}_{B,o}^{13}, \widetilde{\text{III}}_{A,e}^{13}, \widetilde{\text{III}}^{25}$ と $\widetilde{\text{III}}^{26}$ 型特異ファイバー¹⁰ の数の総和とは偶奇を同じにする. ここで, 特異ファイバーの名前の下についている A や o は写像が 2 色付けされているという条件の下, 特異ファイバーを細かく分類した記号です. 各特異ファイバーの絵は Figure 2 にあります.

注意 1.3. 閉 4 次元多様体 M から連結な 3 次元多様体へのジェネリックな写像 $f: M \rightarrow N$ を考えるとき, M が向き付け可能であれば f は 2 色付け可能になります. さらに, M が向き付け可能であることから公式内の $\widetilde{\text{III}}^{12}$ 以外の特異ファイバーはあらわれないので, 定理 1.2 から定理 1.1 (2) が得られます.

⁷この場合のジェネリックな写像の持ちうる特異点は, Fold, Cusp, Swallowtail の 3 種類です. また, 特異点集合 $S(f) \subset M$ は 2 次元閉部分多様体になり, その像 $f(S(f))$ の局所的な様子は, 埋め込み, 2 重点 (2 枚の紙が横断的に交わる様子), 3 重点 (3 枚の紙が横断的に交わる様子), カスパ曲面, カスパ曲面と埋め込みが横断的に交わる様子かスワロウテイル曲面のいずれかの形になります. 特異点の周りの f の局所表示や特異値集合 $f(S(f))$ の局所的な絵は [5] を参照してください.

⁸[5] では 3 つ輪型特異ファイバー $\widetilde{\text{III}}^{12}$ を III^8 と呼んでいることに注意.

⁹滑らかな写像 $f: M \rightarrow N$ ($\dim M + 1 \geq \dim N$) が 2 色付け可能であるとは, $N \setminus f(S(f))$ の中に 2 つの空でなく交わらない開集合 R, B で

$$N \setminus f(S(f)) = R \cup B \text{ かつ } \overline{R} \cap \overline{B} = \partial R = \partial B = f(S(f)),$$

を満たすものがあるときであり, 2 色分け可能写像 $f: M \rightarrow N$ と先のような開集合 (R, B) との組 $(f, (R, B))$ を 2 色付けされた写像と呼びます. 値域多様体を \mathbb{R}^n とすると, どんなジェネリックな写像も 2 色付け可能となります, 詳しくは [10] を参照してください.

¹⁰これら 6 個の特異ファイバーは全て特異値集合 $f(S(f))$ の 3 重点に対応するものになっています.

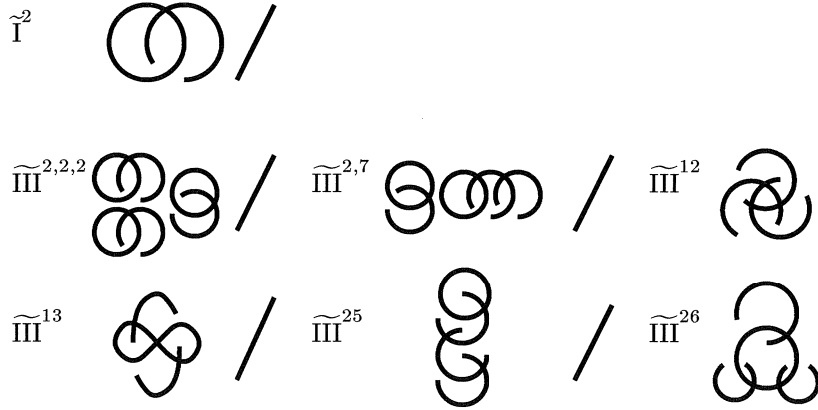


FIGURE 2. 公式内の特異ファイバー型

定理 1.1 は 定理 1.2 の他にも “向き付けられた閉 4 次元多様体の符号数公式 [6]”, “向き付けられた閉多様体の第一ポントリャーギン類公式 [7]” や “曲面束の第一 MMM 類公式 [8]” へと一般化されています.

本予稿の構成は以下のようになります. 2 章ではこれらの公式内の特異ファイバーを分類表の中からどのように見つけてくるのかのお話し, 即ち特異ファイバーの普遍複体の理論の概略を紹介します. 3 章では, 具体例として 5 次元から 4 次元へのジェネリックな写像に対して特異ファイバーの普遍複体を構成し, そこから次の定理が得られることを説明します.

定理 1.4. 閉 4 次元多様体から連結な 3 次元多様体へのジェネリックな写像の特異ファイバーを用いたオイラー数公式は, 写像に 2 色付けのような大域的な構造を与えないと存在しない.

なお, 本講演で対象とする多様体や写像は全て滑らか (C^∞ 級) なものとします.

2. 特異ファイバーの普遍複体

この章では, 特異ファイバーの理論のあらすじを紹介します. 詳しくは [5] を参照してください. まず, 滑らかな写像の特異ファイバーの間に同値関係を導入します.

Definition 2.1. 滑らかな写像 $f_i: M_i \rightarrow N_i$ と $q_i \in N_i$ ($i = 0, 1$) を持ってきます. このとき, q_0 上のファイバーと q_1 上のファイバーが C^0 同値であるとは, $q_i \in N_i$ の開近傍 U_i と 2 つの位相同型写像芽 $\Phi: (f_0^{-1}(U_0), f_0^{-1}(q_0)) \rightarrow (f_1^{-1}(U_1), f_1^{-1}(q_1))$ と $\varphi: (U_0, q_0) \rightarrow (U_1, q_1)$ で以下の図式を可換にするものが存在するときです.

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccc} (f_0^{-1}(U_0), f_0^{-1}(q_0)) & \xrightarrow{\Phi} & (f_1^{-1}(U_1), f_1^{-1}(q_1)) \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ (U_0, q_0) & \xrightarrow{\varphi} & (U_1, q_1). \end{array}$$

それでは, 特異ファイバーの普遍複体を構成しましょう.

Step.1 まず最初に, 整数 k を固定し, 次の 2 つを準備します.

- τ : n 次元多様体から $n+k$ 次元多様体への滑らかな写像の特異ファイバーのあつまり. (この k を写像の次元差といいます)
- ρ : τ の元の間同値関係.

ここで, τ は, τ に属する特異ファイバーの周りにあるファイバーもまた τ に属するようなものとし, ρ は C^0 同値よりも弱く¹¹ ファイバーのまわりの状況を保つもの

¹¹即ち, 2 つのファイバーが C^0 同値であれば, それらはまた同値関係 ρ でも同値になるようなもの.

Definition 3.1. 滑らかな写像 $f: M_i^{n+1} \rightarrow N_i^n$ と $q_i \in N_i$ ($i = 0, 1$) を持つてくる。このとき、 q_0 上のファイバー \mathcal{F}_0 と q_1 上のファイバー \mathcal{F}_1 が l 個の S^1 成分を法として C^0 同値であるとは、ある数 $k_0, k_1 \geq 0$ で \mathcal{F}_0 と $k_0 l$ 個の自明な S^1 束との非交和と \mathcal{F}_1 と $k_1 l$ 個の自明な S^1 束との非交和とが C^0 同値になるときです。この同値関係を $\rho^0(l)$ と書きます。

$\tau = \mathcal{S}_{pr}^\infty(5, 4)$ を 5 次元多様体から 4 次元多様体へのプロパーでジェネリックな写像の特異ファイバーの全体とし $\rho = \rho^0(l)$ とします。

命題 3.2. 普遍複体 $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{pr}^\infty(5, 4), \rho^0(l))$ の 1 次と 3 次コホモロジー群は以下のようになる。

$$\begin{aligned} H^1 &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{生成元は } [\tilde{\mathbb{I}}_1^0 + \tilde{\mathbb{I}}_0^1] &\equiv [\tilde{\mathbb{I}}_2^0 + \tilde{\mathbb{I}}_1^1] \equiv \cdots \equiv [\tilde{\mathbb{I}}_l^0 + \tilde{\mathbb{I}}_{l-1}^1] \\ & & & \text{と } [\tilde{\mathbb{I}}_1^2 + \tilde{\mathbb{I}}_2^2 + \cdots + \tilde{\mathbb{I}}_l^2], \\ H^3 &= 0. \end{aligned}$$

$\tau = \mathcal{S}_{pr}^\infty(5, 4)^{ori}$ を向きつけ可能な 5 次元多様体から 4 次元多様体へのプロパーでジェネリックな写像の特異ファイバーの全体とし $\rho = \rho^0(2)$ とします。

命題 3.3. 普遍複体 $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{pr}^\infty(5, 4)^{ori}, \rho^0(2))$ の 3 次コホモロジー群は以下のようになる。

$$H^3 \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{生成元は } [\widetilde{\text{III}}_0^{12} + \widetilde{\text{III}}_1^{12}].$$

一方、特異ファイバーのコチェイン複体のコホモロジー類に対して次のことが分かっています。

命題 3.4. あるコチェイン $c = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \cdots + \mathcal{F}_t \in C^\kappa(\mathcal{S}_{pr}^\infty(5, 4), \rho^0(l))$ で閉 $(\kappa + 1)$ 次元多様体 M から κ 次元多様体写像 N への任意のジェネリックな写像 $f: M \rightarrow N$ に対して ($1 \leq \kappa \leq 3$)、 M のオイラー数と f にあらわれる $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_t$ 型特異ファイバーの数の総和とは偶奇を同じにするならば、 c のコホモロジー類は H^κ の中で非自明になる。

実際に、定義域 4 次元多様体を向き付け可能なものに限ったときは、定理 1.1 (2) でオイラー数公式に対応するものが命題 3.3 の中に見ることができますし、定理 1.1 (1) のオイラー数公式に相当するものが命題 3.2 の H^1 に見られます。一方、命題 3.2 から $H^3 = 0$ がわかっているので定理 1.2 がわかります。

REFERENCES

- [1] A. Hatcher and W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*. Topology 19 (1980), no. 3, 221–237.
- [2] 泉屋周一と石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版, 1998
- [3] H. Levine *Classifying immersions into R^4 over stable maps of 3-manifolds into R^2* . Lect. Notes in Math. 1157. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [4] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mapping: VI, the nice dimension*, Lect. Notes in Math. 192, Springer, 1971, pp.207–253.
- [5] O. Saeki *Topology of singular fibers of differentiable maps*. Lect. Notes in Math, 1854. Springer-Verlag, Berlin, 2004
- [6] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers of stable maps and signatures of 4-manifolds*, Geometry and Topology, Vol. 10 (2006), 359–399
- [7] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fiber and characteristic classes*, in preparation.
- [8] O. Saeki and T. Yamamoto, *Singular fibers of differentiable maps and characteristic classes of surface bundles*, in preparation.
- [9] T. Yamamoto, *Classification of singular fibres of stable maps of 4-manifolds into 3-manifolds and its applications*, J. Math. Soc. Vol. 58, No. 3 (2006), 721–742
- [10] T. Yamamoto, *The singular fibers of two-colored maps and cobordism invariants*, preprint

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, HAKOZAKI, FUKUOKA 812-8581, JAPAN
E-mail address: taku_chan@math.kyushu-u.ac.jp

THE EARLIER-ON SUCCESIONS OF THE CONSTRUCTIONS OF THE SOLUTIONS ON THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

増田 茂 (首都大学東京, D2)

ABSTRACT. We introduce the successions of the constructions of the solutions on the Navier-Stokes equations earlier on in the history until 1950s, summarizing with the following 4 types of these successions.

0. EARLIER-ON SUCCESIONS OF THE CONSTRUCTIONS OF THE SOLUTIONS ON NAVIER-STOKES EQUATIONS

For convenience' sake, we summarize the successions of the constructions of the solutions on Navier-Stokes equations, earlier on in the history until 1950s, with the following 4 types of the successions :

- 1) for the classical solutions, to construct the formulation or rediscovery or re-derivation¹ of Navier-Stokes equations,
- 2) for the fundamental solutions, owing to Newton's potential theory, to construct the invariant tensor t_{ij} ,
- 3) for the Cauchy problem/turbulent solution/weak solutions/ to construct the conception/notion of the solution.
- 4) for the generalized solutions²/strong solutions³, in using the functional analysis, especially, directly the Sobolev's tools, to construct the proof and regularity.

We show four earlier-on successions of the constructions of the solutions of the Navier-Stokes equations in Table 1, and the successions of the invariant tensor : t_{ij} in Table 2.⁴

1. THE SUCCESIONS OF THE FORMULATION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

1.1. **Euler's formulation.** In "*Sectio secunda de principiis motus fluidorum*" (The chapter 2 on the principle of the motion of the fluid) [10], Euler shows the Euler's equations of the incompressible fluid what we called today, in modern vectorial expression :

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

We show Euler's text [10, pp.94-95] as follow :⁵

[Problem 23] §33 If the fluid of the arbitrary nature is moved by the arbitrary force, under the stable initial condition, then from which, determine this motion clearly.

[Solution] Considering (fig.22), the stable fluid, in which the arbitrary temperature = t , suppose it is smooth, and the 3 dimensions of the fixed axes : OA, OB, OC , to those the normal directions, we consider the arbitrary particle of the fluid at the point of Z , which is fixed by the 3 coordinates : $OX = x, XY = y, YZ = z$, determinated and which is consisted of the

TABLE 1. Four earlier-on successions of the constructions of the solution of the Navier-Stokes equations

1.formulation of equations	2.construction of tensor	3.notion/conception of sol.	4.functional analysis
classical solution	fundamental solution	turbulent/weak solution	generalized/strong solution
formulation & rediscovery	invariant tensor : t_{ij}		Sobolev's embedding theorem
potential theory	potential theory	potential theory	potential theory
I.Newton[33](1643),[34](1687)	A.Cauchy[4](1828)	A.Cauchy[5](1842)	S.L.Sobolev[41](1950)
D.Bernoulli[2](1727),[3](1738)	S.D.Poisson[38](1829-31)	S.Kovalevskaya[21](1875)	A.A.Kiselev[18](1955),[19](1956)
J.L.d'Alembert[6](1752)	G.G.Stokes[43](1845)	G.Darboux(1875)	K&L[20](1957)
L.Euler[10](1752-55),[11](1755)	C.W.Oseen[37](1927)	J.Hadamard[16](1932)	O.A.Ladyzhenskaya[22](1959)
J.L.Lagrange[23, 24](1788)	L.Lichtenstein(1928),(1929),(1931)	J.Leray[26](1933),[27, 28](1934)	G.Prodi[39](1959)
M.Laplace[25](1798-1805)	F.K.G.Odqvist[35](1930),[36](1932)	E.Hopf[17](1951)	J.L.Lions&G.Prodi(1959)
C.L.M.H.Navier[30](1822),[31, 32](1827)	J.Leray[26](1933),[27, 28](1934)		J.L.Lions(1959)
A.Cauchy(1823)	O.A.Ladyzhenskaya[22](1959,70)		J.Serrin[40](1959)
S.D.Poisson[38](1829-31)	V.A.Solonnikov[42](1977)		
Saint-Venant(1837)			
G.G.Stokes[43](1845)			

Date: 2007/01/19.

¹We owe to O.Darrigol [7] in view of the rediscovery or the re-derivation of Navier-Stokes equations.

²cf. We cite below the definition of the generalized solution with Kiselev & Ladyzhenskaya[20]'s formulations in §5.

³There is the theorem on the strong solution by the modern definition in the following :

Theorem (Kato, Giga) : $a \in L^n_\sigma \cap L^q_\sigma$, $n \leq q < \infty \Rightarrow \exists T > 0$, $\exists u$: a strong solution of the Navier-Stokes equations on $(0, T)$ in the class : $u \in C((0, T); L^n_\sigma \cap L^q_\sigma) \cap C^1((0, T); W^{2,q}) \cap C^1((0, T); L^n_\sigma)$. The word : "strong" means $p = 2 > 1$ in $W^{p,q}$.

⁴In Odqvist[35], he uses "Der in der Flüssigkeit wirkend Spannungstensor", which means the stress tensor operating in the fluid.

⁵This English version of L.Euler[10] is translated from Latin by Shigeru Masuda.

accelerated forces P , Q , R , the following direction Zx , Zy , Zz by the axes of the given and of the parallel.

- To the motion of the fluid we mention, the stable, initial density of the particle, here in Z , supposed as $= q$, which we observe is expressed by such as the function of the four variables x , y , z and t .
- Now we put the pressure in Z the given value $= p$, which is permanent with respect to the material, uniformal gravity, of which density $= 1$ and is given; we write this p with the function of the four variables x , y , z and t .
- Every motion of the particles in Z , which we employ and observe here is determined by three directions Zx , Zy , Zz , of which velocities in accordance with $Zx = u$, $Zy = v$ and $Zz = w$, we explain considering of which velocities passing the space a little such as time t in the sequential time.

Now, this situation is observed by the velocities and the density q , and this relation is determined such that :⁶ $\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d \cdot qu}{dx}\right) + \left(\frac{d \cdot qv}{dy}\right) + \left(\frac{d \cdot qw}{dz}\right) = 0$. Therefore, in the above problem, we deduce the element of the fluid in Z , now this accelerated force as follows :

$$\text{next.}Zx = P - \frac{1}{q} \frac{dp}{dx}, \quad \text{next.}Zy = Q - \frac{1}{q} \frac{dp}{dy}, \quad \text{next.}Zz = R - \frac{1}{q} \frac{dp}{dz}. \quad (2)$$

From itself another motion of this three elements in problem 20, each acceleration of the each sequential direction, deduces in this manner, the expression :

$$\begin{cases} \text{next } Zx = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right), \\ \text{next } Zy = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right), \\ \text{next } Zz = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right). \end{cases} \quad (3)$$

Here, we get (1) from (2) and (3).

1.2. **Navier's formulation.** Navier cites the Euler's equations by Cartesian coordinates ([31, p.399]) :

$$\begin{cases} P - \frac{dp}{dx} = \rho \left(\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \right), \\ Q - \frac{dp}{dy} = \rho \left(\frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} \right), \\ R - \frac{dp}{dz} = \rho \left(\frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} \right), \end{cases} \quad 0 = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \quad (4)$$

Here, Navier says his paper's purpose as follows :

But, owing to the notation state as follows, it is necessary to admit the existence of the *new molecular force*, which is developed by the state of the motion of the fluid. The study of the analytical equations of the force is **the main object** which we have intended in the composition of this paper. ([31, p.399])

In [30, p.252], owing to D'Alembert and Euler, Navier used his own equations published in 1821 ([30, p.250])⁷ but which seem not to be the formation such today's equations as what we called Navier-Stokes equations on the incompressible fluid(6). His equations are as follow :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X + \varepsilon \left(3 \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} + 2 \frac{d^2 v}{dx dy} + 2 \frac{d^2 w}{dx dz} \right) - \frac{du}{dt} - \frac{du}{dx} \cdot u - \frac{du}{dy} \cdot v - \frac{du}{dz} \cdot w ; \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y + \varepsilon \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + 3 \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} + 2 \frac{d^2 w}{dy dz} \right) - \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx} \cdot u - \frac{dv}{dy} \cdot v - \frac{dv}{dz} \cdot w ; \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z + \varepsilon \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + 3 \frac{d^2 w}{dz^2} + 2 \frac{d^2 u}{dx dz} + 2 \frac{d^2 v}{dy dz} \right) - \frac{dw}{dt} - \frac{dw}{dx} \cdot u - \frac{dw}{dy} \cdot v - \frac{dw}{dz} \cdot w ; \end{cases} \quad (5)$$

and the equation of continuity (4) where ε is sensibly independ of the force which compress the partial differential of the fluid. In modern notation, the kinetic equation and the equation of continuity are conventionally described as follows :

$$\partial \mathbf{u} / \partial t - \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

Navier ([31, p.414]) had described the equation samely as today's vectotial expression (6) above stated as follows :

from (4), after operating in such a way as, at first by $\frac{d}{dx}$, and by $\frac{d}{dy}$, and at last by $\frac{d}{dz}$, then⁸ therefore (5) turns

⁶If, q is constant, this equation means $\text{div } \mathbf{u} = 0$.

⁷Navier cited his paper as follows : dans un Mémoire sur les lois de l'équilibre et des mouvemens des corps solides élastiques, que j'ai présenté, le 14 mai 1821 (*sic.*). This title is none in Graber's citation [13].

⁸[31, p.413]

TABLE 2. Expression for hydrodynamics by the invariant tensor : t_{ij}

name&reference source of t_{ij}	problem	definition , where v_i is the velocity vector
A.Cauchy[4, p.225](1828)		$t_{ij} = \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})$
S.D.Poisson[38, p.140](1829-31)		$t_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})$
G.G.Stokes[43, pp.90-91](1845)	the Stokes equations	$t_{ij} = p\delta_{ij} + (\delta - 2\mu(v_{k,k})\delta_{ij} - \mu(v_{i,j} + v_{j,i}))$
C.W.Oseen[37, p.26](1927)	the Stokes differential equations	$t_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3}$
K.G.Odqvist[35, p.332](1930)	first Stokes boundary problem: $\mu\Delta u_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$	$T_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu(u_{ki} + u_{ik})$
J.Leray[26, p.22,p.55](1933)	(25) $\mu\Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\rho X_i$ ($i = 1, 2, 3$), $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$	$T_{ij}(x, y) = \frac{1}{8\pi\mu} \left[\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{r^3} \right]$
O.A.Ladyzhenskaya[22](1959)	linearized N-S system: $\Delta \mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{f}, \text{div } \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} _S = 0$	$T_{ij}(x, y) = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\delta_{ij}}{ x-y } + \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{ x-y ^3} \right]$
O.A.Ladyzhenskaya(1970)	linearized N-S system: $\nu\Delta \mathbf{u}^k(x, y) - \nabla q^k(x, y) = \delta(x-y)\mathbf{e}^k, \text{div } \mathbf{u}^k = 0$	$T_{ik}(\mathbf{v}) = -\delta_{ik}^k p + \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$
V.A.Solonnikov[42, p.48](1977)	$\frac{\partial G_{ij}}{\partial t} - \Delta G_{ij} + \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = 0, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_i} = 0,$ where $G_{ij} _{x_3=0} = \delta_{ij} \delta(t) \delta(x_1) \delta(x_2)$	$G_{ij} = -2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x_3} \delta_{ij} - \frac{1}{\pi} \frac{\partial C_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{ x } \delta_{j3} \delta(t),$ $P_j = \frac{\delta(t)}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3} \frac{1}{ x } + \frac{1}{2\pi t} \frac{\partial A}{\partial x_i} - \frac{\delta'(t)}{2\pi} \delta_{j3} \frac{1}{ x }$

out :

$$\begin{cases} P - \frac{dp}{dx} = \rho \left(\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \right) - \varepsilon \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right), \\ Q - \frac{dp}{dy} = \rho \left(\frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} \right) - \varepsilon \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right), \\ R - \frac{dp}{dz} = \rho \left(\frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} \right) - \varepsilon \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right). \end{cases} \quad (7)$$

and the equation of continuity which is the same as (4). Here, if we take $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ and $\frac{1}{\rho} \mathbf{f} \equiv \mathbf{f}$, then this means : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f}$. If we put $\mu \equiv \frac{\varepsilon}{\rho}$ then (7) equals to (6).

1.3. **Poisson's equations.** S.D.Poisson[38, p.151-152](1829-31) proposed his equations in 1829 and was issued in 1831, which reads :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz}, \end{cases} \quad \begin{cases} \psi t = p, \\ \chi t = \rho, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\psi t}{dt} = \frac{dp}{dt} + u \frac{dp}{dx} + v \frac{dp}{dy} + w \frac{dp}{dz}, \\ \frac{d\chi t}{dt} = \frac{d\rho}{dt} + u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz}, \end{cases} \quad \varpi = p - \alpha \frac{d\psi t}{dt} - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt}$$

$$\begin{cases} \rho \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \frac{d\varpi}{dx} + \varepsilon \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) = 0, \\ \rho \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \frac{d\varpi}{dy} + \varepsilon \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) = 0, \\ \rho \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \frac{d\varpi}{dz} + \varepsilon \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

If we assume p and ρ are constants and put $-\frac{\varepsilon}{\rho} \equiv \nu$ and $\mathbf{f} = (X, Y, Z)$, then Poisson's equations (8) are equivalent with the kinetic equation of Navier's equations (7) of the incompressible fluid : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f}$. Poisson contains both compressible and incompressible fluid.

1.4. **Stokes' equation.** Stokes proposes the Stokes' approximate equations in [43, p.93] :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{Du}{Dt} - X \right) + \frac{dp}{dx} - \mu \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) = 0, \\ \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - Y \right) + \frac{dp}{dy} - \mu \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right) = 0, \\ \rho \left(\frac{Dw}{Dt} - Z \right) + \frac{dp}{dz} - \mu \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) = 0, \end{cases} \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

These equations are applicable to the determination of the motion of water in pipes and canala, to the calculation of the effect of friction on the motions of tides and waves, and such questions.

By the modern vectorial expression, if we take $\mathbf{f} = (X, Y, Z)$, then these equations are turn out as follows : $\rho \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0.$

2. THE SUCCESSION OF THE WEAK SOLUTIONS

2.1. **Leray's introduction to construct solution turbulente.** Leray[28, p.195] says : ⁹

If I should succeed to construct the solution of the equations of Navier which become irregular, I shall have the right to insist that there exist effectivelly the solutions turbulentes marelly no reducing, in the solutions regulieres. Similarly, if this proposition should be false, *the notion of solution turbulente* which will play no role any longer in the study of viscous liquid, will do no harm to its interest : it must well present the problems of mathematical physics for which physical cause of regularity is not sufficient to justify the hypothesis of the regularity made in setting of equation.

⁹This English version from French was made by Shigeru Masuda.

2.2. **Hopf's comment to Leray.** E.Hopf[17] comments on his own lemma 5.1 to the J.Leray[28] in [17] : ¹⁰

In the Rellich's theorem, the convergence of the x -integral on the quadratic of the derivation is presupposed. Our convergence presupposition relate even to the (x, t) -integral and is therefore better adapted to the situation in our problem. Leray prove and use **Lemma 2**, which is even near to Rellich's lemma, operate like this theorem, only with (x) -integral. Our proof of convergence is more direct.

3. THE SUCCESSION OF THE GENERALIZED SOLUTION / THE STRONG SOLUTION

3.1. **Kiselev.** Kiselev[19] is one of the pioneer of the **generalised solution** and the **strong solution** as follows :

$Lv \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \nu \Delta v = -\text{grad } p + \mathbf{f} \cdots (1)$, $\text{div } \mathbf{v} = 0 \cdots (2)$, $\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a} \cdots (3)$, $\mathbf{v}|_S = 0 \cdots (4)$, where $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, t)$ and $\mathbf{a}(x)$ is the given vector, ν is the viscosity coefficient, which, for the brief description's sake, (we) deal as the constant. (We) call the vector \mathbf{v} the **generalised solution** of the problem (1)-(4) on Q_t , if $\mathbf{v} \in L^2(Q_t)$, exists generally in the sense of S.L.Sobolev[41].

Theorem 1 (Uniqueness theorem). *The problem(1)-(4) have in Q_t not more than a generalised solution*

Theorem 2 (Existence theorem 1). *Supposing $\mathbf{a} \in W_2^{(2)}$ and satisfies the conditions (2) and (4), $\mathbf{f} \in L_2(Q_t)$ and $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in L_2(Q_t)$ and satisfies the condition $\|\mathbf{a}\| \{ \|\mathbf{f} + L\mathbf{a}\| + \|\mathbf{f}\| \}_{t=0} < \frac{\nu^3}{\beta^2}$ where β : a constant, depending on the domain Ω , and the symbol $\|\cdot\|$ means the norm in $L_2(\Omega)$. Then the problem (1)-(4) have the generalised solution, in any cases, for all $t \in [0, T]$, where T : an arbitrary number $\leq l$, satisfying $(\|\mathbf{a}\| + \int_0^T \|\mathbf{f}\| dt) (\|\mathbf{f} - L\mathbf{a}\|_{t=0} + \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{f}\| + \int_0^T \|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\| dt) < \frac{\nu^3}{\beta^2}$. □*

3.2. **Kiselev and Ladyzhenskaya.** They say in [20]:

In (our)¹¹ paper, (we) study the problems of the incompressible viscosity:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} = -\text{grad } p + \mathbf{f}(x, t), \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_S = 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a} \quad (1)$$

Formulation 1. (We) shall call it a **generalized solution** of problem (1), that is the vector function $\mathbf{v}(x, t)$, having the generalized derivatives $\in L_2(Q_T)$ of the first order, summing to the power of 4 in a plane of $t = \text{const}$ for an arbitrary profile Q_T , $\int_{\Omega} \sum_i v_i^4(x, t) dx < \text{const}$, and satisfying the conditions: $\text{div } \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{v}|_S = 0$, $\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}$ and the equality: $\int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Phi + \nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - v_k \mathbf{v} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \mathbf{f} \Phi \right] dx dt = 0 \cdots (3)$ $\forall \Phi \in L_2(Q_T)$ such that $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \in L_2(Q_T)$, $\text{div } \Phi = 0$, $\Phi|_S = 0$. □

Formulation 2. (We) shall call it a **generalized solution** of problem (1), that is the vector function $\mathbf{v}(x, t)$, having the generalized derivatives $\in L_2(Q_T)$ in the form of $\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t \partial x_i}$ and its all belongings satisfying the same condition as in **Formulation 1**. □

(The Theorem 3,4 and 5 are new contents in [20] in comparison with [18, 19]. The following theorem is same as Kiselev[18, 19], about a strong solution which is already in [19].)

Theorem 6. *If $\mathbf{a} \in J_{0,1}(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$, and \mathbf{f} and \mathbf{f}_t are $\in L_2(Q_t)$, $Q_t = \Omega \times [0, l]$, then the problem (1) has the **generalized solution** in the sense of **Formulation 2** on the cylinder $Q_T = \Omega \times [0, T]$, such that T : no-smaller than an arbitrary number, depending on ν , $\|\mathbf{a}\|_{W_2^2(\Omega)}$, $\|\mathbf{f}\|_{L_2(Q_t)}$, $\|\mathbf{f}_t\|_{L_2(Q_t)}$ and the scale of the domain Ω . □¹²*

REFERENCES

[1] D.H.Arnold, *The mécanique physique of Siméon Denis Poisson : The evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840)* I,II,III,IV,V,VI,VII,VIII,IX,X, Arch. Hist. Exact Sci. **28-3**(1983) I:243-266, II:267-287, III:289-297, IV:299-320, V:321-342, VI:343-367, **29-1**(1983) VII:37-51, VIII:53-72, IX: 73-94, **29-4**(1984) X:287-307.
 [2] D.Bernoulli, *Theoria nova de motu aquarum canales quoscunque fluentium*, Commentarii Academiae Scietiarum Imperialis Peteropolitanae **2**(1727) 111-125(1729). (Latin) (This was published as *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Opus Academicum ab Acutore, dum Petropoli Ageret, Congestum, Argentorati, sumptibus Johannis Reinholdi Dulseckeri, anno 1728.)

¹⁰This English version from Germany was made by Shigeru Masuda.

¹¹We refer the original [15] in using (we/our). This English version from Russian was made by Shigeru Masuda. The first English version : Amer. Math. Soc., Transl(2) **24**(1963) by John Abramowich without corrections and comments. After conveying deep gratitude to him, we corrected the original misprints, amended phrases and words.

¹²cf. Kiselev [19, p.27].

- [3] D.Bernoulli, *Hydrodynamics*, & J.Bernoulli, *Hydraulics*, Translated from Latin into English by Thomas Cormody and Helmut Kobus, Dover Publications, NewYork, 1968. (This was reissued in 2005, but nothing was changed in contents.)
- [4] A.L.Cauchy, *Sur les équations qui expriment les conditions de l'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique*, Exercices de Mathématique, **3**(1828); Oeuvres(2) **8**, 195-226.
- [5] A.L.Cauchy, *Mémoire sur un théorème fondamental, dans le calcul intégral*, J. Reine Angew. Math., **14**(1842) , 1020-23.
- [6] J.L.d'Alembert, *Essai d'une Nouvelle Theorie de la Résistance des Fluides*, Paris, 1752. (Culture et Civilisation, Bruxelles, 1966.)
- [7] O.Darrigol, *Between hydrodynamics and elasticity theory : the first five births of the Navier-Stokes equation*, Arch. Hist. Exact Sci., **56**(2002), 95-150.
- [8] O.Darrigol, *Worlds of flow : a history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford Univ. Press, 2005.
- [9] L.Euler, *Leonhardi Euleri Opera Omnia*. Edited by C.Truesdell III : *Commentationes Mechanicae. Volumen posterius*, Auctoritate et impensis societatis scientiarum naturalium helveticae, seriei secundae **13**(1955). (Latin)
- [10] L.Euler, *Principia motus fluidorum*, (1752-1755), Acta Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitensis, **6**(1756-1757), 271-311(1761). (Latin) (We don't know what relations have with *Sectio secunda de principia motus fluidorum*. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*. Edited by C.Truesdell III : *Commentationes Mechanicae. Volumen posterius*, **13**(1955) 73-153. The former is cited by C.Truesdell[44] but we can not obtain it so far.)
- [11] L.Euler, *Principes généraux du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Académie des Science, Berlin, **11**(1755), 274-315(1757).
- [12] L.Euler, *Recherches sur la propagation des ébranlemens dans un milieu élastique*, Mélanges de Turin, **2**² (1760-61), 1-10(1762); Opera(2) **10**(1947), 255-263.
- [13] F.Graber, *Article ou Mémoire? Une réflexion comparative sur l'écriture des textes scientifiques, Navier et l'écoulement des fluides (1822-1827)*, Revue d'histoire des mathématiques, **10**(2004), 141-185.
- [14] G.Green, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, Nottingham, 1828. (Edited by N.M.Ferrers, *Mathematical Papers of the late George Green, Fellow of Gonville and Caius College, Cambridge*, Macmillan, 1871.)
- [15] G.Green, *On the propagation of light in crystallized media*, Nottingham, 1839. (Edited by N.M.Ferrers, Ibid.)
- [16] J.Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann & C^{ie}, Editeurs, Paris, 1932.
- [17] E.Hopf, *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*, Math. Nachr., H1-6, **4**(1950/51), 213-231.
- [18] A.A.Kiselev, *On the non-stational flow of the viscous fluid under the existence of the exterior forces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Ser.Mat., **100-5**(1955), 871-874. (Russian)
- [19] A.A.Kiselev, *Non-stational flow of the viscous incompressible fluid on the smooth 3D domain*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Ser.Mat., **106-1**(1956), 27-30. (Russian)
- [20] A.A.Kiselev, O.A.Ladyzhenskaya, *On the existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous incompressible fluid*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **21**(1957), 655-680. (Russian)
- [21] S.Kovalevskaya, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, J. Reine Angew. Math., **80**(1875), 1-32.
- [22] O.A.Ladyzhenskaya, *Investigation of the Navier-Stokes equations for the stationary motion of the incompressible fluid*, Uspekhi Mat. Nauk **14:3**(87)(1959), 75-97. (Russian)
- [23] J.L.Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris, 1788. (Quatrième Édition d'après la Troisième Édition de 1833 publiée par M. Bertrand, *Joseph Louis de Lagrange, Oeuvres*, publiées par les soins de J.-A. Serret et Gaston Darboux, **11/12**, Georg Olms Verlag, Hildesheim-New York, 1973.) (J.Bertarnd remarks the differences between the editions.)
- [24] J.L.Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris, 1788. (Editions Jacques Gabay in 1989. première édition.)
- [25] M.de Laplace, *Traité de mécanique céleste*, Ruprat, Paris, 1798-1805. (*Celestial Mechanics*, translated from French, with a commentary, by N. Bowditch, L.L.D. from the press of Isacc R. Butts ; Hilliard, Gray, Little, and Wilkins, Publishers ; Boston, 1824 ; Chelsea Publishing Co., Bronx, New York, 1966.)
- [26] J.Leray, *Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique*, J.Math.Pures Appl., **12**(1933), 1-82.
- [27] J.Leray, *Essai sur les mouvements plan d'un liquide visqueux que limitent des parois*, J.Math.Pures Appl., **13**(1934), 331-418.
- [28] J.Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta.Math.Uppsala, **63**(1934), 193-248.(cf. English translated version by Bob Terrell : <http://www.math.cornell.edu/~bterrell/>. We checked his translation and sent the corrections to him.)
- [29] A.M.Lyapunov, *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet*, J. de Math. pures appl., **4**(1898), 241-311.
- [30] C.L.M.H.Navier, *Sur les lois du mouvement des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules*, Ann. chimie phys., **19**(1822), 244-260.
- [31] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Academie des Sience de l'Institute de France, **6**(1827), 389-440. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x>, 389-440.
- [32] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Academie des Sience de l'Institute de France, **7**(1827), 375-393. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227>, 375-393.
- [33] I.Newton, *De Motu naturaliter accelerato*, 1643. (Latin)
- [34] I.Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London, 1687. (Latin)
- [35] F.K.G.Odqvist, *Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten*, Math. Z., **32**(1930), 329-375.
- [36] F.K.G.Odqvist, *Beträge zur Theorie der nichtstetionären zähen Flüssigkeitsbewegungen*, Arkiv för Math. Astronomi och fysik, Band **22A** No.**28**(1932), 1-22.
- [37] C.W.Oseen, *Neure Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Academic publishing, Leipzig, 1927.
- [38] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Polytech., **13**(1831), 1-174.
- [39] G.Prodi, *Un teorema di unicita per le equazioni di Navier-Stokes*, Annali di Mat., **48**(1959), 173-182. (Italian)
- [40] J.Serrin, *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, Handbuch der Physik Bd. VIII, Springer-Verlag, Berlin-New York Heidelberg, 1959, 125-263.
- [41] S.L.Sobolev, *Some applications of the functional analysis in mathematical physics*, Izd. LGU., 1950.
- Remark : We referred the following third edition : Translations of Mathematical Monographs, Volume 90, Amer. Math. Soc., 1991. (of which the Russian original version : in 1988)
- [42] V.A.Solonnikov, *Estimates of the solutions of a nonstationary linearized system of Navier-Stokes equations* J. Soviet Math., **8**(1977), 1-116.
- [43] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1845*, (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, Newyork and London, 1966, 75-129.
- [44] C.Truesdell, *Notes on the History of the general equations of hydrodynamics*, Amer. Math. Monthly **60**(1953), 445-458.
- [45] C.Truesdell, *Leonhardi Euleri Opera Omnia. The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788. Introduction to Leonhard Euleri Opera Omnia. Vol X et XI seriei secundae*, Auctoritate et impensis societatis scientiarum naturalium helveticae, **11-2** 1960.
- [46] C.Truesdell, *A new definition of a fluid*, J. Math. Pures Appl. (9)**29**(1950), 215-244, **30**(1951), 111-158.
- [47] H.Weyl, *The method of orthogonal projection in potential theory*, Duke Math. J., **7**(1940), 411-444.

Properties of Additive Models in Multiobjective Optimization Problems

Felipe Campelo and Hajime Igarashi.

Abstract—In this paper we discuss the ability of additive models to adequately map the full nondominated set in multiobjective optimization problems. Traditional techniques such as the Weighted Sum (WS) approach present severe limitations when the nondominated set is non-convex or non-connected. These limitations are presented, discussed, and compared with the Compromise Programming (CP) technique, which is able to find solutions on concave regions of the nondominated set, as well as effectively exploring non-connected sets. The CP technique is then coupled with a stochastic optimization algorithm for the parallel search for multiple solutions of the multiobjective problem. This hybrid approach is tested on analytical and numerical problems for demonstrating its effectiveness.

Index Terms—Multiobjective optimization, artificial immune systems, compromise programming.

I. INTRODUCTION

In many optimization problems, particularly in engineering design, one is usually faced with problems containing many conflicting requirements. For instance, performance and cost are usually conflicting for most systems. Such problems are usually characteristic for presenting not only one, but a set of solutions representing the various possible tradeoffs amongst the objectives. This set is commonly known as *Pareto Set*, *Pareto-Edgeworth Set*, *Nondominated* or *Noninferior Set*, with the word *Front* sometimes replacing *Set* in some contexts.

Popular approaches for solving multiobjective optimization problems include dominance-based methods (direct multiobjective optimization, where the objectives are taken separately); constraint-based approaches, where one objective is chosen as the most important and the others are transformed in constraints; and objective aggregation (or additive) methods, where the objectives are combined into a single function to be optimized. Each of these approaches present a number of advantages and disadvantages, concerning the simplicity of implementation and use, the efficiency on mapping the Pareto Front, or some other criterion.

In this work we analyze the characteristics of the function-aggregation methods in generating solutions for multiobjective optimization (MOO) problems. After some discussion on various aggregation techniques, we describe the compromise programming (CP) models, in particular the $CP(\alpha, \bar{w})$ model [3]. We then introduce an approach coupling an evolutionary mono-objective optimization algorithm to a CP formulation,

This work was supported by the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology: MEXT, Japan

F. Campelo and H. Igarashi are with the Laboratory of Hybrid Systems, Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University, Kita 14 Nishi 9, Kita-ku, Sapporo 060-0814, Japan (e-mail: pinto@emsi.eng.hokudai.ac.jp, igarashi@ssi.ist.hokudai.ac.jp)

in order to look for diverse solutions in the Pareto set using a parallel search scheme.

Section II introduces key concepts about MOO; in Section III, the WS and the CP approaches are described, and section IV describes the optimization algorithm coupled to the CP for the solution of MOO problems. Section V presents some results obtained by the proposed technique, and Section VI ends the paper with some concluding remarks and ideas for future work.

II. MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION

A general multiobjective optimization problem can be defined as the search for a point (or points) contained in the feasible part of the variable space of a given problem that present the property of *Pareto optimality* (defined below). The feasible portion of the variable space is defined by the equality and inequality constraints of the problem (if present), as well as by the upper and lower limit values for the variables.

In order to define Pareto optimality, we must first define the concept of Pareto dominance (or simply dominance):

Definition 1 (Pareto dominance): A vector in the variable space $\vec{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ is said to dominate $\vec{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ (denoted by $\vec{u} \preceq \vec{v}$) if and only if \vec{u} is partially less than \vec{v} , i.e., $\forall i \in 1, \dots, n, u_i \leq v_i \wedge \exists i \in 1, \dots, n : u_i < v_i$ [5].

Definition 2 (Pareto optimality): A vector in the variable space $\vec{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ is said to be Pareto dominant (or to belong to the Pareto set) if and only if $\nexists \vec{v} \in \Omega$ with $\vec{F}(\vec{v}) \preceq \vec{F}(\vec{u})$, where Ω is the feasible search space of the MOO problem.

Definition 3 (Pareto front): The Pareto front is the projection of the Pareto set onto the objective space.

The field of multiobjective optimization is of great interest in many areas of engineering, science, and economics. This broad applicability has motivated a great amount of research on various methods to find Pareto optimal solutions for a variety of applications. As mentioned in the introduction, these methods can be usually divided in some well-defined groups:

A. Direct methods

Direct methods are in the vast majority evolutionary MOO [6] algorithms. These methods rely on the evolution of a population of candidate solutions through a number of iterations, with a selection function that rewards nondominated solutions over dominated ones. The objective functions are treated independently, without aggregation or transformation

of objectives into constraints. The main advantage of this approach is the ability to obtain a good sampling of all regions of the Pareto Front, regardless of any considerations about convexity or connectivity of the front or differentiability of the objective functions. On the other hand, the implementation of direct methods is usually more complex than other approaches such as constrained and aggregation methods.

B. Constrained methods

Methods such as the ϵ -constrained approach [10] deal with the MOO problem by converting all but one objective function into constraints, and then solving the mono-objective constrained problem. While this problem has the potential to find points in all regions of the Pareto front, it presents the disadvantages of greatly reducing the feasible space of the problem (through the introduction of more constraints); also, choices made during the transformation of the objectives into constraints have the potential to greatly affect the performance of the optimization algorithm.

C. Function aggregation methods

The simplest of the three approaches mentioned here, function aggregation schemes (sometimes called additive schemes) work by combining all the objectives into a single functional, and then using this resulting functional as the objective function in a mono-objective problem. While simple, many techniques in this category can only converge to Pareto optimal solutions that are located in convex parts of the Pareto front, which can greatly limit its applicability in real-world problems, where partially or completely nonconvex Pareto fronts occur frequently. Also, the choice of weights for each objective function during the production of the objective functional is difficult and many times essential to the good performance of the optimization algorithm used.

III. FUNCTION AGGREGATION: WS x CP

Consider the multiobjective optimization problem (MOP) defined by (1):

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } & \vec{F}(\vec{x}) = \{f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})\} \\ \text{Subject to: } & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1)$$

where Ω represents the feasible parameter space, defined by both the range of the design variables and the constraints of the problem. As mentioned in the previous section, a classical way of solving the problem defined by (1) is the use of additive models, the simplest of which being the Weighted Sum approach, where the objectives are combined in a single function to be minimized (2):

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } & \sum_{i=1}^m w_i f_i(\vec{x}) \\ \text{Subject to: } & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2)$$

where \vec{w} is a vector of weights, and $\sum_{i=1}^m w_i = 1$. By solving the mono-objective problem defined by (2) for different weight vectors, it is possible to find different points on the Pareto front (PF). This approach, however, suffers from a number of

serious drawbacks, the most important being the inability to reach points on the nonconvex parts of the PF [9].

If we reformulate the problem 2 in the objective space [10], it becomes 3:

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } & \sum_{i=1}^m w_i y_i \\ \text{Subject to: } & y \in \Omega_y \end{aligned} \quad (3)$$

i.e., determine the point \vec{y}^* in the objectives space (defined as a projection of the feasible variable space) that minimizes the inner product $\vec{w}\vec{y}^*$. If we define the minimum value of this product as α^* , then we have the equation 4:

$$\vec{w}\vec{y}^* = \alpha^* \quad (4)$$

representing a support hyperplane to Ω_y at the point \vec{y}^* . Since a given vector \vec{w} defines the inclination of a given hyperplane, the minimization process in 3 searches for the hyperplane with such inclination that presents minimal distance to the Ω_y space. This hyperplane is necessarily the support hyperplane for some point. Therefore, only points that admit a support hyperplane (i.e., points in convex parts of the Pareto front) can be found by the WS approach.

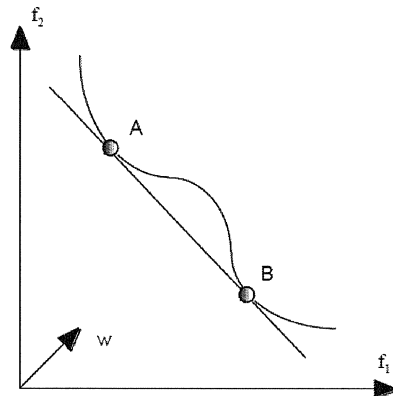


Fig. 1. In the WS approach, only points that admit support hyperplanes can be found. (figure adapted from [3])

Another additive model is the *Compromise Programming* (CP) [3]. In this model, different metrics are used to calculate the distance between a given point on the PF and the so-called *Utopia Solution*, a theoretical point composed by the individual minima of each objective of the MOP (in practice, a dynamically adjusted pseudo-Utopia Solution can be used). A particular case of the CP is the *weighted-Thebycheff approach* or $CP(\alpha, \vec{w})$, which uses the Tchebycheff norm for measuring the distance mentioned above. When using this metric, the definition of the problem becomes (5):

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f'(\vec{x}, \vec{w}) = \max [w_r (f_r(\vec{x}) - u_r)] \\ & x \in \Omega, r = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5)$$

It can be proved that, by varying the weight vector \vec{w} , it is possible to reach any point of the PF, independently of any convexity assumptions [1]. However, this requires the solution of several mono-objective problems in order to sample the Pareto front with more than a few points. The

high computational cost of solving these several $CP(\alpha, \vec{w}_r)$ problems (with $r = 1, \dots, n_s$) can be a severe impediment on the use of this technique for the solution of problems where the evaluation of the objectives involve the solution of complex numerical models (e.g., electromagnetic design).

The use of the Tchebycheff norm in the $CP(\alpha, \vec{w}_r)$ approach is the key to its capability to find Pareto optimal solutions in the nonconvex parts of the Pareto Front. Recall the support hyperplane defined by the WS approach (which, incidentally, is also an instance of the CP model, when a Manhattan norm is used instead of the Tchebycheff one) in the objective space. If we use the Tchebycheff norm instead, the formulation in the objective space becomes 6:

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } & \max \{w_i y_i - u_i\}_{i=1, \dots, m} \\ \text{Subject to: } & y \in \Omega_y \end{aligned} \quad (6)$$

The *minmax* operation means that we are trying to find a point \vec{y}^* that minimizes the maximum distance between Ω_y and the farthest axis of the coordinate system defined by the Utopia Solution \vec{u} . Figure 2 shows this concept, which illustrates the ability of the $CP(\alpha, \vec{w}_r)$ approach to find points on the Pareto front regardless of any convexity considerations.

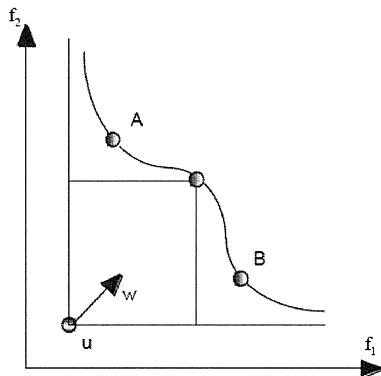


Fig. 2. In the $CP(\alpha, \vec{w}_r)$ approach, the points do not need to admit a support hyperplane in order to be searchable. (figure adapted from [3])

Let \mathbf{W} be a matrix composed of all the weight vectors needed to define the different $CP(\alpha, \vec{w}_r)$ problems mentioned above:

$$\mathbf{W} = \begin{Bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vdots \\ \vec{w}_{n_s} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

The projection on the objective space of a given point $x \in \Omega$ is given by the performance vector $\vec{F}'(1)$. From \mathbf{W} and \vec{F}' we can assemble a vector composed by the values of each $f'(x, \vec{w}_r)$:

$$\vec{F}'(x, \mathbf{W}) = [f'(x, \vec{w}_1), \dots, f'(x, \vec{w}_{n_s})] \quad (8)$$

where each element of $\vec{F}'(x, \mathbf{W})$ represents the performance of x for one of the $CP(\alpha, \vec{w}_r)$ problems.

As mentioned before, the usual approach for mapping the PF is to run a mono-objective optimization algorithm n_s times

(once for each line of \mathbf{W}), with the disadvantage of requiring a large number of objective function evaluations.

In this paper we use a different approach to search for all the n_s PF points in parallel, i.e., in a single run of the optimization algorithm. By using a subpopulation-based algorithm for mono-objective multimodal optimization, it is possible to map the several “minima” defined by each \vec{w}_r on the aggregation function. This approach has the potential of greatly reducing the computational cost associated with the search for the Pareto solutions, without the need of big changes in the optimization algorithm.

In the next section, we present an adapted version of the m-AINet algorithm [2] for solving the multimodal problem of finding the minima for each of the $CP(\alpha, \vec{w}_r)$ problems defined by \mathbf{W} . The m-AINet (*modified Artificial Immune Network*) is an optimization algorithm based on the *Artificial Immune Systems* (AIS) paradigm [7]. The goal of this algorithm is to find not only the global optimum, but also to identify all local optima in mono-objective optimization problems. This ability to search for multiple points in parallel is used here to solve the n_s problems defined by \mathbf{W} .

IV. THE M-AINET ALGORITHM

Figure 3 shows a schematic representation of the algorithm developed for solving this problem. This algorithm is based on the Artificial Immune Systems paradigm [7], and includes explicit operators for local and global search, and diversity generation. In addition, a special selection operator allows this algorithms to evolve a population of candidate solutions in which each individual represents a solution for one of the n_s CP problems.

- 1) Define $\mathbf{W} \leftarrow \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n_s}\}$;
- 2) Initialize $Ab_{mem} \leftarrow \emptyset$;
- 3) Initialize $Ab_{on} \leftarrow \{Ab^{(1)}, \dots, Ab^{(N)}\}$;
- 4) Evaluate Ab_{on} ;
- 5) **While** (\neg stop criterion) **do**:
 - a) $C \leftarrow \text{Clones}(Ab_{on})$;
 - b) Apply local mutation on C ;
 - c) Evaluate mutated clones;
 - d) Select the n_s best points from $(Ab_{on} \cup C)$;
 - e) Update Ab_{mem} with stabilized points;
 - f) Remove stabilized points from Ab_{on} ;
 - g) Complete Ab_{on} with new random points;

Fig. 3. m-AINet Algorithm

The algorithm starts with the definition of a matrix of weights \mathbf{W} (that defines n_s $CP(\alpha, \vec{w}_r)$ problems, which we call here *selection criteria* or simply *criteria*), the generation (random or not) of an initial population of points in the variable space (called *online* population, in opposition to the *memory* population), and the evaluation of these points over the objectives of the problem. The points are then copied and subject to local mutation. The mutated copies are called *clones* of the points.

After evaluating the clones and reintroducing them into the online population, the better point according to each of the

selection criteria defined by \mathbf{W} is selected for survival, and the others are deleted. This step reduces the size of the online population to n_s points (the user-defined population size must be smaller than n_s). Also notice that the same point can be represented more than once in the online population, in case it performs better for two or more criteria.

After that, the online population is checked for points that have *stabilized*: if the better point according to a given criterion has not changed for a number of iterations of the algorithm, this point is moved to the memory population, and removed from the iterative cycle.

Finally, the online population is completed with new random points, in order to keep the global exploration characteristics of the algorithm. The iterative cycle is then restarted, with the cloning of the current online population and so on.

After a given stop criterion is met (e.g., maximum number of iterations, maximum number of function evaluations, size of the memory population) the algorithm is stopped. The points in the memory population are checked for dominance, and the nondominated ones are returned as solutions of the MOO problem.

V. RESULTS

In order to compare the performance of the proposed approach (m-AINet + $CP(\alpha, \vec{w}_r)$) with other approaches, a number of analytical test problems was considered. These problems have been chosen for characteristics such as non-convexity, in order to better illustrate the characteristics of the methods employed. The proposed approach will be compared to the WS method (also using the m-AINet as the optimizer) and to the NSGA-II [8], a state-of-the-art direct method based on a genetic algorithm.

A. Problem 1

The first problem is a 2-objective, 1-dimensional problem, with a highly nonconvex Pareto front. This problem is defined as the minimization of 9:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 - e^{-(x-4)^2/9} \\ f_2(x) &= 1 - e^{-(x+4)^2/9} \\ -10 &\leq x \leq 10 \end{aligned} \quad (9)$$

Figure 4(a) shows the projection of the feasible search space onto the objective space for this problem. The Pareto front, represented by the curved part of the objective space, is clearly nonconvex.

The parameters of the MOO algorithms used were set as:

- m-AINet/CP and m-AINet/WS:
 - Population: 60
 - n_s : 50
- NSGA-II:
 - Population: 60
 - Memory size: 50
 - P_c : 0.8
 - P_m : 0.05

The stop criterion used was 360 function evaluations of each objective. From Fig 4(b-d) we can observe the performance of

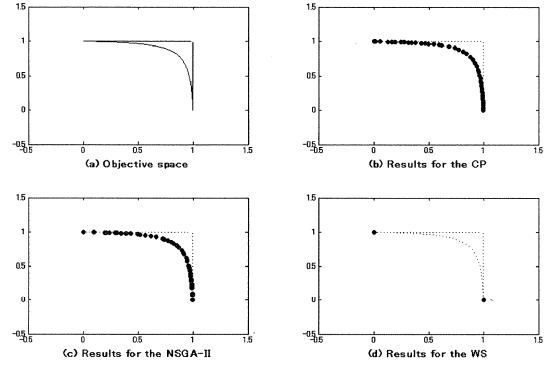


Fig. 4. Problem 1: (a) Objective space; (b) Results obtained by the m-AINet/CP; (c) Results obtained by the m-AINet/WS; (d) Results obtained by the NSGA-II

the algorithms used. NSGA-II and the m-AINet/CP approach were very successful in finding a good sampling of the Pareto front. On the other hand, the WS-based optimization found only the two extremities of the front, confirming the predictions about its performance on nonconvex fronts.

B. Problem 2

The second problem consists on the minimization of 2 objectives on a 2-dimensional variable space. This problem presents a partially nonconvex, discontinuous Pareto front, as shown in Fig. 5(a). The objective functions are 10:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &= x_1 \\ f_2(\vec{x}) &= (1 + 10x_2) * \\ &\left\{ 1 - \left(\frac{x_1}{1 + 10x_2} \right)^2 - \frac{x_1 \sin(8\pi x_1)}{1 + 10x_2} \right\} \\ 0 &\leq x_i \leq 1, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

The modified parameters for the optimization algorithms were: $n_s = 150$ and Population = 175 for both the CP and WS; and Memory size = 150 and Population = 100 for the NSGA-II. The stop criterion was set to 12,000 function evaluations.

Figure 5(b-d) show the results obtained by the three approaches tested.

It can be seen from the results obtained that the m-AINet/CP was again able to find solutions with a reasonable distribution over the Pareto front. The NSGA-II was also able to find solutions in all the four parts of the front, but with a slightly lower quality and precision. Again, the WS approach was unable to find a significant number of solutions, most probably due to the specific characteristics of the problem chosen.

A possible source of the good performance of the m-AINet/CP approach for this problem is the local search nature of the cloning procedure. By refining the solutions locally, the m-AINet algorithm is able to evolve the population of points to the vicinity of the Pareto front with good precision. In contrast, genetic algorithms (which are the basis of the NSGA-II) lack such local search capabilities, and therefore face greater difficulty in placing the points precisely over the front.

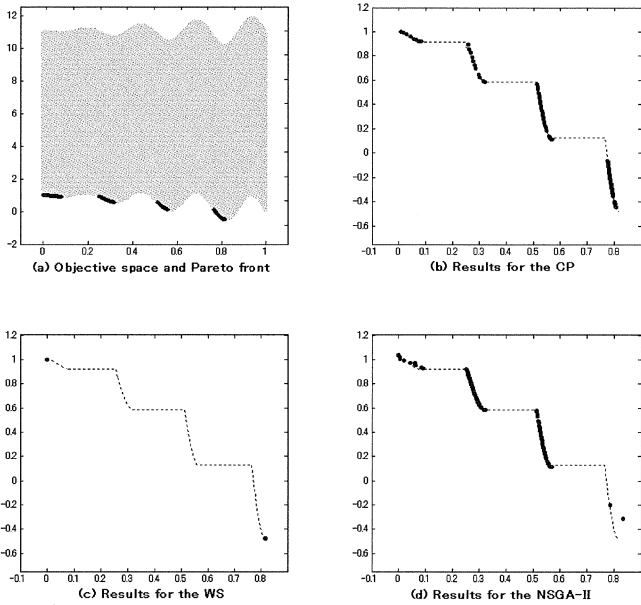


Fig. 5. Objective space for Problem 1. The Pareto front is shown in black.

VI. CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

In this work we have discussed the ability of generating optimal solutions from two function aggregation schemes for multiobjective optimization. An approach combining a mono-objective multimodal optimization algorithm (m-AINet) and Compromise Programming ($CP(\alpha, \vec{w}_r)$) was introduced, in order to provide a way to find several Pareto-optimal points in a single run of the optimization process, independently of any convexity assumptions. The results obtained on two benchmark problems show the applicability of the proposed approach to problems where the Pareto front is nonconvex and/or discontinuous. While the performance obtained in the two problems used was similar to the NSGA-II, a more extensive testing of the m-AINet/CP approach is required (e.g., by using a larger number of benchmark problems, analytical as well as numerical) in order to validate the technique.

Future work includes not only the validation of the methodology presented, but also the expansion of this technique for dealing with more challenging MOO problems, with higher-dimensional search spaces or a larger number of objectives; the adaptation of the m-AINet/CP to deal with robust multiobjective optimization; and the fine-tuning of the operators, in order to reduce the computational cost of the optimization process.

REFERENCES

- [1] V.J. Bowman, "On the relationship of the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 135:76-85, 1976.
- [2] F. Campelo, F.G. Guimaraes, H. Igarashi, J.A. Ramirez and S. Noguchi, "A modified immune network algorithm for multimodal electromagnetic problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4):1111-1114, 2006.
- [3] W. Chen, M. Wiecek and J. Zhang, "Quality Utility: A Compromise Programming Approach to Robust Design", *ASME Journal of Mechanical Design*, 121(2):179-187, 1999.

- [4] C.A.C. Coello, N. Cruz-Cortes, "An approach to solve multiobjective optimization problems based on an artificial immune system", *1st International Conference on Artificial Immune Systems*, Canterbury, UK, Sep 9-11, 2002.
- [5] C.A.C. Coello, N. Cruz-Cortes, "Solving multiobjective optimization problems using an artificial immune system", *Genetic Programming and Evolvable Machines*, 6(2):163-190, 2005.
- [6] C.A.C. Coello, "EMO repository", <http://delta.cs.cinvestav.mx/~ccoello/EMOO>
- [7] L.N. de Castro, and J. Timmis, *Artificial Immune Systems: A New Computational Intelligence Approach*, Springer-Verlag, 2002.
- [8] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratab, and T. Meyarivan, "A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II", *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference*, Paris, France, pp. 849-858, 2000.
- [9] A. Messac, G.J. Sundararaj, R.V. Tapetta and J.E. Renaud, "Ability of objective functions to generate points on non-convex Pareto frontiers", *AIAA Journal*, 38(6):1084-1091, 2000.
- [10] R.H.C. Takahashi, "Otimizacao escalar e vetorial" (in Portuguese), <http://www.mat.ufmg.br/~taka/otev04.pdf>.

On Perfect Isometries

植崎 亮 (大阪大学大学院理学研究科)
Ryo Narasaki, Osaka Univ.

Abstract

In the representation theory of finite groups, there are some problems which deserve attention. They are some conjectures on characters and Sylow p -subgroups. In this talk, we consider correspondences of irreducible characters which is called "perfect isometry". A perfect isometry is a reflection at the level of character theory of an equivalence of the derived categories of two block algebras as triangulated categories.

1 Introduction

この講演では、有限群の modular 表現において perfect isometry と呼ばれる、2つの群のブロック間の既約指標の対応について考える。 G を任意の有限群、 p を素数とし、 G の複素既約指標の全体のなす集合を $\text{Irr}(G)$ で表す。 $\text{Irr}(G)$ には p に関してある同値関係が存在し、その同値類をブロックと呼ぶ。 ブロックにはそれと深い関係を持つ p -部分群が G -共役を除いてただ一つ存在し、それをブロックの不足群と呼ぶ。

D を G の p -部分群とし、 D の G における正規化群を $N_G(D)$ で表す。 このとき、 G のブロックで D を不足群に持つものと、 $N_G(D)$ のブロックで D を不足群に持つもの間には自然な 1 対 1 の対応が存在することが知られており、これにより G の表現とその p -部分群の正規化群 $N_G(D)$ の表現には何か関係があるのではと考えられる。

1988 年に M. Broué は次のような予想を提出した。

予想 1.1. B を G のブロックで不足群 D を持つものとし、 b を $N_G(D)$ のブロックで不足群 D を持つものとする。 D が可換であるとき、 B と b の間には perfect isometry と呼ばれる全単射が存在するのではないか？

Broué はまた、加群の圏に関するより深い同値についても言及しているが、今回はおもに指標の対応についてのみ考えることにする。 ([1] を参照。)

2 有限群のブロック

この章ではブロックの理論に関して、必要となる定義、結果をまとめておく。ここでの記述は、多くは [2] にそう。

R を完備離散付値環とし、その商体 K の標数は 0 とする。また (π) を R の極大イデアルとし、剰余体 $F = R/(\pi)$ は標数 p の体であるとする。このとき (K, R, F) を p -モジュラー系とよぶ。

G を基底とする R -自由加群 $RG = \bigoplus_{g \in G} Rg$ を考え、 G における乗法を線形に拡張して RG における乗法を定義すると、 RG は R -多元環になる。 RG を G の R 上の群環という。

RG において、 G の部分集合 X の元の和を \hat{X} で表す： $\hat{X} = \sum_{x \in X} x$.

$G \ni x, g$ に対し $g^{-1}xg$ を x^g とかくことにすれば、群 G はこの作用で G 自身に作用している。これを G の共役による作用という。このとき G -軌道は G の共役類で、その全体を $\text{Cl}(G)$ と表す。

RG において 1 は直交する中心的原始べき等元の和として

$$1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t$$

と表さる。

$B_i = \varepsilon_i(RG)$ とおけば、 RG の (RG, RG) -加群としての直既約分解

$$RG = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_t \quad (1)$$

が得られる。このとき群 G の (p -) ブロックを次のように定義する。

定義 2.1. 群 G に対し、式 (1) における各 B_i を G の (p -) ブロックとよび、その全体を $\text{Bl}(G)$ と表す。また ε_i を B_i のブロックべき等元とよび、これを e_{B_i} と表す。

さらに、いくつか言葉の定義をする。 $B \in \text{Bl}(G)$ とする。 RG -加群 V に対して $Ve_B = V$ が成り立つとき、 V はブロック B に属するといひ、 $V \in B$ と書く。 V が G の R -表現 X の表現加群であるとき、 V がブロック B に属するならば X あるいはその指標 χ_X は B に属するという。このとき記号を乱用して、 $X \in B$ 、 $\chi_X \in B$ などと書く。

定義 2.2. 群 G に対し、 G の単位表現 1_G の属するブロックを G の主ブロックという。 G の主ブロックを $B_0(G)$ または単に B_0 とかく。

ブロック B に属する G の複素既約指標の全体を $\text{Irr}(B)$ と表す。このとき $\text{Irr}(G)$ は次のように類別される：

$$\text{Irr}(G) = \bigcup_{B \in \text{Bl}(G)} \text{Irr}(B) .$$

ここで、どのような場合に指標が同じブロックに属するののかについて考える。 $\text{Irr}(G) \ni \chi$ 、 $\text{Cl}(G) \ni C \ni x$ に対し、 $\omega_\chi : Z(RG) \rightarrow R$ を次のように定義する：

$$\omega_\chi(\hat{C}) = \frac{|G|\chi(x)}{|C_G(x)|\chi(1)} .$$

また、 G の p' -元の全体を $G_{p'}$ と表し、 G の p' -元からなる共役類の全体を $\text{Cl}(G_{p'})$ と表すことにする。このような記号のもとで次が成り立つ。

定理 2.3. $\text{Irr}(G) \ni \chi, \chi'$ が同じブロックに属するための必要十分な条件は次が成り立つことである：

$$\omega_\chi(\hat{C}) \equiv \omega_{\chi'}(\hat{C}) \pmod{(\pi)} \quad (\forall C \in \text{Cl}(G_{p'})) .$$

次に、ブロックの不足群について定義する準備をしよう。

$G \ni g$ と $RG \ni x$ に対し $x^g := g^{-1}xg$ とかくことにすると、 G はこの作用で RG に作用している。 G の部分群 H に対し、 H の全ての元で固定される RG の元の全体を $\text{Inv}_H(RG)$ と表す：

$$\text{Inv}_H(RG) = \{ x \in RG \mid x^h = x (\forall h \in H) \}.$$

G と H に対し、 Ha ($a \in G$) の形の G の部分集合を、 G における H の右剰余類とよび、 G における H の右剰余類の全体を $H \backslash G$ で表す。 $\text{Inv}_H(RG)$ から $\text{Inv}_G(RG)$ への写像

$$\text{Tr}_H^G : \text{Inv}_H(RG) \longrightarrow \text{Inv}_G(RG)$$

を次のように定義する：

$$x \mapsto \sum_{g \in H \backslash G} x^g.$$

これをトレース写像とよぶ。トレース写像 Tr_H^G の像を $\text{Tr}_H^G(RG)$ と略記し

$$RG_H^G = \text{Tr}_H^G(RG) + \pi \text{Inv}_G(RG)$$

とおく。このとき、次の定理が成り立つ。

定理 2.4. $\text{Inv}_G(RG) = Z(RG)$ の原始べき等元 e に対し、次の 2 条件を満たす G の p -部分群 D が G -共役を無視して一意的に決まる：

- (a) $e \in RG_D^G$.
- (b) $e \in RG_H^G \implies D$ は H の部分群になる。

ブロックの不足群が次のように定義できる。

定義 2.5. $B \in \text{Bl}(G)$ とそのべき等元 e_B に対し、定理 2.4 を満たす p -部分群 D をブロック B の不足群、または e_B の不足群とよぶ。

例えば、 G の主ブロックの不足群は G の Sylow p -部分群である。

3 Perfect isometry

ここでは perfect isometry の定義と、Broué の予想について述べる。

G, H を有限群とし、 e, f をそれぞれ ZKG (群環 KG の中心) と ZKH の原始べき等元とする。 $\mathcal{R}_K(G, e)$ を有限生成左 KGe -加群の指標から生成される \mathbb{Z} -加群、 $\text{Irr}(G, e)$ を $\mathcal{R}_K(G, e)$ の既約指標の集合、 $\mathcal{R}_K((G, e), (H, f))$ を (KGe, KHf) -両側加群の指標から生成される \mathbb{Z} -加群とする。

$\mathcal{R}_K((G, e), (H, f))$ の元 μ に対し、 $\mathcal{R}_K(H, f)$ から $\mathcal{R}_K(G, e)$ への準同形写像 I_μ を次で定義する：

$$I_\mu(\beta)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \mu(g, h^{-1}) \beta(h).$$

ここで β は K に値を持つ H の類関数である。

定義 3.1. μ が perfect であるとは, 全ての $g \in G$, $h \in H$ に対し次が成り立つことを言う.

(i) $\mu(g, h)/|C_G(g)| \in R$, $\mu(g, h)/|C_G(h)| \in R$.

(ii) $\mu(g, h) \neq 0$ ならば, g の位数が p と素であるのは, h の位数が p と素であるときかつそのときに限る.

定義 3.2. $\mathcal{R}_K(H, f)$ から $\mathcal{R}_K(G, e)$ への isometry が perfect であるとは, μ が perfect である I_μ を言う.

1988 年に M. Broué は次のような予想を提出した.

予想 3.3. B を G のブロックで不足群 D を持つものとし, b を $N_G(D)$ のブロックで不足群 D を持つものとする. D が可換であるとき, B と b の間には *perfect isometry* と呼ばれる全単射が存在するのではないか?

さらに, この予想のより強い形は以下の通りである.

予想 3.4. B を G のブロックで不足群 D を持つものとし, b を $N_G(D)$ のブロックで不足群 D を持つものとする. D が可換であるとき, B と b の *derived category* 間に *triangulated category* としての同値が存在するのではないか?

上の *derived equivalence* が存在すれば, *perfect isometry* が存在することは知られており, よって予想 3.4 が成り立てば予想 3.3 は成り立つ.

このような *derived equivalence* が存在する例としては, 巡回不足群を持つブロック, $C_2 \times C_2$ を不足群に持つブロック, p -可解群のブロックなどいくつか知られている. また, *perfect isometry* が存在する例としては, R. Rouquier による散在型単純群の可換な不足群を持つ主ブロックの場合 ([3]) など, いくつか知られている.

参考文献

- [1] M. Broué, *Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées, Représentations Linéaires des Groupes Finis*, Luminy, 1988, *Astérisque* **181-182** (1990), 61-92.
- [2] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of Finite Groups*, Academic Press, New York (1987).
- [3] R. Rouquier, *Isométries parfaites dans les blocs à défaut abélien des groupes symétriques et sporadiques*, *J. Algebra* **168** (1994), 648-694.

E-mail address: narasaki@gaia.math.wani.osaka-u.ac.jp

Word theory and its applications to knots and plane curves

Noboru Ito

1. INTRODUCTION

The object of this note is to introduce the definition of *word* (Sect. 2), its application to knots (Sect. 3) and its application to plane curves (Sect. 4).

In [Tu1], Turaev constructs *word* (Sect. 2) and *homotopy of word* (Sect. 3) using idea in Topology. *Word* is the universal object for knot, curve, etc. For example, we can regard isotopy classes of knots as *homotopy equivalent classes of words*, ([Tu2], Sect. 3); we can also regard *pointed curves* on a surface as *words* (Conventions, Sect. 4). In [Tu2], by using *word*, Turaev constructs knot invariant, for instance, Jones polynomial or $\underline{\alpha}$ -kei which is similar to kei. Using Turaev's word, we will reconstruct the Arnold's basic invariants ([Ar1], [Ar2]) which are systematically reformulated by M. Polyak [Po] and we will construct some invariants which are independent of that of Arnold.

Conventions. A *closed curve* is an immersion $: S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ where all of the singular points for the immersion are transversal double points. A *base point* is a point on a closed curve except on the double points. A *pointed curve* is a closed curve endowed with a fixed base point. Winding number (rotation number) is called *index* in this note. All surfaces, closed curves and knots are oriented.

2. TURAEV'S WORD

We follow the notation and terminology of [Tu2]. An *alphabet* is a set and its elements are called *letters*. A *word of length* $m \geq 1$ in an alphabet \mathcal{A} is a mapping $\hat{m} = \{1, 2, \dots, m-1, m\} \rightarrow \mathcal{A}$. A word $w : \hat{m} \rightarrow \mathcal{A}$ is encoded by the sequence of letters $w(1)w(2)\cdots w(m)$ in a natural way. Two words $w : \hat{m} \rightarrow \mathcal{A}$, $w' : \hat{l} \rightarrow \mathcal{A}'$ are *isomorphic* if there is a bijection $w(\hat{m}) \rightarrow w'(\hat{l}); w(j) \mapsto w'(j)$.

A word w is called a *Gauss word* if each element of \mathcal{A} is the image of precisely two elements of \hat{m} . For an alphabet α , an α -*alphabet* \mathcal{A} is an alphabet endowed with a projection $|\cdot| : \mathcal{A} \rightarrow \alpha$. A *nanoword* over α is a pair (\mathcal{A}, w) where \mathcal{A} is an α -alphabet and w is a Gauss word $:\hat{m} \rightarrow \mathcal{A}$. An *isomorphism* of α -alphabets $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ is a bijection $f : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ endowed with $|f(A)| = |A|$ for all $A \in \mathcal{A}_1$. Two nanowords $(\mathcal{A}_1, w_1), (\mathcal{A}_2, w_2)$ over α are *isomorphic* if there is an isomorphism f of α -alphabets $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ such that $w_2 = fw_1$.

When we treat surface curves, let α be $\{a, b\}$. Then, the following theorem is established by Turaev [Tu2].

Theorem 2.1. (Turaev) *Every pointed closed curve is represented as a nanoword.*

Proof. For a given pointed closed curve which has precisely m double points, we name the double points A_1, A_2, \dots, A_m along the curve orientation from the base point. Each point precisely corresponds to either a or b in Figure 1. \square

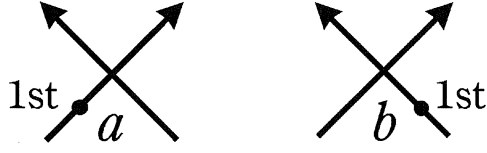


FIGURE 1. Two patterns of the double points correspond to two letters in α .

For every pointed curve Γ on surfaces, every nanoword (\mathcal{A}, w_Γ) over α corresponding to Γ defines the mapping $g : \Gamma \mapsto (\mathcal{A}, w_\Gamma)$ naturally. For every pointed curve on surfaces, the mapping g is a surface isotopy invariant.

3. APPLICATION TO KNOTS

For knots, a theorem similar to Theorem 2.1 is established by Turaev [Tu2]. Let α be $\{a_+, a_-, b_+, b_-\}$, and let S consist of the following 12 triples:

$$(a_\pm, a_\pm, a_\pm), (a_\mp, a_\pm, a_\pm), (a_\pm, a_\pm, a_\mp), (b_\pm, b_\pm, b_\pm), (b_\mp, b_\pm, b_\pm), (b_\pm, b_\pm, b_\mp).$$

The involution $\tau : \alpha \rightarrow \alpha$ is defined by $\tau(a_+) = b_-$ and $\tau(a_-) = b_+$.

Definition 3.1. Two nanowords over α are *S-homotopic* if one nanoword over α is transformed to the other by a finite sequence of the following (1)–(3) moves of nanowords over α , the inverse moves of (1)–(3), and isomorphisms:

- (1) replace $(\mathcal{A}, xAAy)$ with $(\mathcal{A} - \{A\}, xy)$,
- (2) replace $(\mathcal{A}, xAByBAz)$ with $(\mathcal{A} - \{A, B\}, xyz)$ for $|A| = \tau(|B|)$,
- (3) replace $(\mathcal{A}, xAByACzBCt)$ with $(\mathcal{A}, xBAyCAzCBt)$ for $(|A|, |B|, |C|) \in S$,

where A, B, C stand for letters and x, y, z, t stand for sequences of letters.

The following theorem is fundamental.

Theorem 3.1. (Turaev) *There is an injection from the set of isotopy classes of knots into the set of S-homotopy classes of nanowords over α .*

For the proof of Theorem 3.1 and further detail, see [Tu2].

4. APPLICATION TO PLANE CURVES

In order to construct invariants CLI_2 and CLI_3 , we compose a mapping $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

For every A in an α -alphabet \mathcal{A} ,

$$\text{sign}(|A|) := \begin{cases} 1 & \text{if } |A| = b \\ -1 & \text{if } |A| = a. \end{cases}$$

When a nanoword (\mathcal{A}_w, w) over α is given, we consider all sub-words of length $2n$ of w . For each sub-word v we can naturally consider the nanoword (\mathcal{A}_v, v) over α such that $\mathcal{A}_v \subseteq \mathcal{A}_w$. Then, $\text{sign}(v)$ is defined by

$$\text{sign}(v) := \prod_{A \in \mathcal{A}_v} \text{sign}(|A|).$$

Using this $sign(v)$, for every nanoword (\mathcal{A}_w, w) over α and for every Gauss word v , we can define the mapping

$$\langle v, w \rangle := \sum_{\text{sub-word } v' \text{ of } w \text{ isomorphic to } v} sign(v').$$

Let W_n be the \mathbf{Q} -module generated by the set of all of the Gauss words of the length $2n$. Let N_n be the free \mathbf{Q} -module generated by the set of nanowords over α $\{(\mathcal{A}, w)\}$ such that $\text{card}\mathcal{A}$ is equal to n .

Expanding $\langle v, w \rangle$ bilinearly, we can make a bilinear mapping \langle, \rangle from $W_n \times N_n$ to \mathbf{Q} .

For an arbitrary surface, let w_Γ stand for a word which is determined by a curve Γ on the surface.

Theorem 4.1. *The following $\{I_n\}$ is the sequence of surface isotopy invariants for pointed curves on a surface.*

$$I_n(\Gamma) = \left\langle \sum_k x_k v_k, w_\Gamma \right\rangle \quad (n \in \mathbf{N})$$

where $\{v_k\}$ is the basis of W_n and each x_k is a parameter.

Proof. By using Theorem 2.1, the way of constructing \langle, \rangle implies this theorem. \square

For every curve Γ , let i be index, n be the number of the double points, and we define CLI_2 by

$$CLI_2(\Gamma; s, t, u) := sn + \langle tXXYY - tXYYX + uXYXY, w_\Gamma \rangle + \frac{t}{2} - \frac{t}{2}i^2.$$

M. Polyak proved that $\langle XXYY - XYYX, w_\Gamma \rangle$ and $\langle XYXY, w_\Gamma \rangle$ do not depend on the choice of a base point (cf. Theorem 1 proof in [Po]).

Therefore, invariant CLI_2 is well-defined. CLI_2 is also not depend on the orientation of the curve Γ because this formula is symmetric.

$CLI_2(\Gamma; s, t, u)$ is substituted by $CLI_2(\Gamma)$ if this means $CLI_2(\Gamma; s, t, u)$ clearly. Similarly, for CLI_3 we admit the abbreviation like this if its meaning is clear.

Theorem 4.2. (Polyak) *CLI_2 is invariant of plane curves which is as strong as the triple of the three Arnold's basic invariants (J^+, J^-, St) . (The definitions of J^+, J^-, St are in [Ar1], [Ar2], [Po].)*

Proof. By using Polyak's formulation of the Arnold basic invariants [Po], the triple of the three Arnold's basic invariants $(J^+(\Gamma), J^-(\Gamma), St(\Gamma))$ is equal to

$$\left(CLI_2(\Gamma; -\frac{1}{2}, 1, -3), CLI_2(\Gamma; -\frac{3}{2}, 1, -3), CLI_2(\Gamma; \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right)$$

and three vectors $(-\frac{1}{2}, 1, -3), (-\frac{3}{2}, 1, -3), (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ are linearly independent. These two facts imply this theorem. \square

We represent

$$XYXYZZ - YXYZZX + XYZZXY - YZZXYX + ZZXYXY - ZXYXYZ,$$

as $[XYXYZZ]$ and represent $XXYYZZ - XYZZX$ as $[XXYYZZ]$.

For every curve Γ , let i be index, and we define CLI_3 by

$$CLI_3(\Gamma; s, t) := \langle s[XYXYZZ] + t[XXYYZZ], w_\Gamma \rangle + i.$$

Theorem 4.3. CLI_3 is invariant of plane closed curves.

Proof. To prove this, we must prove that $CLI_3(\Gamma)$ is not varied by an arbitrary base point move (Figure 2) for every closed curve Γ . Base point move is that we replace $(\mathcal{A}, w_\Gamma) = AxAy$ with $xA_\tau yA_\tau$ defined by $|A_\tau| = \tau(|A|)$ where x, y are consist of the letters of $\mathcal{A} - \{A\}$ and τ is the involution $\alpha \rightarrow \alpha; a \mapsto b$. Therefore, under base point move, the part of $\langle AxAy, w_\Gamma \rangle$ multiplied -1 is added to $\langle xAyA, w_\Gamma \rangle$.

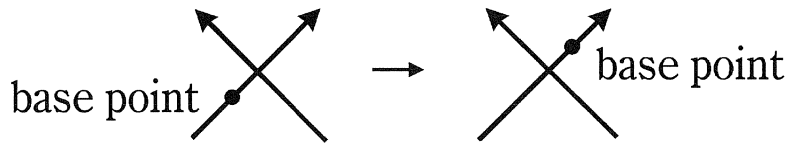


FIGURE 2. Base point move.

We have

$$\begin{aligned} XYXYZZ &\xrightarrow{\text{base point move}} YXYZZX \xrightarrow{\text{base point move}} XYZZXY \xrightarrow{\text{base point move}} YZZXYX \\ &\xrightarrow{\text{base point move}} ZZXYXY \xrightarrow{\text{base point move}} ZXYYXZ \xrightarrow{\text{base point move}} XYXYZZ, \\ XXYYZZ &\xrightarrow{\text{base point move}} XYZZX \xrightarrow{\text{base point move}} YYZZXX \stackrel{isom}{\simeq} XXYYZZ. \end{aligned}$$

Then, both the value of $\langle [XYXYZZ], w_\Gamma \rangle$ and the value of $\langle [XXYYZZ], w_\Gamma \rangle$ are not change by an arbitrary base point move. \square

There exist two curves such that the values of the HOMFLY polynomial of immersed plane curves [CGM], index, basic invariants are the same; however, the value of CLI_3 on one curve is different from that on the other (Figure 3).



FIGURE 3. Two curves such that the value of the HOMFLY polynomial is x^2z_2 and (i, J^+, J^-, St) is $(2, -4, -7, 2)$. The value of CLI_3 is $y + 2$ for the left figure, $-y + 2$ for the right figure.

This example implies the following.

Corollary 4.1. CLI_3 is independent of index, the Arnold's basic invariants and the HOMFLY polynomial of immersed plane curves.

REFERENCES

- [Ar1] V. I. Arnold, *Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications*, Advances in Soviet Mathematics, AMS **21**, Providence (1994), 33–91.
- [Ar2] V. I. Arnold, *Topological invariants of plane curves and caustics*, University Lecture Series **5**, Providence, RI, 1994.
- [CGM] S. Chumutov, V. Goryunov, H. Murakami, *Regular Legendrian knots and the HOMFLY polynomial of immersed plane curves*, Math. Ann. **317** (2000), 389–413.
- [Po] M. Polyak, *Invariants of curves and fronts via Gauss diagrams*, Topology **37** (1998), 989–1009.
- [Tu1] V. Turaev, *Topology of words*, math.CO/0503683.
- [Tu2] V. Turaev, *Knots and words*, math.GT/0506390.
- [Tu3] V. Turaev, *Lectures on topology of words*, RIMS-1567 (2006).

Department of Mathematical Sciences
Graduate School of Science and Engineering
Waseda University
Okubo 3-4-1, Shinjyuku-ku
Tokyo 169-8555, JAPAN
email: noboru@moegi.waseda.jp

Asymptotic stability of stationary waves for viscous gases

上田 好寛 (九州大学大学院 数理学府 博士課程 1 年)

1. 非線形移流項付き消散型波動方程式に現れる定常波の漸近安定性

半空間 $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ において, 次の非線形移流項付き消散型波動方程式の初期・境界値問題を考える。

$$(1) \quad \begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + u_t + f(u)_x &= 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}_+, \\ u(t, 0) &= u_b, & t \in (0, \infty), \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

但し, $u_0(x) \rightarrow u_+$ ($x \rightarrow \infty$) とし, $u_b \neq u_+$ を仮定する。(1)に対応する定常問題は,

$$(2) \quad \begin{aligned} -\phi_{xx} + f(\phi)_x &= 0, & x \in \mathbb{R}_+, \\ \phi(0) &= u_b, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) &= u_+ \end{aligned}$$

となり, $f'' > 0$ を仮定した際の, 定常波の存在と $x \rightarrow \infty$ での漸近形は以下のように知られている。

命題 1. ([5],[6]) 定常問題 (2) が解 $\phi(x)$ を持つための必要条件は $f'(u_+) \leq 0$ である。また, そのとき以下のことが成り立つ。但し, $\delta := |u_+ - u_b|$ とする。

(i) $f'(u_+) < 0$ の場合: $f(u_*) = f(u_+)$ をみたす $u_* (> u_+)$ に対し, $u_+ < u_b < u_*$ なら $\phi(x)$ は存在して単調減少, また, $u_b < u_+$ なら $\phi(x)$ は存在して単調増加である。更に, いずれの場合も $k \geq 0$ に対し,

$$|\partial_x^k (\phi(x) - u_+)| \leq C\delta e^{-cx}$$

が成り立つ。

(ii) $f'(u_+) = 0$ の場合: $u_b < u_+$ なら $\phi(x)$ は存在して単調増加である。更に, $k \geq 0$ に対し,

$$|\partial_x^k (\phi(x) - u_+)| \leq \frac{C\delta^{k+1}}{(1 + \delta x)^{k+1}}$$

が成り立つ。

命題 1 で存在を示した定常波への漸近安定性に関して, 通常のエネルギー法を用いて次の結果を示すことができる。

定理 1. $f'' > 0$, $\sup_{u \in [u_b, u_+]} |f'(u)| < 1$ とし, $f'(u_+) \leq 0$ を仮定する。また定常波 $\phi(x)$ は単調増加とし, $u_0 - \phi \in H^1(\mathbb{R}_+)$, $u_1 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ を仮定する。 $E_0 := \|u_0 - \phi\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^2}$ とし, E_0 が十分小さければ, (1) の大域解 u で $u - \phi \in C^0([0, \infty); H^1(\mathbb{R}_+)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\mathbb{R}_+))$ を満たすものが一意に存在する。更に, 解 u は定常波 ϕ に次の意味で漸近する。

$$\|u(t) - \phi\|_{L^\infty} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

更に, 重み付きエネルギー法 ([2], [3]) を用いれば, 定常波への漸近収束の速さを求めることができる。その結果を次の定理で述べる。その準備として, 以下の関数空間を定義する。

$$L_\alpha^2(\mathbb{R}_+) := \left\{ f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+) \mid \|f\|_{L_\alpha^2} := \left(\int_0^\infty (1+x)^\alpha |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

$$H_\alpha^1(\mathbb{R}_+) := \{ f \in L_\alpha^2; \partial_x f \in L_\alpha^2 \}, \quad \|f\|_{H_\alpha^1} := (\|f\|_{L_\alpha^2}^2 + \|f_x\|_{L_\alpha^2}^2)^{1/2},$$

$$L^{2,\alpha}(\mathbb{R}_+) := \left\{ f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+) \mid \|f\|_{L^{2,\alpha}} := \left(\int_0^\infty e^{\alpha x} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

$$H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+) := \{ f \in L^{2,\alpha}; \partial_x f \in L^{2,\alpha} \}, \quad \|f\|_{H^{1,\alpha}} := (\|f\|_{L^{2,\alpha}}^2 + \|f_x\|_{L^{2,\alpha}}^2)^{1/2}.$$

定理 2. 非線形項 f に対し定理 1 と同様の仮定を定める。また, $f'(u_+) < 0$ を仮定し, 非縮退定常波 $\phi(x)$ は単調増加とする。さらに, $\alpha > 0$ に対し $u_0 - \phi \in H_\alpha^1(\mathbb{R}_+)$, $u_1 \in L_\alpha^2(\mathbb{R}_+)$ を仮定し, $E_\alpha := \|u_0 - \phi\|_{H_\alpha^1} + \|u_1\|_{L_\alpha^2}$ と定める。このとき E_0 が十分小さければ, (1) の大域解 u は以下の評価をみたす。

$$\|u(t) - \phi\|_{H^1} \leq CE_\alpha(1+t)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

定理 3. 非線形項 f と定常波 ϕ に対し定理 2 と同様の仮定を定める。また, $\alpha > 0$ に対し $u_0 - \phi \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}_+)$, $u_1 \in L^{2,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ を仮定し, $\tilde{E}_\alpha := \|u_0 - \phi\|_{H^{1,\alpha}} + \|u_1\|_{L^{2,\alpha}}$ と定める。このとき E_0 が十分小さければ, (1) の大域解 u は以下の評価をみたす。

$$\exists \beta \quad \text{s.t.} \quad \|u(t) - \phi\|_{H^1} \leq C\tilde{E}_\alpha e^{-\beta t}.$$

注意. 定理 1, 定理 2, 定理 3 において, 単調減少な定常波への漸近安定性を考える場合, $\delta := |u_+ - u_b|$ が十分小さいことを仮定すれば, 同様の結果を得ることができる。

2. 粘性気体に現れる縮退定常波の漸近安定性

前節では主に非縮退定常波への漸近安定性について議論した。この節では空間1次元半空間 $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$ において、粘性気体に現れる縮退定常波の漸近安定性を考察する。

2.1. 粘性保存則

粘性保存則の初期・境界値問題は以下で表される。

$$(3) \quad \begin{aligned} u_t + f(u)_x &= \mu u_{xx}, \\ u(0, t) &= u_b, \quad u(x, 0) = u_0(x). \end{aligned}$$

ここで、 f は十分滑らかとし、粘性係数 $\mu > 0$ と境界値 u_b は定数とする。また初期関数 $u_0(x)$ は $x \rightarrow \infty$ で、ある定数 u_+ に収束すると仮定する。このとき、初期・境界値問題 (3) に対応する定常問題は (2) と同様のものとなる。今回、定常問題 (2) に対し、定常波 $\phi(x)$ が x について狭義単調増加 ($u_b < u_+$) な場合を考え、 $q+1$ ($q > 0$) 次の接触を持つとし、以下を仮定する。

$$(4) \quad \begin{aligned} f''(u) &> 0 \quad \text{for } u_b \leq u < u_+, \\ f(u) &= f(u_+) + \frac{c_{q+1}}{q+1}(u_+ - u)^{q+1} + O(|u_+ - u|^{q+2}) \quad \text{for } u \rightarrow u_+. \end{aligned}$$

ここで、 c_{q+1} は正定数とする。この時、定常問題 (2) の解の存在は命題 1 に述べたように既に知られており、定常波 $\phi(x)$ は $x \rightarrow \infty$ とすることによって $(1+x)^{-1/q}$ の減衰率で u_+ に近づくことがわかる。

このような条件のもと、縮退定常波 $\phi(x)$ に (3) の解 $u(t, x)$ が漸近収束することを示し、更にその減衰率を求める。

定理 4. 初期値に $u_0 - \phi \in L^1 \cap L^\infty$ を仮定する。その時、ある十分小さな正定数 δ_0 が存在して $\|u_0 - \phi\|_{L^1} \leq \delta_0$ が成り立つなら、 $u - \phi \in C([0, \infty); L^p)$ を満たす初期・境界値問題 (3) の一意な解 u が存在する。

さらに、解は次の減衰評価を満たす。

$$(5) \quad \|(u - \phi)(t)\|_{L^p} \leq C(\|u_0 - \phi\|_{L^1} + \|u_0 - \phi\|_{L^\infty})(1+t)^{-\gamma}, \quad t \geq 0.$$

ここで、 $1 \leq p < \infty$, $\gamma = (1/2)(1 - 1/p)$ である。

定理 5.

$$(6) \quad \alpha_*(q) := (q+1 + \sqrt{3q^2 + 4q + 1})/q$$

とする。 $1 \leq \alpha < \alpha_*(q)$ を満たす α に対し、 $u_0 - \phi \in L_\alpha^2 \cap L^\infty$ を仮定する。その時、ある十分小さな正定数 δ_1 が存在して $\|u_0 - \phi\|_{L_\alpha^2} \leq \delta_1$ が成り立つなら、 $u - \phi \in C([0, \infty); L^p \cap L_\alpha^2)$ を満たす初期・境界値問題 (3) の一意な解 u が存在する。

さらに、解は次の減衰評価を満たす。

$$(7) \quad \|(u - \phi)(t)\|_{L^p} \leq C(\|u_0 - \phi\|_{L_\alpha^2} + \|u_0 - \phi\|_{L^\infty})(1+t)^{-\alpha/4 - \sigma}, \quad t > 0.$$

ここで、 $2 \leq p < \infty$, $\sigma = (1/2)(1/2 - 1/p)$ である。

2. 非線形移流項付き消散型波動方程式

縮退定常波の漸近安定性について、より複雑な方程式でも同様の結果を示すことが出来る。ここでは、非線形移流項付き消散型波動方程式の初期・境界値問題 (1) の縮退定常波への漸近結果を述べる。ここで、非線形項 $f(u)$ に (4) と

$$|f'(u)| < 1 \quad \text{for } u_b \leq u \leq u_+,$$

を仮定する。

定理 6. $1 \leq \alpha < \alpha_*(q)$ を満たす α に対し、 $u_0 - \phi \in H_\alpha^1$ と $u_1 \in L^2$ を仮定する。その時、ある十分小さな正定数 δ_2 が存在して $E_\alpha := \|u_0 - \phi\|_{H_\alpha^1} + \|u_1\|_{L^2} \leq \delta_2$ が成り立つなら、 $u - \phi \in C([0, \infty); H^1) \cap C^1([0, \infty); L^2)$ を満たす初期・境界値問題 (1) の一意な解 u が存在する。

さらに、解は次の減衰評価を満たす。

$$(8) \quad \|(u - \phi)(t)\|_{H^1} \leq CE_\alpha(1+t)^{-\alpha/4}, \quad t \geq 0.$$

参考文献：

- [1] A. Matsumura and K. Nishihara, Asymptotic stability of traveling waves for scalar viscous conservation laws with non-convex nonlinearity, *Commun. Math. Phys.*, **165** (1994), 83–96.
- [2] M. Nishikawa, Convergence rate to the traveling wave for viscous conservation laws, *Funkcial. Ekvac.* 41 (1998), 107-132.
- [3] S. Kawashima and A. Matsumura, Asymptotic stability of traveling wave solutions of systems for one-dimensional gas motion, *Comm. Math. Phys.* 101 (1985), 97-127.
- [4] S. Kawashima, S. Nishibata and M. Nishikawa, L^p energy method for multi-dimensional viscous conservation laws and application to the stability of planar waves, *J. Hyperbolic Differential Equations*, **1** (2004), 581–603.
- [5] S. Kawashima, S. Nishibata and P. Zhu, Asymptotic stability of stationary solution to the compressible Navier-Stokes equations in the half space, *Comm. Math. Phys.* 240 (2003), 483-500.
- [6] T.-P. Liu, A. Matsumura and K. Nishihara, Behavior of solutions for the Burgers equations with boundary corresponding to rarefaction waves, *SIAM J. Math. Mech.* 29 (1998), 293-308.

ナノ液滴の蒸発・凝縮に関する分子動力学的研究

Molecular Dynamics Study of Evaporation and Condensation of Nanodroplets

矢口 久雄 (北海道大学大学院工学研究科)

1 はじめに

気相 (気体) と液相 (液体) が接する面を気液界面という. 気液界面をもつ系 (気液 2 相系) は, 熱交換器の設計や超微粒子材料の製造などといった工学的応用において重要である. また, 雲粒の生成過程や海洋上の大気の流れといった地球科学などにも関わりをもつ. しかし, 一般に気液界面の取り扱いが簡単ではない. それは気液界面で蒸発や凝縮がおこるためである. 蒸発とは, 液相の分子が気相にとびだしてゆく現象であり, 凝縮とは, その逆で, 気相の分子が液相に入っていく現象である.

蒸発・凝縮に関しては未解明の問題が多く残されている. 蒸発・凝縮がおこると, 気相と液相の間で質量・運動量・エネルギー輸送がおこる. しかし, これらの界面輸送量がまだよく分かっていない. 気相や液相の物性値や状態量 (温度, 密度, 圧力など), 界面の幾何的量 (曲率半径など) などに対して, 界面輸送量を与える関数形の全貌が明らかになっていないのである. そのため, これらの問題に関わる研究が, 理論と実験の両面から広く行われている [1]-[7].

本研究では, 分子動力学法による計算機実験を行い, アルゴンのナノ液滴の蒸発・凝縮を調べている. ナノ液滴とは, 半径数ナノメートル (10^{-9}m) の超微小液滴で, その気液界面は極めて大きな曲率 (曲率半径の逆数) をもつ. 研究目的は, 気液界面の曲率半径と界面輸送量の関係について明らかにすることである. 今回は, 質量輸送量の結果を中心に報告する.

2 分子動力学法

分子動力学法による計算機実験は, 分子ひとつひとつに対して Newton の運動方程式を数値的に解いていき, 全分子の位置と速度の時間発展を求める手法である. 基礎となるのは, Newton の運動方程式と分子間に働く力を求めるための分子間ポテンシャルモデルである. 気相も液相もまとめて分子として取り扱うため, 気液界面での境界条件などは必要ない. 分子の位置や速度の情報から, 気液間の質量・運動量・エネルギー輸送量などを明らかにすることができる. 界面構造 (遷移層) の詳細な研究にも有効である. また, 質量輸送量から蒸発係数や凝縮係数とよばれるパラメータを求めることで, 分子気体力学などの解析に重要な情報を提供できる.

3 気液界面での質量輸送

ここで, 気液界面における質量輸送について考えてみる. 質量輸送を表す量として質量流束を用いる. 質量流束とは, 検査面を通過する分子の質量流量を単位時間, 単位面積あ

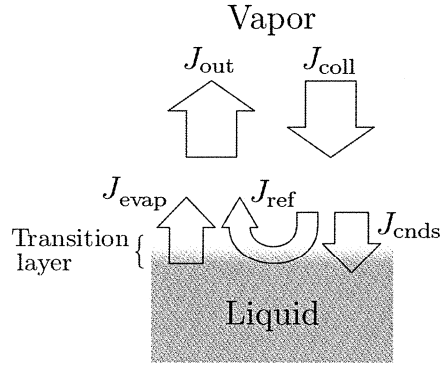


図 1: Molecular fluxes at the interface.

たりの量で表したものである。たとえば，検査面の面積を S とし，ここを時間 Δt の間に質量 m の分子が ΔN 個通過したとすると，質量流束 J は

$$J = \frac{m\Delta N}{S\Delta t} \quad (1)$$

と求められる。

気液界面近傍の気相における分子の質量流束を模式的に図 1 のように分類する。 J_{out} は液相側から気相側に向かう分子の質量流束， J_{coll} は気相側から液相側に向かう分子の質量流束を表す。また， J_{evap} は液相の状態にのみ依存して蒸発する分子の質量流束， J_{cncls} は液相に凝縮する分子の質量流束， J_{ref} は凝縮せずに気液界面で反射される分子の質量流束を表す。これらの質量流束は

$$J_{out} = J_{evap} + J_{ref} \quad (2)$$

$$J_{coll} = J_{cncls} + J_{ref} \quad (3)$$

という関係にある。

系が平衡状態にある場合には， J_{out} と J_{coll} は等しい。これらをまとめて J_{eq} と表すと

$$J_{out,eq} = J_{coll,eq} = J_{eq} \quad (4)$$

である。ここで添字 eq は平衡状態の意である。

4 蒸発係数と凝縮係数

蒸発係数 α_e および凝縮係数 α_c は気液界面での質量流束を用いてそれぞれ

$$\alpha_e = \frac{J_{evap}}{J_{eq}}, \quad \alpha_c = \frac{J_{cncls}}{J_{coll}} \quad (5)$$

と定義される。蒸発係数 α_e は系の平衡・非平衡にはよらない。これは， J_{evap} が液相の状態のみに依存する質量流束で，平衡・非平衡にはよらないためである。一方，凝縮係数 α_c は定義から平衡・非平衡に依存する可能性がある。

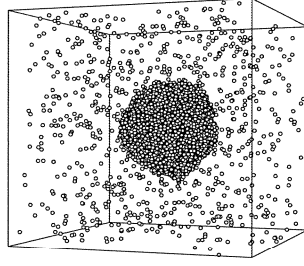


図 2: Argon droplet in equilibrium state.

以下では系が平衡状態にある場合の凝縮係数 α_c が、蒸発係数 α_e と等しくなることを示す. 式 (2) と式 (3) より J_{ref} を消去し, 平衡状態の添字 eq をつけて表すと

$$J_{\text{cnds,eq}} = J_{\text{coll,eq}} - J_{\text{out,eq}} + J_{\text{evap}} \quad (6)$$

である. 式 (4) が成り立つので, 式 (6) は

$$J_{\text{cnds,eq}} = J_{\text{evap}} \quad (7)$$

となる. 式 (4),(5),(7) より平衡状態での凝縮係数 α_c は

$$\alpha_c = \frac{J_{\text{cnds,eq}}}{J_{\text{coll,eq}}} = \frac{J_{\text{evap}}}{J_{\text{eq}}} = \alpha_{\text{eq}} \quad (8)$$

となり, 系が平衡状態にある場合には, 蒸発係数 α_e と凝縮係数 α_c は一致する.

Ishiyama ら [1]-[3] は分子動力学法を用いて, 真空にさらされた温度一定の液相の蒸発に関する計算機実験を行い, J_{evap} を求めた. 真空蒸発の条件下では $J_{\text{coll}} = 0$ であるため, $J_{\text{cnds}} = 0$ および $J_{\text{ref}} = 0$ となる. したがって, 式 (2) から

$$J_{\text{evap}} = J_{\text{out}} \quad (9)$$

である. つまり, 真空蒸発における J_{out} を観測することによって J_{evap} を求めることができる. この方法によれば, 気液界面における蒸発・凝縮・反射といった極めて複雑な分子運動を見分ける必要がなく, 曖昧さが生じない. また, Ishiyama らはこのようにして求めた J_{evap} と平衡状態の分子動力学によって求めた J_{eq} から, 蒸発係数 α_e (=平衡状態での凝縮係数 α_c) をアルゴン [1], メタノールおよび水 [2] に関して決定した. その結果, 上記いずれの物質においても, 蒸発係数 α_e は三重点付近では 1 に近い値となり, 温度に対する単調減少関数となっていることが明らかにされた.

しかし, これらの結果は液膜に関するもので, 気液界面は全て平面である. 気液界面の形状による影響は未だ明らかではない. そこで, 今回, 本研究では Ishiyama らの方法に基づき, 球面の気液界面 (ナノ液滴) における質量流束と蒸発係数を求める.

5 計算方法

分子間ポテンシャルモデルには, 単原子分子に広く用いられる 12-6 Lennard-Jones ポテンシャルを用いた. カットオフ距離は 15 Å. 計算セルは立方体で, すべての境界面に

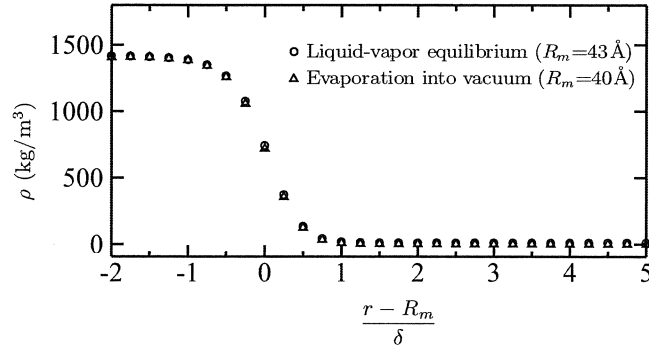


図 3: Density profiles around the interface in equilibrium simulation and vacuum simulation.

周期境界条件を適用した。運動方程式の数値積分には、かえる跳び法を用いた。系の温度は 85 K である。

平衡状態の計算では、十分に平衡に達した系の分子の位置と速度を初期条件に用い、温度制御を行わずに時間刻み 5 fs で 201.6 ns に相当する時間の計算を行った。

真空蒸発では、平衡状態の計算で得られた任意時刻における分子の位置と速度を初期条件に利用する。ここで、気相側の境界より外に出た分子を消去する境界条件を新たに課し、仮想的な真空とした。これによって、真空にさらされた液滴の蒸発を再現できる。また、蒸発潜熱が奪われる液相の温度を一定に保つため、速度スケーリングによる温度制御を液相にのみ行った。なお、真空蒸発は異なる初期条件で 8 回行い、これらの結果を重ね合わせて平均した。

6 結果

図 2 は粒子数 $N = 8000$ 、液滴半径 $R_m = 43 \text{ \AA}$ の平衡状態の様子である。液滴を球形と見なし、液滴の重心を原点とした球座標系 (r, θ, ϕ) で考える。ただし、系の物理量はほぼ球対象に分布しているため、 θ および ϕ の依存性は無視する。

図 3 に動径 r 方向の密度分布を示す。密度の高い部分が液相で、ほぼ 0 に近い密度の低い部分が気相である。微視的に見た気液界面は不連続ではなく、液相から気相へ密度が連続的に変化していることが分かる。この領域は密度遷移層とよばれる。平衡状態と真空蒸発では、気相側の密度が異なるが、液相から遷移層にかけての密度分布には大きな違いは見られない。密度分布に次の関数

$$\rho(r) = \frac{\rho_v + \rho_\ell}{2} + \frac{\rho_v - \rho_\ell}{2} \tanh\left(\frac{r - R_m}{0.455\delta}\right) \quad (10)$$

をフィッティングすると、 R_m と δ が得られる。ここで、 ρ_ℓ は液相密度、 ρ_v は気相密度である。 R_m は密度遷移層の中心位置に相当し、これを液滴半径とする。 δ は 10-90 厚さであり、遷移層（気液界面）の厚さに関わる量である。なお、本研究では液滴半径を気液界面の曲率半径として見なす。

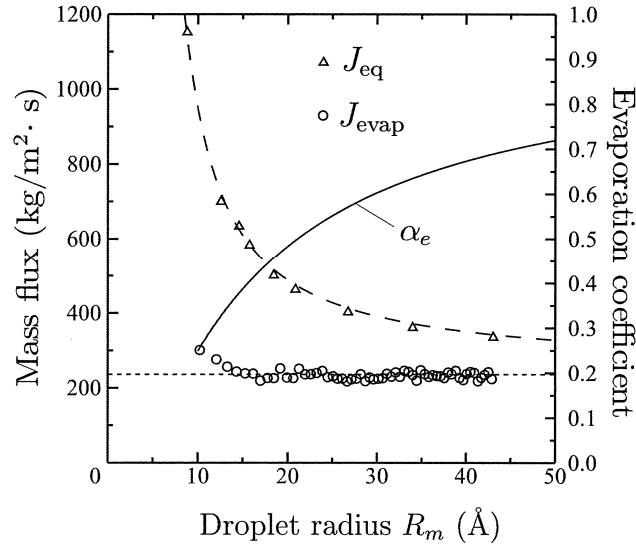


図 4: Mass fluxes and evaporation coefficient for argon droplets.

図 4 に液滴半径 R_m と質量流束 J_{eq} , J_{evap} および、質量流束から求めた蒸発係数 α_e の結果を示す。平衡状態の質量流束 J_{eq} は、液滴半径 R_m が小さいほど、すなわち気液界面の曲率半径が小さいほど、大きくなっている。これは小さい液滴ほど、それを取り囲む平衡状態の気相密度が高い [8][9] ためである。一方、蒸発の質量流束 J_{evap} は R_m にほとんど依存せず一定値をとることが分かった。そのため、蒸発係数 α_e (=平衡状態の凝縮係数 α_c) は、気液界面の曲率半径 R_m が小さいほど、小さくなるという結果が得られた。

参考文献

- [1] T.Ishiyama, T.Yano, and S.Fujikawa, Phys.Fluids,**16**,2899(2004).
- [2] T.Ishiyama, T.Yano, and S.Fujikawa, Phys.Fluids,**16**,4713(2004).
- [3] T.Ishiyama, T.Yano, and S.Fujikawa, Phys. Rev. Lett.,**95**, 084504 (2005).
- [4] S.Fujikawa, et al., Exp. in Fluids,**37**,80(2004).
- [5] K.Kobayashi, et al., Proc. of ICMF-2004,(2004).
- [6] K.Kobayashi, S.Fujikawa, T.Yano, Proc. of the 6th World Conference on Exp. Thermodynamics, Fluid Dynamics, and Heat Transfer, Mathushima, Japan, (2005).
- [7] 矢野猛, 小林一道, 藤川重雄, 機論 B, 第 71 巻, 第 102 号, 428(2005).
- [8] S.M.Thompson and K.E.Gubbins, J.Chem.Phys., **81**,530(1984).
- [9] M.J.P. Nijmeijer, et al., J.Chem.Phys.,**96**,565(1992).

Cyclic sum of multiple zeta values

(joint work with Y.Ohno)

近畿大学総合理工学研究科 若林 徳子

多重ゼータ値 (multiple zeta values, 略して MZVs) とは, 古くは Euler の時代から研究されている実数値である. 近年では数学のみならず物理などさまざまな分野に現われ研究されている. 主な問題として, いかに多くの多重ゼータ値間の情報を含む関係式を見つけ出すかというのが挙げられる. 現在まで多くの関係式が見つけ出され多重ゼータ値が如何なるものか解明されつつあるが, まだ未解決問題もあり謎が多く存在する. 中でも有名な関係式の一つとして和公式がある. その和公式をさらに細分化している関係式が今回述べる巡回和公式である.

そもそも多重ゼータ値とは, よく知られているリーマンゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \quad (\operatorname{Re}(s) > 1).$$

の特殊値を拡張したものである.

多重ゼータ値には 2 種類の定義があり, 以下の通りである. 正整数 k_1, k_2, \dots, k_n (ただし $k_1 \geq 2$) に対して,

$$\begin{aligned} \zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_n) &= \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}, \\ \zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) &= \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}. \end{aligned}$$

で定義される. それぞれ, 前記の ζ^* が multiple zeta-star values (略して MZSVs), 後記の ζ が multiple zeta values (MZVs) と呼ばれる.

歴史上, 多重ゼータ値の研究をはじめたのは Euler([4]) で, 当時は MZSVs の方が主に研究されていた. 最近では MZVs の方が多くの人に研究されており, 通常こちらが多重ゼータ値と呼ばれている. しかし, 定義からわかるように, MZSVs も MZVs もお互いを有理数係数の線形結合で書きあうことができるので, MZSVs と MZVs が張る \mathbf{Q} -ベクトル空間は一致する.

正整数の組 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ をインデックスと呼び, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ を \mathbf{k} の重さ, n を \mathbf{k} の深さと呼ぶ. 重さ k , 深さ n のインデックスの集合を $I(k, n)$ で定める.

$$I(k, n) = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \mid k_1 + k_2 + \dots + k_n = k, k_1, k_2, \dots, k_n \geq 1\}.$$

2つのインデックスに対して、一方のインデックスをサイクリックに回して他方になるのを巡回同値とする。 $\Pi(k, n)$ で $I(k, n)$ における巡回同値類の全体を表す。

$$\Pi(k, n) = I(k, n) / \sim .$$

多重ゼータ値のなす \mathbf{Q} -ベクトル空間の構造を把握する上で重要とされている関係式のひとつとして和公式がある。それは以下のものである。

MZSVs の和公式 任意の整数 $k > n > 0$ に対して以下が成立する。

$$\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_{n+1}) \in I(k, n+1)} \zeta^*(k_1 + 1, k_2, \dots, k_{n+1}) = \binom{k}{n} \zeta(k + 1).$$

MZVs の和公式も証明されている。MZVs の和公式は、Moen と Hoffman によって予想され、90年代後半に Granville([5]) と Zagier([17]) によって独立に証明された。それより以前に Hoffman によって MZVs の和公式と MZSVs の和公式が互いに同値であることが証明されていたことから、Granville と Zagier の証明によってこの MZSVs の和公式も証明されたことになる。今回述べる巡回和公式とは、この和公式を均等に細分化した関係式である。

Theorem 1 (MZSVs の巡回和公式) $\Pi(k, n)$ ($k > n > 0$) の任意の元 α に対して、以下が成り立つ。

$$\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \alpha} \sum_{i=0}^{k_1-2} \zeta^*(k_1 - i, k_2, \dots, k_n, i + 1) = \frac{k|\alpha|}{n} \zeta(k + 1).$$

ここで、左辺の和について $k_1 = 1$ のとき 0 とし、右辺の $|\alpha|$ は α の元の個数である。

一般に、右辺の係数 $\frac{k|\alpha|}{n}$ は常に整数となり、ほとんどの場合 k に一致する。したがって、右辺は $\zeta(k + 1)$ の整数倍となる。

この定理より以前に、MZVs の巡回和公式が Hoffman と Ohno の共同研究 ([7]) によりすでに知られているが、両辺とも多重ゼータ値の和となる複雑な関係式である。今回の MZSVs の巡回和公式は、多重ゼータ値の和をリーマンゼータ関数の整数倍で書き表すので、構造が見やすくなっている。MZSVs の巡回和公式と MZVs の巡回和公式が同値であることは自明でないが、最近になって奥田氏 (早稲田大) 達の共同研究で示されているようである ([8])。

今回の MZSVs の巡回和公式の証明方法は MZVs の巡回和公式の証明と類似の手法で得られる。まず次のような収束級数を定義する。 $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n > n$ を

満たす任意の正整数 n, k_1, k_2, \dots, k_n に対して, 収束級数

$$C(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{\substack{a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq 1 \\ a_1 \neq a_{n+1}}} \frac{1}{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} (a_1 - a_{n+1})}.$$

を定義する. そして次の補題を証明することによって得られる.

Lemma 1 ある i に対して $k_i > 1$ である任意の正整数 n, k_1, k_2, \dots, k_n に対して以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} C(k_1, k_2, \dots, k_n) - C(k_2, k_3, \dots, k_n, k_1) \\ = k_1 \zeta(k+1) - \sum_{i=0}^{k_1-2} \zeta^*(k_1 - i, k_2, k_3, \dots, k_n, i+1). \end{aligned}$$

ここで, 右辺の和について $k_1 = 1$ のとき 0 とする.

また, 定理を経由することで和公式の比較的易しい再証明を与えることが出来る. $\Pi(k, n)$ のある元 α に対して, 対応する類の MZSVs の数は $\frac{(k-n)|\alpha|}{n}$ より, ある MZSVs の主な値は定理を用いて,

$$\frac{k|\alpha|}{n} \zeta(k+1) \times \frac{n}{(k-n)|\alpha|} = \frac{k}{k-n} \zeta(k+1).$$

とわかる. 重さ $k+1$, 深さ $n+1$ の MZSVs の数は $\binom{k-1}{n}$ としてよく知られている. これらの値を掛け合わせることで, 重さ $k+1$, 深さ $n+1$ の全ての MZSVs の和として,

$$\frac{k}{k-n} \zeta(k+1) \times \binom{k-1}{n} = \binom{k}{n} \zeta(k+1).$$

が生じる. したがって, MZSVs の和公式

$$\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_{n+1}) \in I(k, n+1)} \zeta^*(k_1 + 1, k_2, \dots, k_{n+1}) = \binom{k}{n} \zeta(k+1).$$

を得る.

Q.E.D.

最後に, 今回の MZSVs の巡回和公式の独立な関係式の個数と次元予想について見る. 多重ゼータ値が張る \mathbf{Q} -ベクトル空間の次元について Zagier 等による次元予想というものがあり, 次のようなものである. 「数列 $d_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ を, $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ (ただし $k \geq 3$) で定めるとき, 重さ k の多重ゼータ値で生成される \mathbf{Q} -ベクトル空間の次元は d_k と等しいだろう.」

次元予想は、Terasoma と Goncharov によって次元の上限に関しては正しいことが独立に示されている。われわれの研究は \mathbf{Q} -ベクトル空間の次元の上限をより多く落とす関係式を見つけることである。重さを固定したときの MZSVs の個数、MZSVs の和公式が何個の関係式を含むか、今回の MZSVs の巡回和公式が何個の関係式を含むか、そしてそれぞれが次元の上限をいくらまで落とせるかをまとめておく。重さ k の多重ゼータ値の個数 ($|\zeta^*(\mathbf{k})|$ と表記する。) は $|\zeta(\mathbf{k})| = 2^{k-2}$ で与えられ、MZSVs の和公式から得る独立な関係式の個数 ($|\text{sum f.}|$ と表記する。) は $|\text{sum f.}| = k - 2$ 、MZSVs の巡回和公式から得る独立な関係式の個数 ($|\text{cyc. sum}|$ と表記する。) は、

$$|\text{cyc. sum}| = -2 + \frac{1}{k} \sum_{d|k} \phi\left(\frac{k}{d}\right) 2^d \quad (\text{ただし, } \phi(n) := |(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*|).$$

で与えられ、necklace number と関係している。多重ゼータ値の個数とそれぞれの関係式の個数の差が次元の上限を与える。これらをまとめると以下の表になる。

重さ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$ \zeta^*(\mathbf{k}) $	0	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
$ \text{sum f.} $			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$ \text{cyc. sum} $			1	2	4	6	12	18	34	58	106	186	350	630
sum f. が与える 次元の上限			1	2	5	12	27	58	121	248	503	1014	2037	4084
cyc. sum が与える 次元の上限			1	2	4	10	20	46	94	198	406	838	1698	3466
予想次元	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21

これからも判るように、和公式に比べ巡回和公式の方が、与える次元の上限が低い。

参考文献

- [1] T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno A generating function for sum of multiple zeta values and its applications, *preprint*.
- [2] T. Aoki and Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **41** (2005), 329-337.
- [3] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 191-216.
- [4] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol.*, **20** (1775), 140-186, reprinted in *Opera Omnia ser. I*, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217-267.
- [5] A. Granville, A decomposition of Riemann's zeta-function, in *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 247, Cambridge, 1997, pp. 95-101.
- [6] M. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.*, **152** (1992), 275-290.
- [7] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra*, **262** (2003), 332-347.
- [8] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno and J. Okuda, *in preparation*.
- [9] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Composition math*, **142** (2006), 307-338.
- [10] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, **74** (1999), 39-43.
- [11] Y. Ohno, 多重ゼータ値の和とその母関数について, 福岡数論研究集会講究録, <http://www.math.kyushu-u.ac.jp/trkomatu/fukuokaNT/minisymposium.html>, 2006.
- [12] Y. Ohno and N. Wakabayashi, Cyclic sum of multiple zeta values, *Acta Arithmetica*, **123** (2006), 289-295.
- [13] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Math.*, **12** (2001), 483-487.
- [14] J. Okuda and K. Ueno, Relations for multiple zeta values and Mellin transforms of multiple polylogarithms, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **40** (2004), 537-564.
- [15] N. Wakabayashi, Relations among multiple zeta values and poly-Bernoulli polynomials, Master's thesis, Kinki University, 2006.
- [16] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in *Proceedings of ECM 1992*, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497-512.
- [17] D. Zagier, Multiple zeta values, Unpublished manuscript, Bonn, 1995.

Exotic rational elliptic surfaces without 1-handles

大阪大学大学院理学研究科数学専攻
安井 弘一

概要

Harer, Kas and Kirby conjectured that every handle decomposition of the Dolgachev surface $E(1)_{2,3}$ requires both 1- and 3-handles. In this talk, we construct a smooth 4-manifold which has the same Seiberg-Witten invariant as $E(1)_{2,3}$ and has neither 1- nor 3-handles in a handle decomposition.

1 ハンドル分解

C^∞ 多様体の微分構造の研究を行う手段の一つに、ハンドル分解と呼ばれる、球体の直積の貼り合わせに分解する手法がある。この節ではハンドル分解について紹介する。詳しくは [田村], [松本], [GS]などを参照していただきたい。

以下, D^n を n 次元球体, すなわち, $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ とする。但し, $D^0 = \{1 \text{ 点}\}$ としておく。

M を n 次元境界付きコンパクト C^∞ 多様体, $\alpha: \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial M$ を埋め込みとする。このとき $h^{(k)} := D^k \times D^{n-k}$ (これを k ハンドルと呼ぶ) を接着写像 α に沿って M に貼り付けることで新たな C^∞ 多様体を得られる。この多様体を $M \cup h^{(k)}$ と記し, ハンドル体と呼ぶ。一般には, $M \cup h^{(k)}$ の位相構造, 微分構造は α により異なることに注意しておく。次の事実はよく知られている。

定理 1 M を n 次元コンパクト連結 C^∞ 多様体とする。このとき, M は 1 個の 0 ハンドル D^n に m_1 個の 1 ハンドルを接着し, その後 m_2 個の 2 ハンドル, m_3 個の 3 ハンドル, \dots , と順に接着することで得られる C^∞ 多様体に微分同相である。すなわち, M は次のような表示を持つ:

$$M = h^{(0)} \cup h_1^{(1)} \cup h_2^{(1)} \dots \cup h_{m_1}^{(1)} \cup h_1^{(2)} \cup h_2^{(2)} \dots \cup h_{m_2}^{(2)} \cup \dots \cup h_1^{(r)} \cup h_2^{(r)} \dots \cup h_{m_r}^{(r)}.$$

特に M が連結閉 C^∞ 多様体の場合は, $r = n, m_r = 1$ である表示を持つ。ここで, 各 $h_i^{(k)}$ は k ハンドル $D^k \times D^{n-k}$ を表している。多様体をハンドルの接着で表示することをハンドル分解を行うという。

ここでハンドルの例を 3 次元の場合に図示しておく。図 1 の左側は, 1 ハンドル, 2 ハンドルを図示したものである。斜線部分は接着する箇所, すなわち, $\partial D^k \times D^{3-k}$ ($k = 1, 2$) を表している。図 1 の右側は, 3 次元多様体 M の境界 ∂M に 1 ハンドル, 2 ハンドルを (変形して) 接着した図である。左右の図の斜線部はそれぞれ対応していることに注意していただきたい。

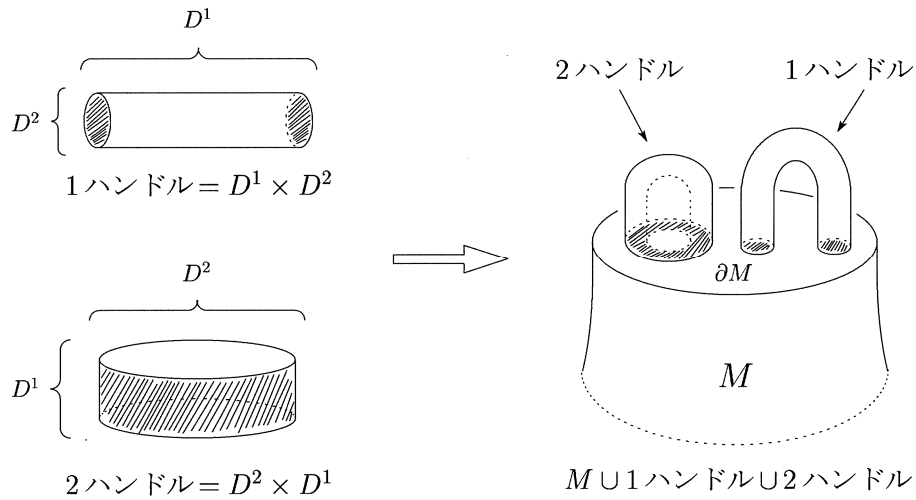


図 1: ハンドルの例

2 背景と結果

n 次元多様体のハンドル分解において、1ハンドル（双対ハンドル体を考えれば $(n-1)$ ハンドルも）は基本群の生成元に対応している．そこで、次の問題を考えるのは自然である：全ての n 次元単連結閉 C^∞ 多様体は、1ハンドル、 $(n-1)$ ハンドル両方ともに現れていないハンドル分解を持つか？

4次元以外の場合はそのようなハンドル分解を持つことがわかっているが（3次元の場合はポアンカレ予想と同値な問題である）、4次元の場合は1ハンドルの現れないハンドル分解を持つのかさえわかっていない．すなわち次の未解決問題がある．

問題 2 ([K] Problem 4.18) 全ての4次元単連結閉 C^∞ 多様体は、1ハンドルの現れないハンドル分解を持つか？ 1, 3ハンドル両方ともに現れていないハンドル分解を持つか？

この問題の反例の候補、すなわち、4次元単連結閉 C^∞ 多様体でそのハンドル分解には1, 3ハンドルのどちらかが必ず現れるものの候補には、例えば、エキゾチック4次元球面の候補やDolgachev曲面 $E(1)_{p,q}$ （但し $p, q > 1$ かつ p, q は互いに素）などがある (cf. [GS]). ここで、 $E(1)_{p,q}$ とは有理楕円曲面 $E(1) = \mathbf{CP}^2 \# 9\overline{\mathbf{CP}}^2$ の正則ファイバー2本を重複度 p, q で対数変換したもののことである．特に $E(1)_{2,3}$ については次の予想がある．

予想 3 (Harer-Kas-Kirby [HKK]) $E(1)_{2,3}$ のどのハンドル分解にも必ず1, 3ハンドル両方とも現れる．

これに関して次の結果を得た．

主定理 4 (1) $q = 3, 5, 7, 9$ のとき、 $E(1)_{2,q}$ と同相かつ Seiberg-Witten 不変量が同じで、1ハンドルの現れないハンドル分解を持つ4次元単連結閉 C^∞ 多様体 E_q が存在する．

(2) $E(1)_{2,3}$ と同相かつ Seiberg-Witten 不変量が同じで、1, 3ハンドル両方とも現れないハンドル分解を持つ4次元単連結閉 C^∞ 多様体 E'_3 が存在する．

主定理から以下のことがわかる。まず、 E_q (resp. E'_3) と $E(1)_{2,q}$ (resp. $E(1)_{2,3}$) が微分同相な場合、主定理で述べたハンドル分解は $E(1)_{2,q}$ のハンドル分解で 1 ハンドルが現れない例となる。そうではない場合、すなわち、 E_q (resp. E'_3) と $E(1)_{2,q}$ (resp. $E(1)_{2,3}$) が微分同相ではない場合、 E_q (resp. E'_3) と $E(1)_{2,q}$ (resp. $E(1)_{2,3}$) は Seiberg-Witten 不変量が同じで消滅していないが微分同相ではない 4 次元単連結閉 C^∞ 多様体の例となる。

なお、上述の Harer-Kas-Kirby 予想が正しい場合は、微分同相不変量 $\min\{1 \text{ ハンドルの数} \mid \text{ハンドル分解}\}$ の違いにより E_3 と E'_3 が $E(1)_{2,3}$ とは微分同相でないことがわかる。

3 構成法

主定理 4 は具体的に E_q と E'_3 を構成することで証明する。構成の鍵となるのは、4 次元多様体のハンドル分解を図示、変形する手法である Kirby calculus と、Fintushel-Stern [FS] により導入された rational blow-down という手術である。

まず、Kirby calculus についてごく簡単に触れておく。詳しくは [GS], [松本]などを参照していただきたい。4 次元の場合、ハンドル体を図 1 のように直接描くことはできない。ところで、ハンドル体の微分構造は接着写像により決まる。そこで、代わりに接着写像 (の情報) のみを描く。簡単のため、4 次元単連結閉 C^∞ 多様体でハンドル分解に 1 ハンドルが現れないものを考えよう。2 ハンドルの接着写像は $S^1 \times D^2$ の $\partial D^4 = S^3$ への埋め込みである。従って、この接着写像は “ S^1 の S^3 への埋め込み (これを結び目と呼ぶ) + 整数” により図示することができる。3, 4 ハンドルの接着写像を描くのは一般には非常に困難だが、閉多様体のハンドル分解の場合、3, 4 ハンドルの接着の仕方は一意なので描かなくてもよい。このようにして 4 次元多様体を図示したものを Kirby 図式と言い、ハンドルスライドという操作でハンドルの接着写像を変更する手法のことを Kirby calculus という。

次に rational blow-down について簡単に触れておく。詳しくは [FS] を参照していただきたい。これは簡単に言うと、4 次元多様体から C_p と呼ばれるある 4 次元部分多様体を取り除き、その代わりに有理係数ホモロジーが D^4 のものと同型なある 4 次元多様体を貼り付ける操作である。この操作による Seiberg-Witten 不変量の変化はよく知られている。

最後に E_q の構成法を簡単に述べておく。 $E(1)_{2,q}$ は $\mathbf{CP}^2 \# (8+q)\overline{\mathbf{CP}}^2$ からある C_q を rational blow-down することで得られることが知られている。Kirby calculus を用いて $\mathbf{CP}^2 \# (8+q)\overline{\mathbf{CP}}^2$ の中に、その C_q とホモロジカルには埋め込み方が同じ C_q を構成する。そしてそれを rational blow-down したものを E_q と定める。少なくとも $q = 3, 5, 7, 9$ のときは、 E_q のハンドル分解に 1 ハンドルが現れないように、上で述べた C_q の $\mathbf{CP}^2 \# (8+q)\overline{\mathbf{CP}}^2$ への埋め込みを構成することができる。 $E(1)_{2,q}$ と同相であることは Freedman の定理から、Seiberg-Witten 不変量が $E(1)_{2,q}$ と同じであることは rational blow-down の性質から簡単にわかる。なお、 E'_3 の構成はこれとは少し異なる。

参考文献

- [FS] R. Fintushel and R. Stern, *Rational blowdowns of smooth 4-manifolds*, J. Differential Geom. **46** (1997), no. 2, 181–235.
- [GS] R. Gompf and A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics, **20**. American Mathematical Society, 1999.
- [HKK] J. Harer, A. Kas and R. Kirby, *Handlebody decompositions of complex surfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **62** (1986), no. 350.
- [K] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, in Geometric Topology (W. Kazez ed.), AMS/IP Stud. Adv Math. vol. 2.2, Amer. Math. Soc., 1997, 35–473.
- [松本] 松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波書店
- [田村] 田村一郎, 微分位相幾何学, 岩波書店

大阪大学大学院理学研究科数学専攻

博士後期課程 1 年

安井弘一

E-mail: kouichi@gaia.math.wani.osaka-u.ac.jp

Global Existence of the Solution to the System for a Spherically Symmetric Viscous Gaseous Star with Rigid Core

梅原 守道 (Morimichi UMEHARA), 谷 温之 (Atusi TANI)

慶應義塾大学 理工学部

Department of Mathematics, Keio University

1 Introduction.

We consider the three-dimensional spherically symmetric motion of a compressible, viscous and heat-conductive gas in the free-boundary case. This classical model has been studied in many astrophysical literatures (see for example, [2]). Many stars being in way of their evolution have the rigid core in the centre composed by the heavy chemical elements produced by the burning of the light gas in the outer part of that, for example, like the *red giant star*, et al. Under this situation it is natural to take into account the self-gravitation of gas and the potential force of the core, which drive the motion of gas, and, at the high temperature stage, radiation phenomenon and the energy producing process inside the medium, that is, the gas consists of a reacting mixture and the combustion process is current.

The motion of our model is described by the following four equations in the polar coordinate system of Lagrangian form corresponding to the conservation laws of mass, momentum and energy, and an equation of reaction-diffusion type:

$$\begin{cases} v_t = (r^2 u)_x \\ u_t = r^2 \left(-p + \zeta \frac{(r^2 u)_x}{v} \right)_x - G \frac{x + M_0}{r^2}, \\ e_t = \left(\frac{r^4 \kappa \theta_x}{v} \right)_x + \left(-p + \zeta \frac{(r^2 u)_x}{v} \right) (r^2 u)_x - 4\mu (ru^2)_x + \lambda \phi z, \\ z_t = \left(\frac{dr^4 z_x}{v^2} \right)_x - \phi z \end{cases} \quad (1.1)$$

in $(x, t) \in (0, 1) \times (0, T)$. Here the specific volume $v = v(x, t)$, the velocity $u = u(x, t)$, the absolute temperature $\theta = \theta(x, t)$ and the mass fraction of the reactant $z = z(x, t)$ are the unknown functions, and positive constants μ , ζ , d and λ are the coefficients of viscosity, bulk viscosity, which satisfy the relation $3\zeta - 4\mu > 0$, the species diffusion and the difference in heat between the reactant and the product. M_0 and G are mass of the core and the Newtonian gravitational constant, respectively. $r = r(x, t)$ is the Eulerian position of the gas given by the formula

$$r = r(x, t) = \left(R_0^3 + 3 \int_0^x v(\xi, t) d\xi \right)^{1/3}, \quad r_t = u, \quad r_x = \frac{v}{r^2},$$

where R_0 is the radius of the core. The rate function $\phi = \phi(\theta)$ is defined by the Arrhenius law

$$\phi(\theta) = K\theta^\beta e^{-A/\theta},$$

where positive constants A and K are the activation energy and coefficient of rate of reactant, respectively. β is a non-negative number. Pressure $p = p(v, \theta)$ and internal energy $e = e(v, \theta)$ are given by $p = p_G + p_R$ and $e = e_G + e_R$, respectively, where $p_G = p_G(v, \theta)$ and $e_G = e_G(v, \theta)$ are the *gaseous* (elastic) ones. For technical reason, we assume the gas is ideal:

$$p_G = R\frac{\theta}{v}, \quad e_G = c_v\theta$$

with the perfect gas constant R and the specific heat at constant volume c_v (positive constants). Since it is widely accepted to assume the gas, constituents of the star, to be “black body”, the influence of radiation is expressed by the *radiative* terms $p_R = p_R(\theta)$ and $e_R = e_R(v, \theta)$, which are given by the Stefan-Boltzmann law (see for example, [2])

$$p_R = \frac{a}{3}\theta^4, \quad e_R = av\theta^4$$

with the Stefan-Boltzmann constant $a > 0$. We also assume the conductivity $\kappa = \kappa(v, \theta)$ has the following form:

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 v\theta^q,$$

where κ_1, κ_2 and q are positive constants.

We impose the boundary conditions for $t > 0$

$$\begin{cases} \left(-p + \zeta \frac{(r^2 u)_x}{v} - 4\mu \frac{u}{r} \right) \Big|_{x=1} = -p_e, \\ u|_{x=0} = 0, \\ (\theta_x, z_x)|_{x=0,1} = (0, 0), \end{cases} \quad (1.2)$$

the initial condition for $x \in [0, 1]$

$$(v, u, \theta, z)|_{t=0} = (v_0(x), u_0(x), \theta_0(x), z_0(x)). \quad (1.3)$$

Here we assume the compatibility conditions

$$\begin{cases} \left(-p_0 + \zeta \frac{(r_0^2 u_0)'}{v_0} - 4\mu \frac{u_0}{r_0} \right) \Big|_{x=1} = -p_e, \\ u_0(0) = \theta_0'(0) = \theta_0'(1) = z_0'(0) = z_0'(1) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

with $p_0 := R\theta_0/v_0 + (a/3)\theta_0^4$ and $r_0 := (R_0^3 + 3 \int_0^x v_0(\xi) d\xi)^{1/3}$.

The global unique existence problem for compressible viscous polytropic ideal gas

with large initial data is firstly solved by Kazhikhov-Shelukhin [8] in one-dimension under Dirichlet boundary condition with respect to the velocity. After that, in one-dimensional case, many works has been done including Nagasawa [11] studying the global existence and the asymptotic behavior in the free-boundary case for the polytropic ideal gas. Bebernes-Bressan [1], Chen [3] considered models for a reacting mixture. Many authors (see for exmple, [7]) studied models having some general pressure, internal energy and conductivity applicable to the situation with low order θ -dependency of p , e and κ . Ducomet [5] and Umehara-Tani [13] are extended these results to the one with higher order θ -dependency of p and e , which usually seems to correspond to some large q in κ for getting global solution of the problem. Three-dimensional spherically symmetric motion of a compressible viscous polytropic ideal gas was investigated by Itaya [6] and others (see for example, [10, 14]) in annulus or external domain, Ducomet [4] in the case of gaseous star having free-boundary. Among these works it is in [4, 5, 10, 13] that the “large” external force is considered, more precisely, the self-gravitation in [4, 5, 13], a potential force of the core in [10].

In this talk we construct the unique global classical solution of system (1.1)-(1.4) which extends the results [4] in respect of considering radiative effect and both influence of the self-gravitation and the potential force. But the difficulty of our problem is mainly caused by radiative components of equations of state and θ -dependency of the conductivity.

Let $\Omega := (0, 1)$, m be a nonnegative integer and $0 < \sigma < 1$. T is a positive constant and $Q_T := \Omega \times (0, T)$. We use the familiar notations $C^{m+\sigma}(\Omega)$, $C_{x,t}^{\sigma, \sigma/2}(Q_T)$, $C_{x,t}^{2+\sigma, 1+\sigma/2}(Q_T)$ for the Hölder spaces (see for example, [9]).

Our main result is

Theorem 1 (Global Solution) *Let $\alpha \in (0, 1)$, $3 \leq q < 39$ and $0 \leq \beta < q + 9$. Assume that*

$$(v_0, u_0, \theta_0, z_0) \in C^{1+\alpha}(\Omega) \times \left(C^{2+\alpha}(\Omega)\right)^3$$

satisfies (1.4) and $v_0(x) > 0$, $\theta_0(x) > 0$, $0 \leq z_0(x) \leq 1$ for $x \in \bar{\Omega}$. Then there exists a unique solution (v, u, θ, z) of the initial-boundary value problem (1.1)-(1.3) such that for any $T > 0$

$$(v, v_x, v_t, u, \theta, z) \in \left(C_{x,t}^{\alpha, \alpha/2}(Q_T)\right)^3 \times \left(C_{x,t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T)\right)^3$$

and

$$v(x, t), \theta(x, t) > 0, \quad 0 \leq z(x, t) \leq 1 \quad \text{for } (x, t) \in \overline{Q_T}.$$

Proof of Theorem 1 is based on the local existence theorem and a priori estimates. The fundamental theorem about the existence and the uniqueness of the local-in-time classical solution in three-dimensional free-boundary case was firstly established by Tani [12] under sufficiently general conditions. Since it is easy to verify that this manner to prove local existence theorem can be adapted without essential modification to our spherically symmetric and reacting case, to prove Theorem 1 it is sufficient to establish the following a priori boundedness.

Proposition 1 (A priori Estimates) *Let T be an arbitrary positive constant. Assume that α, q, β and the initial data satisfy the hypotheses of Theorem 1, and problem (1.1)-(1.3) has a solution (v, u, θ, z) such that*

$$(v, v_x, v_t, u, \theta, z) \in \left(C_{x,t}^{\alpha, \alpha/2}(Q_T) \right)^3 \times \left(C_{x,t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T) \right)^3.$$

Then there exists a positive constant M depending on the initial data and T such that

$$\begin{aligned} |v, v_x, v_t|_{\alpha, \alpha/2}, |u, \theta, z|_{2+\alpha, 1+\alpha/2} &\leq M, \\ v(x, t), \theta(x, t) &\geq 1/M, \quad 0 \leq z(x, t) \leq 1 \quad \text{for } (x, t) \in \overline{Q_T}. \end{aligned}$$

2 Key Lemmas for Proving Proposition 1.

In proving Proposition 1, we need several lemmas concerning the estimates of the solution and its derivatives. The essential one is to get pointwise estimate of the specific volume v . To do this Kazhikhov and Shelukhin [8] firstly derived the useful representation formula of v . In the present case, we have

Lemma 1 *The identity*

$$v(x, t) = \frac{1}{P(x, t)Q(x, t)R(x, t)} \left(v_0 + \frac{R}{\zeta} \int_0^t \theta(x, \tau)P(x, \tau)Q(x, \tau)R(x, \tau) d\tau \right)$$

holds, where

$$\begin{cases} P(x, t) := \left(\frac{r_0(1)}{r(1, t)} \right)^{4\mu/\nu} \exp \left[\frac{1}{\zeta} \int_x^1 \left(\frac{u}{r^2} - \frac{u_0}{r_0^2} \right) d\xi \right], \\ Q(x, t) := \exp \left\{ \frac{p_e}{\zeta} t + \frac{1}{\zeta} \int_0^t \int_x^1 \left[\frac{2u^2}{r^3} + \frac{G(\xi + M_0)}{r^4} \right] d\xi d\tau \right\}, \\ R(x, t) := \exp \left(-\frac{a}{3\zeta} \int_0^t \theta(x, \tau)^4 d\tau \right). \end{cases}$$

From this formula, we can obtain a priori bounds of v .

Lemma 2 *For any $(x, t) \in \overline{Q_T}$*

$$C_T^{-1} \leq v(x, t) \leq C_T, \tag{2.1}$$

where C_T is a positive constant depending on the initial data and T .

Although from the influence of radiation the estimate above is depending on T , if the external pressure p_e is sufficiently large, we can get upper and lower bounds of v uniformly in T .

References

- [1] J. Bebernes and A. Bressan, Global a priori estimates for a viscous reactive gas, *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, **101A** (1985), 321-333.
- [2] S. Chandrasekhar, *An introduction to the study of stellar structure*, Dover, 1957.
- [3] G. -Q. Chen, Global solution to the compressible Navier-Stokes equations for a reacting mixture, *SIAM J. Math. Anal.*, **23** (1992), 609-634.
- [4] B. Ducomet, Some asymptotics for a reactive Navier-Stokes-Poisson system, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **9** (1999), 1039-1076.
- [5] B. Ducomet, Some stability results for reactive Navier-Stokes-Poisson systems, *Evol. Equ.: Existence Regularity Singularities Banach Center Publ.*, **52** (2000), 83-118.
- [6] N. Itaya, On a certain temporally global solution, spherically symmetric, for the compressible NS equations, *in Japanese, Jinbun ronshu Kobe Univ. Comm.*, **21** (1985), 1-10.
- [7] S. Jiang, On initial boundary value problems for a viscous heat-conducting one-dimensional real gas, *J. Differential Equations*, **110** (1994), 157-181.
- [8] A. V. Kazhikhov and V. V. Shelukhin, Unique global solution with respect to time of the initial-boundary value problems for one-dimensional equations of a viscous gas, *J. Appl. Math. Mech.*, **41** (1977), 273-282.
- [9] O. A. Ladyžhenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [10] T. Nakamura and S. Nishibata, Large-time behavior of spherically symmetric flow for viscous polytropic ideal gas, *preprint*.
- [11] T. Nagasawa, On the outer pressure problem of the one-dimensional polytropic ideal gas, *Japan J. Appl. Math.*, **5**, (1988), 53-85.
- [12] A. Tani, On the free boundary value problem for the compressible viscous fluid motion, *J. Math. Kyoto Univ.*, **21** (1981), 839-859.
- [13] M. Umehara and A. Tani, Global solution to the one-dimensional equations for a self-gravitating viscous radiative and reactive gas, to appear in *J. Differential Equations*.
- [14] S. Yanagi, Asymptotic stability of the spherically symmetric solutions for a viscous polytropic gas in a field of external forces, *Trans. Theory Statistical phys.*, **29** (2000), 333-353.

Gaussian-BGK Boltzmann 方程式に 基づく相変化現象に対するアプローチ

An Approach for Phase Change Phenomena Based on the Gaussian-BGK Boltzmann Equation

小林 一道 (北海道大学大学院 工学研究科 機械宇宙工学専攻)

概要

The Gaussian-BGK Boltzmann equation is capable of describing the vapor flow of polyatomic molecules induced by evaporation and condensation processes at a vapor-liquid interface. In this research, interfacial phenomena accompanied with condensation is investigated by combining the numerical analysis of the Gaussian-BGK Boltzmann equation and shock tube experiment.

1 緒言

気液界面における相変化現象（蒸発・凝縮現象）は我々の身近で起こり、理工学
の分野でもよく見られる現象である。この相変化現象は、気液界面近傍における
気体の分子運動の非平衡性に起因しているため、いたるところで局所平衡を仮定
している流体力学の枠組みのみでは解くことができない。この様な問題に対して
は分子気体力学（気体論）を適用したときに初めてその解析が可能となる。分子
気体力学は速度分布関数を未知変数とする Boltzmann 方程式を支配方程式として
おり、この Boltzmann 方程式に対する気液界面の境界条件は一般に以下の形で記
述される。

$$f_{\text{out}} = \alpha_e f_{\text{eq}} + (1 - \alpha_c) f_{\text{ref}}, \quad (\xi_1 - v_\ell > 0). \quad (1)$$

ここで f_{out} は気液界面から気体側へ出て行く分子に対する速度分布関数であり
($\xi_1 - v_\ell > 0$, ξ_1 は界面に対して垂直な方向を持つ分子の速度, v_ℓ は界面の速度, こ
こでは界面から向かって気体側を正としている), $f_{\text{eq}}(T_\ell)$ は液体の温度 T_ℓ のみで
決まり, 飽和蒸気密度 $\rho^*(T_\ell)$ を持つ液体温度 T_ℓ の Maxwell 分布として与えられ,
 f_{ref} は一般的に拡散反射が用いられている。 α_e と α_c はそれぞれ蒸発係数と凝縮係
数と呼ばれている 0 以上 1 以下の値を持つパラメータである。蒸発係数は, その定
義より, 液体温度 T_ℓ の関数であることが知られている。ここで凝縮係数は, 気液
界面に衝突する単位時間・単位面積あたりの分子流束と液体へ凝縮した分子流束
の比として定義されているが, 気体と液体双方の状態の影響を受け, その値の詳
細は未だよくわかってはいない。この凝縮係数の値がわかっていないために, 分
子気体力学解析の枠組みのみでは蒸発・凝縮による気液界面での質量・運動量・エ
ネルギー輸送量を正確に見積もることはできない。これまでの分子気体力学を用

いた解析では、蒸発係数と凝縮係数を1として取り扱い（完全凝縮と呼ばれている）、蒸発・凝縮を伴う気体の流れの解析が行われてきた [1].

ここで本研究の目的は、この凝縮係数の値を分子気体力学解析と衝撃波管の実験を用いて決定することである。凝縮係数の決定を行うことで、気液界面での蒸発・凝縮現象のメカニズムの理解に踏み込めると考えられ、また、その界面での質量・運動量・エネルギー輸送量を正確に見積もることができるようになり、特に工学の分野で大きく貢献できると考えられる。本稿ではメタノールと水を対象として凝縮係数の決定を行う。

2 衝撃波管で起こる蒸気の凝縮現象

図1に本研究の対象となる衝撃波管管端における凝縮現象のモデル図を示す。衝撃波管内部は静止状態の多原子分子（メタノール、水）で満たされており、衝撃波管管端部にはガラス壁がある。そのガラス壁の面上には蒸気の吸着膜があり、蒸気側遠方より壁面に向かい衝撃波が伝播してくる (a)。伝播した衝撃波が壁面上で反射することで、その衝撃波の背後の蒸気の圧力、温度、密度は急激に増加する。蒸気の圧力は反射衝撃波背後から気液界面まではほぼ一定であるが (b)、蒸気の温度は管端の熱容量が蒸気に比べ十分大きいためにあまり変化せず、その結果、界面近傍で薄い温度境界層を形成する (c)。ここで、吸着膜の温度に対する飽和蒸気圧力を気液界面の蒸気の圧力が超えることで凝縮が起こり、液膜に向かい蒸気の流れが誘起される。この凝縮により気液界面では温度の跳びが起こり、液膜表面の温度よりも気液界面の蒸気の温度は多少大きくなる。界面から反射衝撃波背後までの蒸気の温度に対する飽和蒸気圧は、その全領域で、その場所の蒸気の圧力を超えているために、蒸気は不飽和状態となっており、蒸気中で微小液滴のようなクラスター生成は起こらないことを数値解析で確認している。

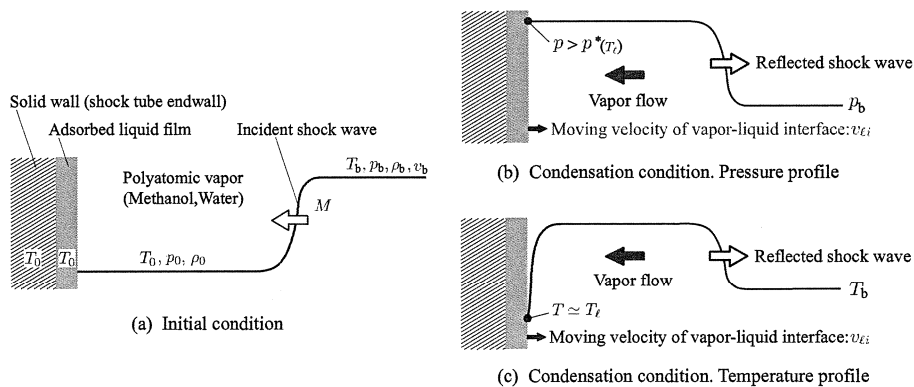


図1: Schematic of model: (a) initial condition; (b) pressure profile in condensation condition; (c) temperature profile in condensation condition

3 Gaussian-BGK Boltzmann 方程式について

凝縮係数の決定方法の詳細は紙面の制限によりここでは述べない。その詳細に関しては、例えば参考文献 [2] を参考されたい。本稿では表題にもなっている Gaussian-BGK Boltzmann 方程式 [3] について簡単ではあるが述べていくこととする。

分子気体力学の分野では、その簡単さから、単原子分子気体を対象とした研究が数多く行われている。ここで、本研究の対象としているメタノールや水は多原子分子である。このために、本研究では、多原子分子気体に拡張された Gaussian-BGK Boltzmann 方程式を用いてその解析を行う。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial X_1} = \frac{p}{\mu(1-\nu+\theta\nu)} (G(f) - f), \quad (2)$$

ここで $f(X_1, t, \xi, \eta)$ は速度分布関数であり、 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ は分子速度、 η は内部エネルギーパラメータ、 $\mu(T)$ は粘性係数、 ν と θ は定数である。 $G(f)$ は分子の併進運動と回転運動に分けて記述することができ、以下の式で定義される：

$$G(f) = \rho \hat{f}_G^{\text{tr}} \hat{f}_G^{\text{rot}}, \quad (3)$$

$$\hat{f}_G^{\text{tr}} = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\tau_{ij})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi_i - v_i)\tau_{ij}^{-1}(\xi_j - v_j)\right), \quad (4)$$

$$\hat{f}_G^{\text{rot}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)(RT_{\text{rel}})^{n/2}} \exp\left(-\frac{\eta^{2/n}}{RT_{\text{rel}}}\right), \quad (5)$$

ここで \hat{f}_G^{tr} は併進運動に関する速度分布関数であり、 \hat{f}_G^{rot} は回転運動に関する分布関数、 \det は行列式、 Γ はガンマ関数、 R は気体定数であり、 n は内部自由度を表している。気体の巨視量は f のモーメントとして以下の式で表される：

$$\rho = \iint f \mathbf{d}\xi d\eta, \quad \rho v_i = \iint \xi_i f \mathbf{d}\xi d\eta, \quad (6)$$

$$\frac{3}{2}\rho RT_{\text{tr}} = \iint \frac{1}{2}(\xi_i - v_i)^2 f \mathbf{d}\xi d\eta, \quad (7)$$

$$\frac{n}{2}\rho RT_{\text{int}} = \iint \eta^{2/n} f \mathbf{d}\xi d\eta, \quad (8)$$

$$T = \frac{3}{n+3}T_{\text{tr}} + \frac{n}{n+3}T_{\text{int}}, \quad p = \rho RT, \quad (9)$$

$$T_{\text{rel}} = \theta T + (1-\theta)T_{\text{int}}, \quad (10)$$

$$\rho \Theta_{ij} = \iint (\xi_i - v_i)(\xi_j - v_j) f \mathbf{d}\xi d\eta, \quad (11)$$

$$\tau_{ij} = (1-\theta)((1-\nu)RT_{\text{tr}}\delta_{ij} + \nu\Theta_{ij}) + \theta RT\delta_{ij}, \quad (12)$$

ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタであり、 ξ の積分は断りのない限り ξ の全空間であり、 η の積分は $[0, \infty)$ の範囲である。

衝撃波管の実験を 1次元問題と仮定し、衝撃波管内部の気体に対しては Gaussian-BGK Boltzmann 方程式を適用し、衝撃波管管端部にあたるガラス壁とその吸着液

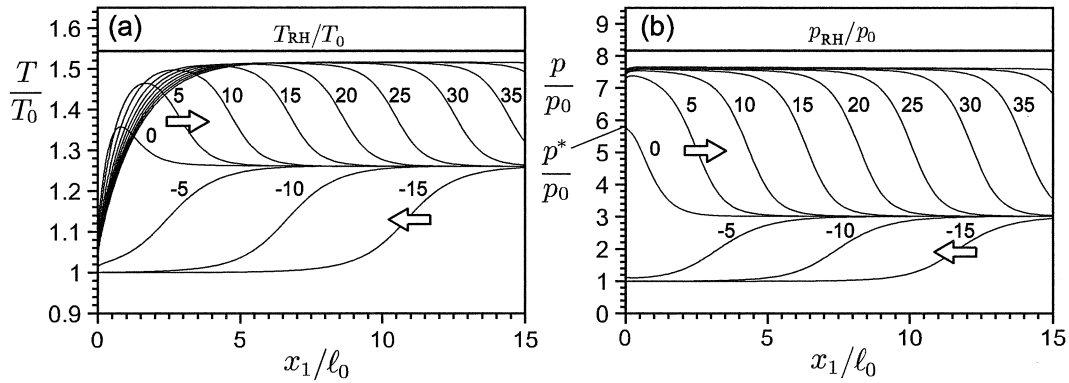


図 2: Reflection of a shock wave at an interface: (a) temperature, (b) pressure. A number near each curve represents a normalized time.

膜には非定常熱伝導方程式を適用し差分法によって数値計算を行う。計算の初期条件には衝撃波管の実験より得られた初期圧力，初期温度，入射衝撃波 Mach 数を用いる。これら数値解析のの詳細については参考文献 [2] を参照されたい。

4 結果

図 2 に蒸気中を伝播する平面衝撃波の液膜表面における反射現象の数値計算結果を示す。図 2(a) は衝撃波の温度分布の時間発展を一定の時間間隔で示し，図 2(b) は衝撃波の圧力分布の時間発展を示す。 $x_1/l_0 = 0$ の位置が気液界面であり (l_0 は初期状態の分子の平均自由行程)，衝撃波の横についている数字は凝縮開始時刻を基準時刻 ($t = 0$) とした無次元時間 ($x_1/(l_0/\sqrt{2RT_0})$) である。衝撃波の内部構造は分子の平均自由行程レベルで見ると連続的に変化していることは既に知られている。これらの図より，蒸気側無限遠方より入射衝撃波が気液界面に向かって伝播し，その界面で反射していく様子がわかる。図 2(a) をみると，衝撃波が反射した後に気液界面から温度境界層が発達している様子がわかる。この温度境界層は時間とともに定常状態になる。ここで T_{RH} は剛体壁で反射した衝撃波背後の温度の理論値である。本研究の計算結果とこの値を比較すると，本研究の計算結果はこの値よりも低くなっている。これは，凝縮によって蒸気のエネギーが液体に流入し，その影響で反射衝撃波が弱くなっているためであると考えられる。入射衝撃波と反射衝撃波の伝播速度を比較すると，反射衝撃波の伝播速度は遅くなっている。これも，前述した理由と同様で，衝撃波が弱くなっているためであるといえる。図 2(b) を見ると，図 2(a) の場合と同じ理由で，本研究と p_{RH} の値に差がある。

図 3 に本研究で決定された凝縮係数を示す。横軸が気液界面の蒸気の圧力と飽和蒸気圧力との比を示しており，この比が 1 のときが気液平衡状態である。破線が蒸発係数の値であり，ここではメタノール，水，ともに 0.86 として計算してい

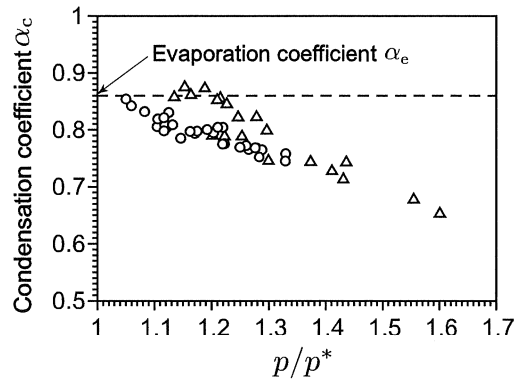


図 3: Condensation coefficient versus pressure ratio

る。○がメタノールの凝縮係数であり，△が水の凝縮係数である。メタノールは 30 個，水は 20 個の実験データより得られた結果を示している。これらの図より，圧力比が小さい場合，言い換えると気液平衡状態に近い場合，蒸発係数と凝縮係数の値はほぼ等しくなり，圧力比が大きくなるにつれてその値が減少していくことがわかる。また，水とメタノールの減少はほぼ同じ傾向であることがわかる。

5 結言

分子気体力学と衝撃波管実験を融合させた本研究を行うことで，気体論境界条件中に含まれる未知パラメータである凝縮係数（メタノール，水）の値を決定した。

分子気体力学は分子運動の非平衡性が問題となるような場合（気液相変化，高層領域の気体の振る舞い，マイクロスケールの流れなど）に有用であるが，非常に高度な数学の知識が要求される学問である。その難解さゆえ，実学に近い立場にある工学で分子気体力学に基づく解析が行われることは少ない。数学を学ぶ人達の力を借りて，この学問が実学に大きく貢献していく事を期待している。

参考文献

- [1] Y. Sone, *Kinetic Theory and Fluid Dynamics*, (Birkhäuser, 2002).
- [2] S. Mikami, K. Kobayashi, T. Ota, S. Fujikawa T. Yano and M. Ichijo, *Experimental and Thermal Fluid Science*, **30**, 795 (2006).
- [3] P. Andries, P. Le Tallec, J.-P. Perlat and B. Pertham, *Eur. J. Mech. B-Fluids*, **19**, 813 (2000).

Value distribution of the hyperbolic Gauss map of constant mean curvature one surfaces

名古屋大学多元数理科学研究科 川上 裕 (Kawakami Yu)

概要

In this talk, we shall give a kind of ramification estimates for the hyperbolic Gauss map of complete constant mean curvature 1 (CMC-1) surfaces in hyperbolic 3-spaces and reveal the geometric meaning behind it.

1 序

この講演では、論文 [Ka3] で得た 3次元双曲型空間 \mathbf{H}^3 内の完備な平均曲率 1 をもつ曲面 (CMC-1 曲面) の双曲的ガウス写像の完全分岐値数の評価に関する結果とその意義について紹介する。

我々はこれまでユークリッド空間内の極小曲面 (平均曲率が恒等的に 0 である曲面のこと) のガウス写像の値分布論的性質について調べてきた。3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 内の極小曲面のガウス写像は開リーマン面上の有理型函数とみなすことができるので、除外値数やそれを拡張した完全分岐値数の評価などの値分布論的性質を示すことができる。我々は論文 [KKM] において、代数的極小曲面 (有限全曲率完備極小曲面のこと) やシャーク曲面などの特殊な無限全曲率のものを含む“擬代数的極小曲面”という完備極小曲面のクラスを定義して、そのクラスに属する曲面のガウス写像の完全分岐値数の最良の評価式を得ることができた。さらに \mathbf{R}^4 内の擬代数的極小曲面のガウス写像 ([Ka2] 参照) や \mathbf{R}^n 内の擬代数的極小曲面の一般化されたガウス写像 ([JR] 参照) の完全分岐値数についても最良の評価式を得ることができた。

ところで、上記のような性質は 3次元双曲型空間 $\mathbf{H}^3(-1)$ 内の完備な平均曲率 1 をもつ曲面 (平均曲率 1 をもつ曲面のことを“CMC-1 曲面”と呼ぶことにする) の双曲的ガウス写像に対しても成り立つことが期待される。実際、この曲面の双曲的ガウス写像は開リーマン面上の有理型函数とみなすことができ、除外値数の評価について極小曲面のガウス写像のときと同様の結果がユ先生 ([Yu]) やローゼンバーグ先生たち ([CHR]) によって知られている。そこで、我々はこの場合の完全分岐値数の評価について調べ、いくつか結果を得ることができた。まず完備な CMC-1 曲面の双曲的ガウス写像の完全分岐値数について、ユ先生の論文 [Yu] の結果を改

良することで、その上限が“4”であることを示すことができた。実際に完全分岐値数が“4”の例が存在するので、これは最良の結果である。また完備な CMC-1 曲面の双曲的ガウス写像 G が有限次数 d の場合（これを代数的 CMC-1 曲面と呼ぶことにする）、定義域のリーマン面はコンパクトリーマン面（その種数を γ とする）から有限個（ k 個とする）の点を除いた穴あきリーマン面 $\overline{M}_\gamma \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ と等角同値になり、 G は穴で高々極しかとらないことがわかるが、このとき代数的極小曲面のガウス写像のときに得たものと同じ幾何学的意味をもつ式によって完全分岐値数が評価されることがわかった。さらに注目すべき性質として、 $(\gamma, k, d) = (0, 3, 2)$ において代数的極小曲面の場合には存在した完全分岐値数 2.5 の例 ([Ka1] 参照) が代数的 CMC-1 曲面の場合には存在しないことも発見した。以上のことに関して次節以降詳しく述べることにする。

2 準備と例

この節では、 $\mathbf{H}^3(-1)$ 内の CMC-1 曲面についての基本事項といくつかの例を紹介する。 $\mathbf{R}^{3,1}$ を $(-+++)$ 型の 4 次元ミンコフスキー空間とすると、その部分多様体

$$\mathbf{H}^3(-1) := \{(t, x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^{3,1} \mid \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 - t^2 = -1, t > 0\}$$

の誘導計量は、この上で正定値かつ定曲率 -1 となる。 $\mathbf{H}^3(-1)$ を 3 次元双曲型空間という。ここでは、4 次元ミンコフスキー空間 $\mathbf{R}^{3,1}$ の各点 (t, x^1, x^2, x^3) を 2 次元のエルミート行列

$$\begin{pmatrix} t + x^3 & x^1 + \sqrt{-1}x^2 \\ x^1 - \sqrt{-1}x^2 & t - x^3 \end{pmatrix}$$

と同一視する。これにより 3 次元双曲型空間は次のように同一視することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^3(-1) &= \{X \in \text{Herm}(2) \mid \det X = 1, \text{trace} X > 0\} \\ &= \{a^t \bar{a} \mid a \in SL(2, \mathbf{C})\}. \end{aligned}$$

このとき、 \mathbf{R}^3 内の極小曲面のワイエルストラス表現公式に対応した次の定理が成り立つ。

定理 2.1 (Bryant, [Br]). リーマン面 M から定曲率 -1 の 3 次元双曲型空間 $H^3(-1)$ への共形はめ込み $f: M \rightarrow H^3(-1)$ の平均曲率が 1 ならば、 M の普遍被覆 \widetilde{M} から複素リー群 $SL(2, \mathbf{C})$ への正則はめ込み $F: \widetilde{M} \rightarrow SL(2, \mathbf{C})$ が存在して、

$$f = F^t \bar{F}, \quad F^{-1} dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega$$

をみたす。ただし、 g は \widetilde{M} 上の有理型函数、 ω は \widetilde{M} 上の正則 1-形式である。

このとき、 f の第一基本形式、第二基本形式はそれぞれ

$$ds^2 = (1 + |g|^2)|\omega|^2, \quad \mathbb{II} = -Q - \overline{Q} + ds^2, \quad Q = \omega dg$$

と表すことができる。以下 F を曲面 f の持ち上げ、 g を第2ガウス写像、 Q を Hopf 微分と呼ぶことにする。

はめ込み $f: M \rightarrow \mathbf{H}^3(-1)$ のガウス曲率を K とすると、 $K \leq 0$ が成り立つので、絶対全曲率

$$\text{TA}(f) := \int_M (-K) dA \in [0, +\infty]$$

が意味をもつ。ただし、 dA は ds^2 から誘導される面積要素である。絶対全曲率 $\text{TA}(f)$ の幾何学的意味は第2ガウス写像 g の像の球面上での面積である。第2ガウス写像 g は M 上一価とは限らないので、一般には絶対全曲率は 4π の整数倍にはならない。

さらに、曲面上の点 $f(p)$ を出発して、単位法線ベクトルを初速ベクトルとする測地線が、 $\mathbf{H}^3(-1)$ の理想境界 $\partial\mathbf{H}^3(-1) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ に定める点を $G(p)$ とすると、 $G: M \rightarrow \widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ は M 上の有理型函数となる。これを双曲的ガウス写像と呼ぶ。持ち上げ $F = (F_{ij})_{i,j=1,2}$ を用いれば、

$$G = \frac{dF_{11}}{dF_{21}} = \frac{dF_{12}}{dF_{22}}$$

である。

持ち上げが F であるような CMC-1 はめ込み $f: M \rightarrow \mathbf{H}^3(-1)$ に対して、 F の逆行列に対応する CMC-1 はめ込み $f^\# := (F^{-1})^t(F^{-1}): \widetilde{M} \rightarrow \mathbf{H}^3(-1)$ が考えられる。これをもとの曲面 f の双対と呼ぶ。 f の双曲的ガウス写像、第2ガウス写像、Hopf 微分をそれぞれ G, g, Q とすれば、 $f^\#$ の双曲的ガウス写像、第2ガウス写像、Hopf 微分はそれぞれ、 $g, G, -Q$ で与えられる (論文 [UY2] 参照)。双対曲面 $f^\#$ から決まる M の計量を $ds^{2\#}$ としたとき、次のことが成り立つ。

補題 2.2 ([UY2], [Yu]). 計量 ds^2 が完備であることと $ds^{2\#}$ が完備であることは同値である。

はめ込み $f^\#$ 自体は一般に M の普遍被覆 \widetilde{M} 上でしか定義されないが、 Q, G ともに M 上一価となることより計量 $ds^{2\#} = (1 + |G|^2)|Q/dG|^2$ は M 上一価であるから、そのガウス曲率 $K^\#$ も M 上一価な関数となる。したがって、

$$\text{TA}(f^\#) := \int_M (-K^\#) dA^\#$$

により、**双対絶対全曲率**を定義することができる。双対絶対全曲率 $\text{TA}(f^\#)$ の幾何学的意味は双曲的ガウス写像 G の像の面積である。 G は M 上一価となるので、 $\text{TA}(f^\#)$ は 4π の整数倍になる。我々は双対絶対全曲率が有限になる双曲型空間内の完備 CMC-1 曲面のことを**代数的 CMC-1 曲面**と呼ぶことにする。代数的 CMC-1 曲面について、次のことが成り立つ。

定理 2.3 (Huber-Bryant). 代数的 CMC-1 曲面 $f: M \rightarrow \mathbf{H}^3$ に対して次のことが成り立つ.

1. 定義域のリーマン面 M はコンパクトリーマン面 \bar{M} から有限個の点を除いたものと等角同値である ([Hu]).
2. このとき双曲型ガウス写像 G と Hopf 微分 Q は \bar{M} 上に有理型に拡張することができる (つまり, 有限個の点では高々極である) ([Br]).

完備 CMC-1 曲面の例をいくつか紹介する. ここで, 双曲的ガウス写像の除外値数とは, リーマン球面 $\hat{\mathbf{C}}$ における双曲的ガウス写像の像の補集合の元の個数, つまり双曲的ガウス写像の値にならない $\hat{\mathbf{C}}$ 内の集合の元の個数のことである.

例 2.4 (Horosphere). 持ち上げ F が

$$F(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ az & 1 \end{pmatrix} : \mathbf{C} \rightarrow SL(2, \mathbf{C}), \quad (a \in \mathbf{C} \setminus \{0\})$$

で与えられる CMC-1 はめ込み $f = F^t \bar{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{H}^3$ を **horosphere** という. これは代数的 CMC-1 曲面で, $TA(f) = TA(f^\#) = 0$ となる.

例 2.5 (Catenoid cousin [Br]). 正の数 l に対して,

$$F = \sqrt{1-l^2} \begin{pmatrix} \frac{z^{(1-l)/2}}{l-1} & \frac{(1-l)z^{(1+l)/2}}{4l} \\ \frac{z^{-(1+l)/2}}{l+1} & \frac{-(1+l)z^{(l-1)/2}}{4l} \end{pmatrix}$$

とすると, $f = F^t \bar{F}$ は $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ から \mathbf{H}^3 への代数的 CMC-1 はめ込みで,

$$g = \frac{1-l^2}{4l} z^l, \quad Q = \frac{1-l^2}{4z^2} dz^2, \quad G = z$$

となる. この曲面は **Catenoid cousin** と呼ばれていて, 回転面になる. そして全曲率はそれぞれ $TA(f) = 4\pi l$, $TA(f^\#) = 4\pi$ である. この曲面の双曲的ガウス写像の除外値数は 2 になる.

例 2.6 (Voss cousin). $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{C}$ を異なる 3 点とし, 双曲的ガウス写像 G と Hopf 微分 Q を次のように定める.

$$(G, Q) = \left(z, \frac{dz^2}{\prod (z - a_i)} \right) \quad (1)$$

このデータで構成される曲面は M の普遍被覆面上で定義される完備 CMC-1 曲面となる. このときの双曲的ガウス写像の除外値数は 4 である. 一般に $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{C}$ を異なる k 個の点とし, (G, Q) を $M = \mathbf{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ 上で (1) の形で定めたとき, 完備性をみtusためには $k \leq 3$ である必要がある. つまり a_i は高々 3 点しかとれない.

3 主結果とその意義

この節では、双曲的ガウス写像の完全分岐値数を定義し、その評価に関して我々が得た結果とその意義について述べる。まず、一般の有理型函数に対する完全分岐値数を次のように定義する。

定義 3.1 (R.Nevanlinna [Ne]). M をリーマン面, f を M 上の有理型函数とする. このとき値 $b \in \widehat{C}$ が f の完全分岐値であるとは, b が f の除外値か, b の f による逆像の点がすべて f の分岐点になるときをいう. 次に f の完全分岐値数を定義する. f の完全分岐値の集合を $\{a_1, \dots, a_{r_0}, b_{r_0+1}, \dots, b_{r_0+l_0}\}$ とする. ここで a_i は除外値, b_i は除外値でない完全分岐値とする. a_i については $\nu_i = \infty$, b_i については $f^{-1}(b_i)$ の各点における f の重複度の最小値を ν_i とする. 特に, $\nu_i \geq 2$ である. このとき f の完全分岐値数 ν_f を

$$\nu_f = \sum_{a_i, b_i} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) = r_0 + \sum_{i=1}^{l_0} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) \quad (2)$$

で定義する.

注意 3.2. f の除外値数を D_f とすると, 定義より $D_f \leq \nu_f$ が成り立つ. つまり完全分岐値数の評価は除外値数の評価を含んでいる.

注意 3.3. 一般に有理型函数の完全分岐値が有限個であるとは限らないので (2) の定義の *well-defined* 性が問題となるが, CMC-1 曲面の双曲的ガウス写像を考える上では次に述べる定理により有限個となることがわかるので問題はない.

3次元双曲型空間内の CMC-1 曲面の双曲的ガウス写像は開リーマン面上の有理型函数とみなせるので, 完全分岐値数を考えることができる. 一般の完備 CMC-1 曲面の完全分岐値数に関しては次の結果を示すことができる.

主結果 3.4 (Z.Yu [Yu], Kawakami [Ka3]). $f: M \rightarrow \mathbf{H}^3$ を horosphere でない完備 CMC-1 曲面, G をその双曲的ガウス写像とする. D_G を G の除外値数, ν_G を G の完全分岐値数とする. このとき次の式が成り立つ.

$$D_G \leq \nu_G \leq 4 \quad (3)$$

例 2.6 が存在するので, 式 (3) の評価は最良である. さらに代数的 CMC-1 曲面の完全分岐値数に対してより精密な評価を得ることができる.

主結果 3.5 (Kawakami [Ka3]). $f: M \rightarrow \mathbf{H}^3$ を horosphere でない代数的 CMC-1 曲面とする. 定理 2.3 より M をコンパクトリーマン面 \overline{M} から有限個 (k 個とする) の点を除いた穴あきリーマン面 $\overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ とする. \overline{M} の種数を γ , 双曲的ガ

ウス写像 G を \overline{M} 上の写像と考えたときの次数を d とする. このとき次の式が成り立つ.

$$D_G \leq \nu_G \leq 2 + \frac{2}{R}, \quad R = \frac{d}{\gamma - 1 + k/2} > 1. \quad (4)$$

特に horosphere でない代数的 CMC-1 曲面の双曲的ガウス写像の除外値数は高々 3 である.

トポロジカルデータが $(\gamma, k, d) = (0, 2, 1)$ の場合, $R = \infty$ より $2 + (2/R) = 2$ となる. 例 2.5 より, この状況において式 (4) の評価は最良である.

評価式 (4) の上限である $2 + 2/R$ の幾何学的意味を説明する. “2” の幾何学的意味は値域である Riemann 球面の Euler 数であることが証明から直ちに分かる. 次に比 “ R ” の幾何学的意味について述べる. M の普遍被覆面が単位円板 \mathbf{D} と双正則になるとき, $A_{hyp}(M)$ をガウス曲率が -4π の双曲計量で測った M の面積, $A_{FS}(M)$ をガウス曲率が 4π の Fubini-Study 計量を G で引き戻した計量で測った M の面積とすると, 次の式を示すことができる.

$$R = \frac{A_{FS}(M)}{A_{hyp}(M)} = \frac{d}{\gamma - 1 + k/2}. \quad (5)$$

注意 3.6. 定義域のリーマン面が複素平面 \mathbf{C} のとき, $R < 0$ となり幾何学的意味をもたないが, 式 $\nu_G \leq 2 + (2/R)$ は成り立つ.

代数的 CMC-1 曲面のガウス写像の除外値数について, 主結果 3.5 より次の結果を導くことができる.

主結果 3.7 (Kawakami [Ka3]). 代数的 CMC-1 曲面 $f: \overline{M}_\gamma \setminus \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \mathbf{H}^3$ に関して次のことが成り立つ.

1. $\gamma = 0$ ならば $D_G \leq 2$
2. $\gamma = 1$ で $D_G = 3$ ならば, エンドはすべて埋め込みで $d = k$ が成り立ち, さらに G は M 上非分岐である. ここでエンドとは, 穴あき円板と同相な曲面の一部のことで, 穴に向かう円板上のすべての発散路が無限大の長さをもつときをいう.

最後に極小曲面のガウス写像のときとは異なる結果を紹介する. \mathbf{R}^3 内の代数的極小曲面のガウス写像の完全分岐値数については $(\gamma, k, d) = (0, 3, 2)$ において $\nu_G = 2.5$ となる例が存在した ([Ka1], [MS]) が, 代数的 CMC-1 曲面の双曲的ガウス写像に関してはラスマン先生と梅原先生, 山田先生の結果 ([RUY]) から次のことがわかる.

命題 3.8 (Kawakami [Ka3]). $(\gamma, k, d) = (0, 3, 2)$ において, 双曲的ガウス写像の完全分岐値数が 2.5 となる代数的 CMC-1 曲面は存在しない.

4 今後の課題

代数的極小曲面のガウス写像に関しては「オッサーマン問題」と呼ばれる除外値数の上限を問う未解決問題があるが、代数的 CMC-1 曲面に関しても、 $D_G = 2$ の例の存在 (例 2.5) と主結果 3.5 からオッサーマン問題に対応した次の問題を考えることができる。

問題 4.1. 代数的 CMC-1 曲面の双曲的ガウス写像の除外値数の上限は 2 か 3 か？

これまでオッサーマン問題と上記の問題とは同値な問題であると思われていたが、命題 3.8 のように値分布論的性質が代数的極小曲面のガウス写像のときとは異なることもあるので、問題 4.1 はオッサーマン問題とは独立に考えるべきものであると私は考えている。問題 4.1 の理解を深めるためには種数 1 以上の代数的 CMC-1 曲面の構成法を確立する必要がある。今後はその構成法を考えながらこの未解決問題に取り組んでいきたいと思う。

参考文献

- [Br] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque **154–155** (1987), 321–347.
- [CHR] P. Collin, L. Hauswirth, and H. Rosenberg, *The Gaussian image of mean curvature one surfaces in \mathbf{H}^3 of finite total curvature*, Fukaya Kenji (ed.) et al., *Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry*, Mathematical Society of Japan. Adv. Stud. Pure Math. **34** (2002), 9–14.
- [Fu] H. Fujimoto, *Value Distribution Theory of the Gauss Map of Minimal Surfaces in \mathbf{R}^m* , Vieweg (1993).
- [Hu] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv., **32** (1957), 13 – 72.
- [JR] L. Jin and M. Ru, *Algebraic curves and the Gauss map of algebraic minimal surfaces*, preprint, 2006.
- [Ka1] Y. Kawakami, *On the totally ramified value number of the Gauss map of minimal surfaces*, Proc. Japan Acad. **82**, Ser A (2006), 1–3.
- [KKM] Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, *The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces*, Submitted, math.DG/0511543.
- [Ka2] Y. Kawakami, *The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces in \mathbf{R}^4* , Submitted, math.DG/0603320.

- [Ka3] Y. Kawakami, *Ramification estimates of the hyperbolic Gauss map of mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space*, in preparation.
- [MS] R. Miyaoka and K. Sato, *On complete minimal surfaces whose Gauss map misses two directions*, Arch. Math., **63** (1994), 565–576.
- [Ne] R. Nevanlinna, *Analytic Function*, Translated from the second German edition by Phillip Emig. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, New York, 1970
- [RUY] W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, *Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature I*, Hiroshima Math. J. **34** (2004), 21–56.
- [UY1] M. Umehara, K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature-1 in the hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. **137** (1993), 611–638.
- [UY2] M. Umehara, K. Yamada, *A duality on CMC-1 surface in the hyperbolic 3-space and a hyperbolic analogue of the Osserman Inequality*, Tsukuba J. Math. **21** (1997), 229–237.
- [Yu] Z. Yu, *Value distribution of hyperbolic Gauss maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2997–3001.

Yu Kawakami
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya, 464-8602/JAPAN
E-mail Address: m02008w@math.nagoya-u.ac.jp

分数積分作用素の有界性に関して

(On the boundedness of the fractional integral operators)

澤野嘉宏（東京大学数理科学研究科学振 PD）

郵便番号 153-8914
東京都目黒区駒場 3-8-1
東京大学数理科学研究科
メールアドレス yoshihiro@ms.u-tokyo.ac.jp

1 序

この講演では 1 次元の分数積分作用素に関して考える。

調和解析の入門（即席的）と私の結果に関して簡単に話をさせていただきます。初めの 4 5 分で調和解析の議論とはどんなものかを説明して、残りでも専門的なことを話します。

“ 正值関数は積分順序、極限と積分の入れ替えがうまく行く ”

と心得てください。この講演は 2 つの部分からなります。1 つは、分数積分作用素に関する説明もうひとつは、[2] に基づく私澤野嘉宏の研究の一部を説明することです。

Part I

分数積分作用素の有界性

分数積分作用素とは次の式で定義される作用素である。

$$I_{\alpha}f(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{f(x-y)}{|y|^{1-\alpha}} dy$$

ここで、 $0 < \alpha < 1$ を満たす。

積分論を学習している方ならば、初めに積分が収束するかどうか気になるころであろう。積分が意味をなす十分条件としてとりあえず f は正值であることを仮定しよう。

2 極大作用素

積分の有界性を議論するには実解析では極大作用素を用いる。いかに定義を与える。

Definition 2.1. 以後 f は正值関数とする。

$$Mf(x) = \sup_{a < x < b} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy$$

とおく。 x を含む区間の平均の上限が $Mf(x)$ である。

この作用素に関する情報を初めに整理する。

Lemma 2.2. f が有界ならば、

$$Mf(x) \leq \sup_{y \in \mathbf{R}} f(y)$$

である。

証明は積分の定義式で f の値を \sup で抑えてしまえばよい。

f が有界という条件は L^∞ 空間と関連しているが、 f が可積分すなわち L^1 に対応する条件はいったいなんであろうか？

L^∞ から L^∞ への写像として扱えることを補題で見たが、 L^1 ではそうはいかない。

Lemma 2.3. $f = \chi_{[-1,1]}$ の場合

$$Mf(x) = \chi_{[-1,1]}(x) + \frac{\chi_{\mathbf{R} \setminus [-1,1]}(x)}{1+|x|}$$

したがって、

$$\int_{\mathbf{R}} Mf(x) dx = 2 + 2 \int_1^\infty \frac{1}{1+x} dx = \infty$$

だから、 Mf は L^1 には入らない。

そこで、次の関数のクラスを考える。

Definition 2.4. f が弱 L^1 であるとは、定数 $c > 0$ が存在して

$$|\{x \in \mathbf{R} : f(x) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}$$

という条件をすべての λ に対して満たすことである。

$f(x) = |x|$ とすると、 \log が絡んできて L^1 には入っていないことがわかるが、弱 L^1 であることはわかる。

先ほどの補題の Mf も弱 L^1 には入っている。

次の定理が成り立つ。

Theorem 2.5. すべての $f \in L^1$ につき, 弱 L^1 型不等式よりもう少し強い不等式

$$|\{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\}} f.$$

が成り立つ.

果たしてこの定理をどのようにして証明するのか? そのためには左辺の集合をうまくコントロールすることが必要である.

Lemma 2.6. 开区間の集まり $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとする. このとき, この集まりから不要な区間を除いて初めの区間の集まりが覆う集合を新しく除いて出来た区間の集まりが覆っているという条件を満たしながら, 各点での重複度が 2 以下であるように出来る.

精密には, $\Lambda_0 \subset \Lambda$ となる部分集合を取ってきて,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} I_\lambda, \quad \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \chi_{I_\lambda} \leq 2$$

と出来る. ここで, χ_A は集合 A の特性関数.

証明をする前に, イメージをしよう.

$$I_1 = (7, 37), \quad I_2 = (10, 29), \quad I_3 = (9, 46)$$

としよう. この区間の集まりを図示すればわかるようにすると共通部分として 20 を含む. I_2 を除いても “被覆の状態は変わらない”.

このことからわかるように一般には 3 つの区間が 1 点で交われば, 一個捨てても被覆している状態はかわりがない.

このように, 区間を順次捨てて行くことで証明できる.

定理の証明に入ろう. \sup の定義から, $x \in \mathbf{R}$ が $Mf(x) > \lambda$ を満たせば, x を含む区間 I_x が存在して, そこでの f の平均は λ より大きくなる.

補題を用いて無駄な区間を捨てると結局次の条件を満たす区間の集まりを得ることが出来る.

$$1. \{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\} = \bigcup_j I_j$$

$$2. \sum_j \chi_{I_j} \leq 2$$

$$3. \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f(x) dx > \lambda$$

ここで、 $|I|$ は区間 I の長さをあらわす。1 と測度の劣加法性より、

$$|\{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\}| \leq \sum_j |I_j|$$

3 よりさらに

$$|\{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{I_j} f(x) dx$$

最後に 2 と 1 より

$$|\{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\}} f(x) dx.$$

これで定理が証明できた。

次に L^p ノルムを計算しよう。 L^p ノルムとは、次の量である。

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mf と f の関係を調べたいのだが、一見するとこれでは何もわからないようである。しかしながら、

$$Mf(x)^p = \int_0^{Mf(x)} p \lambda^{p-1} d\lambda = \int_0^\infty p \lambda^{p-1} \chi_{Mf(x) > \lambda}(x, \lambda) d\lambda$$

として、式を代入すると

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbf{R}} \int_0^\infty p \lambda^{p-1} \chi_{Mf(x) > \lambda}(x, \lambda) d\lambda dx$$

積分順序を変えると

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx = \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} p \lambda^{p-1} \chi_{Mf(x) > \lambda}(x, \lambda) dx d\lambda = \int_0^\infty p \lambda^{p-1} |\{Mf(x) > \lambda\}| d\lambda$$

$p > 1$ を仮定して先ほどの不等式を代入すると

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx \leq 2 \int_0^\infty p \lambda^{p-2} \chi_{\{Mf(x) > \lambda\}}(x, \lambda) |f(x)| dx d\lambda.$$

もう一度積分順序を交換すると

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^\infty p \lambda^{p-2} \int_{\mathbf{R}} \chi_{\{Mf(x) > \lambda\}}(x, \lambda) |f(x)| dx d\lambda \\ &= 2 \int_{\mathbf{R}} \int_0^\infty p \lambda^{p-2} \chi_{\{Mf(x) > \lambda\}}(x, \lambda) |f(x)| d\lambda dx \\ &= \frac{2}{p-1} \int Mf(x)^{p-1} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Hölder の不等式で右辺の積分関数を分解すると

$$\int Mf(x)^{p-1}|f(x)| dx \leq \left(\int Mf(x)^p dx \right)^{1-1/p} \cdot \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

まとめて,

$$\int Mf(x)^p dx \leq \frac{2}{p-1} \left(\int Mf(x)^p dx \right)^{1-1/p} \cdot \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$\int Mf(x)^p dx < \infty$ を仮定して割ると¹

$$\|Mf\|_p \leq \frac{2}{p-1} \|f\|_p$$

が得られる.

次に分数積分作用素の説明に移る. 補題をいくつか用意する.

Lemma 2.7. $A, B, \eta_1, \eta_2 > 0$ のとき

$$\int_0^\infty \min(A\ell^{-\eta_1}, B\ell^{\eta_2}) \frac{d\ell}{\ell} = C A^{\frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2}} B^{\frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2}}.$$

C は A, B によらない有限な数.

Lemma 2.8. $0 < \alpha < 1$ のとき

$$\begin{aligned} (1-\alpha) \int_0^\infty \chi_{B(x,\ell)}(y) \frac{d\ell}{\ell^{2-\alpha}} &= (1-\alpha) \int_0^\infty \chi_{|x-y|<\ell}(\ell) \frac{d\ell}{\ell^{2-\alpha}} \\ &= (1-\alpha) \int_{|x-y|}^\infty \frac{d\ell}{\ell^{2-\alpha}} \\ &= |x-y|^{-1+\alpha}. \end{aligned}$$

$B(x, r)$ は中心 x 長さ $2r$ の開区間.

さて分数積分作用素に取り掛かろう. 補題 2.8 を用いると f は正値関数だから積分順序の交換が出来る.

$$I_\alpha f(x) = (2-\alpha) \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\ell^{2-\alpha}} \chi_{B(x,\ell)}(t) f(t) dt d\ell.$$

ここで,

$$\frac{1}{\ell^{2-\alpha}} \int_{B(x,\ell)} f(t) dt \leq 2\ell^{-\alpha+1} Mf(x), 2^{1-1/p} \ell^{-\alpha+1/p} \|f\|_p$$

という二通りの評価式を用いると

$$\frac{1}{\ell^{2-\alpha}} \int_{B(x,\ell)} f(t) dt \leq \min(2\ell^{-\alpha+1} Mf(x), 2^{1-1/p} \ell^{-\alpha+1/p} \|f\|_p)$$

¹この仮定は確かに正しい $f \in L^p$ のときは, 実際の講演で説明する.

だから、この不等式を代入すれば補題 2.7 より、

$$I_\alpha f(x) \leq c Mf(x)^{\frac{p}{s}} \|f\|_p^{1-\frac{p}{s}}$$

である。ここで、 s は $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \alpha$ を満たす。このことと M の満たす性質を組み合わせると次がいえる。

Theorem 2.9. p, s, α は次の条件を満たしているとする。

$$0 < \alpha < 1, 1 < p < s < \infty, \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \alpha$$

このとき、

$$\|I_\alpha f\|_s \leq c \|f\|_p$$

が成り立つ。

3 d 次元の場合

d 次元でも類似の議論が出来る。しかし、補題 2.6 を次のもので置き換える必要が出てくる。

Lemma 3.1. 球 B につき、 $3B$ でもって中心を保ったまま 3 倍に相似拡大した球を表す。 B_1, B_2, \dots, B_K を d 次元球の有限個の集まりとする。このとき、この中からいくつかを捨てて、残って得られた球を D_1, D_2, \dots, D_J とするとき、

$$\bigcup_{k=1}^K B_k \subset \bigcup_{j=1}^J 3D_j$$

かつ $D_{j_1} \cap D_{j_2} = \emptyset$ と出来る。

証明を与える代わりに、幾何学的考察を試みる。 B^1, B^2 を二つの球として、交わっているとしよう。このとき、

$$B^1 \subset 3B^2, B^2 \subset 3B^1$$

のどちらかが成り立っているであろう。

この補題の証明はこれに基づいて帰納法で証明できる。

Definition 3.2. M を次の式で定義される極大作用素とする。

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy$$

ここで、 $|B|$ は球 B の体積を表す。

Theorem 3.3. すべての $f \in L^1$ につき、弱 L^1 型不等式よりもう少し強い不等式

$$|\{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{3^d}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\}} f$$

が成り立つ。

Proof. ルベーク測度の性質

$$|E| = \sup_{K: \text{コンパクト}, E \supset K} |K|$$

つまり、可測集合 E の測度はそれに含まれるコンパクト集合 K の測度の上限であるという性質から、コンパクト集合 K が $K \subset \{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\}$ を満たすときに、

$$|K| \leq \frac{3^d}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\}} f$$

を示せばよい。

K のコンパクト性から 1 次元のときと同じように考えて

$$K \subset \bigcup_{k=1}^K B_k$$

と出来る。不要な球を取り除いて、残って得られた球を D_1, D_2, \dots, D_J とするとき

$$\bigcup_{k=1}^K B_k \subset \bigcup_{j=1}^J 3D_j$$

かつ $D_{j_1} \cap D_{j_2} = \emptyset$ となっているとする。すると

$$|K| \leq \left| \bigcup_{k=1}^K B_k \right| \leq \left| \bigcup_{j=1}^J 3D_j \right| \leq \sum_{j=1}^J |3D_j| \leq 3^d \sum_{j=1}^J |D_j| \leq \frac{3^d}{\lambda} \int_{\bigcup_{j=1}^J D_j} f(x) dx.$$

だから、

$$\bigcup_{j=1}^J D_j \subset \{x \in \mathbf{R} : Mf(x) > \lambda\}$$

より証明が終わる。 □

注意 1 : $|3D_j| = 3^d |D_j|$ は相似比の d 乗に正比例していることから従う。この条件を doubling 条件という。注意 2 : 残りは $d = 1$ のときと同じように進む。

Part II

私の研究結果

Nazarov, Treil, Volberg は [3] において従来の調和解析において不可欠だった doubling 条件は実際には取り除けることも多いと指摘した。

The doubling condition is superfluous for most of the classical theory

Morrey 空間とは次のノルムで与えられる関数空間である。

Definition 3.4 (Morrey 空間の定義). $1 \leq q \leq p < \infty$ とする. Morrey ノルムを次のように表す.

$$\|f : \mathcal{M}_q^p\| := \sup_{x \in \mathbf{R}^d, r > 0} r^{\frac{d}{p} - \frac{d}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

Q で以って \mathbf{R}^d の座標軸に並行な辺からなる立方体全体を $Q(\mu)$ で以って, Q の中で μ 測度が正のもの全体をあらわす.

Definition 3.5 (Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^p(k, \mu)$ [2]). $1 \leq q \leq p < \infty, k > 1$ とする. 関数空間のノルムを

$$\|f : \mathcal{M}_q^p(k, \mu)\| := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \mu(kQ)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(y)|^q d\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}}$$

で与えて, 関数空間 $\mathcal{M}_q^p(k, \mu)$ を

$$\mathcal{M}_q^p(k, \mu) := \{f \in L_{loc}^q(k, \mu) : \|f : \mathcal{M}_q^p(k, \mu)\| < \infty\}$$

と定める. kQ は中心を保ったまま k 倍に相似拡大をした立方体全体をあらわす.

重要な性質は, この関数空間は $k > 1$ に依存しないことである. 講演の締めくくりに, この定理を証明する.

Theorem 3.6 (k の非依存性 [2]). $k_1, k_2 > 1$ とするとき, 集合としての等式

$$\mathcal{M}_q^p(k_1, \mu) = \mathcal{M}_q^p(k_2, \mu)$$

が成り立ち, ノルム同値

$$\|f : \mathcal{M}_q^p(k_1, \mu)\| \sim \|f : \mathcal{M}_q^p(k_2, \mu)\|$$

が成り立つ. ここで, \sim の定数は d, k_1, k_2 のみによる.

澤野個人のホームページ <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/yoshihiro> で調和解析のセミナーなどの原稿を公開しています.

References

- [1] Javier Duoandikoetxea, Fourier Analysis. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Urbe. Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. 調和解析実解析の参考書 (入門書)
今回の結果は次の論文に基づきます.
- [2] Y. Sawano and H. Tanaka, Morrey spaces for non-doubling measures, Acta Math. Sinica **21** no.6, 1535–1544.
- [3] F. Nazarov, S. Treil and A. Volberg, Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderón-Zygmund operators on nonhomogeneous spaces, Internat. Math. Res. Notices (1998), 463–487.