HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|---|---|
| Title | 非線形変換の極限図形の特徴及び分類に関する研究 |
| Author(s) | 吉川, 毅 |
| Degree Grantor | 北海道大学 |
| Degree Name | 博士(工学) |
| Dissertation Number | 甲第5515号 |
| Issue Date | 2001-03-23 |
| DOI | https://doi.org/10.11501/3182357 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/28079 |
| Type | doctoral thesis |
| File Information | thesis.pdf |

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

# 非線形変換の極限図形の特徴及び分類に関する研究

吉川　毅

# 目 次

**1 序論** **5**

**2 実同次変換** **12**

**3 2 次元実同次二次変換の分類** **19**

3.1 2 次元実同次二次変換とその不変式系 . . . . . 20

3.2 発散収束境界の入れ子構造 . . . . . 23

**4 2 次元実同次三次変換の分類** **36**

4.1 2 次元実同次三次変換とその不変式系 . . . . . 37

4.2 2 次元実同次三次変換の標準形 . . . . . 39

4.3 無限不動方向が存在するための必要十分条件 . . . . . 47

**5 非同次な変換への応用** **55**

5.1 原点を安定不動点とする 2 次元実二次変換 . . . . . 55

5.2 収束領域の特徴 . . . . . 56

**6 結論** **61**

**謝辞** **64**

**参考文献** **65**

# 図 目 次


2.1 発散収束境界の定義 . . . . . 13

2.2 2 次元実同次二次変換の発散収束境界の例 . . . . . 14

2.3 不動方向上の点の挙動 . . . . . 15

2.4 安定不動方向 . . . . . 16

2.5 方向に関する写像 . . . . . 17

3.1 入れ子構造をもつ発散収束境界の例 . . . . . 23

3.2 入れ子構造の定義 . . . . . 25

3.3 二安定, 一不安定不動方向をもつ方向に関する写像の例 . . . . . 26

3.4 Type I$\ominus$, $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = (3, 4)$ の方向に関する写像 . . . . . 28

3.5 Type I$\ominus$, $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = (2, 4)$ の方向に関する写像 . . . . . 28

3.6 Type I$\ominus$, $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = (3, 4)$ の発散収束境界 . . . . . 29

3.7 Type I$\ominus$, $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = (2, 4)$ の発散収束境界 . . . . . 29

3.8 Type I$\ominus$, $\Gamma > 0, K_0 > 0, K_3 > 0$ の方向に関する写像 . . . . . 34

3.9 Type I$\ominus$, $\Gamma < 0, K_3 < 0$ の方向に関する写像 . . . . . 34

3.10 Type I$\ominus$の標準形パラメータ空間における$\Gamma = 0$ . . . . . 35

4.1 無限不動方向が存在しない場合 (a) と存在する場合 (b) の発散収束境界の例 48

4.2 Type 3 の標準形の変換における Case 3(a) と Case 4(b) . . . . . 51

5.1 同次二次変換 Type IV(1) の標準形の発散収束境界 . . . . . 58

5.2 Type IV(1) の標準形に線形項を付加した場合の発散収束境界 . . . . . 58
5.3 同次二次変換 Type III(3) の標準形の発散収束境界 . . . . . 59
5.4 Type III(3) の標準形に線形項を付加した場合の発散収束境界 . . . . . 59
5.5 同次二次変換 Type III(4) の標準形の発散収束境界 . . . . . 60
5.6 Type III(4) の標準形に線形項を付加した場合の発散収束境界 . . . . . 60

# 表 目 次

3.1 不変式に基づく$\xi_\gamma$の数の分類 . . . . . 32

4.1 微分方程式系の type と四次形式の type との関係 . . . . . 42
4.2 各 type の不動方向 . . . . . 47
4.3 Type 3 の変換の分割 . . . . . 50
4.4 各 case と不変式系の符号との関係 . . . . . 52
4.5 無限不動方向が存在するための必要十分条件 . . . . . 53

# 第 1 章

# 序論

従来, 様々な自然現象を点変換系や力学系を用いて近似, 表現し, その性質などを調べる研究が数多く行われてきた. 実際, 非線形変換過程は相互作用過程に対するモデルや数値解析における反復法, またより具体的な例としては画像圧縮法の一手法であるフラクタル画像圧縮の復号処理など, 多くの工学的問題や現象で取り扱われている. 本来多くの自然現象や工学的問題は, いくつもの要因が影響し合って次の状態を決定する. したがってその過程には相互作用が存在し, その系は非線形系である. 一般にはその局所的な挙動を調べることが多く, その場合線形系で近似し解析を行うことができるが, 線形系では表現できないような現象を取り扱う場合には, 非線形系を用いなくてはならない. 実同次二次変換について取り上げ, その解析を行った文献 [8] において述べられているように, 数値解析において解の近傍で近似を行うとき, 基本的には線形近似を用いるが, 線形項が厳密に存在しない場合には点の挙動に対して二次以上の項が支配項となるために, 高次の近似が用いられる. 非線形変換過程の中で特に二次変換過程は, 二体相互作用過程, 例えば生物系における生殖過程や化学における二次の反応系などにも見られる.

以上に例を挙げて述べてきた点変換系は $n$ 次元空間からそれ自身への写像の反復過程であるが, その写像と自励系の力学系である微分方程式系における時間的変化量を決定する関数とは, 式が共通である. それらの式が同じ場合には, 両者の物理的な意味は異なるにもかかわらず, 一方の系の解析結果を他方に適用することが可能である. 例えば, 点変換系に

おける, ある性質に関する判別式が得られたとき, それは対応する自励系力学系において, 点変換系とは異なる性質ではあるが何らかの性質に関する判別式となる.

非線形系においては線形系とは異なり, 複雑な挙動を示す場合がある. 非線形系に限って現れる特徴的な現象の一つとしてカオス現象が挙げられる.

カオスとは決定論的な系, すなわち確率的な要因を含まない系において発生する, 一見ランダムな挙動のことである. その主な特徴の一つとして, 初期値に対して鋭敏に依存する性質が挙げられる.

初期値に対して鋭敏に依存するとは, 初期値として十分近い二点を選んでも, その差が時間の経過と共に増幅され, その結果ある時間以降では全く異なる挙動を示すことをいう. このような性質は初期値においてだけではなく, 系のパラメータにおけるわずかな変化によっても現れる.

現実の現象に対して, 無限の精度で観測を行ったり, 初期値を与えることは不可能である. したがってカオス現象を示す系においては, その初期値に対する依存性などから, たとえ対象としている系が完全に理解できていても, 長期的な予測は不可能である. しかしながら, 系が決定論的であることから短期的な予測は可能であり, この点に関して工学的な応用が期待されている.

カオス現象の概念は, 自然界における様々な複雑な現象が確率的な現象ではなく, 決定論的な現象であるという可能性を与える. すなわち, 従来であれば, 確率的, 統計的な手法しか用いることができなかったのに対し, カオスの概念の出現によって, 点変換系や微分方程式系といった決定論的な系に基づく解析を行うことが可能となった.

非線形系においては, 一般に初期値の選び方によって, 反復過程を繰り返した際の挙動が異なる. ある初期値に対しては一点に収束し, 別の初期値では無限遠に発散し, また別の初期値ではカオス的な振舞いを見せるなど, 初期値とそれに対して無限回の変換を施した際の挙動との関係は重要な問題の一つである. その性質を取り扱う概念の一つが極限図形である. 極限図形とは, 不動点及び周期点, 概周期点の吸引域の境界の点の集合である.

非線形変換における点の挙動に関する過去の研究としては, 1918 年, Julia が有理変換の反復過程に対する研究を行っている. その後しばらくして, 1976 年 Date and Iri[8] は, 主に二体相互作用過程に現れる実同次二次変換を取り上げ, その標準形を与えると共に, 特に 2 次元の場合に, 座標系の線形変換の下での不変式系に基づいた解析を行い, 無限不動方向の存在, 不動方向の局所安定性など不変概念の性質を決定する不変式列を導いて, 理論的基礎を与えている. さらに 1978 年, Newton 法の解近傍における誤差の漸近挙動に関連して, 極限図形の様々な形状をコンピュータを用いたシミュレーションによって図示し, その性質が解析されている [9]. また 1979 年には, 2 次元実同次二次変換と幾何学的対象を共通とする, 2 次元実同次二次微分方程式系に対する性質が論じられている [7]. 一方その後, 1982 年になって, 1 次元複素二次変換に対して Mandelbrot は極限図形の複雑さを図示し, 解析を行っている. またその中では, 自然界における様々な自己相似性を取り扱っており, フラクタルの概念を導入している. この研究を始めとして Julia 集合などの極限図形の複雑さに関しての研究は, フラクタルの分野において良く取り上げられ, 最近まで様々な成果が挙げられている. また近年では, 1990 年, 実同次二次変換と同様の手法により, Cima and Llibre[5] が 2 次元実同次三次微分方程式系に対する標準形を与えている. その中では, 平衡線の存在条件についても示されている.

フラクタルとは, 直観的には一部分を拡大したときに全体と相似な構造が得られる形状のことをいう. また, 部分と全体とが相似な形状になっていなくても, それらの複雑さの程度が同じであれば統計的に自己相似であるとする. 実際の自然界の現象などにおいては, ある尺度以上に拡大すると全く異なる構造を示し, 自己相似である尺度の範囲が限定される場合が一般的であるが, この場合もフラクタルとして扱われる.

フラクタル構造をもつものともたないものとの違いについては, 次のようにも考えることができる. 自然界などまわりに見ることのできる図形は, 大きく次の二つに分類することができる. それは, 有限個の滑らかな図形の組合せで近似できる図形と, 近似できない図形である.

円や球, 正方形などの幾何学的な図形はそれ自身滑らかな図形であり, また建物などの人工的な物体は上に挙げたような滑らかな図形で近似することができると考えられる. このような図形は, 全体として複雑な構造をもっていても, その一部分を拡大すると単純な構造を見ることができる.

これに対し, 自然界には容易には近似を行うことができない物体も数多く存在する. これには例えば, 海岸線や雲の形が挙げられる. これらを滑らかな形状で近似しようとしても, 実際の形状と比べると無視できないような違いが存在し, より厳密に近似するには大きさの異なる図形を無数に用いる必要がある.

このような図形の重要な性質として自己相似性, すなわち図形の一部を拡大すると全体, またはより大きな部分と類似した形状が現れる性質が挙げられる. 実際には自然界に存在する物体では, 部分と全体とが相似な図形になっているのではなく, その複雑さが同じように見える, すなわち統計的な意味で自己相似となっている場合が一般的である.

フラクタルとは, このような滑らかな図形で近似を行うことができない図形や構造, 現象などのことであると考えることもできる.

フラクタル性を定量的に表す量がフラクタル次元である. 滑らかな図形に対しては, 点を 0 次元, 直線を 1 次元, 平面を 2 次元といった, 整数の値をとる位相次元が用いられ, この次元の値は直観的にも自然なものである. しかしながら, 1890 年に発見された, 一本の曲線で平面全体を覆う例のように必ずしも直観と合わない図形が存在し, そのような形状を表すために様々な次元の定義が行われた. それらの次元は必ずしも整数の値を取るとは限らず, そのような非整数値を取り得る次元のことをまとめてフラクタル次元と呼ぶ. フラクタル次元の例としては, Hausdorff 次元や相似次元, 容量次元などが挙げられる.

以上に述べたように, フラクタルは元来, 直線や円などの滑らかな集合に代わって, 自然界の中に存在する物体の形状を表現するモデルとして導入された概念である. 従来の研究により, 様々な現象においてフラクタル構造が現れることが示されてきたが, そのようなフラクタル集合で表される物体の上で物理現象を考えることによる自然現象の解析も進めら

れている. また, 様々な現象に共通して見られるフラクタル構造から, それらの類似性を考察し, その構造が現れる原因について解明する研究も行われている. 例えば, $1/f$雑音は電気回路や気温の季節的変動, 音楽, 心拍など, 多くの現象に対して普遍的に観測される. $1/f$雑音とは, パワースペクトルが振動数 $f$の逆数 $f^{-1}$に比例する雑音であるが, その発生原因についてはほとんどわかっていない. $1/f$雑音はそのスペクトルの形状が自己相似性をもつという点でフラクタルの一種と考えることができ, そのことからフラクタルを用いたモデルによる説明も期待されている.

さらにフラクタル構造の特徴である自己相似性は, 様々な工学的問題への応用が行われている. 画像処理の分野では, コンピュータグラフィックスで自然な地形や樹木の形状を表現する際には, フラクタル理論を用いた手法は欠かすことのできないものになっている. また, 物質の表面をフラクタル表面で表すことは, 表面の見た目や質感をフラクタル次元によって定量化できるため有効な手法となる. さらに複数の縮小写像の和が唯一の不変集合をもち, 任意の初期値から始めても写像の反復によってその不変集合に収束する, という性質を用いて, フラクタル画像圧縮の手法が提案, 実用化されている. またその手法を応用することにより, 拡大画像のデータを補間し, 任意の解像度で画像を表現できる. その他, ランダムノイズを変換することでフラクタル構造を描く方法もある. その例としては非整数階の微積分を施すことによって, グラフのフラクタル次元を変化させる手法が代表的である.

時系列解析の分野では, 例えば株価の変動の解析がある. フラクタルを提唱した Mandelbrot は株価変動に対して時間軸のスケールを変換しても同様のデータが得られることを発見している. このフラクタル性を予測に応用する試みもある. また時間軸のスケール変換に対して, 時系列のインパルス応答の自己相似性が保たれることを用いた時系列予測手法も提案されている.

近年このようにフラクタルの研究が急速に進められた原因には, コンピュータ技術の進歩によって極限図形の近似図形の表示が容易になったことが挙げられる. すなわち, 与えられた変換式に対してシミュレーションにより極限図形の近似図形を描くことが可能となり,

その形状を視覚的に捉えることができるようになった.

しかしながら, 与えられた変換に対してその極限図形がもつ特徴を調べるために, 常にシミュレーションによって図示し, 人の視覚によって解析を行うことは手続きが繁雑である. 本論文では, 実空間上の同次変換に対して, 与えられた変換式から極限図形の性質を分類する手法を開発し, 自己相似形状, 特に入れ子構造の有無に基づく分類を行う. フラクタルの重要な性質の一つである自己相似性の存在は, 一部の情報から全体の構造の予測を可能とし, また逆に全体の構造から微小領域の構造を明らかにする. この性質は例えば時系列データの予測や画像データの圧縮, また拡大画像のデータ補間に対して用いられるなど, 新しい応用が開発されつつある.

本論文では分類のための判別式を, 座標系の線形変換の下での不変式系に基づいて表現する. 座標系の取り方に依存しない不変概念は, 基本的に不変式の値によってその性質を論じることができる. 特に偶数の重みをもつ不変式の場合は, 座標変換によってその符号の向きを変えることがなく, 様々な不変概念の判別式として用いられる. 同次変換における不動方向の数や局所安定性, 無限不動方向の存在などは不変概念の例であり, 2 次元実同次二次変換に対するそれらの性質は不変式系による判別がなされている [8]. 本論文で新たに分類を試みるある種の自己相似性も不変概念であるため, 不変式による判別が可能であると考えられる. 不変式系に基づいて分類を行う利点は, 座標系を固定する必要がないこと, すなわち, 任意に与えられた変換式に対してその係数による有理演算を行うだけで判別が可能となることである.

本論文の構成は以下の通りである.

第 1 章では, 序論として本研究の背景と目的について述べる.

第 2 章では, 本論文で取り扱う基本的な概念についての定義を行う. 実同次変換及びその極限図形である発散収束境界, さらに変換過程における点の挙動がもつ性質を論ずる. 特に不動方向の存在や局所安定性など既知の成果もここに取り上げる.

第 3 章では, 極限図形の特徴として 2 次元実同次二次変換に対する自己相似形状を取り

上げる. そしてその中の入れ子構造の有無に基づく分類を行う. この結果に基づいて, 実際に極限図形を描くことなく, 任意に与えられた変換式に対して分類が可能となり, またその手続きは, 変換式の係数を用いた有理演算を行うだけで可能である. 自己相似形状の性質は時系列解析や画像解析などの工学的分野に応用されている.

第 4 章では, Cima and Llibre[5] が策定した 2 次元実同次三次微分方程式系で表される自励系力学系の標準形に対して, 点変換系の表現の立場からその標準形を吟味した結果, 分類の完全性が成立していないことを発見し, これを訂正する. さらに任意の変換を標準形に変換することなく, 無限不動方向の有無を判別することを可能にする. この結果, 不変式を用いて分類を行う方法であることから, 任意に与えられた変換式に対して無理演算を行うことなく, 有理演算を行うだけで判別することが可能となった.

第 5 章では, 非同次な変換のうち同次変換と同様に極限図形を扱うことのできる例を示す. 一般に非同次な変換と同次変換とは全く異なる極限図形形状を示す. すなわち, 同次変換の場合一つの方向に対し境界は一点しか現れないのに対し, 非同次な変換では無数に現れ得る. しかしながら, 制約条件は明らかではないものの, 非同次な二次変換に対して同次二次変換と同様に, 極限図形を解析できる場合があることを発見したので, 本章においてその例を挙げて詳しく述べる.

第 6 章では, 結論として, 本論文で得られた結果についてまとめ, 今後の研究の課題を示す.

# 第 2 章

# 実同次変換

この章では, 本論文を通して扱う実同次変換に対するいくつかの基本的な概念の定義とその性質について述べる.

$\boldsymbol{R}^n$からそれ自身への $n$ 次元実同次 $p$ 次変換$\boldsymbol{f}_{n,p} : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ は次のように書ける.

$$x'^{\kappa} = P^{\kappa}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p} x^{\lambda_1} x^{\lambda_2} \cdots x^{\lambda_p}, \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n; P^{\kappa}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p} \in \boldsymbol{R}) \tag{2.1}$$

ただし, プライムは変換後の座標を表し, $P^{\kappa}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p}$は共変対称な反変 1 階共変 $p$ 階のテンソルである. また本論文を通して, テンソル表記において総和規約を用いる.

同次 $p$ 次変換はその名前の通り, $p$ 次の項のみを用いて表される変換である. 特に $p$ が 2 の場合である同次二次変換は二体の相互作用過程を表現するために用いられ, 生物系の生殖過程や化学の二次反応系, また, 生物系を模倣した遺伝的アルゴリズムなど多くの問題で見ることができる.

変換式を同次に限定することにより様々な特徴が現れ, それに基づいて以下にいくつかの概念について説明を行う.

$p \geq 2$ の場合, 原点は常に局所安定な不動点となるため, 実同次 $p$ 次変換において点$\boldsymbol{x}$の挙動を考えるとき, 十分原点に近い点は変換の反復により原点へ収束し, 十分遠い点は多くの場合無限遠へ発散するが, その様相は単純ではない. この性質をより厳密に考察するために極限図形である次の概念を導入する [9].

**定義 2.1** 収束領域 $C$を次のように定義する.

$$C \equiv \{\boldsymbol{x}| \lim_{m\to\infty} \|\boldsymbol{f}_{n,p}^m(\boldsymbol{x})\| = 0\}.$$

単位球面 $S = \{\boldsymbol{x}|\|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ から$\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ への写像を

$$r(\boldsymbol{\theta}) = \sup\{\alpha|\alpha\boldsymbol{\theta} \in C, \boldsymbol{\theta} \in S\}$$

として, 発散収束境界 (divergence-convergence boundary, DCB)$B$を

$$B \equiv \{r(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}|r(\boldsymbol{\theta}) < \infty\}$$

と定義する. ただし $\|\boldsymbol{x}\|$ は$\boldsymbol{x}$のユークリッドノルムを表す.

発散収束境界の定義に関する模式図を図 2.1に示す.

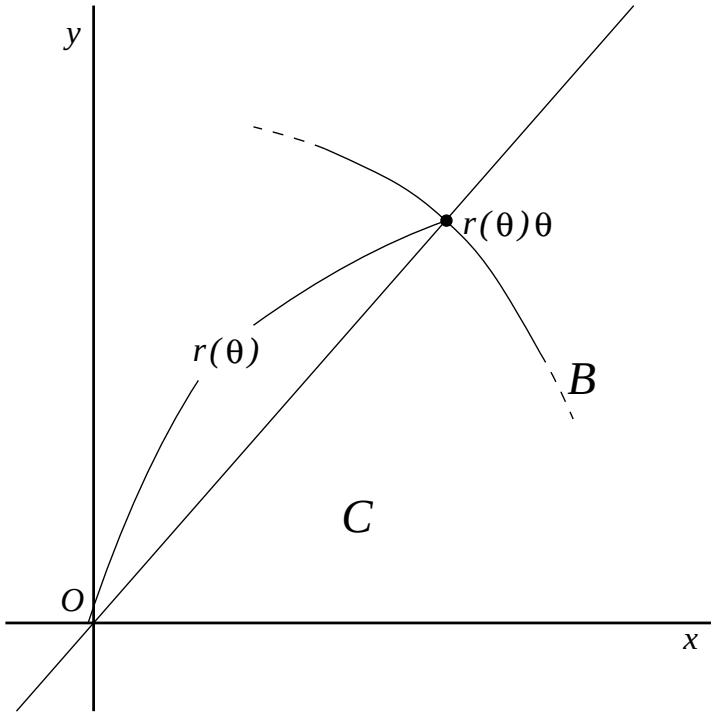



図 2.1: 発散収束境界の定義

2 次元実同次二次変換の場合の発散収束境界の例を図 2.2に示す.

発散収束境界は, 変換の反復によって原点へ収束する初期値の領域 (収束領域) と無限遠に発散する領域との境界である. 同次変換の場合その境界は, 原点から見た一つの方向に対

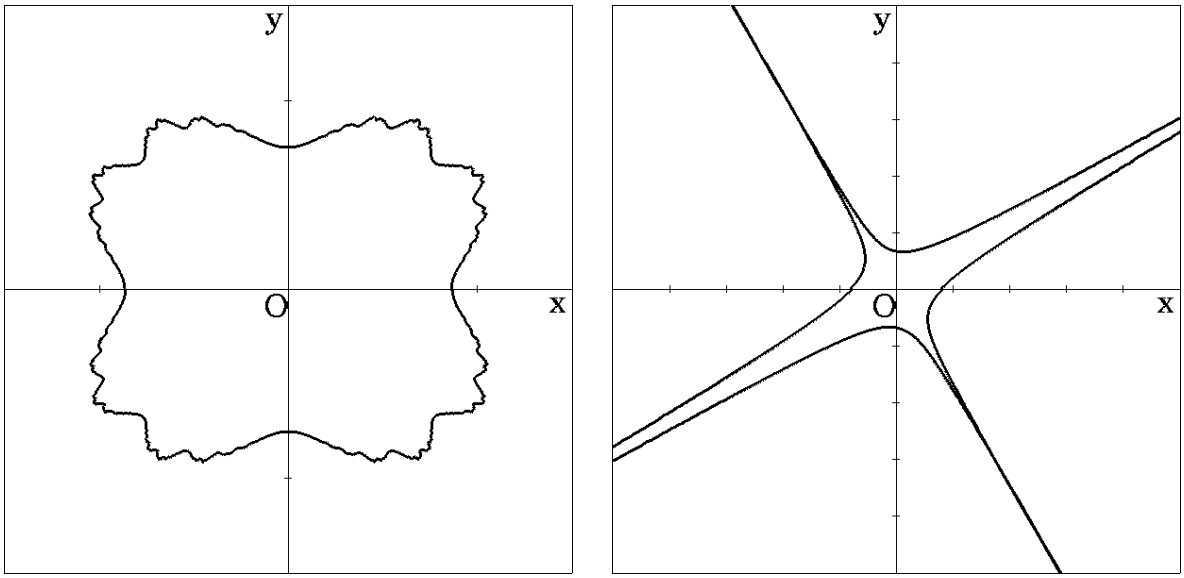



図 2.2: 2 次元実同次二次変換の発散収束境界の例

して唯一点存在する. 境界上の点は変換によって再び境界上の点に写される. したがって, 境界上の点は原点に収束することはなく, 原則的に原点から有限の距離に留まり続けるが, 例外的に無限遠に発散する場合もある.

次に文献 [8] に従って, 同次変換の不動方向を次のように定義する.

**定義 2.2** $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{f}_{n,p}(\boldsymbol{x}) = \Lambda\boldsymbol{x}$ $(\Lambda \in \boldsymbol{R})$ を満たす$\boldsymbol{x}$の方向を不動方向という. 特に, $\Lambda \neq 0$ の場合を有限不動方向, $\Lambda = 0$ の場合を無限不動方向という.

実同次 $p$ 次変換において点$\boldsymbol{x}$の方向成分に関する挙動を考察するために, 点$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$に対して単位球面上の点$\boldsymbol{\theta} \equiv \boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|$ を考え, 単位球面 $S$から $S$への写像を考えれば, $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$ に対応する$\boldsymbol{\theta} \to \boldsymbol{\theta}'$において$\boldsymbol{\theta}^{*\prime} = \boldsymbol{\theta}^*$を満たす$\boldsymbol{\theta}^*$が不動方向である.

同次変換による不動方向上の点の挙動を模式的に図 2.3に示す.

有限不動方向上には不動点が唯一点存在し, それより原点に近い側の点は原点に収束するように, 原点から遠い点は無限遠に発散するように不動方向上の点に写される. 一方, 無限不動方向上の点は全て, 一回の変換で原点に写される.

次に, 不動方向の近傍の方向が不動方向に近付いたり, 遠ざかったりする挙動を考察する

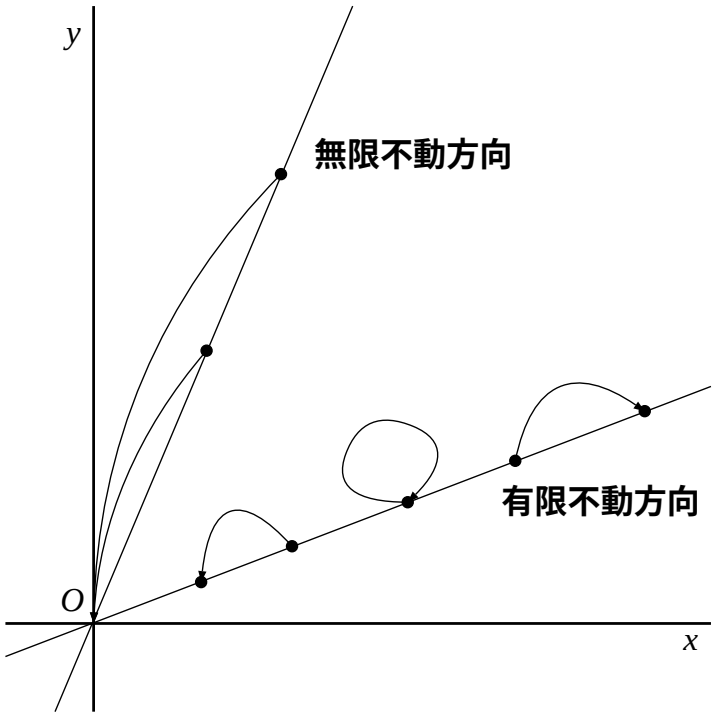



図 2.3: 不動方向上の点の挙動

ために, 不動方向の局所安定性を主に力学系の用語を用いて, 次のように定義する.

**定義 2.3** 不動方向$\boldsymbol{\theta}^*$ の近傍内の方向が変換の反復によって漸近的にその不動方向へ近付くとき, $\boldsymbol{\theta}^*$を安定不動方向と呼び, 安定でない不動方向を不安定不動方向と呼ぶ.

特に不安定不動方向の中で, 不動方向$\boldsymbol{\theta}^*$の近傍内に漸近的に不動方向へ近付く方向と遠ざかる方向の両方が含まれるとき, $\boldsymbol{\theta}^*$を方向不安定, 不動方向$\boldsymbol{\theta}^*$の近傍内の方向が, 変換の反復によって不動方向へ漸近的に近付くことも, 不動方向から離れることもないとき, $\boldsymbol{\theta}^*$を中立, また, 不動方向$\boldsymbol{\theta}^*$自体を除いて, $\boldsymbol{\theta}^*$の十分小さい近傍に属する方向$\boldsymbol{\theta}$の像$\boldsymbol{\theta}'$が$\boldsymbol{\theta}^*$の近傍に含まれないとき, $\boldsymbol{\theta}^*$を孤立と呼ぶ.

安定不動方向を表す図を 2.4に示す.

ここで, 発散収束境界に関して過去に導かれている定理を示す [9].

**定理 2.4** $C$は開集合である [9].

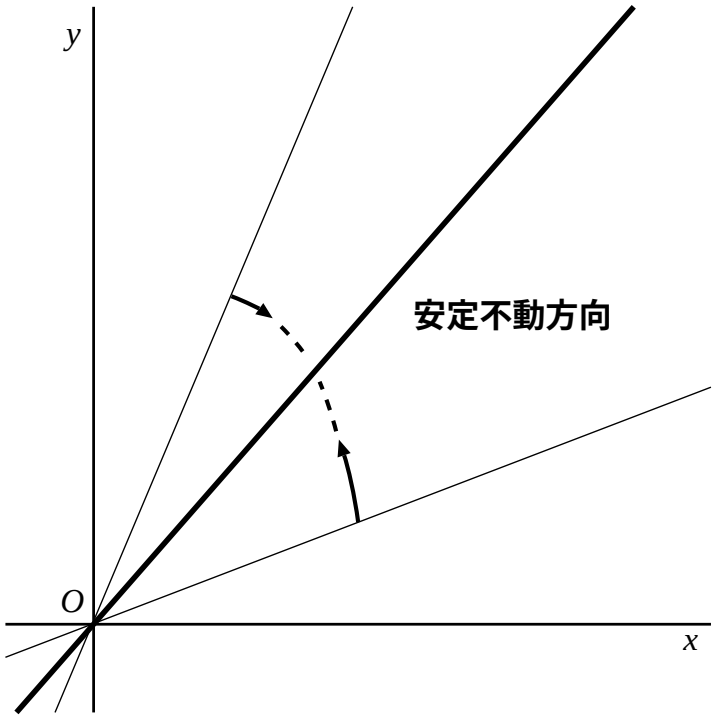



図 2.4: 安定不動方向

**定理 2.5** $r(\boldsymbol{\theta})$ は下半連続である [9].

**定理 2.6** 無限不動方向が存在しないとき, $r(\boldsymbol{\theta})$ は$\boldsymbol{\theta}$に関して連続である [9].

以上の定理は, 実同次二次変換に対して証明されているが, 一般の次数に容易に拡張できる.

次に, 実同次変換から得られる, 方向に関する写像について説明する.

実同次変換$\boldsymbol{f}_{n,p}$においては, 原点を除く任意の点$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, および任意の正数$\alpha$に対して,

$$\boldsymbol{f}_{n,p}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha^p \boldsymbol{f}_{n,p}(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ. このことは, 原点から見て同じ方向にある任意の 2 点を変換しても, 変換後再び同じ方向にあることを意味している.

また, 原点に対して対称な 2 点に関しては,

$$\boldsymbol{f}_{n,p}(-\boldsymbol{x}) = (-1)^p \boldsymbol{f}_{n,p}(\boldsymbol{x})$$

が成り立つので, その 2 点は同じ方向上にあると考えてもよい.

以上のことは, 実同次変換によって, 原点を通る直線が原点を通る直線に写されることを示している. この直線を一つの方向$\boldsymbol{\theta}$として考えると, 実同次変換から方向に関する写像を定義することができる. その写像における不動点は不動方向に相当する. 2 次元の場合は, 考察の便宜上方向$\boldsymbol{\theta}$の代わりに$\xi = y/x(\xi \in \boldsymbol{R} \cup \{\infty\})$ を考えてもさしつかえない. ただし, $y$軸は$\xi = \infty$ として考える. ここで, $x = x^1, y = x^2$(式 (2.1) 参照) である. また, 2 次元実同次 $p$ 次変換$\boldsymbol{f}_{2,p} : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$に対応して$\xi$から$\xi'$を与える写像を$\varphi : \xi \to \xi'$とする (図 2.5).

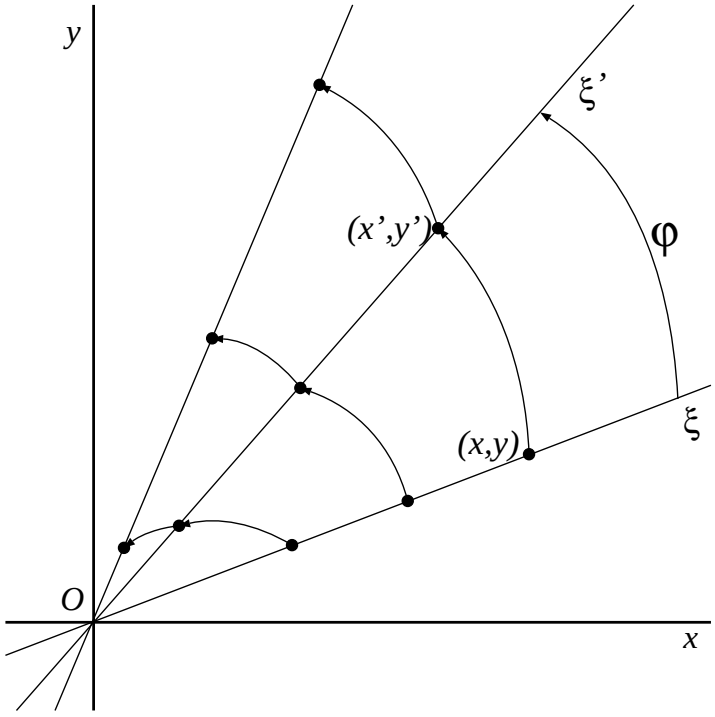



図 2.5: 方向に関する写像

以上により, 実同次変換に対する基本的な概念の定義とその性質を示した.

極限図形である発散収束境界は, 変換の反復によって原点に収束する初期値の領域と, 無

限遠へ発散する初期値の領域との境界として定義される. 境界上の点は変換によって再び境界上の点に写されるが, その挙動は主に方向に関する写像によって決定される. 安定不動方向の近傍では, 境界上の不動点に収束し, 周期的な方向上の点であれば, 周期的に振舞う. また, カオス的な挙動を示す場合もある. その様相は発散収束境界形状と密接に関係している場合があり, これに基づいて, 次章において, 自己相似性を方向に関する写像において定義し, その分類を行う.

# 第 3 章

# 2 次元実同次二次変換の分類

実同次二次変換は生物系の生殖過程や二次化学反応系, 遺伝的アルゴリズムなどのような, 二つの個体から一つの個体が生成される過程において多く見ることができる.

この変換に対して, Date and Iri[8] はその標準形を与えており, 特に 2 次元の場合について, その不変式系を示すと共に, 主に不動方向の数と重複度に基づく分類と標準形を与えている. また, 無限不動方向の存在や不動方向の局所安定性などの性質を決定する不変式を導出するなど, 理論的基礎を与えている. さらに, 伊達 [9] は数値解析の手法である Newton 法において, 解近傍での誤差の漸近挙動が同次二次変換で近似できることに基づき, 2 次元の場合に対して, 発散収束境界の様々な形状の例を図示し, その性質を解析している. また, Date[7] は 2 次元実同次二次変換と幾何学的対象を共通にする, 2 次元実同次二次微分方程式系に対する性質を論じている.

この章では, 2 次元実同次二次変換に対して, その極限図形である発散収束境界における自己相似形状を取り上げる. まず, 2 次元実同次二次変換に対しての従来の成果を紹介する. その後, 発散収束境界における自己相似形状のうち入れ子構造について, その定義を行い, さらにその構造の有無を判別する判別式を導入する.

## 3.1　2 次元実同次二次変換とその不変式系

2 次元実同次二次変換$\boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ は次のように書ける.

$$x'^{\kappa}=P^{\kappa}_{\lambda\mu}x^{\lambda}x^{\mu},\quad(\kappa=1,2;P^{\kappa}_{\lambda\mu}\in\boldsymbol{R}) \tag{3.1}$$

Date and Iri[8] はまず, 式 (3.1) の係数 $P^{\kappa}_{\lambda\mu}$を次のように $p_\lambda$と $Q^{\kappa}_{\lambda\mu}$とに分解している.

$$p_\lambda=P^{\kappa}_{\lambda\kappa},\quad Q^{\kappa}_{\lambda\mu}=P^{\kappa}_{\lambda\mu}-\frac{1}{3}(\delta^{\kappa}_{\lambda}p_\mu+\delta^{\kappa}_{\mu}p_\lambda),\quad(\kappa,\lambda,\mu=1,\ldots,n)$$

ここで$\delta^{\kappa}_{\lambda}$は Kronecker のデルタである.

さらに $Q^{\kappa}_{\lambda\mu}$から$\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu}$を

$$\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu}=\epsilon_{\kappa\nu}Q^{\nu}_{\lambda\mu}$$

のように定義する. ここで, $\epsilon_{\kappa\lambda}$は$\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0,\epsilon_{12}=-\epsilon_{21}=1$ である. このとき, $\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu}$は

$$\begin{aligned}f&\equiv x'y-xy'\\&=\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu}x^{\kappa}x^{\lambda}x^{\mu}\end{aligned}$$

によって定義される三次形式 $f$の係数であり, この三次形式を基本三次形式と呼ぶ.

2 次元実同次二次変換の不動方向は, 基本三次形式 $f$を零とする実根に相当し, したがって, 不動方向の数や重複度は$\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu}$の値のみに依存し, $p_\kappa$の値とは独立である.

また, 2 次元実同次二次変換に対して, 座標系の線形変換の下で不変な概念を取り扱うために不変式系が導入されている. この不変式系は, 基本三次形式 $f$と一次形式 $p_\kappa x^\kappa$との組合せに対する不変式系から得られる.

$$D\equiv-2\epsilon_{\kappa\lambda}\epsilon_{\mu\nu}h^{\kappa\mu}h^{\lambda\nu}, \tag{3.2}$$

$$H\equiv h^{\kappa\lambda}p_\kappa p_\lambda, \tag{3.3}$$

$$F\equiv\epsilon^{\rho\lambda}\epsilon^{\sigma\mu}Q^{\kappa}_{\lambda\mu}p_\kappa p_\rho p_\sigma, \tag{3.4}$$

ここで, $h^{\kappa\lambda}\equiv\dfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\epsilon^{\rho\sigma}Q^{\kappa}_{\mu\rho}Q^{\lambda}_{\nu\sigma}$ , $\epsilon^{\kappa\lambda}$は$\epsilon^{11}=\epsilon^{22}=0,\epsilon^{12}=-\epsilon^{21}=-1$ である.

さらに重要な性質の判別に用いられる不変式列

$$K_m \equiv F + 9(-2)^{m-3}H - 27(-8)^{m-3}D, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.5}$$

が導入されている. この不変式列のうち, $m = 1$ の場合である $K_1$の符号は主に不動方向の局所安定性の判別に, $m = 2$ の場合である $K_2$の符号は主に無限不動方向の存在の判別に用いられ, それらの不変式系を用いた分類がなされている.

上の不変式系を用いて, 2 次元実同次二次変換に対して, 主に不動方向の数と重複度に基づく分類と標準形が与えられている [8].

**定理 3.1** 2 次元同次二次変換は次の 10 個の標準形の唯一つにアフィン等価である [8].

$$\text{Type I}\ominus: \quad \begin{cases} x' = -2xy + \dfrac{2}{3}x(\hat{p}_1 x + \hat{p}_2 y), \\ y' = -x^2 + y^2 + \dfrac{2}{3}y(\hat{p}_1 x + \hat{p}_2 y); \end{cases}$$

$$\text{Type I}\oplus: \quad \begin{cases} x' = -2xy + \dfrac{2}{3}x(\hat{p}_1 x + \hat{p}_2 y), \\ y' = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{3}y(\hat{p}_1 x + \hat{p}_2 y); \end{cases}$$

$$\text{Type II(1)}: \quad \begin{cases} x' = \left(\dfrac{2}{3}\hat{p}_1 - 1\right)x^2 + xy, \\ y' = \dfrac{2}{3}(\hat{p}_1 + 3)xy + y^2; \end{cases}$$

$$\text{Type II(2)}: \quad \begin{cases} x' = \left(\dfrac{2}{3}\hat{p}_1 - 1\right)x^2, \\ y' = \dfrac{2}{3}(\hat{p}_1 + 3)xy; \end{cases}$$

$$\text{Type III(1)}: \quad \begin{cases} x' = xy, \\ y' = x^2 + y^2; \end{cases}$$

$$\text{Type III(2)}: \quad \begin{cases} x' = -xy, \\ y' = x^2 - y^2; \end{cases}$$

$$\text{Type III(3)}: \quad \begin{cases} x' = x^2, \\ y' = x^2 + xy; \end{cases}$$

$$\text{Type III(4)}: \quad \begin{cases} x' = 0, \\ y' = x^2; \end{cases}$$

$$\text{Type IV(1)}: \quad \begin{cases} x' = xy, \\ y' = y^2; \end{cases}$$

$$\text{Type IV(2)}: \quad \begin{cases} x' = 0, \\ y' = 0. \end{cases}$$

2 次元実同次二次変換の極限図形である発散収束境界の形状と性質について, 2 次元の Newton 法の解近傍における誤差の漸近的挙動と関連して論じた研究がすでになされている [9]. その中では様々な発散収束境界の形状の例が図示されており, 発散収束境界が複雑な形状をもつことも多いことが示されている. その 1 例を図 3.1に示す. この発散収束境界の描画手法は [9] に従っている. 中央と右の二つの図はそれぞれ, 左隣の図の図内長方形部分を拡大したもので, 境界形状の一部を拡大しても再び同じ形が現れることが観察される.

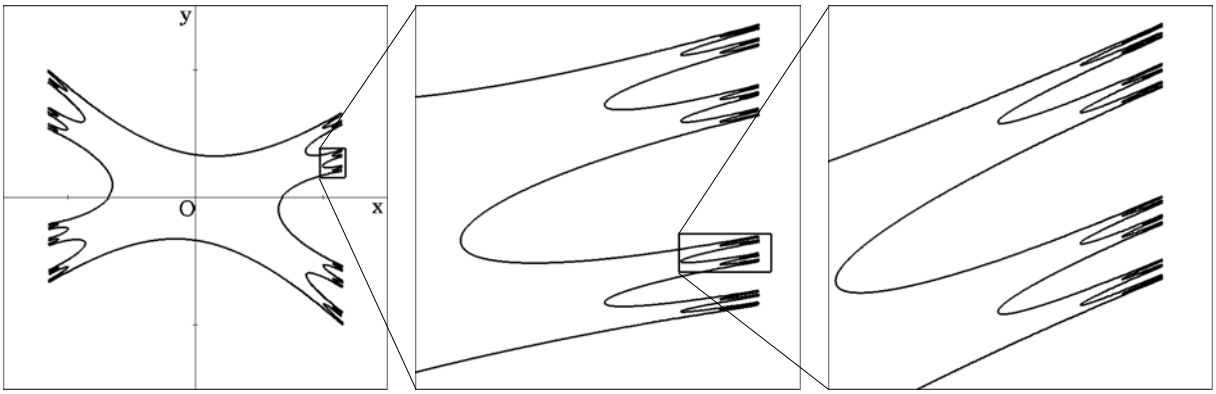



図 3.1: 入れ子構造をもつ発散収束境界の例

以上の例のように, 発散収束境界の形状に自己相似形状が現れる場合があることはすでに示されていたが, その形状の有無を与えられた変換式から判別することは行われていなかった. 次の節で, 2 次元実同次二次変換の発散収束境界における自己相似形状として入れ子構造を定義し, その有無の判別を行うための判別式を導入する.

## 3.2 発散収束境界の入れ子構造

自己相似性とは, 図形の一部を拡大すると全体, あるいはより大きな部分と類似した形状が現れる性質のことをいう. 部分と全体とが相似な図形になっていなくても, その複雑さが同じように見える場合には, 統計的に, これも自己相似性をもつという. この性質はフラクタル構造の重要な性質であり, その存在は, 一部の情報から全体の構造を予測したり, 逆に全体の構造を元に微小な領域の構造を理解することを可能にする. このような性質を利用して, 時系列予測や画像解析など, 様々な分野への応用が行われつつある.

この節では, 発散収束境界の自己相似形状の一つとして, 入れ子構造について論じる.

発散収束境界の入れ子構造を, ある部分の境界形状とそれに含まれる一部分の境界形状が相似であり, かつ, 1 回の変換で含まれている部分の境界が含んでいる部分の境界全体に移されるような性質をもつ構造と考える. 図 3.1は境界の入れ子構造の例を示している. これを厳密な概念とするために, 本論文では方向に関する写像の反復における入れ子構造を

次のように定義する.

**定義 3.2** 方向に関する写像$\varphi(\xi)$ を集合関数として考えたとき, ある区間 $[\xi_a, \xi_b]$ とその区間に真に含まれる部分区間 $(\xi_{c_1}, \xi_{c_2})$ が存在して,

$$\varphi([\xi_a, \xi_{c_1}]) = [\xi_a, \xi_b], \tag{3.1}$$

$$\varphi([\xi_{c_2}, \xi_b]) = [\xi_a, \xi_b], \tag{3.2}$$

$$\varphi((\xi_{c_1}, \xi_{c_2})) \cap [\xi_a, \xi_b] = \emptyset \tag{3.3}$$

が成り立ち, かつ任意の$\xi \notin [\xi_a, \xi_b]$ に対して, $\varphi(\xi) \notin [\xi_a, \xi_b]$ であるとき, $\varphi$ の反復によって再帰的に現れる $[\xi_a, \xi_b]$ 内の構造を方向に関する写像$\varphi$ の入れ子構造と呼ぶ.

この定義を簡単に説明すると, ある方向の区間 $[\xi_a, \xi_b]$ があり, その区間を三つに分割する. 両端の区間はそれぞれ区間 $[\xi_a, \xi_b]$ 全体に写され, 中央の区間は区間 $[\xi_a, \xi_b]$ の外側に写される (図 3.2). ただし, 区間 $[\xi_a, \xi_b]$ の外側から内側へ写されることはない. これが定義 3.2 の内容である. この過程は, テント写像 $T : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$

$$T(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|)$$

の反復によって, 不変集合として Cantor 集合が得られる様相と類似したものである. 発散収束境界の入れ子構造とは, 直観的には境界の一部が自分自身に類似なものを一定の規則に従って無数に含む形状をいうが, 厳密には上で定義した方向に関する写像の入れ子構造を使うものとする.

これより, 入れ子構造が存在するための必要十分条件を求める. そのために, まずいくつか補題としてその必要条件を示し, それらを元に必要十分条件を定理としてまとめる.

不動方向の局所安定性と方向に関する写像の入れ子構造の出現との間に, 次の補題に示す関係が成り立つ.

**補題 3.3** 2 次元実同次二次変換において, 方向に関する写像が入れ子構造をもつのは相異なる二つの不安定不動方向が存在する場合に限られる.

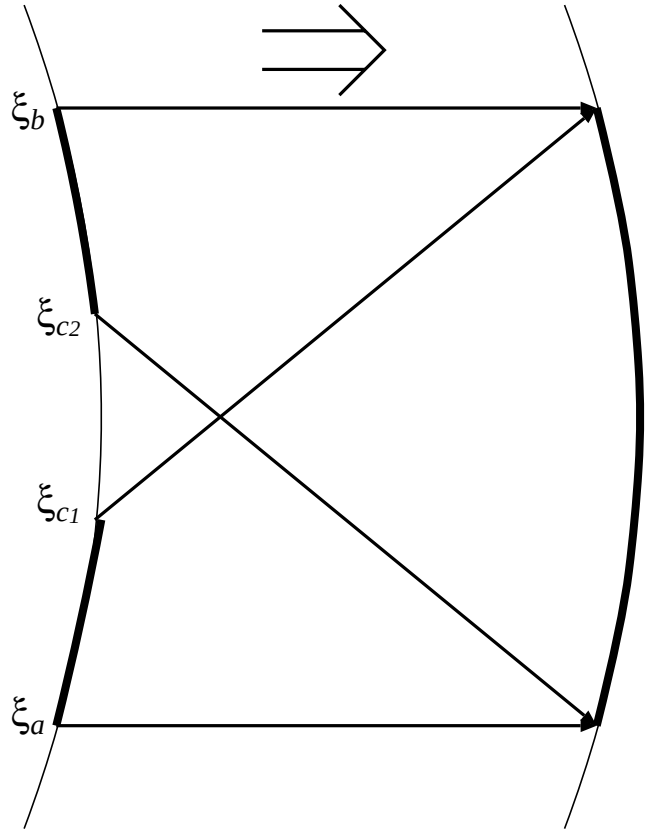



図 3.2: 入れ子構造の定義

**証明**　2 次元実同次二次変換では, 写像$\varphi(\xi)$ のグラフは二次曲線であるため, 定義 3.2の式 (3.1), (3.2) を同時に満たすとき, 式 (3.1), (3.2) それぞれの定義域で$\varphi(\xi)$ は全単射である. したがってそれぞれ逆写像が定義でき, 逆写像の定義域, $[\xi_a, \xi_b]$ が有限区間であるから Brouwer の不動点定理より, $[\xi_a, \xi_{c_1}], [\xi_{c_2}, \xi_b]$ のそれぞれの区間に少なくとも一つずつ$\varphi(\xi)$ の不動点が存在する. したがって, 2 次元実同次二次変換が入れ子構造をもつとき, 少なくとも二つの不動方向が存在する.

2 次元実同次二次変換がもつ不動方向の数は高々三つである. 三つの不動方向を持つ場合, それらの全てが安定となることはなく, また, それらのうちの二つの不動方向が安定である場合は, 文献 [8] で示されている標準形を用いた$\varphi(\xi)$ のグラフの解析により, 入れ子構造が存在しないことを示すことができる. その例を図 3.3 に示す. 図の例では$\xi = -1/\sqrt{3}$

と$\xi = \infty$ が安定不動方向である. 同様にして二つの不動方向を持つ場合でそれらの両方が安定である場合にも入れ子構造が存在しないことを示すことができる.

したがって, 入れ子構造が存在するのは相異なる二つの不安定不動方向が存在する場合に限られる. (Q.E.D.)

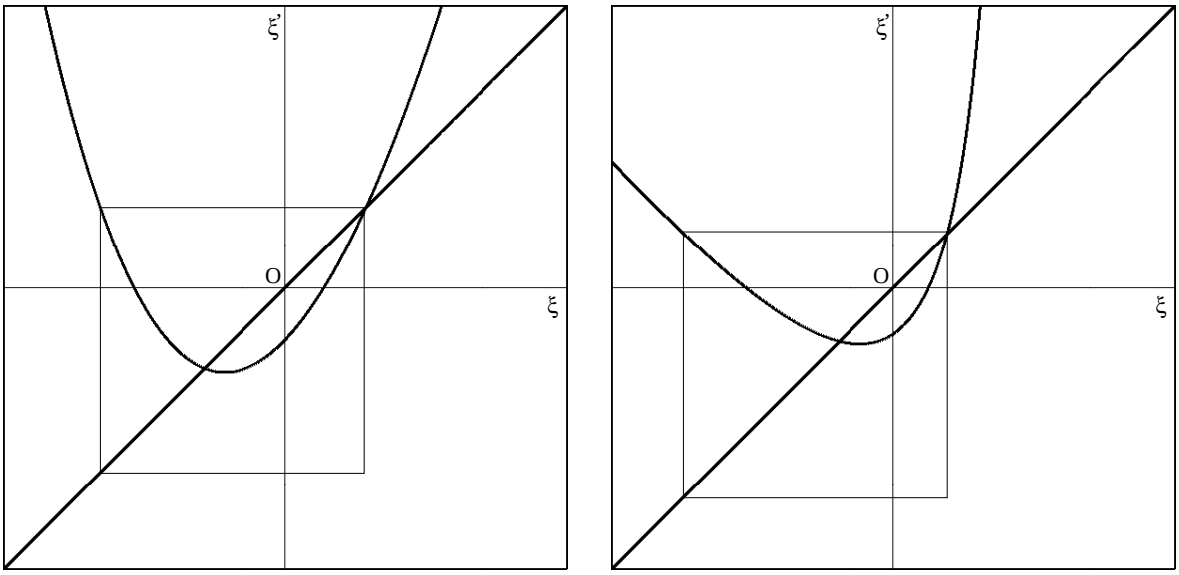



図 3.3: 二安定, 一不安定不動方向をもつ方向に関する写像の例

この補題は入れ子構造が出現するための必要条件を述べており, これが満たされない場合には入れ子構造が存在しない. この判別には不動方向の局所安定性が大きな役割を果たすが, 不動方向の局所安定性のみではその必要十分条件を与えることができない. そのため, 方向成分の大域的挙動を調べることによって, 方向に関する写像の入れ子構造の出現条件を求め, それを用いて境界の入れ子構造の存在を判別することとする. それを論ずるためには, 文献 [8] で示されている不動方向の数を基に作られた定理 3.1の標準形を用いる方が理解しやすいためそれを使用すると共に, 主たる役割を果たす Type I$\ominus$を以下に再度引用する.

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2}{3}\hat{p}_1 x^2 + 2\left(\dfrac{1}{3}\hat{p}_2 - 1\right)xy, \\ y' = -x^2 + \dfrac{2}{3}\hat{p}_1 xy + \left(\dfrac{2}{3}\hat{p}_2 + 1\right)y^2. \end{cases} \qquad \hat{p}_1, \hat{p}_2 \in \boldsymbol{R} \tag{3.4}$$

このタイプは三つの不動方向をもち, それらは$\xi = \pm 1/\sqrt{3}, \infty$ である. 補題 3.3 を満たす不安定不動方向が二つある場合というのは, 不安定不動方向が三つの場合, または安定不動方向が一つと不安定不動方向が二つの場合がある. このうち入れ子構造が出現する可能性があるのは, 一つの安定不動方向と二つの不安定不動方向が存在する場合に限られる.

式 (3.4) の構成より, パラメータ空間 $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ において, 座標軸の$\pm 2\pi/3$ の回転および$\hat{p}_1$ の符号の反転は不動方向の入れ換えに相当し, 不変式の符号に影響を与えない. すなわち, $\hat{p}_1 \geq 0$, $\hat{p}_1 - \sqrt{3}\hat{p}_2 \leq 0$ の 6 分の 1 平面のパラメータのみで, 式 (3.4) に属するタイプを表現することができる. 後に図 3.10(b) にパラメータ空間の分類を示す際に, 6 分の 1 平面のみを表示したのはこの理由による.

式 (3.4) において方向に関する写像は, 次のような式で表すことができる.

$$\xi' = \varphi(\xi) = \frac{(2\hat{p}_2 + 3)\xi^2 + 2\hat{p}_1\xi - 3}{2(\hat{p}_2 - 3)\xi + 2\hat{p}_1}. \quad (\xi\text{が孤立不動方向以外の場合})$$

$$\xi' = \varphi(\xi) = \xi. \quad (\xi\text{が孤立不動方向の場合})$$

ただし孤立不動方向が存在する場合は, 後に述べる補題 3.4の要件を満たさないため, 入れ子構造は出現しない.

補題 3.3の条件を満たすパラメータ領域内での$\xi' = \varphi(\xi)$ のグラフの例を図 3.4, 3.5に示す. また, 図 3.4, 3.5に対応する変換が与える発散収束境界形状を図 3.6, 3.7に示す. 定義 3.2に従って, 図 3.4の写像は入れ子構造をもたず, 一方図 3.5の写像は入れ子構造をもつ. 図 3.4, 3.5においては, その判別は, $\xi' = \varphi(\xi)$ のグラフである曲線が図内正方形の下辺に交わるか否かで行うことができる. この判別式は以下のような方法で導き, 結果を式 (3.7) に示す.

不動方向$\xi = 1/\sqrt{3}$を$\xi_\alpha$, $\xi_\beta (\neq \xi_\alpha)$ を$\varphi(\xi_\beta) = \xi_\alpha$ を満たす方向とする. 入れ子構造をもたない図 3.4と入れ子構造をもつ図 3.5は

$$\varphi(\xi_\gamma) = \xi_\beta \tag{3.5}$$

となる$\xi_\gamma$ の存在で判別することができる.

図 3.4, 3.5の例では, 不動方向$\xi = 1/\sqrt{3}$に対する$\xi_\gamma$が入れ子構造存在の判別に関係し, 不動方向$\xi = -1/\sqrt{3}$, および$\xi = \infty$ に対する$\xi_\gamma$は関係しない. しかし, どの不動方向に対する

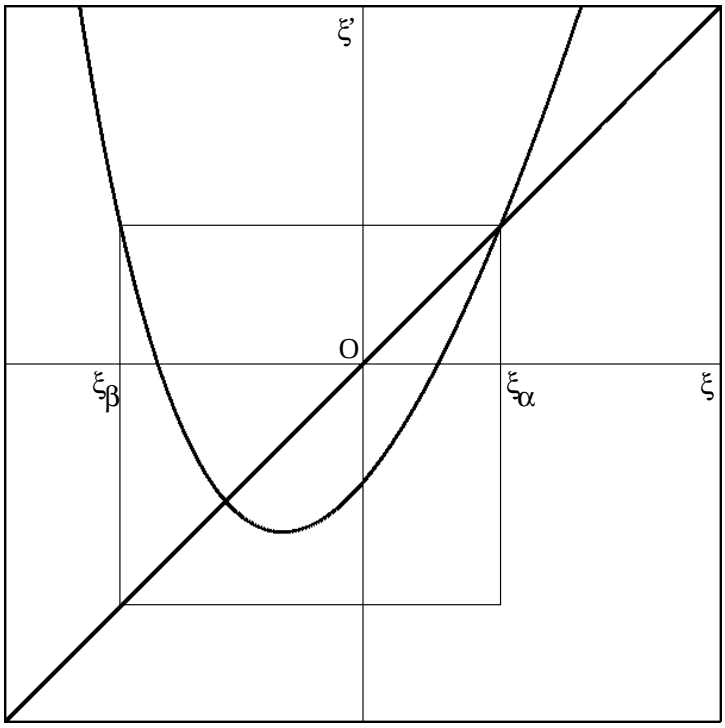



図 3.4: Type I⊖, $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = (3, 4)$ の方向に関する写像

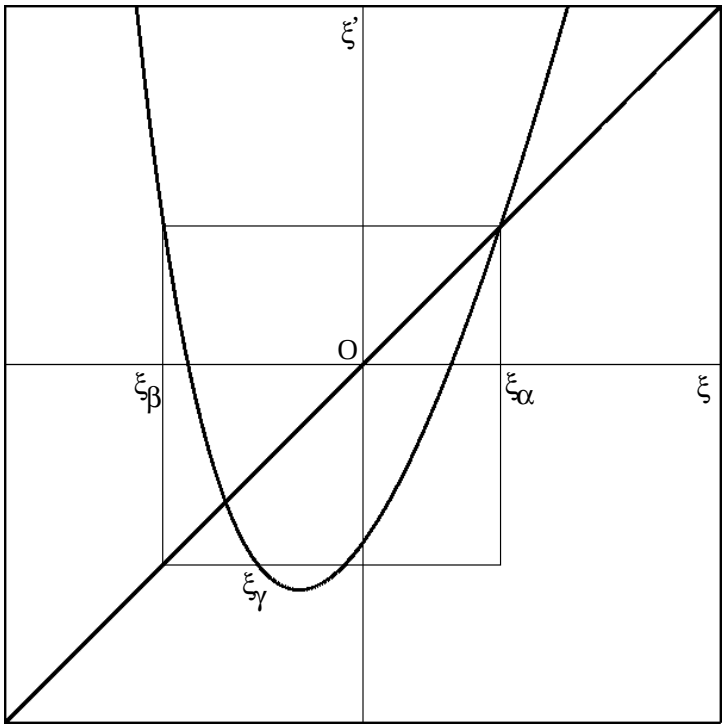



図 3.5: Type I⊖, $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = (2, 4)$ の方向に関する写像

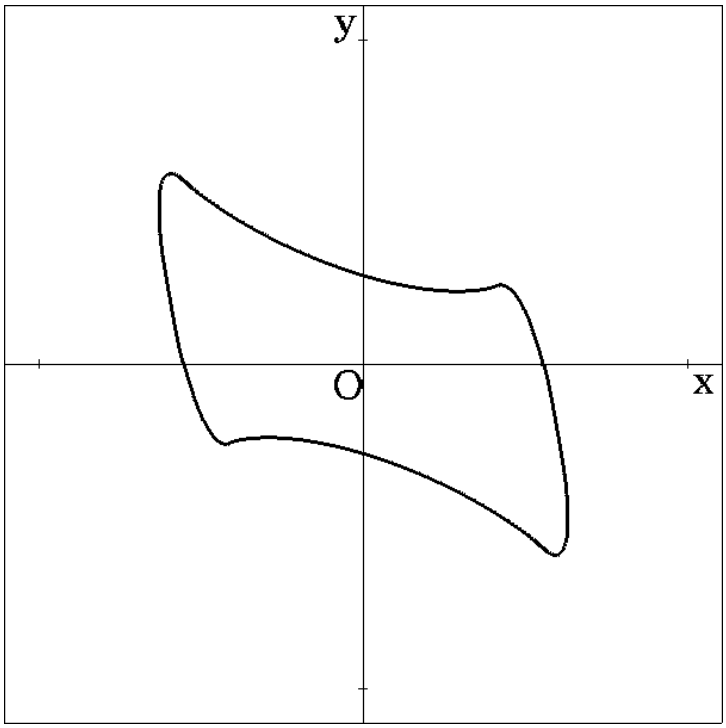



図 3.6: Type I$\ominus$, $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = (3, 4)$ の発散収束境界

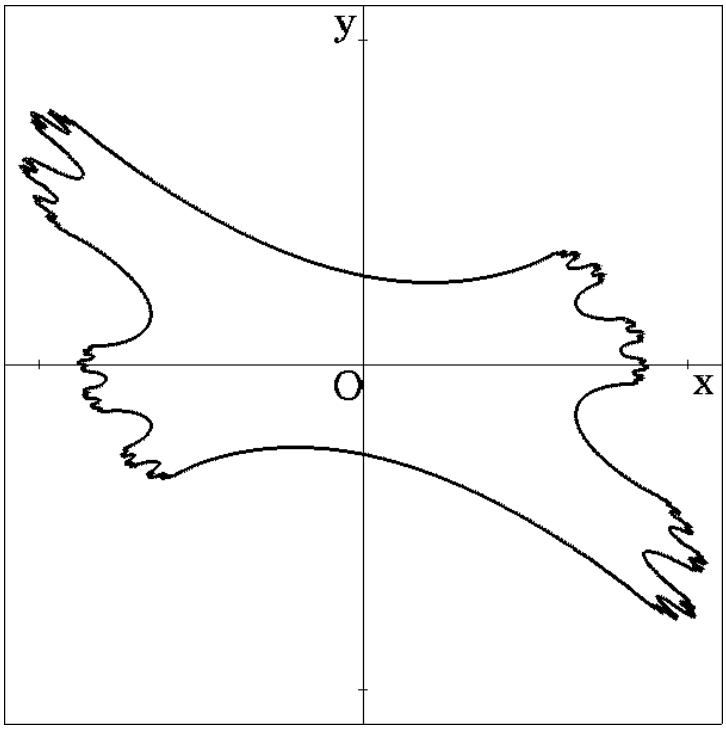



図 3.7: Type I$\ominus$, $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = (2, 4)$ の発散収束境界

$\xi_\gamma$が入れ子構造に関係するかは座標変換によって不変ではないため, 三つの不動方向を同時に扱い, $\xi_\gamma$の総数と入れ子構造の存在との関係について次の補題を得る.

**補題 3.4** 2次元実同次二次変換において, 方向に関する写像が入れ子構造をもつのは式 (3.5) を満たす$\xi_\gamma$が相異なる二つ以上の不動方向に対して存在する場合に限られる.

**証明** 補題 3.3の証明手続きの中で証明したように, 定義 3.2の式 (3.1), (3.2) を同時に満たすとき, 区間 $[\xi_a, \xi_{c_1}], [\xi_{c_2}, \xi_b]$ 内にそれぞれ少なくとも一つずつの不動方向が存在する. 今, 区間 $[\xi_a, \xi_{c_1}]$ 内の不動方向を$\xi_\alpha$とする. このとき, ある$\xi_\beta \in [\xi_{c_1}, \xi_b]$ が存在し, $\varphi(\xi_\beta) = \xi_\alpha$ が成り立つ. さらに, ある$\xi_{\gamma_1} \in [\xi_a, \xi_{c_1}], \xi_{\gamma_2} \in [\xi_{c_1}, \xi_b]$ が存在し,

$$\varphi(\xi_{\gamma_1}) = \varphi(\xi_{\gamma_2}) = \xi_\beta$$

が成り立つ. したがって不動方向$\xi_\alpha$に対して式 (3.5) を満たす相異なる二つの$\xi_\gamma$が存在する.

同様にして $[\xi_{c_1}, \xi_b]$ 内にある不動方向に対しても, 相異なる二つの$\xi_\gamma$が存在し, 補題 3.4が証明される. (Q.E.D.)

不動方向$\xi = 1/\sqrt{3}$に対して$\xi_\gamma$が存在するかどうかの判別式は, 二次方程式の根の判別式によって求められ, 標準形パラメータを用いて,

$$(\sqrt{3}\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + 6)\{\sqrt{3}\hat{p}_1(8\hat{p}_2 + 3) - (8\hat{p}_2^2 - 3\hat{p}_2 + 18)\}$$

と表される. 同様にして, 不動方向$\xi = -1/\sqrt{3}$に対しては

$$(\sqrt{3}\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 6)\{\sqrt{3}\hat{p}_1(8\hat{p}_2 + 3) + (8\hat{p}_2^2 - 3\hat{p}_2 + 18)\},$$

不動方向$\xi = \infty$ に対しては

$$(\hat{p}_2 - 3)\{6\hat{p}_1^2 - (\hat{p}_2 - 3)(2\hat{p}_2 + 3)\}$$

の判別式が得られる. 各方向の判別式の積をとることにより式 (3.6) を得る.

$$\begin{aligned}&[\{3\hat{p}_1^2 - (\hat{p}_2 + 6)^2\}(\hat{p}_2 - 3)] \\ &\quad \times [\{6\hat{p}_1^2 - (\hat{p}_2 - 3)(2\hat{p}_2 + 3)\}\{3\hat{p}_1^2(8\hat{p}_2 + 3)^2 - (8\hat{p}_2^2 - 3\hat{p}_2 + 18)^2\}].\end{aligned} \tag{3.6}$$

式 (3.6) の第 1 因子の符号は, 不変式 (3.5) の $m = 3$ の場合である $K_3$の符号に一致する. 一方式 (3.6) の第 2 因子は, 今回新たに導出された式であり, この式を$\Gamma$と名付ける. このとき, 式 (3.6) は $K_3 \times \Gamma$となる. $\Gamma$は$\xi_\gamma$の個数を判別するために導出したものであり, また後の定理で示すように, 入れ子構造の存在を判別する際に重要な役割を果たす. $\Gamma$は前節で導入した不変式 $D, H, F$を用いて表現すると次の式のようになる.

$$\Gamma \equiv -729D^2 - 675DF + 512F^2 - 1701DH - 1152FH + 648H^2. \tag{3.7}$$

$\Gamma$を不変式を用いて表現したことによって, $\xi_\gamma$の個数を始め, 求めようとする入れ子構造の存在を, 座標系を固定することなく判別することができるようになる.

補題 3.4に示したように, $\xi_\gamma$の個数は入れ子構造存在の判別に重要な役割を果たし, それは次の補題 3.5のようになる. ただし, 補題における $K_0, K_3$は式 (3.5) の $m = 0, 3$ の場合である.

**補題 3.5** 補題 3.3および補題 3.4に関係する$\xi_\gamma$の個数について, 不変式の符号の組合せが存在する場合のみを表すと表 3.1 の通りである.

式 (3.6) で示されているように, $\xi_\gamma$の存在に関する判別式は不変式 $K_3 \times \Gamma$によって表される. 補題 3.5は式 (3.6) を個々の不動方向に対する$\xi_\gamma$の存在の判別式に因数分解し, その因子の符号の組合せを調べることにより, $\xi_\gamma$の個数と不変式$\Gamma, K_3$の符号との関係を求めたものである.

判別式を構成する三つの因子の符号の組合せで, (負×負×負) の場合と (負×正×正) の場合とが存在し, これを識別するために $K_0$を用いた. また$\Gamma < 0$ の場合 $K_0$の符号の部分を空欄にしてあるのは, $\xi_\gamma$の数が $K_0$のどの符号に対しても同じことがいえるという意味である.

補題 3.3および補題 3.4はそれぞれ, 入れ子構造が出現するための必要条件であるが, 補題 3.5およびいくつかの例外処理を行うことにより必要十分条件を求め, 次の定理 3.6 を得る. ただし, 定理における $K_0, K_1, K_2$は式 (3.5) の $m = 0, 1, 2$ の場合である.

表 3.1: 不変式に基づく$\xi_\gamma$の数の分類

| | | | 不動方向が三つの場合 | 不動方向が二つの場合 |
|---|---|---|---|---|
| $\Gamma > 0$ | $K_0 > 0$ | $K_3 > 0$ | 4 | 0 |
| | | $K_3 = 0$ | 2 | 0 |
| | | $K_3 < 0$ | 2 | 2 |
| | $K_0 < 0$ | $K_3 < 0$ | 6 | 4 |
| $\Gamma = 0$ | $K_0 > 0$ | $K_3 > 0$ | 5 | — |
| | | $K_3 \leq 0$ | 3 | — |
| | $K_0 = 0$ | $K_3 < 0$ | — | 3 |
| | $K_0 < 0$ | $K_3 = 0$ | 0 | — |
| | | $K_3 < 0$ | 5 | — |
| $\Gamma < 0$ | | $K_3 > 0$ | 6 | — |
| | | $K_3 \leq 0$ | 4 | — |

**定理 3.6** 2 次元実同次二次変換に対して, 次の三つの条件が同時に成り立つとき, またそのときに限り, その変換から導かれる方向に関する写像は入れ子構造をもつ:

(i) 相異なる不動方向が二つ以上存在する,

(ii) $K_1 < 0$ and $K_2 \neq 0$,

(iii) $\Gamma < 0$ or $K_0 < 0$.

**証明** 条件 (i) は補題 3.3における不動方向の数についての必要条件を述べており, 条件 (ii) は補題 3.3における不動方向の局所安定性に関する条件, および孤立不動方向をもたない条件を表している.

入れ子構造をもつための必要条件である, 補題 3.3, 補題 3.4を共に満たす二次変換は補題 3.5の表 3.1において相異なる$\xi_\gamma$の数が 4 個以上の場合である.

それら全ての不変式の組合せに対して, 方向に関する写像$\varphi(\xi)$ のグラフを標準形を用いて解析することにより, 不動方向が三つの場合の$\Gamma \geq 0, K_0 < 0, K_3 < 0$ と$\Gamma < 0$, 不動方向

が二つの場合の$\Gamma > 0, K_0 < 0, K_3 < 0$ の組合せのとき, またそのときに限り入れ子構造が存在することを示すことができる.

例として, 不動方向が三つの場合について入れ子構造が存在しない, $\Gamma > 0, K_0 > 0, K_3 > 0$ と, 入れ子構造が存在する, $\Gamma < 0, K_3 < 0$ のときの$\varphi(\xi)$ のグラフを図 3.8,3.9に示す.

表 3.1に示す不変式の各符号の可能な組合せから, 上で述べた入れ子構造が存在する場合を定める条件は定理の条件 (iii) $\Gamma < 0$ or $K_0 < 0$ で表すことができる. ただし, 不動方向が三つの場合の$\Gamma = 0, K_0 < 0, K_3 = 0$ のときは $K_2 = 0$ であり条件 (ii) を満たさないため, ここでは考慮しない. 以上により必要十分条件が示され, 定理 3.6を得る. (Q.E.D.)

入れ子構造が出現するための必要十分条件をパラメータ空間上で示すため, 不動方向が三つの場合について標準形パラメータ空間を図 3.10(a) に示す. 図 3.10(a) において, 影のついている部分が入れ子構造の現れる部分である. ただし, 破線で示す $K_2 = 0$ の部分 ($K_2 = 0$ という文字のついた破線とそれを原点に対して $2\pi/3$ ずつ回転させた 3 直線) を除く. 実線で描かれた 3 組の双曲線が$\Gamma = 0$ の曲線である. 符号は原点のある側が$\Gamma < 0$ である. 細い 3 本の実直線は $K_0 = 0$ であり, 双曲線$\Gamma = 0$ の漸近線となっている. $\Gamma = 0$ を与える曲線 6 本のうち, 入れ子構造存在の判別に必要なのは 3 本のみであり, これを識別するために$K_0$の符号を用いる. それは $K_0 > 0$ の領域にある.

なお, 不変式列 $K_m$の構造は $K_m = 0$ を満たす 3 直線が, $K_{m-1} = 0$ が作る正三角形に外接する正三角形を延長した直線となっている.

式 (3.4) のすぐ後ろで述べたが, 6 分の 1 平面のパラメータのみで, 式 (3.4) に属するタイプを表現することができ, その 6 分の 1 平面を拡大したものを図 3.10(b) に示す. 図 3.10(b) の中で, (Ba) は一つの安定不動方向と二つの不安定不動方向が存在し, かつ入れ子構造が現れない領域である. また, (A) は二つの安定不動方向と一つの不安定不動方向が存在する領域, (C) は三つの不安定不動方向が存在する領域である.

以上により, 発散収束境界における入れ子構造の有無を判別することが可能となった. 発散収束境界が入れ子構造をもつかどうかは, シミュレーションを行って近似図形を描くこと

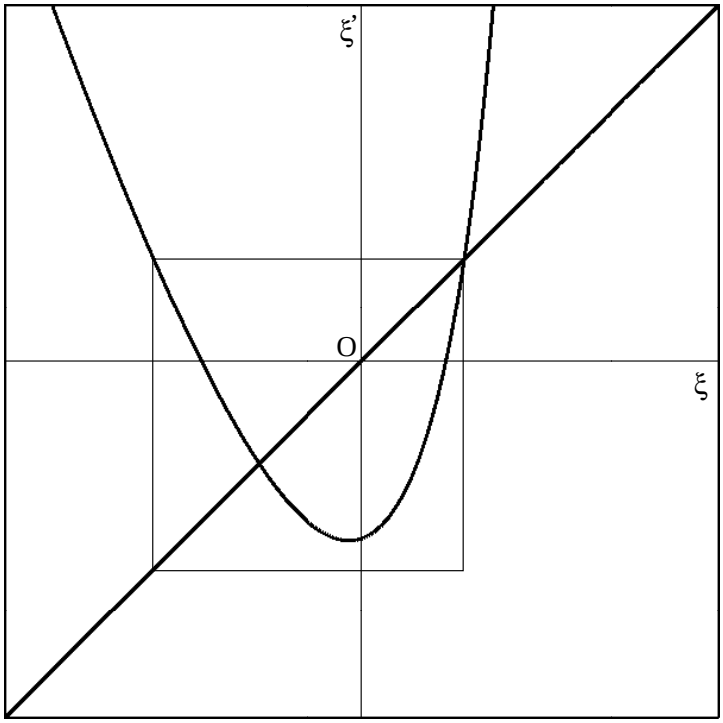



図 3.8: Type I$\ominus$, $\Gamma > 0, K_0 > 0, K_3 > 0$ の方向に関する写像

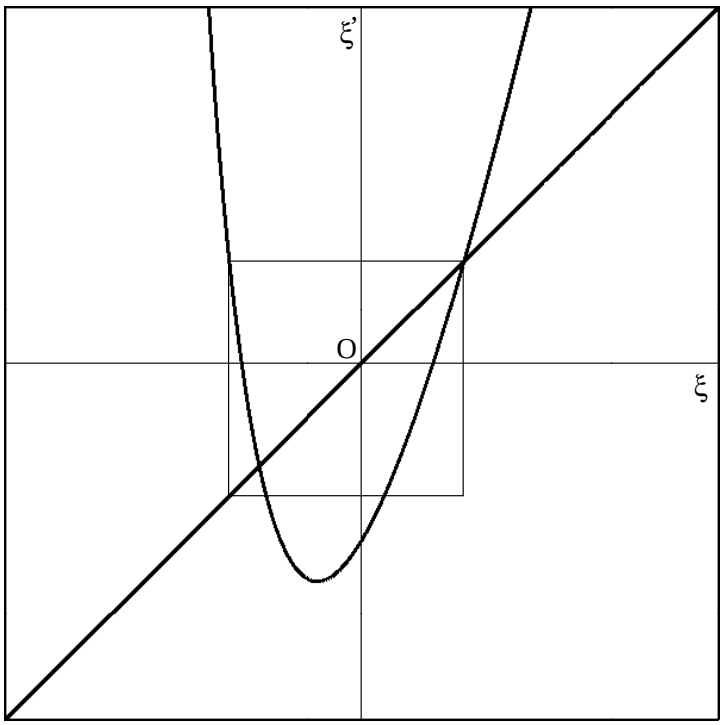
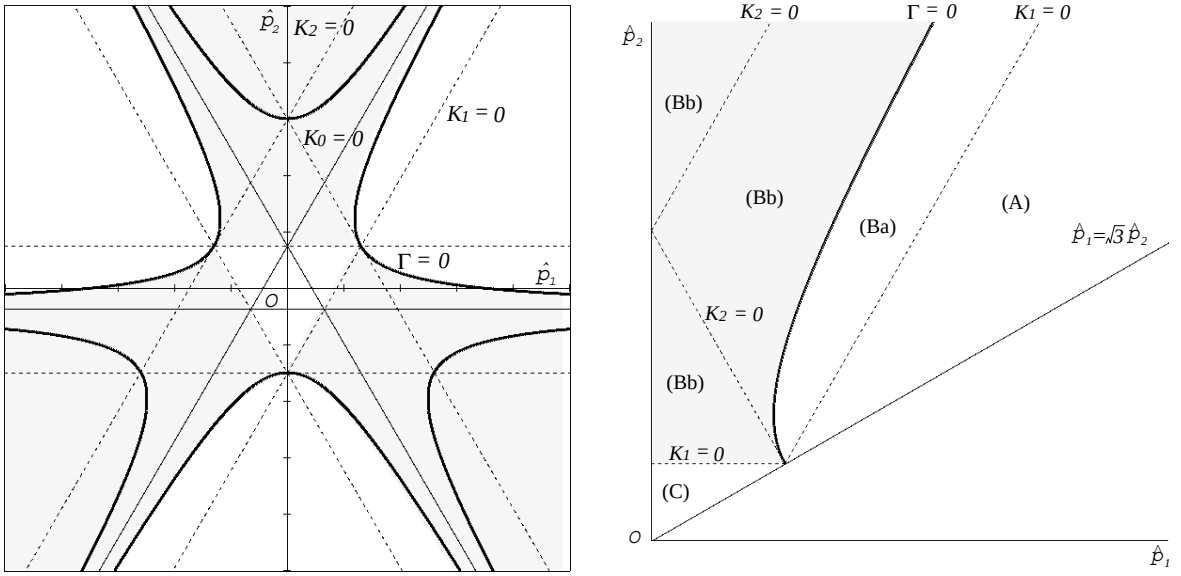



図 3.9: Type I$\ominus$, $\Gamma < 0, K_3 < 0$ の方向に関する写像




(a) (b)

図 3.10: Type I⊖の標準形パラメータ空間における$\Gamma = 0$

によっても判別は可能であるが, 与えられた変換一つ一つに対してシミュレーションを行うことは効率的ではなく, またなにより, その判別を人の視覚に頼らなければならない. 本論文で導入した判別式を用いることにより, 極限図形を実際に描かなくとも, 任意に与えられた変換に対して判別を行うことができる.

さらに入れ子構造の存在は不変概念であることから, 本論文ではその判別式を不変式系に基づいて与えた. 判別式の表現としては, 標準形のパラメータを用いることも考えられる. その場合図 3.10に示したように, 入れ子構造が存在するパラメータ領域が視覚的に捉えやすくなるが, 判別を行う際には与えられた変換を標準形に変換する必要がある. その作業においては, 三次方程式の解を求めるなど, 無理演算を含む繁雑な計算が要求される. これに対して, 本論文のように不変式系に基づいて判別式を表現することによって, 任意に与えられた変換式の係数に対して有理演算, すなわち四則演算を行い, その符号を調べるだけで判別を行うことができる. これが不変概念を不変式系に基づいて扱うことの利点である.

# 第 4 章

# 2 次元実同次三次変換の分類

2 次元実同次三次変換と同様な取り扱いが可能である, 2 次元実同次三次微分方程式系に対して, Cima and Llibre[5] はその分類と標準形を与えている. さらに, 平衡線の存在条件についても示している. しかしながら, それらの結果を 2 次元実同次三次変換に適用するには, いくつか問題点が残されている.

この章では, その問題点を考慮に入れつつ, 2 次元実同次三次変換への適用を行う. その結果, [5] における標準形では完全性が成立していない, すなわちどの標準形にも当てはまらない系が存在することがわかり, これを示す. さらに, 微分方程式系における平衡線と幾何学的に同一な概念である, 無限不動方向について, その有無の判別式を不変式系を用いた表現で導出する. 判別式が標準形パラメータで表現されている場合, 判別の手続きにおいて, まず与えられた系を標準形に変換する必要がある. そのためには, 四次方程式の解を求めるなどの無理演算を行わなければならない. それに対し, 判別式が不変式によって表現されている場合は, 与えられた変換式の係数に対して, 有理演算, すなわち四則演算を行うだけで判別式の値が計算できる.

この章ではまず, 2 次元実同次三次変換に対して, 前章の二次の場合と同様にして不変式系を与える. 次に Cima and Llibre[5] による分類や標準形を参考にして, 点変換系の分類と標準形を示す. その際, [5] の標準形における誤りについても論じる. 最後に, ここで新たに示した分類, 標準形を利用して, 無限不動方向が存在するための必要十分条件を不変式系に

基づいた表現で導出する.

## 4.1　2 次元実同次三次変換とその不変式系

$\boldsymbol{R}^2$からそれ自身への 2 次元実同次三次変換は次のように書ける.

$$x'^{\kappa} = P^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} x^{\lambda} x^{\mu} x^{\nu}. \quad (\kappa = 1, 2; P^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} \in \boldsymbol{R}) \tag{4.1}$$

$P^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$は共変対称な反変 1 階共変 3 階のテンソルである.

2 次元実同次二次変換の場合と同様にして, 2 次元実同次三次変換の係数 $P^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$を

$$p_{\lambda\mu} \equiv P^{\kappa}_{\lambda\mu\kappa}, \quad Q^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} \equiv P^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} - \frac{1}{4}(\delta^{\kappa}_{\lambda} p_{\mu\nu} + \delta^{\kappa}_{\mu} p_{\lambda\nu} + \delta^{\kappa}_{\nu} p_{\lambda\mu}),$$

に分解する. ここで$\delta^{\kappa}_{\lambda}$は Kronecker のデルタである. $p_{\kappa\lambda}$は共変 2 階の共変対称テンソルであり, $Q^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$は反変 1 階共変 3 階の共変対称テンソルである.

不動方向は

$$\begin{aligned} f &\equiv xy' - x'y \\ &= \tilde{Q}_{1111} x^4 + 4\tilde{Q}_{1112} x^3 y + 6\tilde{Q}_{1122} x^2 y^2 + 4\tilde{Q}_{1222} x y^3 + \tilde{Q}_{2222} y^4, \end{aligned} \tag{4.2}$$

の実根である. ここで $x = x^1, y = x^2$であり, $\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \epsilon_{\kappa\rho} Q^{\rho}_{\lambda\mu\nu}$は共変 4 階の共変対称テンソル, また$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1, \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ である. この形式を基本四次形式と呼ぶことにする. 実根の数や重複度は $p_{\kappa\lambda}$ではなく$\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu\nu}$だけに, すなわち基本四次形式 $f$に依存している.

テンソル $P^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$はテンソル$\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu\nu}$と $p_{\kappa\lambda}$の集合に一対一に対応している. したがって 2 次元実同次三次変換の性質は 2 次元四次形式 (基本四次形式)$f$と 2 次元二次形式 $g$

$$g \equiv p_{11} x^2 + 2p_{12} xy + p_{22} y^2$$

によって決定される. 上の 2 次元二次及び四次形式は共に共変式であり, $P^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$自身を扱うよりも $P^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$を$\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu\nu}$と $p_{\kappa\lambda}$に分解する方が便利である.

変換 (4.1) は一意的に次のように書き換えることができる.

$$x' = -\tilde{Q}_{1112}x^3 - 3\tilde{Q}_{1122}x^2y - 3\tilde{Q}_{1222}xy^2 - \tilde{Q}_{2222}y^3 + \frac{3}{4}x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2),$$
$$y' = \tilde{Q}_{1111}x^3 + 3\tilde{Q}_{1112}x^2y + 3\tilde{Q}_{1122}xy^2 + \tilde{Q}_{1222}y^3 + \frac{3}{4}y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2).$$
$$\cdots \qquad (4.3)$$

[18] に示されているように, 2 次元四次形式 $f$と 2 次元二次形式 $g$の集合の完全な不変式系は下の六つの不変式 (および 12 の共変式) で構成される.

$$F \equiv \epsilon^{\kappa\kappa'}\epsilon^{\lambda\lambda'}\epsilon^{\mu\mu'}\epsilon^{\nu\nu'}\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu\nu}p_{\kappa'\lambda'}p_{\mu'\nu'}.$$
$$H \equiv \epsilon^{\kappa\kappa'}\epsilon^{\lambda\lambda'}\epsilon^{\mu\mu'}\epsilon^{\nu\nu'}h'_{\kappa\lambda\mu\nu}p_{\kappa'\lambda'}p_{\mu'\nu'},$$
$$J \equiv \epsilon^{\kappa\kappa'}\epsilon^{\lambda\lambda'}\epsilon^{\mu\mu'}\epsilon^{\nu\nu'}\epsilon^{\rho\rho'}\epsilon^{\sigma\sigma'}J'_{\kappa\lambda\mu\nu\rho\sigma}p_{\kappa'\lambda'}p_{\mu'\nu'}p_{\rho'\sigma'},$$
$$i_f \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\kappa'}\epsilon^{\lambda\lambda'}\epsilon^{\mu\mu'}\epsilon^{\nu\nu'}\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu\nu}\tilde{Q}_{\kappa'\lambda'\mu'\nu'}.$$
$$j_f \equiv \frac{1}{3}\epsilon^{\kappa\kappa'}\epsilon^{\lambda\lambda'}\epsilon^{\mu\mu'}\epsilon^{\nu\nu'}\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu\nu}h'_{\kappa'\lambda'\mu'\nu'}.$$
$$D_g \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\kappa'}\epsilon^{\lambda\lambda'}p_{\kappa\lambda}p_{\kappa'\lambda'},$$

ここで $h'_{\kappa\lambda\mu\nu}, J'_{\kappa\lambda\mu\nu\rho\sigma}$はそれぞれ, $f$の Hessian$H_f$, Jacobian $J_f$の係数である.

$$h'_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\epsilon^{\tau\upsilon}\tilde{Q}_{\kappa\lambda\rho\tau}\tilde{Q}_{\mu\nu\sigma\upsilon},$$
$$J'_{\kappa\lambda\mu\nu\rho\sigma} = -2\epsilon^{\tau\upsilon}\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu\tau}h'_{\nu\rho\sigma\upsilon},$$

また, $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = -1, \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$ である. $F, H, J, i_f, j_f, D_g$の重みはそれぞれ, 3, 4, 6, 2, 3, 2 である.

上の六つの不変式は次のような syzygy を持つ.

$$J^2 + (j_fF - i_fH)F^2 + 4H^3 - D_g(i_f^2F^2 - 4i_fH^2 - 8i_fj_fFD_g - 12j_fFH + 16j_f^2D_g^2) = 0.$$

ここで, 下の三つの不変式を定義する.

$$L_1 \equiv \frac{3^4}{2^8}F^2 + \frac{3^4}{2^4}HD_g + \frac{3^4}{2^4}i_fD_g^2 + \frac{3^3}{2^2}i_fH + \frac{3^2}{2}i_f^2D_g - \frac{3^4}{2^3}j_fF + i_f^3 - 3^3j_f^2 + \frac{3^3}{2^3}J,$$

$$L_2 \equiv \frac{3^4}{2^8}F^2 + \frac{3^4}{2^4}HD_g + \frac{3^4}{2^4}i_f D_g^2 + \frac{3^3}{2^2}i_f H + \frac{3^2}{2}i_f^2 D_g - \frac{3^4}{2^3}j_f F + i_f^3 - 3^3 j_f^2 - \frac{3^3}{2^3}J,$$
$$L_3 \equiv \frac{3^4}{2^8}F^2 + \frac{3^4}{2^4}HD_g + \frac{3^4}{2^4}i_f D_g^2 + \frac{3^5}{2^2}i_f H + \frac{3^4}{2}i_f^2 D_g - \frac{3^6}{2^3}j_f F + 3^4 i_f^3 - 3^7 j_f^2 + \frac{3^4}{2^3}J.$$

明らかに, $L_1, L_2, L_3$は重み 6 の相対不変式である.

$L_2$は式 (4.3) 右辺の形式の終結式に等しい. これは, $L_2 = 0$ が無限不動方向存在の必要条件であることを意味している. 2 次元実同次三次変換を方向に関する写像として考えた時, $L_1 = 0$ は, 不動方向を含む $f = 0$ のある根において $|d\varphi(\xi)/d\xi| = 1$ であることを意味しており, $L_3 = 0$ はある根において $d\varphi(\xi)/d\xi = 0$ であることを意味している. これらは [8] で紹介されている 2 次元実同次二次変換の不変式列 $K_m (m = 1, 2, \ldots)$ の意味に対応している.

## 4.2 2 次元実同次三次変換の標準形

2 次元実同次三次変換の標準形は, 基本四次形式の標準形を利用して求めることができる. Cima and Llibre は 2 次元四次形式の分類と標準形, またそれを利用して 2 次元実同次三次微分方程式系に対する分類と標準形を与えている [5].

**定理 4.1** 2 次元実四次形式 $f$に対して, 次の標準形の唯一に変換する$\sigma \in GL(2;\boldsymbol{R})$ が存在する [5].

$I.$ $\quad f = x^4 + 6\mu x^2y^2 + y^4, \quad \mu < -\dfrac{1}{3}$
$\qquad\qquad D_f > 0,\ H_f < 0,\ 12H_f^2 - i_f f^2 > 0,$

$II.$ $\quad f = \alpha(x^4 + 6\mu x^2y^2 + y^4), \quad \alpha = \pm 1,\ \mu > -\dfrac{1}{3},\ \mu \neq 0$
$\qquad\qquad D_f > 0,\ \alpha f > 0 \text{ and } H_f > 0 \text{ or } 12H_f^2 - i_f f^2 < 0,$

$III.$ $\quad f = x^4 + 6\mu x^2y^2 - y^4,$
$\qquad\qquad D_f < 0,$

$IV.$ $\quad f = \alpha y^2(6x^2 + y^2), \quad \alpha = \pm 1$
$\qquad\qquad D_f = 0,\ \alpha j_f < 0,\ 2i_f H_f - 3j_f f > 0,$

$V.$ $\quad f = \alpha y^2(6x^2 - y^2), \quad \alpha = \pm 1$
$\qquad\qquad D_f = 0,\ \alpha j_f < 0,\ 2i_f H_f - 3j_f f < 0,$

$VI.$ $\quad f = \alpha(x^2 + y^2)^2, \quad \alpha = \pm 1$
$\qquad\qquad D_f = 0,\ \alpha j_f < 0,\ 2i_f H_f - 3j_f f = 0,\ H_f > 0,$

$VII.$ $\quad f = 6\alpha x^2y^2, \quad \alpha = \pm 1$
$\qquad\qquad D_f = 0,\ \alpha j_f < 0, 2i_f H_f - 3j_f f = 0, H_f < 0,$

$VIII.$ $\quad f = 4x^3y,$
$\qquad\qquad D_f = 0,\ j_f = 0, i_f = 0, H_f \neq 0,$

$IX.$ $\quad f = \alpha x^4, \quad \alpha = \pm 1$
$\qquad\qquad D_f = 0,\ j_f = 0, i_f = 0, H_f = 0, \alpha f > 0,$

$X.$ $\quad f = 0.$

ここで $D_f \equiv i_f^3 - 27j_f^2$は $f$の判別式である.

上の定理において, I は 4 実単根, II は 4 虚根, III は 2 実単根と 2 虚根, IV は 1 二重根と 2 虚根, V は 2 実単根と 1 二重根, VI は 2 二重虚根, VII は 2 二重根, VIII は 1 三重根と 1 単根, IX は 1 四重根をそれぞれもつ.

**系 4.2** 2次元実同次三次微分方程式系に対して, 次の標準形の唯一に変換する$\sigma \in GL(2, \boldsymbol{R})$, および時間のスケール変換が存在する [5].

$$\text{Type (1)} : \begin{cases} \dot{x} = p_1x^3 + [p_2 + 3(1+\mu^4)]x^2y + p_3xy^2 - 6\mu^2y^3, \\ \dot{y} = 6\mu^2x^3 + p_1x^2y + [p_2 - 3(1+\mu^4)]xy^2 + p_3y^3, \end{cases} \quad \mu > 1$$

$$\text{Type (2)} : \begin{cases} \dot{x} = p_1x^3 + [p_2 - (\alpha/2)]x^2y + p_3xy^2 + \alpha y^3, \\ \dot{y} = p_1x^2y + [p_2 + (\alpha/2)]xy^2 + p_3y^3, \end{cases} \quad \alpha = \pm 1$$

$$\text{Type (3)} : \begin{cases} \dot{x} = p_1x^3 + p_2x^2y + p_3xy^2 + \mu y^3, \\ \dot{y} = \mu x^3 + p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3, \end{cases} \quad \mu \neq 0$$

$$\text{Type (4)} : \begin{cases} \dot{x} = p_1x^3 + (p_2 - 3\alpha)x^2y + (p_3 + 6\alpha)xy^2 - 6\alpha y^3, \\ \dot{y} = p_1x^2y + (p_2 + 3\alpha)xy^2 + (p_3 - 6\alpha)y^3, \end{cases} \quad \alpha = \pm 1$$

$$\text{Type (5)} : \begin{cases} \dot{x} = p_1x^3 + p_2x^2y + (p_3 + 2)xy^2 - 4y^3, \\ \dot{y} = p_1x^2y + p_2xy^2 + (p_3 - 2)y^3, \end{cases}$$

$$\text{Type (6)} : \begin{cases} \dot{x} = p_1x^3 + (p_2 - 3\alpha)x^2y + p_3xy^2 - \alpha y^3, \\ \dot{y} = p_1x^2y + (p_2 + 3\alpha)xy^2 + p_3y^3, \end{cases} \quad \alpha = \pm 1$$

$$\text{Type (7)} : \begin{cases} \dot{x} = p_1x^3 + p_2x^2y + p_3xy^2 - \alpha y^3, \\ \dot{y} = p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3, \end{cases} \quad \alpha = \pm 1$$

$$\text{Type (8)} : \begin{cases} \dot{x} = p_1x^3 + (p_2 - 3\alpha\mu)x^2y + p_3xy^2 - \alpha y^3, \\ \dot{y} = \alpha x^3 + p_1x^2y + (p_2 + 3\alpha\mu)xy^2 + p_3y^3, \end{cases} \quad \alpha = \pm 1, \mu > -\frac{1}{3}, \mu \neq \frac{1}{3}$$

$$\text{Type (9)} : \begin{cases} \dot{x} = p_1x^3 + (p_2 - \alpha)x^2y + p_3xy^2 - \alpha y^3, \\ \dot{y} = \alpha x^3 + p_1x^2y + (p_2 + \alpha)xy^2 + p_3y^3, \end{cases} \quad \alpha = \pm 1$$

$$\text{Type (10)} : \begin{cases} \dot{x} = p_1x^3 + p_2x^2y + p_3xy^2, \\ \dot{y} = p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3. \end{cases}$$

上の定理で, 左辺のドットは時間微分を表している. また, $p_1, p_2, p_3$はパラメータである.

定理 4.1における四次形式の type の番号と系 4.2における微分方程式系の type の番号との関係は表 4.1のようになる.

表 4.1: 微分方程式系の type と四次形式の type との関係

| 微分系の type | 微分系から導かれる四次形式 | 四次形式の type |
|---|---|---|
| (1) | $6\mu^2x^4 - 6(1+\mu^4)x^2y^2 + 6\mu^2y^4, \quad \mu > 1$ | I |
| (2) | $\alpha y^2(x^2 - y^2), \quad \alpha = \pm 1$ | V |
| (3) | $\mu(x^4 - y^4), \quad \mu \neq 0$ | III |
| (4) | $6\alpha y^2(y - x)^2, \quad \alpha = \pm 1$ | VII |
| (5) | $4(y - x)y^3$ | VIII |
| (6) | $\alpha y^2(6x^2 + y^2), \quad \alpha = \pm 1$ | IV |
| (7) | $\alpha y^4, \quad \alpha = \pm 1$ | IX |
| (8) | $\alpha(x^4 + 6\mu x^2y^2 + y^4), \quad \alpha = \pm 1, \mu > -\frac{1}{3}, \mu \neq \frac{1}{3}$ | II |
| (9) | $\alpha(x^2 + y^2)^2, \quad \alpha = \pm 1$ | VI |
| (10) | 0 | X |

しかしながら, 基本四次形式の重みは 2 次元四次形式のそれとは異なる. 式 (4.2) で定義される基本四次形式は重み−1 であり, 一方 2 次元四次形式の重みは 0 である. 例えば, 座標変換 $x \to y, y \to x$ によって基本四次形式 $f = 6x^2y^2$ は $f = -6x^2y^2$に写されるが, 2 次元四次形式 $6x^2y^2$は$-6x^2y^2$には写されない. また逆に, 基本四次形式 $f = 4xy^3$は $f = -4xy^3$ に写すことはできないが, 2 次元四次形式 $4xy^3$は$-4xy^3$に写される. これはその標準形を作成する際の符号, すなわち±1 の値を取るパラメータ$\alpha$の使用に注意しなければならないことを意味している. 上の例の場合に関しては, 定理 4.1で示されている 2 次元四次形式の標準形において, Type VII で用いられているパラメータ$\alpha$は, 基本四次形式の標準形においては必要がなく, 逆に Type VIII の標準形を基本四次形式に適用する際には, パラメータ$\alpha$が必要となる. 以上のことを考慮して, 次の補題で, 基本四次形式の分類と標準形を, 定理 4.1 に示した [5] の 2 次元四次形式の分類, 標準形を利用することによって与える.

**補題 4.3** 基本四次形式のそれぞれに対して, 次の標準形の中の唯一つに変換する, ある $\sigma \in GL(2;\boldsymbol{R})$ が存在する.

$$
\begin{aligned}
\text{Type 1} &: \quad f = 6\mu^2x^4 - 6(1+\mu^4)x^2y^2 + 6\mu^2y^4, \quad \mu > 1, \\
&\qquad \text{when } D_f > 0, H_f < 0, 12H_f^2 - i_f f^2 > 0. \\
\text{Type 2} &: \quad f = 6x^2y^2 - 6y^4, \\
&\qquad \text{when } D_f = 0, j_f \neq 0, 2i_f H_f - 3j_f f < 0. \\
\text{Type 3} &: \quad f = 6x^4 - 6(1-\mu^2)x^2y^2 - 6\mu^2y^4, \quad \mu \geq 1, \\
&\qquad \text{when } D_f < 0. \\
\text{Type 4} &: \quad f = 6x^2y^2, \\
&\qquad \text{when } D_f = 0, j_f \neq 0, 2i_f H_f - 3j_f f = 0, H_f < 0. \\
\text{Type 5} &: \quad f = 4\alpha xy^3, \quad \alpha = \pm 1, \\
&\qquad \text{when } D_f = 0, j_f = 0, H_f \neq 0. \\
\text{Type 6} &: \quad f = 6x^2y^2 + 6y^4, \\
&\qquad \text{when } D_f = 0, j_f \neq 0, 2i_f H_f - 3j_f f > 0. \\
\text{Type 7} &: \quad f = y^4, \\
&\qquad \text{when } D_f = 0, j_f = 0, H_f = 0, f \neq 0. \\
\text{Type 8} &: \quad f = 6\mu^2x^4 + 6(1+\mu^4)x^2y^2 + 6\mu^2y^4, \quad \mu > 1, \\
&\qquad \text{when } D_f > 0, H_f > 0 \text{ or } 12H_f^2 - i_f f^2 < 0. \\
\text{Type 9} &: \quad f = 3x^4 + 6x^2y^2 + 3y^4, \\
&\qquad \text{when } D_f = 0, j_f \neq 0, 2i_f H_f - 3j_f f = 0, H_f > 0. \\
\text{Type 10} &: \quad f = 0.
\end{aligned}
$$

ここで $D_f \equiv i_f^3 - 27j_f^2$は $f$の判別式である.

**証明** 標準形を作る際, Cima and Llibre は実根の数や根の重複度を基にした分類を採用しており [5], これは Date and Iri が実同次二次変換の標準形を作る際に用いたものである [8]. 同じ観点を採用することで, 上の 10 個の type を得る. ただし, type の番号は定理 4.1ではなく, 系 4.2のそれと一致させてある.

証明は基本的に [5] の中の Theorem 2.6 (本論文の定理 4.1) に依存している.

定理 4.1における Type II (補題 4.3における Type 8), Type IV(同 Type 6), Type V(同 Type 2), Type VI(同 Type 9), Type VII(同 Type 4), Type IX(同 Type 7) の標準形におけ

るパラメータ$\alpha$に関しては, 基本四次形式では適当な座標変換, 例えば $x \to -x$, によって標準形の符号を入れ換えることができるため, 省略が可能である. これに対し, 定理 4.1における Type VIII の標準形, $4x^3y$に対しては, 基本四次形式では$-4x^3y$に変換する座標変換が存在しないため, 補題 4.3における Type 5 の標準形ではパラメータ$\alpha$が必要となる. その他の type に対しては, 2 次元四次形式においても, 基本四次形式においてもパラメータ$\alpha$を必要としない. また, 標準形の式の形に関しては, それぞれ適当な座標変換を施すことによって, 定理 4.1の形式と補題 4.3の形式とで, 変換が可能である. (Q.E.D.)

この補題を用いることで, 2 次元実同次三次変換の分類と標準形を直接得ることができる.

**定理 4.4** 2 次元実同次三次変換それぞれに対して, 次の標準形の中の唯一つに変換する, ある$\sigma \in GL(2;\boldsymbol{R})$ が存在する.

$$\text{Type 1}: \begin{cases} x' = 3(1+\mu^4)x^2y - 6\mu^2y^3 + \dfrac{3}{4}x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \\ y' = 6\mu^2x^3 - 3(1+\mu^4)xy^2 + \dfrac{3}{4}y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2). \end{cases} \quad \mu > 1$$

$$\text{Type 2}: \begin{cases} x' = -3x^2y + 6y^3 + \dfrac{3}{4}x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \\ y' = 3xy^2 + \dfrac{3}{4}y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2). \end{cases}$$

$$\text{Type 3}: \begin{cases} x' = 3(1-\mu^2)x^2y + 6\mu y^3 + \dfrac{3}{4}x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \\ y' = 6x^3 - 3(1-\mu^2)xy^2 + \dfrac{3}{4}y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2). \end{cases} \quad \mu \geq 1$$

$$\text{Type 4}: \begin{cases} x' = -3x^2y + \dfrac{3}{4}x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \\ y' = 3xy^2 + \dfrac{3}{4}y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2). \end{cases}$$

$$\text{Type 5}: \begin{cases} x' = -3\alpha xy^2 + \dfrac{3}{4}x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \\ y' = \alpha y^3 + \dfrac{3}{4}y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2). \end{cases} \quad \alpha = \pm 1$$

$$\text{Type 6}: \begin{cases} x' = -3x^2y - 6y^3 + \dfrac{3}{4}x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \\ y' = 3xy^2 + \dfrac{3}{4}y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2). \end{cases}$$

$$\text{Type 7}: \begin{cases} x' = -y^3 + \dfrac{3}{4}x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \\ y' = \dfrac{3}{4}y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2). \end{cases}$$

$$\text{Type 8}: \begin{cases} x' = -3(1+\mu^4)x^2y - 6\mu^2y^3 + \dfrac{3}{4}x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \\ y' = 6\mu^2x^3 + 3(1+\mu^4)xy^2 + \dfrac{3}{4}y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2). \end{cases} \quad \mu > 1$$

$$\text{Type 9}: \begin{cases} x' = -3x^2y - 3y^3 + \dfrac{3}{4}x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \\ y' = 3x^3 + 3xy^2 + \dfrac{3}{4}y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2). \end{cases}$$

$$\text{Type 10}: \begin{cases} x' = \dfrac{3}{4}x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \\ y' = \dfrac{3}{4}y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2). \end{cases}$$

標準形の中で, $p_{11}, p_{12}, p_{22} \in \boldsymbol{R}$はパラメータである.

Cima and Llibre[5] は Corollary 3.3, すなわち本論文の系 4.2の中で 2 次元実同次三次微分方程式系の標準形を与えている. しかしながら, 点変換系では, [5] で用いられている時間スケールの変更を用いることができない. また, 系 4.2の中の type (3) の標準形には誤りがあり, 定理 4.4で与えた標準形の Type 3 における$\mu \neq 1$ の場合に属する変換は系 4.2のどの標準形にも当てはまらない. 例えば, 変換

$$\begin{aligned} x' &= -3x^2y + y^3, \\ y' &= x^3 + 3xy^2, \end{aligned}$$

は定理 4.1の Type III における$\mu = 1, p_1 = p_2 = p_3 = 0$ の場合に対応し, 我々の標準形, 定理 4.4の Type 3 における$\mu^2 = 19 + 6\sqrt{10}, p_{11} = p_{12} = p_{22} = 0$ の場合の変換であるが, これは, [5] の標準形, 定理 4.4の Type (3) のどの場合にも対応しない. さらに, 定理 4.4で示した標準形は不変式系の計算に適しており, またより少ない数のパラメータを用いた表現になっている. これらの理由から, 本論文で導入した標準形は微分方程式系に対しても, より便利なものであると思われる.

分類は $f$の根の状態で分けられており, 2 次元実同次三次変換でいえば, それは不動方向の数と重複度に相当する. 各 Type の不動方向の数と標準形における不動方向を表 4.2にまとめる.

以上により, 2 次元実同次三次変換に対して, 不動方向の数とその重複度に基づく分類と標準形を導入することができた. Cima and Llibre[5] も同様の分類と標準形を与えているが, 2 次元実同次三次変換の標準形を導くためには, 重みが 0 である 2 次元四次形式ではなく, 重みが$-1$ の基本四次形式の標準形を用いる必要があり, そのため, 標準形の符号を決定するパラメータ$\alpha$の必要性を考慮し直した. また, [5] における 2 次元実同次三次微分方程式系の標準形は, 本論文で導入した標準形と比較した結果, 完全性が成り立たないことを示した.

表 4.2: 各 type の不動方向

| | 不動方向の数 | 標準形における不動方向 |
|---|---|---|
| Type 1 | 4 | $(1,-\mu)$, $(1,-1/\mu)$, $(1,1/\mu)$, $(1,\mu)$ |
| Type 2 | 3 | $(1,-1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ |
| Type 3 | 2 | $(1,-1)$, $(1,1)$ |
| Type 4 | 2 | $(1,0)$, $(0,1)$ |
| Type 5 | 2 | $(1,0)$, $(0,1)$ |
| Type 6 | 1 | $(1,0)$ |
| Type 7 | 1 | $(1,0)$ |
| Type 8 | 0 | |
| Type 9 | 0 | |
| Type 10 | 無限個 | 全ての方向 |

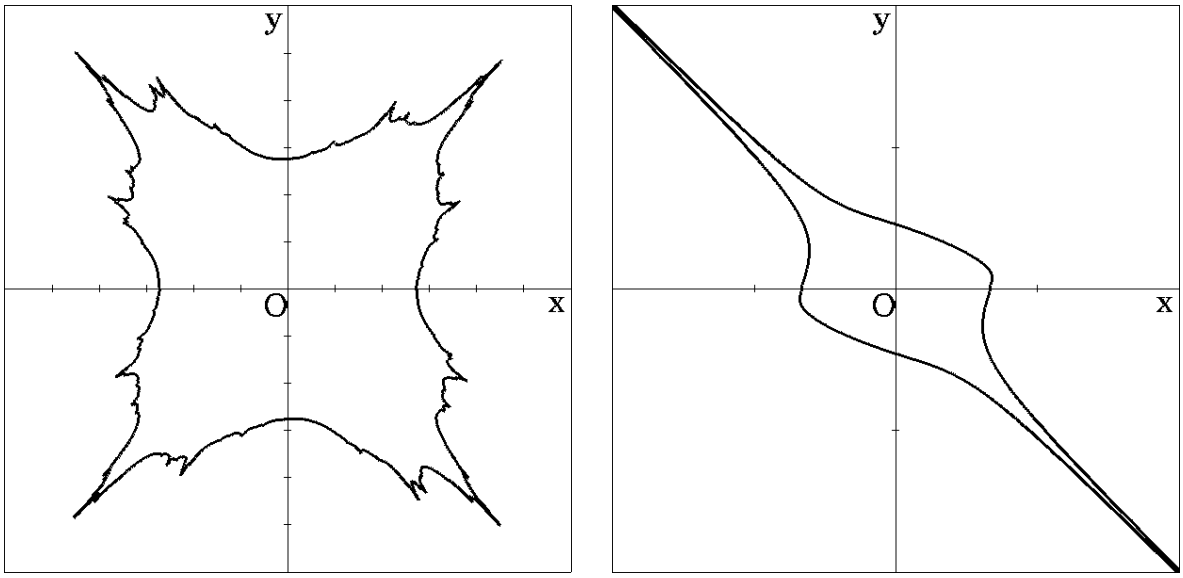
## 4.3 無限不動方向が存在するための必要十分条件

この節では, 無限不動方向が存在するための必要十分条件を示す. 無限不動方向の有無は極限図形である発散収束境界の形状においても大きな違いとなる. 無限不動方向が存在する場合, 収束領域は有界ではなくなり, 発散収束境界も無限遠まで伸びる形状をもつ. これに対して無限不動方向が存在しない場合には, 発散収束境界は有界に留まり, 閉曲線となる. 無限不動方向が存在しない場合と存在する場合の発散収束境界の例を図 4.1に示す.

また, 無限不動方向の概念は, 微分方程式系において平衡線の概念に対応する. 本論文で導出する無限不動方向の有無の判別式は, これらの性質の有無の判別式でもある.

まず最初に, 任意の 2 次元実同次三次変換に対する, 無限不動方向存在の必要条件を示し, その後, 前節で導入した分類を利用して, その type ごとに必要十分条件を導出する.

まず, 無限不動方向が存在するための必要条件に関しては次のことが成り立つ.




(a) (b)

図 4.1: 無限不動方向が存在しない場合 (a) と存在する場合 (b) の発散収束境界の例

**定理 4.5** 2 次元実同次三次変換が少なくとも一つの無限不動方向をもつならば, $L_2 = 0$ である.

**証明** $L_2$は式 (4.1) 右辺の形式の終結式に等しい. そのため $L_2 = 0$ は $x' = 0$ および $y' = 0$ の方程式の (実, または虚) 根が少なくとも一つ存在することと等価である. したがって, 少なくとも一つの無限不動方向が存在するならば, それが上の方程式の実根に対応することから $L_2 = 0$ である. (Q.E.D.)

一方, 十分条件については, 各 type ごとに異なる. これはそれぞれの標準形に対してその不動方向が無限不動方向となる条件と, 標準形での不変式の形を比べることで求めることができる. まず, 基本四次形式 $f = 0$ が虚数解をもたない, Type 1, 2, 4, 5, 7 については次の定理が成り立つ.

**定理 4.6** 定理 4.4における Type 1, 2, 4, 5, 7 の変換に対して, 無限不動方向が存在するための必要十分条件は, $L_2 = 0$ である.

**証明**　定理 4.4のこれらの type に対する $f=0$ は実根のみをもち, したがって $L_2=0$ であることは方程式 $x'=0, y'=0$ が少なくとも一つの実根をもつことと等価である. この実根は無限不動方向に相当する. (Q.E.D.)

基本四次形式 $f=0$ が実数解と虚数解の両方をもつ, Type 3, 6 については, それぞれ新たな十分条件が加わる.

**定理 4.7** 定理 4.4の Type 3 の変換に対して, 無限不動方向が存在するための必要十分条件は, $L_2=0$ であり, かつ

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & I_6 \neq 0, \\ \text{(ii)} & L_3 = 0, \\ \text{(iii)} & J < 0, \\ \text{(iv)} & J = 0 \text{ and } C_{(f,g)} < 0, \end{array} \tag{4.1}$$

のいずれかが成り立つことである. ここで $I_6$は重み 6 の不変式

$$I_6 \equiv \frac{3^3}{2^8}F^2 - \frac{3^3}{2^4}HD_g + \frac{3^3}{2^4}i_f D_g^2 - \frac{3^2}{2^2}i_f H - \frac{3}{2}i_f^2 D_g + \frac{3^3}{2^3}j_f F - i_f^3 + 3^3 j_f^2,$$

$C_{(f,g)}$は共変式

$$C_{(f,g)} \equiv -\epsilon^{\rho\rho'}\tilde{Q}_{\kappa\lambda\mu\rho}p_{\nu\rho'}x^\kappa x^\lambda x^\mu x^\nu.$$

で定義される.

**証明**　2 次元実同次三次変換として標準形を用いても一般性を失わない. $L_2=0$ は標準形のパラメータを用いて表すと

$$\begin{aligned} \frac{729}{64}(-4-4\mu^2+p_{11}-2p_{12}+p_{22})(4+4\mu^2+p_{11}+2p_{12}+p_{22}) & \\ \times[(\mu^2 p_{11}-p_{22})^2+4\mu^2\{p_{12}-2(1+\mu^2)\}^2] &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

となり, パラメータ $p_{\kappa\lambda}$で表現した必要十分条件は

$$(-4-4\mu^2+p_{11}-2p_{12}+p_{22})(4+4\mu^2+p_{11}+2p_{12}+p_{22})=0. \tag{4.3}$$

となる.

以下, $L_2=0$ の場合に限定して議論を進める.

$L_2 = 0$ であるにも関わらず, 無限不動方向が存在しない, 例外的な場合の条件を導出するために, まず, 式 4.2の各因子が零か否かによって, Type 3 の変換を次の表のように分類する.

表 4.3: Type 3 の変換の分割

| Case | $-4 + 3p_{11} - 6p_{12} + 3p_{22}$ | $4 + 3p_{11} + 6p_{12} + 3p_{22}$ | $9(p_{11} - p_{22})^2 + 4(3p_{12} - 2)^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | ◯ | × | × |
| 2 | × | ◯ | × |
| 3 | ◯ | ◯ | × |
| 4 | × | × | ◯ |
| 5 | ◯ | × | ◯ |
| 6 | × | ◯ | ◯ |

表において, ◯はその因子が零であること, ×は零でないことを意味する. ただし, 三つ全ての因子が零となるパラメータは存在しないので省略している. 第 1 因子と第 2 因子の少なくともどちらか片方が零である場合, 無限不動方向が存在する. すなわち, Case 4 以外の場合には無限不動方向が存在する.

まず, 不変式 $I_6$の値によって, 六つの case を 2 種類に分ける. $I_6$は Case 1 または Case 2 の場合に非零の値を取り, Case 3 から Case 6 に対しては零となる. このため, 条件

$$\text{(i')} \qquad I_6 = 0$$

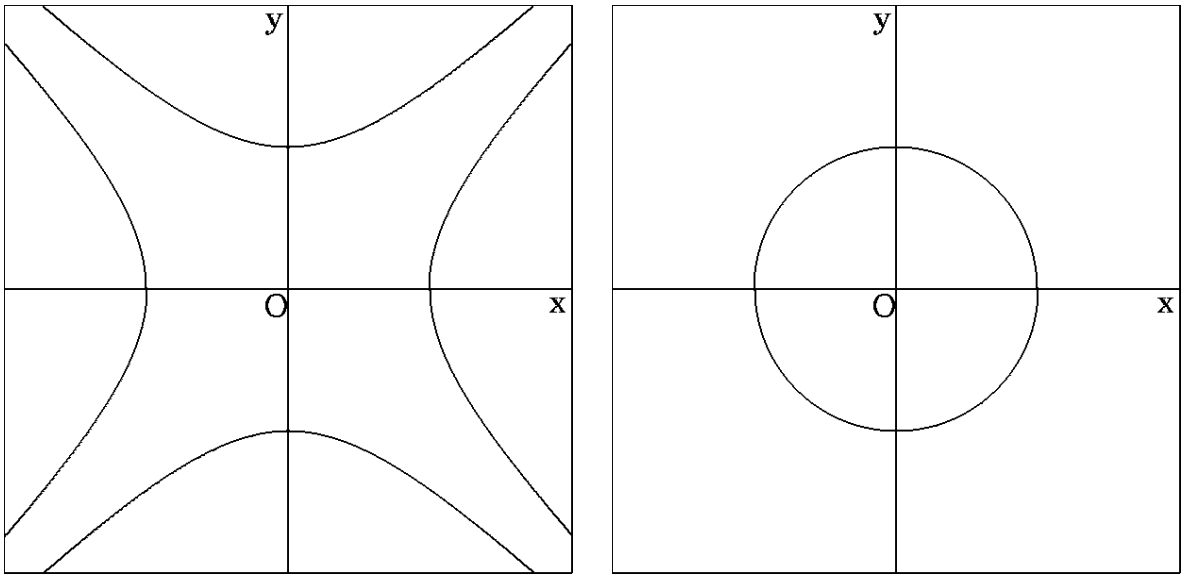
によって Case 1 と Case 2 を除外する.

次に Case 3 から Case 6 の四つの case に対して不変式 $L_3$の値を調べる. $L_3$は Case 3 と Case 4 の場合に非零の値をとり, Case 5 と Case 6 に対しては零となる. したがって, 条件

$$\text{(ii')} \qquad L_3 \neq 0$$

によって Case 5 と Case 6 を除外する.

Case 3 と Case 4 の判別は, ほとんどの場合不変式 $J$の符号によって行うことができる. すなわち, $J < 0$ であれば, Case 3, $J > 0$ であれば, Case 4 である. しかしながら, $J = 0$ が成り立つときには, その判別ができず, また, 他のいかなる不変式を用いても, それが不可能であることが証明できる. このときの変換に対する発散収束境界を図 4.2に示す.




(a) (b)

図 4.2: Type 3 の標準形の変換における Case 3(a) と Case 4(b)

そのため, 新たにその判別を行うための共変式 $C_{(f,g)}$を定義する. これを用いて, $J = 0$ において, $C_{(f,g)} < 0$ では Case 3, $C_{(f,g)} > 0$ では Case 4 のように判別ができる.

以上をまとめると, 表 4.4のようになる.

これにより, 必要条件である $L_2 = 0$ が成り立っているにも関わらず, 無限不動方向が存在しない, Case 4 の場合の条件は, 下の三つの条件を同時に満たすことによって特徴づけられる:

(i') $I_6 = 0$,
(ii') $L_3 \neq 0$,
(iii') $J > 0$ or ($J = 0$ and $C_{(f,g)} > 0$).

Type 3 に属する変換では $L_2 = 0$ の下で $C_{(f,g)} = 0$ とならないことから, 条件 (i'), (ii'), (iii') の否定をとることにより, 式 (4.1) を得る. (Q.E.D.)

表 4.4: 各 case と不変式系の符号との関係

<table>
<tr><td>$I_6 \neq 0$</td><td colspan="3"></td><td>Cases 1, 2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$= 0$</td><td>$L_3 = 0$</td><td colspan="2"></td><td>Cases 5, 6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\neq 0$</td><td>$J < 0$</td><td></td><td rowspan="2">Case 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$= 0$</td><td>$C_{(f,g)} < 0$</td></tr>
<tr><td>$> 0$</td><td rowspan="2">Case 4</td></tr>
<tr><td>$> 0$</td><td></td></tr>
</table>

**定理 4.8** Type 6 の変換に対して, 無限不動方向が存在するための必要十分条件は $L_1 = L_2 = 0$ である.

**証明** Type 6 の標準形は 1 つの不動方向 $(1, 0)$ をもち, この方向が無限不動方向になる条件は $p_{11} = 0$ で与えられる. 一方, Type 6 の標準形に対する不変式 $L_1, L_2$の式は

$$L_1 = \frac{729}{64} p_{11}^2 \{(p_{11} - p_{22})^2 + 4(p_{12} - 2)^2\},$$
$$L_2 = \frac{729}{64} p_{11}^2 \{(p_{11} - p_{22})^2 + 4(p_{12} + 2)^2\}$$

であり, 無限不動方向存在の必要十分条件は $L_1 = 0$ かつ $L_2 = 0$ で与えられる. (Q.E.D.)

四次形式が恒等的に零である Type 10 については次のようになる ($L_2 = 0$ は常に成り立つ).

**定理 4.9** Type 10 の変換に対して, 無限不動方向が存在するための必要十分条件は, $D_g \geq 0$ である.

**証明** Type 10 の標準形

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3}{4} x(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \\ y' = \dfrac{3}{4} y(p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2), \end{cases}$$

の形から, 無限不動方向が存在することと, 2 次元二次形式 $g$が実数解をもつことは同値である. したがって $g$の判別式 $D_g$が非負の値をとることが無限不動方向が存在する必要十分条件である. (Q.E.D.)

不動方向が存在しない Type 8, 9 については明らかに無限不動方向も存在しない.

これらの結果をまとめると表 4.5のようになる.

表 4.5: 無限不動方向が存在するための必要十分条件

| | |
|---|---|
| Type 1 | $L_2 = 0$ |
| Type 2 | $L_2 = 0$ |
| Type 3 | $L_2 = 0$ and (i) $\sim$ (iv) |
| Type 4 | $L_2 = 0$ |
| Type 5 | $L_2 = 0$ |
| Type 6 | $L_1 = L_2 = 0$ |
| Type 7 | $L_2 = 0$ |
| Type 8 | — |
| Type 9 | — |
| Type 10 | $(L_2 = 0)$ $D_g \geq 0$ |

以上により, 2 次元実同次三次変換に対して無限不動方向が存在するための必要十分条件を導出した.

無限不動方向が存在する場合, 定義 2.1で定義した収束領域は有界ではなくなる. 収束領域が有界である場合と有界でない場合とでは, 発散収束境界の形状に大きな違いがあり, 本論文で導いた条件によってそれらの判別が可能である.

同次変換における無限不動方向は同次微分方程式系においては平衡線に相当するため, 2 次元実同次三次変換に対する無限不動方向存在の必要十分条件は, 微分方程式系に対して

は平衡線存在の必要十分条件である. この条件は Cima and Llibre[5] も導入しているが, その条件を用いて判別を行うためには, 四次方程式の解を求めることを含む無理演算を行う必要があった. それに対し, 本論文で導出した不変式系に基づく判別式を用いることによって, 有理演算を行うだけで分類が可能となった.

# 第 5 章

# 非同次な変換への応用

この章では, 非同次な変換の極限図形を同次変換の場合と同様に扱うことのできる例を示す. 一般に非同次な変換と同次変換とは全く異なる極限図形形状を示す. すなわち, 同次変換の場合一つの方向に対し境界は一点しか現れないのに対し, 非同次な変換では無数に現れ得る. しかしながら, 非同次な 2 次元実二次変換のうち 2 次元実同次二次変換と同様に極限図形の性質を解析できる場合があることを発見したので, ここで詳しく述べる.

## 5.1 原点を安定不動点とする 2 次元実二次変換

2 次元実二次変換$\boldsymbol{F}_{ql} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$

$$\begin{aligned} x' &= P^1_{11}x^2 + 2P^1_{12}xy + P^1_{22}y^2 + P^1_1 x + P^1_2 y, \\ y' &= P^2_{11}x^2 + 2P^2_{12}xy + P^2_{22}y^2 + P^2_1 x + P^2_2 y \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$(P^\kappa_{\lambda\mu}, P^\kappa_\lambda \in \boldsymbol{R}, \kappa, \lambda, \mu = 1, 2)$$

を考える. ここで線形項については原点が局所安定であるように絶対値が 1 より小さい固有値をもつとする. 式 (5.1) の中で, 二次の項のみを取り出して得られる同次二次変換を$\boldsymbol{F}_q$, 線形項による一次変換を$\boldsymbol{F}_l$とすると,

$$\boldsymbol{F}_{ql} = \boldsymbol{F}_q + \boldsymbol{F}_l$$

であり, 線形な座標変換$\sigma \in GL(2, \boldsymbol{R})$ に対して

$$\sigma(\boldsymbol{F}_{ql}) = \sigma(\boldsymbol{F}_q) + \sigma(\boldsymbol{F}_l)$$

が成り立つことから, $\boldsymbol{F}_q$, $\boldsymbol{F}_l$それぞれに関する不変式系を応用することができる. このことを考慮すると, $\boldsymbol{F}_q$は

$$f_q = \tilde{Q}_{111}x^3 + 3\tilde{Q}_{112}x^2y + 3\tilde{Q}_{122}xy^2 + \tilde{Q}_{222}y^3, \quad u_q = p_1x + p_2y$$

の三次形式 $f_q$と一次形式 $u_q$に, $\boldsymbol{F}_l$は

$$f_l = \tilde{Q}_{11}x^2 + 2\tilde{Q}_{12}xy + \tilde{Q}_{22}y^2, \quad u_l = p$$

の二次形式 $f_l$と定数 $u_l$にそれぞれ分解することができ, 式 (5.1) は一意的に

$$\begin{aligned} x' &= -\tilde{Q}_{112}x^2 - 2\tilde{Q}_{122}xy - \tilde{Q}_{222}y^2 + \frac{2}{3}x(p_1x + p_2y) - \tilde{Q}_{12}x - \tilde{Q}_{22}y + px, \\ y' &= \tilde{Q}_{111}x^2 + 2\tilde{Q}_{112}xy + \tilde{Q}_{122}y^2 + \frac{2}{3}y(p_1x + p_2y) + \tilde{Q}_{11}x + \tilde{Q}_{12}y + py \end{aligned} \tag{5.2}$$

のように書き直すことができる.

これらのことから, $\boldsymbol{F}_q$を [8] で得られている 2 次元実同次二次変換の標準形としても一般性を失わない. 次節で定理 3.1における Type III(3), III(4), IV(1) の標準形に線形項を付加した形の変換について, その収束領域の特徴を調べる.

## 5.2 収束領域の特徴

収束領域の特徴は二次の項の形にも依存するが, それだけではなく二次の項と線形項との関係も大きな意味をもっている.

$\boldsymbol{F}_q$が Type IV(1) の標準形, すなわち

$$x' = xy,$$
$$y' = y^2$$

の場合, $\boldsymbol{F}_l = 0$ では収束領域は $x$ の座標に関わらず, $-1 < y < 1$ と, 無限に伸びる帯状である (図 5.1). これに線形項を付加したとき, その形状は大きく二つに分けられる. 一つはほとんど変化せず, 一定の幅をもった帯状になり (図 5.2(a)), もう一つは形状が全く異なる (図 5.2(b)). それらは不変式系を用いると, 二次の項から得られる一次形式 $u_q$ と線形項から得られる二次形式 $f_l$ との終結式

$$\tilde{Q}_{11}p_2^2 - 2\tilde{Q}_{12}p_1p_2 + \tilde{Q}_{22}p_1^2 \tag{5.1}$$

の値で判別ができ, 前者ではこの不変式が零となり, 後者では非零の値をもつ.

Type III(3), (4) の場合も同様のことがいえ, Type III(3) では, Type IV(1) と同じく $u_q$ と $f_l$ との終結式の値, Type III(4) では, $f_q$ と $f_l$ との終結式の値が零となる場合には $\boldsymbol{F}_q$ のみの収束領域とほぼ同じ形状が得られる (図 5.3–5.6). ただし, 同次二次変換の Type III(4) に属する変換では, 無限遠点を除く全ての点が最終的に原点に写されるため, その発散収束境界は無限遠点のみである.

以上により, 非同次な二次変換に対する極限図形を同次二次変換と同様に解析することが可能な例を示した. ここに挙げた例の他にも, 同次変換に対する解析結果を応用して, 非同次な変換の性質を取り扱うことができる場合があることが期待される.

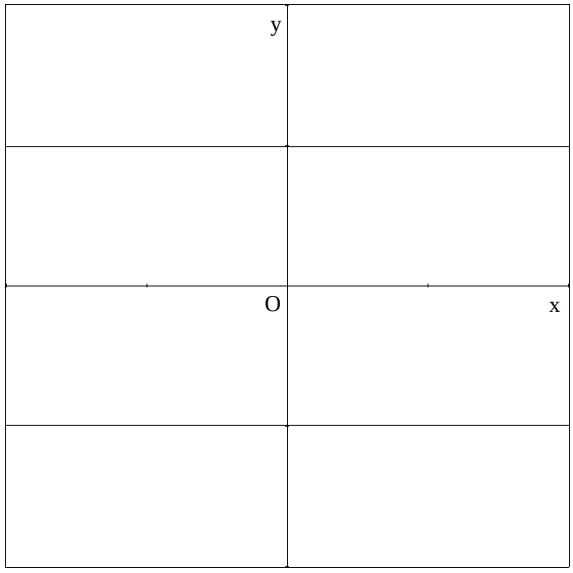
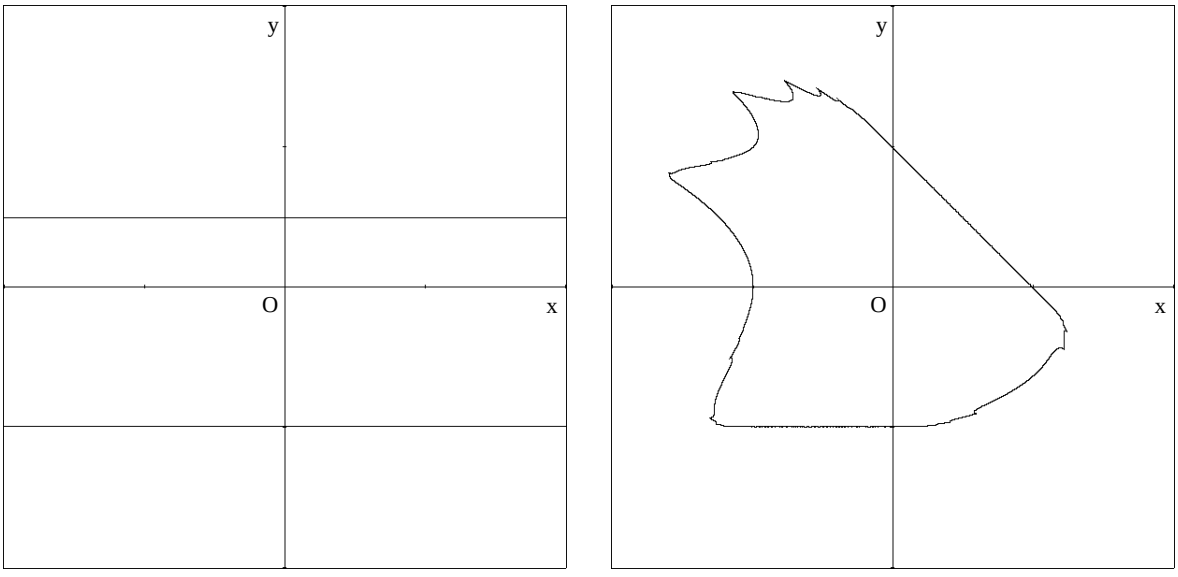



図 5.1: 同次二次変換 Type IV(1) の標準形の発散収束境界




(a) (b)

図 5.2: Type IV(1) の標準形に線形項を付加した場合の発散収束境界

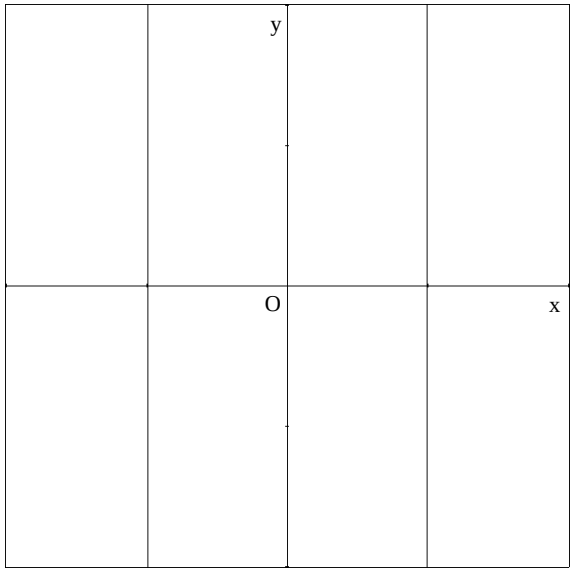
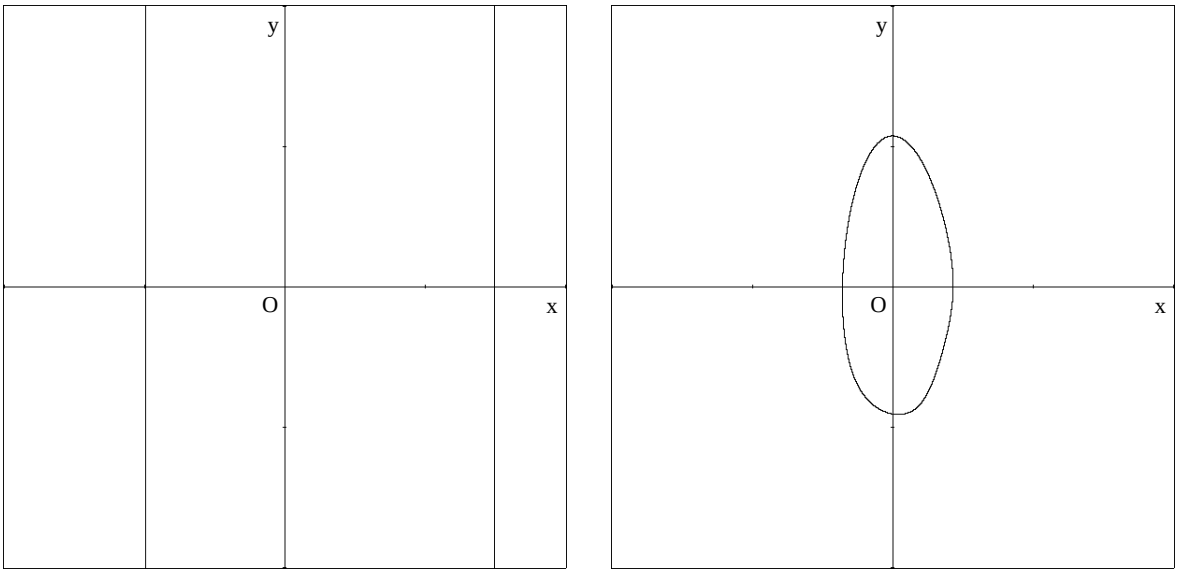



図 5.3: 同次二次変換 Type III(3) の標準形の発散収束境界




(a) (b)

図 5.4: Type III(3) の標準形に線形項を付加した場合の発散収束境界

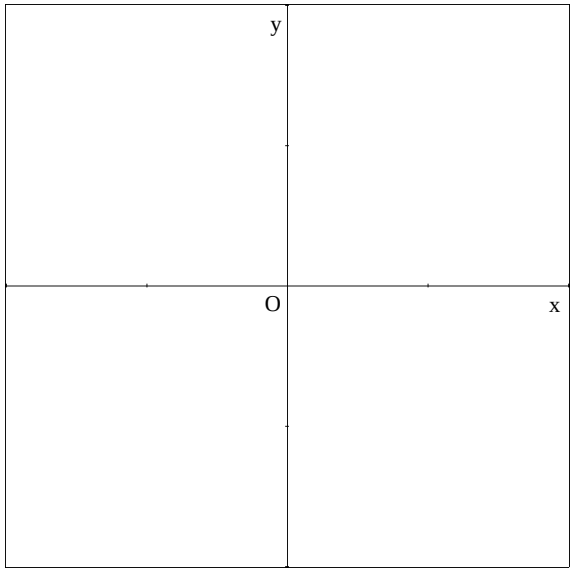
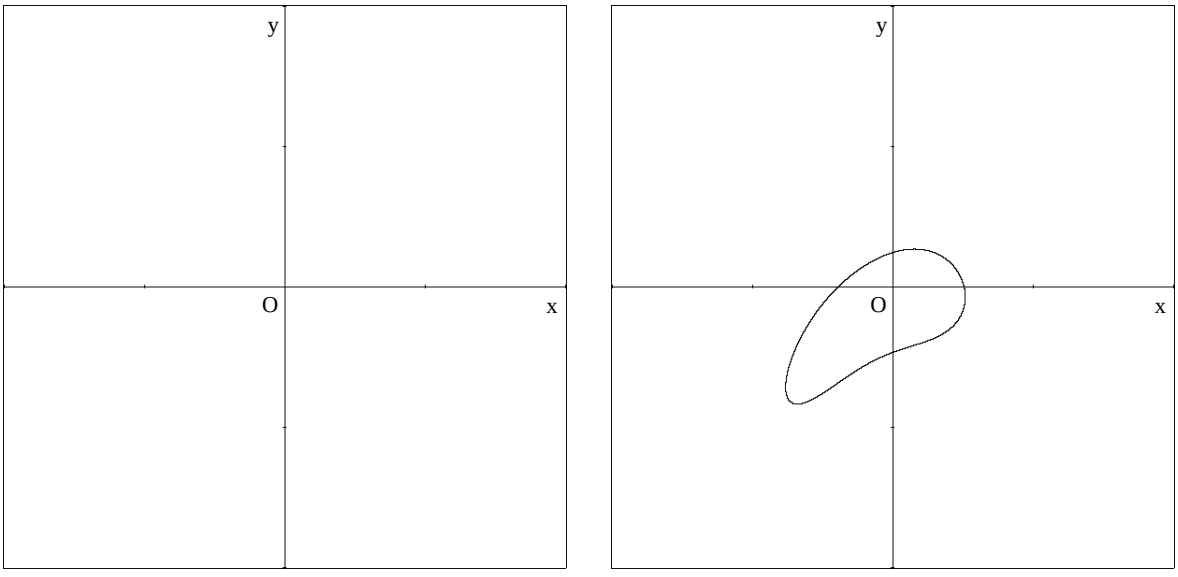



図 5.5: 同次二次変換 Type III(4) の標準形の発散収束境界




(a) (b)

図 5.6: Type III(4) の標準形に線形項を付加した場合の発散収束境界

# 第 6 章

# 結論

本論文では実同次変換に対して, 与えられた変換式から極限図形の性質を分類する手法を提案し, そのための判別式を導出した.

非線形系においては, 一般に初期値の選び方によって, 反復過程を繰り返した際の挙動が異なる. 極限図形はその性質を扱うことができる概念の一つである. フラクタルの分野においては, 1 次元複素変数の二次変換や三次変換などに対して, 極限図形である Julia 集合のもつ性質が数多く研究されている.

第 3 章では, 2 次元実同次二次変換に対して, 極限図形である発散収束境界の自己相似性を取り上げ, 入れ子構造の有無に基づく分類を行った. 発散収束境界の形状に自己相似性が現れる場合があることは, 伊達 [9] によりすでに示されていたが, その性質の有無を判別することは行われていなかった. 本論文では, 自己相似形状の一つである入れ子構造を定義し, 方向に関する写像の特徴を元にその判別を行った. この際新たな不変式$\Gamma$を導入し, 他の不変式と組み合わせることによってその判別を不変式系の枠組で可能にした. この結果により, 実際に極限図形を描くことなく, 任意に与えられた変換に対して分類ができ, またその手続きは, 変換式の係数を用いた有理演算を行うだけで可能となった. さらに, 式 (3.5) における不変式 $K_m$の $m = 0$ の場合である, $K_0$を導入し, これが入れ子構造の判別の補助的役割を果たすことも示した. 従来 $K_m$に関しては, $m = 1, 2, 3, 4$ について, 不動方向の安定性の判別, 無限不動方向の存在に関する判別, 発散収束境界形状の直線部分存在の判別等で

その役割があることは示されていたが, 今回 $K_0$の役割が新たに示された.

自己相似性は, 図形の一部を拡大すると全体, またはより大きな部分と類似した形状が現れる性質である. したがって, その性質を用いることによって, 一部の情報から全体の構造を予測したり, また逆に全体の構造から微小領域の構造を解明することが可能となる. この特徴を生かして, 信号処理や画像解析など, 様々な工学的問題への応用が行われている.

次に第 4 章では, 2 次元実同次三次変換に対して, その標準形を吟味した結果, Cima and Llibre[5] による 2 次元実同次三次微分方程式系の分類の完全性が成立していないことを発見し, これを訂正した. さらに変換を 2 次元四次形式と 2 次元二次形式に分解し, その組の不変式系を用いて, 同次変換の性質の中でも重要な概念の一つである無限不動方向の存在について, その必要十分条件を一般的な形式で与えた. 無限不動方向が存在することは, 原点へ収束する初期値の集合が無限遠まで伸びていることと同値である. すなわち, 極限図形の形状と密接に関連している. したがって, 本論文で導出した判別式を用いて, 発散収束境界が無限遠にまで伸びているか否かという特徴を判別することが可能である. また本文中にも述べたように, 無限不動方向の存在条件は, 2 次元実同次三次微分方程式系においては平衡線が存在する条件に対応する. この条件は Cima and Llibre[5] も示しているが, 本論文ではその判別式の表現に不変式系を用いたことにより, 任意に与えられた変換式に対して無理演算を行うことなく, 有理演算を行うだけで判別することが可能となった.

最後に第 5 章では, 非同次な変換においても同次変換と同様に極限図形を扱うことのできる例を示した. 一般に非同次な変換では同次変換と異なり, 一つの方向に対し境界は無数に現れ得る. しかし同次変換と同様に極限図形を解析できる場合があることを発見し, その性質について論じた.

自己相似性の性質は例えば時系列データの予測や画像データの圧縮など, 様々な工学的応用が開発されつつある. 本論文で特に着目した入れ子構造も自己相似形状の一例であるが, 極限図形にはその他にも自己相似性をもつ形状が見られ, それらに対する研究が残されている. また, 本論文では非同次な変換の極限図形を同次変換と同様に解析できる場合があ

ることを発見したが, それが可能となるような制約条件については明らかになっていない. このことに関するさらなる考察も残されている. この研究が進むことによって, より一般の多項式によって表される変換においても, 同次変換に対する解析結果を応用できる例が発見できる可能性がある. さらに, 点変換系に対して得られた判別式の自励系の力学系における物理的意味の解明なども今後の課題である.

# 謝辞

本研究を進めるにあたり, 御指導, 御鞭撻を頂いた, 北海道大学大学院工学研究科教授の伊達惇先生に深く感謝致します.

また, 本論文を作成するにあたり, 数多くの貴重な御助言, 御指摘を頂いた, 北海道大学大学院工学研究科教授の新保勝先生, 宮腰政明先生, 助教授の野中秀俊先生, 助手の塩谷浩之先生に心から感謝致します.

さらに日頃よりいろいろと御協力頂いた知能情報工学分野学生の皆様に感謝致します.

# 参考文献


[1] R. Aris, The algebra of system of second-order reactions, *I & EC Studies* **3**(1964), 1, 28–37.

[2] M. Barnsley, Fractals Everywhere, Academic Press, Inc., 1988.

[3] M. Barnsley, S. Demko, Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals, *Proc. Roy. Soc. London* **A399**(1985), 243–275.

[4] M. Barnsley, L. Hurd, マルチメディアフラクタル画像圧縮, トッパン, 1995.

[5] A. Cima and J. Llibre, Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane, *J. Math. Anal. Appl.* **147**(1990), 420–448.

[6] W.A. Coppel, A survey of quadratic systems, *J. Differential Equations* **2**(1966), 293–304.

[7] T. Date, Classification and analysis of two-dimensional real homogeneous quadratic differential equation systems, *J. Differential Equations* **32**(1979), 311–334.

[8] T. Date and M. Iri, Canonical forms of real homogeneous quadratic transformations, *J. Math. Anal. Appl.*, **56**(1976), 650–682.

[9] 伊達惇, 二次変換の発散収束境界の諸性質, 情報処理, **19**(1978), 6, 507–513.

[10] T. Da-te, T. Yoshikawa, H. Nonaka and M.F. Kawaguchi, On divergence-Convergence Boundary of Homogeneous Quadratic Transformations in Two Dimensions, *Proc. EUFIT '95*(1995), 141–144.

[11] N. Day, N. Murayama, Fractal Image Generation, *IEEJ Chaos Workshop*, **IP–94–33**(1994).

[12] R.L. Devaney, カオス力学系入門 第 2 版, 共立出版, 1990.

[13] R.J. Dickson and L.M. Perko, Bounded quadratic systems in the plane, *J. Differential Equations* **7**(1970), 251–273.

[14] E.B. Elliott, An Introduction to the Algebra of Quantics, Clarendon Press, Oxford, 1913.

[15] K. Falconer, Fractal Geometry:Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, New York, 1990.

[16] J. Feder, フラクタル, 啓学出版, 1991.

[17] P. Fischer and W.R. Smith (eds.), Chaos, Fractals and Dynamics, Marcel Dekker, New York, 1985.

[18] J.H. Grace and A. Young, The Algebra of Invariants, Cambridge, 1903.

[19] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer, New York, 1983.

[20] G.B. Gurevich. Foundations of the Theory of Algebraic Invariants, P.Noordhoff Ltd., Groningen, 1964.

[21] M. Hata, On the structure of self-similar sets, *Japan J. Appl. Math.*, **2**(1985), 2, 381–414.

[22] J. Hutchinson, Fractals and self-similarity, *Indiana University Journal of Mathematics*, **30**(1981), 713–747.

[23] W.G. Hwang, J. Todd, A Recurrence Relation for the Square Root, *J. Approx. Theory*, **9**(1973), 4, 299–306.

[24] 池田欽一, 時永祥三, 宮崎明雄, スケール伸長変換を用いたフラクタル表面の推定とその応用, 電子情報通信学会論文誌, **J81-A**(1998), 8, 1127–1133.

[25] A.E. Jacquin, Image coding based on a Fractal theory of iterated contractive image transformations, *IEEE Trans. Image Process*, **1**(1992), 1, 18–30.

[26] G. Julia, Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. Math. Pures Appl. (7)*, **4**(1918), 47–245.

[27] 上条正義, 相原伸一, 中沢賢, 確率的局所フラクタル変数による複雑な形状をもつ物体の同定— LSI ウェーハ上の異物のカテゴリー分類, 電子情報通信学会論文誌, **J78-D-II**(1995), 2, 239–247.

[28] 川又政征, 長久真樹, 樋口龍雄, 多重解像度木探索による反復変換理論符合化の高速符合化アルゴリズム, 電子情報通信学会論文誌, **J78-A**(1995), 2, 253–260.

[29] S. Lefschetz, Algebraic Topology, Amer. Math. Soc., New York, 1942.

[30] L.S. Lyagina, Integaral'nye Kriv'ye Uravneniya $y' = (ax^2+bxy+cy^2)/(dx^2+exy+fy^2)$, *Uspehi Mat. Nauk*, VI, 2(42)(1951), 171–183.

[31] B.B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco, 1982.

[32] B.B. Mandelbrot, J.W.van Ness, Fractional Brownian Motion, fractal noises and applications, *SIAM Review*, **10**(1968), 4, 422–437.

[33] L. Markus, Quadratic differential equations and nonassociative algebras, *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Annals of Mathematics Studies*, **45**(1960).

[34] 松下貢（編著）, 医学・生物学におけるフラクタル, 朝倉書店, 1992.

[35] R.M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, **261**(1976), 459–467.

[36] 西村治彦, 新地辰朗, 1 次元セルオートマトンの時系列フラクタル解析, 情報処理学会論文誌, **36**(1995), 4, 787–796.

[37] 西沢清子, 関口晃司, 吉野邦生, フラクタルと数の世界, 海文堂出版, 1991.

[38] L.M. Perko, Rotated vector fields and the global behavior of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane, *J. Differential Equations* **18**(1975), 63–86.

[39] P. Prusinkiewicz, Graphical Applications of L-system, *Graphics Interface*, (1986), 247–253.

[40] G. Salmon, Introductory to the Modern Higher Algebra (Second Edition), Hodgesm, Smith, and co., 1866.

[41] D. Saupe, Efficient computation of Julia sets and their fractal dimension, *Physica*, **28D**(1987), 358–370.

[42] J.A. Schouten, Ricci-Calculus:2nd ed., Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954.

[43] M. Schroeder, フラクタル・カオス・パワー則:はてなし世界からの覚え書, 森北出版, 1997.

[44] G.E. Shilov, Integral'nye Kriv'ye Odnorodnovo Uravneniya Pervovo Poryadka, *Uspehi Matem. Nauk*, V, 1(35)(1950), 193–203.

[45] 高安秀樹, フラクタル, 朝倉書店, 1986.

[46] J.M.T. Thompson, H.B. Stewart, 非線形力学とカオス, オーム社, 1988.

[47] 時永祥三, 森保洋, 宮崎明雄, 島津宣之, フラクタル的な性質をもつ時系列の一予測手法とその応用, 電子情報通信学会論文誌, **J79-A**(1996), 11, 1793–1800.

[48] 時永祥三, 森保洋, 宮崎明雄, 島津宣之, スケール伸長変換およびウェーブレット変換によるパラメータ推定を用いたフラクタル時系列の予測, 電子情報通信学会論文誌, **J79-A**(1996), 12, 2054–2062.

[49] 上田哲生, 谷口雅彦, 諸澤俊介, 複素力学系序説 —フラクタルと複素解析—, 培風館, 1995.

[50] R.F. Voss, The fractal dimension of percolation cluster hulls, *J. Phys. A. Math. Gen.*, **17**(1984), 1, 373–377.

[51] S. Wiggins, 非線形の力学系とカオス, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1992.

[52] S. Wolfram (ed.), Theory and Applications of Cellular Automata, World Scientific, 1986.

[53] G.W. Wornell and A.V. Oppenheim, Estimation of fractal signals from noisy measurement using wavelets, *IEEE Trans. Signal Processing*, **40**(1992), 3, 611–623.

[54] G.W. Wornell, Wavelet-based representation for the 1/f family of fractal processes, *Proc. IEEE*, **81**(1993), 10, 1428–1450.

[55] 山口昌哉, 非線型現象の数学, 基礎数学シリーズ 11, 朝倉書店, 1972.

[56] 山口昌哉, 畑政義, 木上淳, フラクタルの数理, 岩波講座応用数学 [対象 7], 1993.

[57] T. Yoshikawa, T. Da-te, On Self-Similarity in Homogeneous Quadratic Transformations, *AIP Conf. Proc.*, **517**(2000), 574–579.

[58] 吉川毅, 伊達惇, 2 次元実同次二次変換における発散収束境界の入れ子構造を決定する不変式の導出, 日本応用数理学会論文誌, **10**(2000), 4, 283–294.

[59] 吉川毅, 伊達惇, 2 次元同次二次変換における不動方向の吸引領域の様相について, 日本応用数理学会 平成 7 年度年会講演予稿集 (1995), 110–111.

[60] 吉川毅, 安細真裕, 伊達惇, 2 次元同次三次変換の不動方向の安定性について, 日本応用数理学会 平成 8 年度年会講演予稿集 (1996), 126–127.

[61] 吉川毅, 伊達惇, 安定な線形項をもつ 2 次元実二次変換の収束領域の特徴について, 日本応用数理学会 1997 年度年会講演予稿集 (1997), 156–157.