



Title	加速器ビームモニタ解析に用いる数値解析手法に関する研究
Author(s)	西山, 修輔
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第5141号
Issue Date	2000-03-24
DOI	https://doi.org/10.11501/3168705
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/28102
Type	doctoral thesis
File Information	thesis2000.pdf



加速器ビームモニタ解析に用いる
数値解析手法に関する研究

西山 修輔

目次

1	序論	1
I	有限差分時間領域法による加速器ビーム周辺電磁界の解析	4
2	有限差分時間領域法の概要	5
2.1	有限差分時間領域法	5
2.2	Yee のアルゴリズム	5
2.3	境界条件	9
2.3.1	媒質境界の定式化	9
2.3.2	完全導体	13
2.3.3	完全磁気導体	14
2.3.4	吸収境界条件	14
2.4	分散関係	19
2.5	安定条件	24
2.6	グリッド分散による位相速度の誤差	25
2.6.1	分散関係式	25
2.6.2	離散化された空間における位相速度	25
2.6.3	タイムステップによる位相速度への影響	26
2.6.4	伝播方向による位相速度への影響	28
2.6.5	セルサイズによる位相速度への影響	29
2.7	散乱界表示有限差分時間領域法	35
2.7.1	マクスウェル方程式の散乱界表示	35
2.7.2	Yee のアルゴリズムの適用	36
2.7.3	散乱界に対する境界条件	40

2.7.4	全電磁界の計算	40
2.8	まとめ	41
3	有限差分時間領域法における荷電粒子ビームの取扱い	42
3.1	自由電流としての取扱い	42
3.2	散乱界表示 FD-TD 法における入射波源としての取扱い	44
3.3	点電荷による入射波源と畳み込みによる解法	45
3.4	等速直線運動する点電荷の周辺電磁界のスペクトル	45
3.4.1	真空中を等速直線運動する場合のスペクトル	45
3.4.2	媒質中を等速直線運動する場合のスペクトル	52
3.5	等速直線運動する点電荷の周辺電磁界のサンプリング間隔の決定	59
3.5.1	サンプリングとエイリアス誤差	59
3.5.2	真空中を等速直線運動する点電荷が生じる電磁界のサンプリング	60
3.5.3	エイリアス誤差	61
3.5.4	サンプリング間隔の決定	63
3.6	デジタルフィルタの設計と誤差解析	64
3.6.1	散乱界 FD-TD 法におけるデジタルフィルタの利用	64
3.6.2	デジタルフィルタの設計	65
3.6.3	デジタルフィルタによる振幅および位相への影響	72
3.6.4	入射界のダウンサンプリングに用いるフィルタの設計	76
3.7	解析例	81
3.7.1	解析モデル	81
3.7.2	数値解析に用いたパラメータ	81
3.7.3	解析結果と考察	83
3.7.4	ビームの軌道が空間差分の格子に沿わない場合	86
4	応用: 定在波測定による電子線形加速器の微細構造パルス幅推定法の解析	94
4.1	定在波測定による微細構造パルス幅推定法の概要と輻射波の影響	94
4.2	数値解析による輻射波の影響の見積り	97
4.2.1	解析体系	97
4.2.2	反射波・輻射波の発生の様子	98
4.2.3	連続パルス列の場合の定在波の時間変化	110
4.2.4	輻射波の発生および測定結果に与える影響の評価	112

II	境界要素法による薄い金属境界を含む体系のポアソン方程式の解法	115
5	境界要素法の概要	116
5.1	積分方程式の導出	116
5.2	境界要素法	117
5.3	境界積分	118
5.3.1	h_{ii}	119
5.3.2	g_{ii}	120
5.4	開放領域	121
6	境界積分と薄い金属境界の扱い	122
6.1	境界要素法における薄い金属板の扱い	122
6.2	基礎方程式	122
6.3	厚さが無限小の金属板の定式化	123
6.4	数値計算例	127
6.5	まとめ	130
7	結論	131
	謝辞	133

第 1 章

序論

今日では、加速器は学術研究用途以外にも医療用、産業用など幅広い分野で利用され、加速される粒子の種類やエネルギー、パワーは非常に幅広くなっている。その中でも、電子加速器はシンクロトロン放射光や自由電子レーザーをはじめ、その他方法も含めて次世代の光源としての利用や研究が行われており、それに伴って加速器のビームには、低エミッタンス、低エネルギー広がり、高輝度、高安定性が要求されている。このような高品位ビームの発生は、電子ビームの発生源や加速機構の発展によるものであるが、加速したビームを計測診断する種々のビームモニタの果たす役割も大きい。そのため、ビームの位置やプロファイル、エネルギー、エミッタンス、波形などを精度よく測定できるビームモニタが必要とされている。特に、ビームに影響を与えずに測定できる非接触型のビームモニタは、加速器運転中の常時監視やフィードバック制御に必要であり、重要である。

非接触型のビームモニタの設計や動作解析には、電磁気理論による設計と実験による検証とともに、数値解析による設計や動作解析も行われてきた。近年では、電子計算機の能力および数値解析手法の発達に伴い、数値解析による設計で詳細な検討が行われることも多い。この際、加速器内部に設置されるビームモニタの解析には、加速管などの解析に用いられる各種の加速器設計用、あるいは汎用の電磁界解析コードが使用されている。その一方で、加速器の外部で用いるビームモニタの解析には、自由空間を模擬できることが必要であり、さらに、加速されたビームの位置や方向を自由に設定できることが望ましいが、このような解析に関する報告は少なく、解析コードも整備されておらず、汎用の電磁界解析コードでは対応していない。

本論文では、このような加速器のビームモニタの解析に用いるために、有限差分時間領域法 (FD-TD 法) において、加速器のパルス状ビーム、特に相対論的な電子ビームを電磁波

源として扱い、その軌道を空間差分の格子にかかわらず自由に設定可能な方法を提案した。

FD-TD 法は、マクスウェル方程式を空間差分および時間差分で近似して、定められた境界条件と初期値から時間発展的に電磁界を解く数値解法であり、時間領域における電磁界の数値解法として広く用いられている方法である。FD-TD 法において、加速器のパルス状ビームは移動する局在化した電流として扱われ、電流密度として差分化されたマクスウェル方程式中に現れる。電流密度も空間差分の格子にしたがって方向別に分けられ、各々が僅かに異なる位置に配置される。そのために、ビームの軌道が空間差分の格子に一致しない場合には、電荷保存則を満足したまま電流を移動させることが難しくなる。一方、散乱界表示 FD-TD 法では、解析空間に到来する入射電磁界は既知であるとして、解析空間中に存在する導体表面や誘電体内部などで発生する散乱電磁界のみを FD-TD 法で計算する。この場合はビームの軌道や位置は空間差分の格子とは無関係に設定可能だが、全ての時刻において、導体表面や誘電体内部の全ての位置でビームが発生する電磁界が計算できなければならない。任意の位置におけるビームが発生する電磁界は、遅延ポテンシャルを用いてビーム軌道全体にわたって空間積分を行って求めなければならない。散乱体の全ての位置で数値積分で求めるとその計算量は非常に多くなる。

本論文で提案した方法では、ビームと同じエネルギーを持つ点電荷がビームと同じ軌道を運動する場合の電磁界を入射電磁界として用いて散乱界表示 FD-TD 法で計算を行い、得られた電磁界の波形をパルス状ビームの波形と畳み込み積分することで、ビームの軌道に制約を受けず、計算量の大幅な増加も無く、ビームによって生じた電磁界が散乱体で散乱された結果を得ることが可能である。しかしながら、相対論的な点電荷の周辺の電磁界は極めて高速のパルスとなり、非常に高い周波数のスペクトルを含む。そのため、FD-TD 法のような離散時間系で扱う場合にはサンプリング定理に注意しなければならない。そこで、運動する点電荷の周辺電磁界のスペクトルを求め、軌道からの距離、点電荷の運動エネルギー、許容できるエイリアス誤差から必要なサンプリング間隔を決定する式を導出した。また、FD-TD 法では、離散時間の間隔を小さくすると計算時間が増大するだけでなくグリッド分散による誤差も増加するため、入射電磁界は細かい時間間隔でサンプリングを行い、それよりも粗い FD-TD 法の離散時間間隔へ変換する方法を用いた。この場合に数値的な低域通過フィルタが必要となるが、この低域通過フィルタの設計およびフィルタを通すことによって生じる振幅や位相の誤差についても検討した。これらサンプリングやフィルタによる誤差は、FD-TD 法自体による誤差と同程度であれば十分である。そのため、FD-TD 法の空間や時間の離散化に伴って生じるグリッド分散誤差についても検討を行い、空間差分の格子の間隔と分散性、異方性による誤差の関係を示した。

この方法を用いて定在波分布測定による電子線形加速器の微細構造パルス幅推定法の解析を行った。時間領域において、電子ビームに伴う電界とその反射波および誘起された電荷からの輻射波が複雑な定在波分布を形成することを示し、先に実験によって得られていた定在波分布の様子を良く説明することが出来た。

一方、本論文では、静電界や周波数領域での解析に用いる、境界要素法における薄い金属境界の扱いに関する方法についても示した。

境界要素法では、支配方程式から導いた境界積分方程式を境界上に節点を置いて離散化を行い、境界積分は区分的に数値積分で処理することで節点上の変数に関する連立方程式に帰着させる。境界積分の積分核には、特異性のあるグリーン関数か、より特異性の強いグリーン関数の導関数が含まれている。そのため、薄い導体板のように境界が隣接している場合には数値積分の精度が悪化するのを防ぐため、導体板の厚さに応じて境界要素を細かく離散化するなどの対策が必要となる。

本論文で示した方法では、境界要素の大きさは変えずに隣接した境界の距離を 0 とすることで、隣接した境界に対する境界積分を解析的に処理して数値積分に起因する誤差を除いた。このとき、金属境界であれば境界条件からより特異性の強いグリーン関数の導関数が含まれている境界積分は相殺されるため、隣接していない節点からの数値積分においても誤差が減少し、解析の精度が向上した。

解析例としてストリップラインの特性インピーダンスを求め、従来の方法と比較して薄い金属境界を含む場合でも境界要素を増加させずに解析の精度を保つことが可能であることを示した。

Part I

有限差分時間領域法による加速器ビーム周 辺電磁界の解析

第 2 章

有限差分時間領域法の概要

2.1 有限差分時間領域法

1966 年に Yee によって提案された有限差分時間領域法 (FD-TD 法) [1] は、電磁界の基本方程式であるマクスウェル方程式の微分形を空間差分および時間差分で近似し、定められた境界条件と初期値から時間発展的に解く数値解法である。その特徴は、Yee のアルゴリズムと呼ばれる、空間微分および時間微分を中央差分で近似する電磁界成分の空間配置と時間配置にある。以下でその概要を述べる。

2.2 Yee のアルゴリズム

電界を \mathbf{E} 、磁界を \mathbf{H} 、電流密度を \mathbf{J} 、電荷密度を ρ 、媒質の誘電率、透磁率、導電率をそれぞれ ε , μ , σ とすると、マクスウェル方程式の微分形は次のように表される。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.4)$$

ここで、 \mathbf{r} と t はそれぞれ位置ベクトルと時刻であり、電流密度 \mathbf{J} は自由電流密度 \mathbf{i} と導電電流密度 $\sigma \mathbf{E}$ の和である。(2.1)~(2.4) には電荷保存則

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

も含まれている。FD-TD 法では、(2.1) と (2.2) のみを差分化して解くが、(2.3) と (2.4) は初期条件で満足されていれば FD-TD 法の計算ではそれが保たれる [3]。

(2.1) と (2.2) を 3 次元直角座標系の成分ごとに分けると以下のようなになる。

$$-\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$-\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$-\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - i_x \quad (2.9)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - i_y \quad (2.10)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - i_z \quad (2.11)$$

ここでは、簡単のために媒質定数は等方性で時刻にも依存しないとした。これらの偏微分を中央差分で近似する。たとえば、(2.6) の各項は、

$$\frac{\partial H_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \approx \frac{H_x(\mathbf{r}, t + \frac{\Delta t}{2}) - H_x(\mathbf{r}, t - \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial E_z(\mathbf{r}, t)}{\partial y} \approx \frac{E_z(\mathbf{r} + \frac{\Delta y}{2} \mathbf{e}_y, t) - E_z(\mathbf{r} - \frac{\Delta y}{2} \mathbf{e}_y, t)}{\Delta y} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial E_y(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \approx \frac{E_y(\mathbf{r} + \frac{\Delta z}{2} \mathbf{e}_z, t) - E_y(\mathbf{r} - \frac{\Delta z}{2} \mathbf{e}_z, t)}{\Delta z} \quad (2.14)$$

となるので、(2.6) は中央差分近似を用いると

$$\begin{aligned} & -\mu \frac{H_x(\mathbf{r}, t + \frac{\Delta t}{2}) - H_x(\mathbf{r}, t - \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \\ & = \frac{E_z(\mathbf{r} + \frac{\Delta y}{2} \mathbf{e}_y, t) - E_z(\mathbf{r} - \frac{\Delta y}{2} \mathbf{e}_y, t)}{\Delta y} - \frac{E_y(\mathbf{r} + \frac{\Delta z}{2} \mathbf{e}_z, t) - E_y(\mathbf{r} - \frac{\Delta z}{2} \mathbf{e}_z, t)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (2.15)$$

と表される。(2.7)~(2.11) でも同様に、空間あるいは時刻が $\pm \Delta x/2$, $\pm \Delta y/2$, $\pm \Delta z/2$, $\pm \Delta t/2$ 離れた値が関係する式となる。

この中央差分近似を適用するため、解析空間全体を各辺の大きさが Δx , Δy , Δz の立方体の単位セルに分割し、それぞれのセルに図 2.1 のように電磁界の各成分を割り付ける。このとき、 i, j, k を整数として、原点に最も近い頂点が $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ にある単位セルに割り付けられた電磁界を次の記号で表す。

$$E_{x;i,j,k}^n = E_x \left((i + \frac{1}{2})\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t \right) \quad (2.16)$$

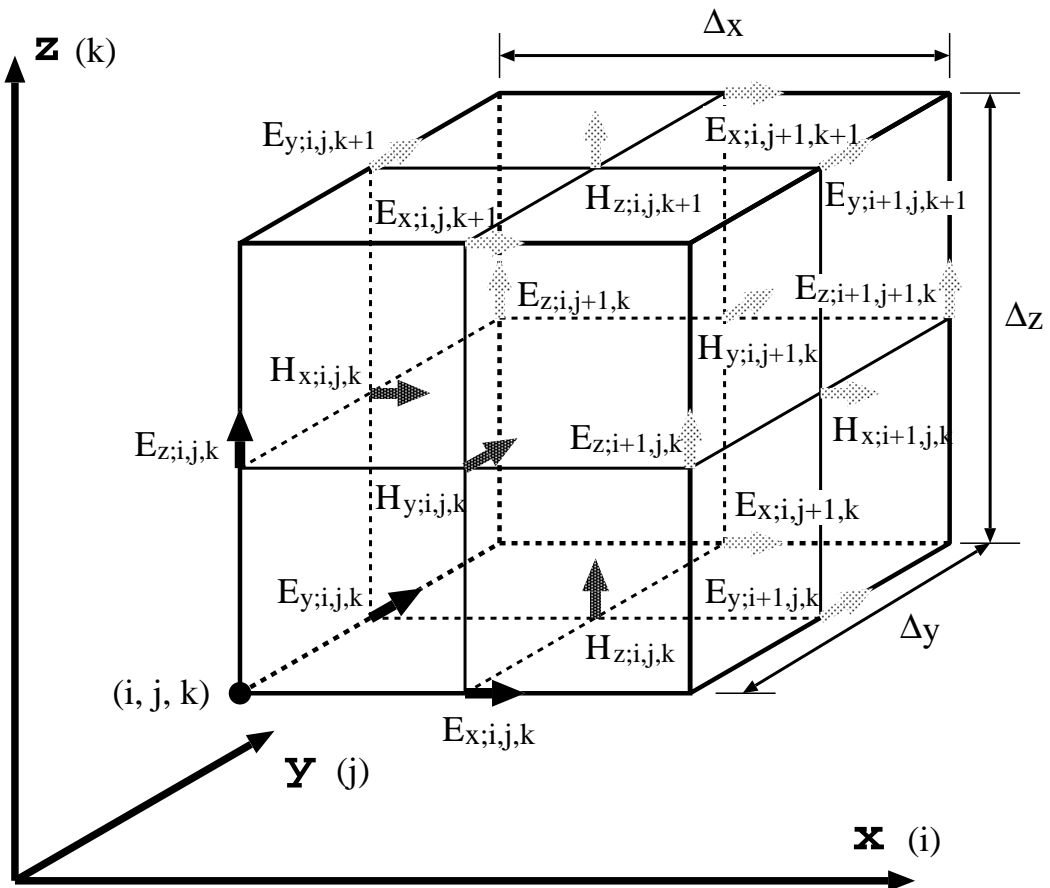


図 2.1: 3 次元 FD-TD 法の単位セル (Yee の単位セル)

$$E_{y;i,j,k}^n = E_y \left(i\Delta x, \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta y, k\Delta z, n\Delta t \right) \quad (2.17)$$

$$E_{z;i,j,k}^n = E_z \left(i\Delta x, j\Delta y, \left(k + \frac{1}{2} \right) \Delta z, n\Delta t \right) \quad (2.18)$$

$$H_{x;i,j,k}^n = H_x \left(i\Delta x, \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta y, \left(k + \frac{1}{2} \right) \Delta z, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \quad (2.19)$$

$$H_{y;i,j,k}^n = H_y \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) \Delta x, j\Delta y, \left(k + \frac{1}{2} \right) \Delta z, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \quad (2.20)$$

$$H_{z;i,j,k}^n = H_z \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) \Delta x, \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta y, k\Delta z, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \quad (2.21)$$

ここで時刻についても Δt 間隔で離散化しているが、時間の中央差分によって、電界と磁界は $\Delta t/2$ ずれて互いに関係するため、磁界には $\Delta t/2$ 遅れた時刻を用いている。この記号を用いて (2.6)~(2.11) の中央差分近似を表すと、

$$\frac{\mu}{\Delta t} \left(H_{x;i,j,k}^n - H_{x;i,j,k}^{n-1} \right) = -\frac{1}{\Delta y} \left(E_{z;i,j+1,k}^n - E_{z;i,j,k}^n \right) + \frac{1}{\Delta z} \left(E_{y;i,j,k+1}^n - E_{y;i,j,k}^n \right) \quad (2.22)$$

$$\frac{\mu}{\Delta t} \left(H_{y;i,j,k}^n - H_{y;i,j,k}^{n-1} \right) = -\frac{1}{\Delta z} \left(E_{x;i,j,k+1}^n - E_{x;i,j,k}^n \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(E_{z;i+1,j,k}^n - E_{z;i,j,k}^n \right) \quad (2.23)$$

$$\frac{\mu}{\Delta t} \left(H_{z;i,j,k}^n - H_{z;i,j,k}^{n-1} \right) = -\frac{1}{\Delta x} \left(E_{y;i+1,j,k}^n - E_{y;i,j,k}^n \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(E_{x;i,j+1,k}^n - E_{x;i,j,k}^n \right) \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\Delta t} \left(E_{x;i,j,k}^n - E_{x;i,j,k}^{n-1} \right) &= \frac{1}{\Delta y} \left(H_{z;i,j,k}^{n-1} - H_{z;i,j-1,k}^{n-1} \right) - \frac{1}{\Delta z} \left(H_{y;i,j,k}^{n-1} - H_{y;i,j,k-1}^{n-1} \right) \\ &\quad - \frac{\sigma}{2} \left(E_{x;i,j,k}^n + E_{x;i,j,k}^{n-1} \right) - i_{x;i,j,k}^{n-1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\Delta t} \left(E_{y;i,j,k}^n - E_{y;i,j,k}^{n-1} \right) &= \frac{1}{\Delta z} \left(H_{x;i,j,k}^{n-1} - H_{x;i,j,k-1}^{n-1} \right) - \frac{1}{\Delta x} \left(H_{z;i,j,k}^{n-1} - H_{z;i-1,j,k}^{n-1} \right) \\ &\quad - \frac{\sigma}{2} \left(E_{y;i,j,k}^n + E_{y;i,j,k}^{n-1} \right) - i_{y;i,j,k}^{n-1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\Delta t} \left(E_{z;i,j,k}^n - E_{z;i,j,k}^{n-1} \right) &= \frac{1}{\Delta x} \left(H_{y;i,j,k}^{n-1} - H_{y;i-1,j,k}^{n-1} \right) - \frac{1}{\Delta y} \left(H_{x;i,j,k}^{n-1} - H_{x;i,j-1,k}^{n-1} \right) \\ &\quad - \frac{\sigma}{2} \left(E_{z;i,j,k}^n + E_{z;i,j,k}^{n-1} \right) - i_{z;i,j,k}^{n-1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

となる。ここで (2.9)~(2.11) の導電電流密度 σE と自由電流密度 i については、電界と同じ位置、磁界と同じ時刻が用いられるため、

$$i_{x;i,j,k}^n = i_x \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) \Delta x, j\Delta y, k\Delta z, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \quad (2.28)$$

$$i_{y;i,j,k}^n = i_y \left(i\Delta x, \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta y, k\Delta z, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \quad (2.29)$$

$$i_{z;i,j,k}^n = i_z \left(i\Delta x, j\Delta y, \left(k + \frac{1}{2} \right) \Delta z, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \quad (2.30)$$

であり、導電電流密度には $E \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) \Delta t \right)$ に代わって $E(n\Delta t)$ と $E \left(\left(n - 1 \right) \Delta t \right)$ の平均値を用いている。

(2.22)~(2.27) を整理すると、 E^n , H^n に関して陽な以下の表式を得る。

$$H_{x;i,j,k}^n = H_{x;i,j,k}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\mu} \left(\frac{E_{z;i,j+1,k}^n - E_{z;i,j,k}^n}{\Delta y} - \frac{E_{y;i,j,k+1}^n - E_{y;i,j,k}^n}{\Delta z} \right) \quad (2.31)$$

$$H_{y;i,j,k}^n = H_{y;i,j,k}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\mu} \left(\frac{E_{x;i,j,k+1}^n - E_{x;i,j,k}^n}{\Delta z} - \frac{E_{z;i+1,j,k}^n - E_{z;i,j,k}^n}{\Delta x} \right) \quad (2.32)$$

$$H_{z;i,j,k}^n = H_{z;i,j,k}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\mu} \left(\frac{E_{y;i+1,j,k}^n - E_{y;i,j,k}^n}{\Delta x} - \frac{E_{x;i,j+1,k}^n - E_{x;i,j,k}^n}{\Delta y} \right) \quad (2.33)$$

$$E_{x;i,j,k}^n = \frac{2\varepsilon - \sigma\Delta t}{2\varepsilon + \sigma\Delta t} E_{x;i,j,k}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon + \sigma\Delta t} \left(\frac{H_{z;i,j,k}^{n-1} - H_{z;i,j-1,k}^{n-1}}{\Delta y} - \frac{H_{y;i,j,k}^{n-1} - H_{y;i,j,k-1}^{n-1}}{\Delta z} - i_{x;i,j,k}^{n-1} \right) \quad (2.34)$$

$$E_{y;i,j,k}^n = \frac{2\varepsilon - \sigma\Delta t}{2\varepsilon + \sigma\Delta t} E_{y;i,j,k}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon + \sigma\Delta t} \left(\frac{H_{x;i,j,k}^{n-1} - H_{x;i,j,k-1}^{n-1}}{\Delta z} - \frac{H_{z;i,j,k}^{n-1} - H_{z;i-1,j,k}^{n-1}}{\Delta x} - i_{y;i,j,k}^{n-1} \right) \quad (2.35)$$

$$E_{z;i,j,k}^n = \frac{2\varepsilon - \sigma\Delta t}{2\varepsilon + \sigma\Delta t} E_{z;i,j,k}^{n-1} + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon + \sigma\Delta t} \left(\frac{H_{y;i,j,k}^{n-1} - H_{y;i-1,j,k}^{n-1}}{\Delta x} - \frac{H_{x;i,j,k}^{n-1} - H_{x;i,j-1,k}^{n-1}}{\Delta y} - i_{z;i,j,k}^{n-1} \right) \quad (2.36)$$

これを用いると、時刻 $n\Delta t$ の電界は $(n-1)\Delta t$ における電界と $(n-\frac{1}{2})\Delta t$ における自由電流密度、隣接するセルの磁界から求められ、時刻 $(n+\frac{1}{2})\Delta t$ の磁界は $(n-\frac{1}{2})\Delta t$ における磁界と $n\Delta t$ における隣接するセルの電界から求められる。したがって、初期値 E^0, H^0 と各時刻での自由電流密度 i^n から Δt ごとに順次電磁界を求めることが可能である。

2.3 境界条件

2.3.1 媒質境界の定式化

前節では媒質定数 ε, μ, σ は一定としていたが、これらがセルごとに異なる値を取る場合についての定式化を以下に示す。同時に、単位セルの大きさがセルごとに異なることも考慮する。

x, y, z 方向に i, j, k 番目の単位セルの大きさを $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$ 、誘電率、透磁率、導電率をそれぞれ $\varepsilon_{i,j,k}, \mu_{i,j,k}, \sigma_{i,j,k}$ とする。電界は単位セルの辺に位置しており、境界面に対して接線方向となるため、媒質定数がセルごとに変化しても影響を受けない。それに対し、磁界は単位セルの各面の中央に垂直に配置されるので、隣接するセルと透磁率が異なる場合には、磁界ではなく磁束密度が等しくなることを考慮しなければならない。

磁界の更新 (2.31)(2.32)(2.33) については、磁界が単位セルの面の中央に位置しているため、差分の幅はそのセルの大きさのみで決めることができる。また、電界は単位セルの辺

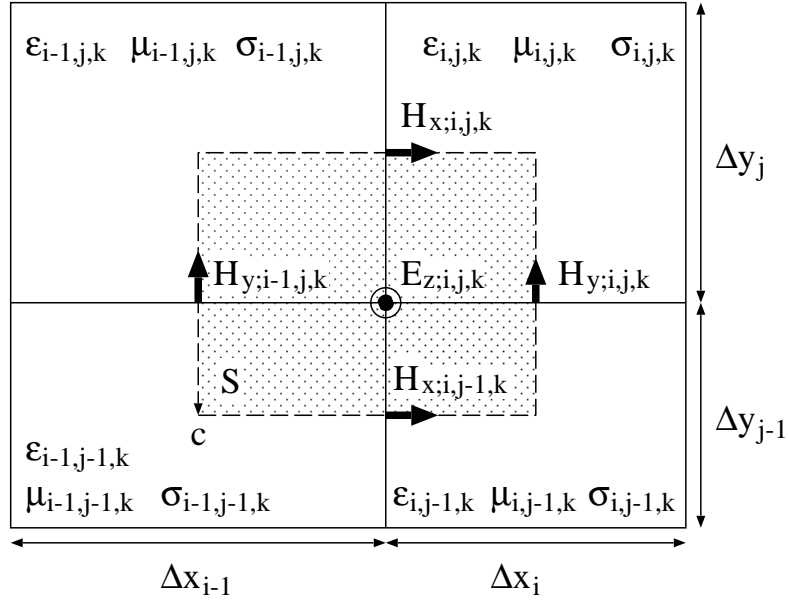


図 2.2: 媒質定数、セルサイズが変化する場合の定式化に用いる積分路

に位置しているため、セルごとに媒質定数が変化しても変わらない。しかしながら、磁界が配置されるセルの面で透磁率が変化する場合、磁界は面を挟んで不連続に変化し、面上の磁界の値を一意に決定できない。たとえば、 $\mu_{i,j,k}$ と $\mu_{i-1,j,k}$ が異なる場合、その二つのセルの境界面に垂直に位置する $H_{x;i,j,k}$ は

$$\mu_{i,j,k} H_{x;i,j,k} \Big|_{i,j,k} = \mu_{i-1,j,k} H_{x;i,j,k} \Big|_{i-1,j,k} \quad (2.37)$$

となつて、 $H_{x;i,j,k}$ の i, j, k 番目のセル内での値と $i-1, j, k$ 番目のセル内での値は異なる。そこで、 $H_{i,j,k}$ は i, j, k 番目のセル内での磁界を表すものとする、単位セルの大きさや媒質定数が隣接するセルと異なる場合でも透磁率やセルの大きさは i, j, k 番目のセルの値のみを用いて (2.31)(2.32)(2.33) と同様の表式となる。

$$H_{x;i,j,k}^n = H_{x;i,j,k}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_{z;i,j+1,k}^n - E_{z;i,j,k}^n}{\Delta y_j} - \frac{E_{y;i,j,k+1}^n - E_{y;i,j,k}^n}{\Delta z_k} \right) \quad (2.38)$$

$$H_{y;i,j,k}^n = H_{y;i,j,k}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_{x;i,j,k+1}^n - E_{x;i,j,k}^n}{\Delta z_k} - \frac{E_{z;i+1,j,k}^n - E_{z;i,j,k}^n}{\Delta x_i} \right) \quad (2.39)$$

$$H_{z;i,j,k}^n = H_{z;i,j,k}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_{y;i+1,j,k}^n - E_{y;i,j,k}^n}{\Delta x_i} - \frac{E_{x;i,j+1,k}^n - E_{x;i,j,k}^n}{\Delta y_j} \right) \quad (2.40)$$

電界の更新 (2.34)(2.35)(2.36) については、(2.2) の積分形から定式化を行う。\$E_{z;i,j,k}\$ について、図 2.2 のような積分路をとると、

$$\oint_c \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{H}_{i,j,k}^{n-1} \cdot d\mathbf{s} &\approx H_{y;i,j,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i,j-1,k}} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \\ &\quad - H_{x;i,j,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i-1,j,k}} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \\ &\quad - H_{y;i-1,j,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\mu_{i-1,j,k}}{\mu_{i-1,j-1,k}} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \\ &\quad + H_{x;i,j-1,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\mu_{i,j-1,k}}{\mu_{i-1,j-1,k}} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \varepsilon E_{z;i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} dS &\approx \frac{E_{z;i,j,k}^n - E_{z;i,j,k}^{n-1}}{\Delta t} \left(\varepsilon_{i,j,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_j}{2} + \varepsilon_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_j}{2} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} + \varepsilon_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \int_S \sigma E_{z;i,j,k}^{n-\frac{1}{2}} dS &\approx \frac{E_{z;i,j,k}^n + E_{z;i,j,k}^{n-1}}{2} \left(\sigma_{i,j,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_j}{2} + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_j}{2} \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\int_S i_{z;i,j,k}^n dS \approx i_{z;i,j,k}^n \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \quad (2.45)$$

となる。ここで、磁界の周回積分のときに磁束密度の連続より

$$\mu_{i-1,j,k} H_{x;i,j,k} \Big|_{i-1,j,k} = \mu_{i,j,k} H_{x;i,j,k} \Big|_{i,j,k} = \mu_{i,j,k} H_{x;i,j,k} \quad (2.46)$$

$$\mu_{i,j-1,k} H_{y;i,j,k} \Big|_{i,j-1,k} = \mu_{i,j,k} H_{y;i,j,k} \Big|_{i,j,k} = \mu_{i,j,k} H_{y;i,j,k} \quad (2.47)$$

$$\mu_{i-1,j-1,k} H_{x;i,j-1,k} \Big|_{i-1,j-1,k} = \mu_{i,j-1,k} H_{x;i,j-1,k} \Big|_{i,j-1,k} = \mu_{i,j-1,k} H_{x;i,j-1,k} \quad (2.48)$$

$$\mu_{i-1,j-1,k} H_{y;i-1,j,k} \Big|_{i-1,j-1,k} = \mu_{i-1,j,k} H_{y;i-1,j,k} \Big|_{i-1,j,k} = \mu_{i-1,j,k} H_{y;i-1,j,k} \quad (2.49)$$

となることを用いた。(2.36) と同様に \$E_z^n\$ について陽な形にまとめると以下ようになる。

$$\begin{aligned} E_{z;i,j,k}^n &= \frac{2\varepsilon_a - \sigma_a \Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} E_{z;i,j,k}^{n-1} - \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} i_{z;i,j,k}^{n-1} \\ &\quad + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \frac{1}{S} \left(H_{y;i,j,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i,j-1,k}} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - H_{x;i,j,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i-1,j,k}} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \\
& - H_{y;i-1,j,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\mu_{i-1,j,k}}{\mu_{i-1,j-1,k}} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \\
& + H_{x;i,j-1,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\mu_{i,j-1,k}}{\mu_{i-1,j-1,k}} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \Big) \tag{2.50} \\
\varepsilon_a &= \frac{1}{S} \left(\varepsilon_{i,j,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_j}{2} + \varepsilon_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_j}{2} \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} + \varepsilon_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \\
\sigma_a &= \frac{1}{S} \left(\sigma_{i,j,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_j}{2} + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_j}{2} \right. \\
& \quad \left. + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \\
S &= \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right)
\end{aligned}$$

多くの媒質では透磁率は真空中と同じである。隣接するセルの透磁率が等しい場合には、

$$\begin{aligned}
E_{z;i,j,k}^n &= \frac{2\varepsilon_a - \sigma_a \Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} E_{z;i,j,k}^{n-1} \\
& + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \left(\frac{H_{y;i,j,k}^{n-1} - H_{y;i-1,j,k}^{n-1}}{\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2}} - \frac{H_{x;i,j,k}^{n-1} - H_{x;i,j-1,k}^{n-1}}{\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2}} - i_{z;i,j,k}^{n-1} \right) \tag{2.51}
\end{aligned}$$

となって、透磁率を含まず、誘電率、導電率、空間差分の幅を電界に接するセルについて平均をとった形となる。

E_x , E_y についても同様の方法で以下の表式を得る。

$$\begin{aligned}
E_{x;i,j,k}^n &= \frac{2\varepsilon_a - \sigma_a \Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} E_{x;i,j,k}^{n-1} - \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} i_{x;i,j,k}^{n-1} \\
& + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \frac{1}{S} \left(H_{z;i,j,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i,j,k-1}} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \right. \\
& \quad - H_{x;i,j,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i,j-1,k}} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \\
& \quad - H_{z;i,j-1,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\mu_{i,j-1,k}}{\mu_{i,j-1,k-1}} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \\
& \quad \left. + H_{y;i,j,k-1}^{n-1} \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\mu_{i,j,k-1}}{\mu_{i,j-1,k-1}} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \right) \tag{2.52} \\
\varepsilon_a &= \frac{1}{S} \left(\varepsilon_{i,j,k} \frac{\Delta y_j}{2} \frac{\Delta z_k}{2} + \varepsilon_{i,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \frac{\Delta z_k}{2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon_{i,j,k-1} \frac{\Delta y_j}{2} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} + \varepsilon_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \Big) \\
\sigma_a &= \frac{1}{S} \left(\sigma_{i,j,k} \frac{\Delta y_j}{2} \frac{\Delta z_k}{2} + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \frac{\Delta z_k}{2} \right. \\
& \quad \left. + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta y_j}{2} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \\
S &= \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \\
E_{y;i,j,k}^n &= \frac{2\varepsilon_a - \sigma_a \Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} E_{y;i,j,k}^{n-1} - \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} i_{y;i,j,k}^{n-1} \\
& \quad + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \frac{1}{S} \left(H_{x;i,j,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i-1,j,k}} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \right. \\
& \quad \quad - H_{y;i,j,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i,j,k-1}} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \\
& \quad \quad - H_{x;i,j,k-1}^{n-1} \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\mu_{i,j,k-1}}{\mu_{i-1,j-1,k}} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \\
& \quad \quad \left. + H_{z;i-1,j,k}^{n-1} \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\mu_{i-1,j,k}}{\mu_{i-1,j-1,k}} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \right) \tag{2.53} \\
\varepsilon_a &= \frac{1}{S} \left(\varepsilon_{i,j,k} \frac{\Delta z_k}{2} \frac{\Delta x_i}{2} + \varepsilon_{i,j,k-1} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \frac{\Delta x_i}{2} \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon_{i-1,j,k} \frac{\Delta z_k}{2} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} + \varepsilon_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \\
\sigma_a &= \frac{1}{S} \left(\sigma_{i,j,k} \frac{\Delta z_k}{2} \frac{\Delta x_i}{2} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \frac{\Delta x_i}{2} \right. \\
& \quad \left. + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta z_k}{2} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \\
S &= \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right)
\end{aligned}$$

2.3.2 完全導体

完全導体では、表面における電界の接線方向成分を 0 とすればよい。したがって、該当するセルの電界は初期値を 0 としておけば、タイムステップ毎に計算する必要はない。金属の表面電流による損失や表皮厚さを無視できる場合のほか、厚さや直径がセルの大きさに比べ非常に小さい導体板、導線などに用いられる。

2.3.3 完全磁気導体

完全磁気導体では、表面における磁界の接線方向成分を 0 とすればよい。対称性がある系の対称面に用いると解析空間を半減することができる。このとき、単位セルの中央が対称面となることに注意が必要である。

2.3.4 吸収境界条件

FD-TD 法の計算では、(2.31)~(2.36) に示したように隣接するセルの情報が必要となる。しかし、計算機上に実現できる解析空間は有限の大きさであり、その端面となるセルにおける計算は別の方法が必要となる。

解析領域が閉じた共振器のような閉領域問題であれば、領域外のセルでは計算をする必要がなく、解析空間の端のセルについて考慮する必要はないが、開放領域問題では、端のセルでは解析空間外の値を用いずに計算を行い、そのうえ、解析空間の外へ伝播する電磁波がそこで反射を起こさないようにしなければならない。これを実現する境界条件を吸収境界条件と呼びいくつかのアルゴリズムが提案されているが、以下では比較的簡単によく用いられている Mur の吸収境界条件 [4] について概要を示す。

Mur の 1 次吸収境界条件

$-z$ 方向に速度 c で進む平面波の電界の x 方向成分は次の微分方程式を満足する。

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad (2.54)$$

この微分方程式を $z = 0$ のセルにおいて中央差分近似で表すと、時刻と位置を差分の中央に合わせて、

$$\frac{E_{x;i,j,1}^{n-\frac{1}{2}} - E_{x;i,j,0}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{1}{c} \frac{E_{x;i,j,1/2}^n - E_{x;i,j,1/2}^{n-1}}{\Delta t} = 0 \quad (2.55)$$

となる。Yee の単位セル上では、これらの位置と時刻に E_z は割り付けられていないので、第 1 項の時刻 $(n - \frac{1}{2})\Delta t$ は $n\Delta t$ と $(n - 1)\Delta t$ の平均で、第 2 項の位置 $z = \frac{1}{2}\Delta z$ は $z = 0$ と $z = \Delta z$ の平均で表すと、

$$\frac{\frac{E_{x;i,j,1}^n + E_{x;i,j,1}^{n-1}}{2} - \frac{E_{x;i,j,0}^n + E_{x;i,j,0}^{n-1}}{2}}{\Delta z} - \frac{1}{c} \frac{\frac{E_{x;i,j,1}^n + E_{x;i,j,0}^n}{2} - \frac{E_{x;i,j,1}^{n-1} + E_{x;i,j,0}^{n-1}}{2}}{\Delta t} = 0 \quad (2.56)$$

となり、 $E_{x;i,j,0}^n$ について整理すると、

$$E_{x;i,j,0}^n = E_{x;i,j,1}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta z}{c\Delta t + \Delta z} (E_{x;i,j,1}^n - E_{x;i,j,0}^{n-1}) \quad (2.57)$$

となって、 $z < 0$ の電磁界を用いずに $z = 0$ の電界を更新することができる。この方法を Mur の 1 次吸収境界条件と呼ぶ。+ z 方向に進む平面波に対する $z = K\Delta z$ のセルにおける吸収境界条件は、 E_x が満足する微分方程式が

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad (2.58)$$

となり、空間差分の中心が $z = (K - \frac{1}{2})\Delta z$ となる他は同様に定式化できて、

$$E_{x;i,j,K}^n = E_{x;i,j,K-1}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta z}{c\Delta t + \Delta z} (E_{x;i,j,K-1}^n - E_{x;i,j,K}^{n-1}) \quad (2.59)$$

となる。同様の方法で、境界面に平行な電磁界成分に対して Mur の 1 次吸収境界条件を適用できる。

Mur の 2 次吸収境界条件

1 次吸収境界条件では、境界面に垂直に入射する平面波を元に定式化を行ったため、斜めに入射する電磁波に対しては十分に吸収することができず、反射波を生じる。ここでは、斜めからの入射も考慮した 2 次吸収境界条件を導く。

波数 k 、角周波数 ω の平面波の電界の x 方向成分は

$$E_x(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_x(\mathbf{k}, \omega) \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \quad (2.60)$$

と表されるので、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -jk_x E_x \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -jk_y E_x \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -jk_z E_x \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = +j\omega E_x \quad (2.64)$$

となる。平面波の伝播方向がほぼ $-z$ 方向とすると、 $k^2 \gg k_x^2 + k_y^2$ であり、 $k_z < 0$ であるから、 $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ より

$$k_z = -\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

$$\begin{aligned}
&= -k \left(1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\simeq -k \left(1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.65}$$

と近似することができて、(2.63) に代入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial z} &= jkE_x - j \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} E_x \\
\frac{\partial E_x}{\partial z} &= j \frac{\omega}{c} E_x - j \frac{c}{2\omega} (k_x^2 + k_y^2) E_x \\
j\omega \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{(j\omega)^2}{c} E_x - \frac{c}{2} ((-jk_x)^2 + (-jk_y)^2) E_x \\
0 &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.66}$$

ここで、 $k = \omega/c$ と (2.61)~(2.64) を用いた。1 次吸収境界条件のときと同様に、Yee の単位セルにおける E_x の時間および空間配置に注意して差分化すると、

$$\begin{aligned}
E_{x;i,j,0}^n &= -E_{x;i,j,1}^{n-2} + \frac{c\Delta t - \Delta z}{c\Delta t + \Delta z} (E_{x;i,j,1}^n + E_{x;i,j,0}^{n-2}) + \frac{2\Delta z}{c\Delta t + \Delta z} (E_{x;i,j,0}^{n-1} + E_{x;i,j,1}^{n-1}) \\
&\quad + \frac{\Delta z(c\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2(c\Delta t + \Delta z)} (E_{x;i+1,j,0}^{n-1} - 2E_{x;i,j,0}^{n-1} + E_{x;i-1,j,0}^{n-1} \\
&\quad \quad \quad + E_{x;i+1,j,1}^{n-1} - 2E_{x;i,j,1}^{n-1} + E_{x;i-1,j,1}^{n-1}) \\
&\quad + \frac{\Delta z(c\Delta t)^2}{2(\Delta y)^2(c\Delta t + \Delta z)} (E_{x;i,j+1,0}^{n-1} - 2E_{x;i,j,0}^{n-1} + E_{x;i,j-1,0}^{n-1} \\
&\quad \quad \quad + E_{x;i,j+1,1}^{n-1} - 2E_{x;i,j,1}^{n-1} + E_{x;i,j-1,1}^{n-1})
\end{aligned} \tag{2.67}$$

となって、 $z = 0$ のセルにおける E_x に対する Mur の 2 次吸収境界条件を得る。

吸収境界における反射係数

Mur の 2 次吸収境界条件でも入射角が境界面に対しほぼ垂直として近似を用いているので、入射角が大きくなれば十分に吸収できなくなる。ここでは、1 次および 2 次の吸収境界条件における反射係数が入射角によってどのように変化するかを示す。

$z = 0$ のセルに $-z$ 方向へ伝播する E_x に対する吸収境界条件 (2.57)(2.67) を適用し、波数 k 、角周波数 ω の平面波が $y - z$ 平面において入射角 θ で入射した場合を考える。

$$\begin{aligned}
k_x &= 0 \\
k_y &= k \sin \theta \\
k_z &= k \cos \theta
\end{aligned}$$

と置くと、吸収境界へ向かう入射波 E_x^i は、

$$E_x^i(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_x(\mathbf{k}, \omega) \exp(j(\omega t - k_y y + k_z z)) \quad (2.68)$$

となり、反射波 E_x^r は反射係数を R として

$$E_x^r(\mathbf{r}, t) = R\tilde{E}_x(\mathbf{k}, \omega) \exp(j(\omega t - k_y y - k_z z)) \quad (2.69)$$

となるので、 $z \geq 0$ における E_x は、

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= E_x^i(\mathbf{r}, t) + E_x^r(\mathbf{r}, t) \\ &= \tilde{E}_x \exp(j(\omega t - k_y y)) (\exp(+jk_z z) + R \exp(-jk_z z)) \end{aligned} \quad (2.70)$$

となる。Yee の単位セル上では

$$E_{x;i,j,k}^n = \tilde{E}_x \exp(j(\omega n \Delta t - k_y(j \Delta y))) (\exp(+jk_z(k \Delta z)) + R \exp(-jk_z(k \Delta z))) \quad (2.71)$$

となるので¹、これを Mur の 1 次吸収境界条件 (2.57) に用いると、反射係数は

$$\begin{aligned} E_{x;i,j,0}^n &= E_{x;i,j,1}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta z}{c\Delta t + \Delta z} (E_{x;i,j,1}^n - E_{x;i,j,0}^{n-1}) \\ e^{j\omega n \Delta t} (1 + R) &= e^{j\omega(n-1)\Delta t} (e^{jk_z \Delta z} + R e^{-jk_z \Delta z}) \\ &\quad + \frac{c\Delta t - \Delta z}{c\Delta t + \Delta z} (e^{j\omega n \Delta t} (e^{jk_z \Delta z} + R e^{-jk_z \Delta z}) - e^{j\omega(n-1)\Delta t} (1 + R)) \\ 1 + R &= e^{-j\omega \Delta t} (e^{jk_z \Delta z} + R e^{-jk_z \Delta z}) \\ &\quad + \frac{c\Delta t - \Delta z}{c\Delta t + \Delta z} ((e^{jk_z \Delta z} + R e^{-jk_z \Delta z}) - e^{-j\omega \Delta t} (1 + R)) \\ R &= -\frac{1 - e^{-j\omega \Delta t} e^{+jk_z \Delta z} - \frac{c\Delta t - \Delta z}{c\Delta t + \Delta z} (e^{+jk_z \Delta z} - e^{-j\omega \Delta t})}{1 - e^{-j\omega \Delta t} e^{-jk_z \Delta z} - \frac{c\Delta t - \Delta z}{c\Delta t + \Delta z} (e^{-jk_z \Delta z} - e^{-j\omega \Delta t})} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} &1 - e^{-j\omega \Delta t} e^{\pm jk_z \Delta z} - \frac{c\Delta t - \Delta z}{c\Delta t + \Delta z} (e^{\pm jk_z \Delta z} - e^{-j\omega \Delta t}) \\ &= \frac{1}{c\Delta t + \Delta z} \left(c\Delta t (1 - e^{-j\omega \Delta t} e^{\pm jk_z \Delta z} - (e^{\pm jk_z \Delta z} - e^{-j\omega \Delta t})) \right. \\ &\quad \left. + \Delta z (1 - e^{-j\omega \Delta t} e^{\pm jk_z \Delta z} + (e^{\pm jk_z \Delta z} - e^{-j\omega \Delta t})) \right) \end{aligned}$$

¹セルの添字の j, k と虚数単位、波数の j, k が混在しているので注意。 $\Delta y, \Delta z$ の係数となるのはセルの添字である。

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c\Delta t + \Delta z} \left(c\Delta t (1 - e^{\pm j k_z \Delta z}) (1 + e^{-j\omega\Delta t}) + \Delta z (1 + e^{\pm j k_z \Delta z}) (1 - e^{-j\omega\Delta t}) \right) \\
&= \frac{e^{\pm j \frac{k_z \Delta z}{2}} e^{-j \frac{\omega \Delta t}{2}}}{c\Delta t + \Delta z} \left(c\Delta t (e^{\mp j \frac{k_z \Delta z}{2}} - e^{\pm j \frac{k_z \Delta z}{2}}) (e^{j \frac{\omega \Delta t}{2}} + e^{-j \frac{\omega \Delta t}{2}}) \right. \\
&\quad \left. + \Delta z (e^{\mp j \frac{k_z \Delta z}{2}} + e^{\pm j \frac{k_z \Delta z}{2}}) (e^{j \frac{\omega \Delta t}{2}} - e^{-j \frac{\omega \Delta t}{2}}) \right) \\
&= \frac{4j e^{\pm j \frac{k_z \Delta z}{2}} e^{-j \frac{\omega \Delta t}{2}}}{c\Delta t + \Delta z} \left(\Delta z \cos \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \sin \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \mp c\Delta t \sin \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

とできるので、1次吸収境界条件の反射係数は

$$\begin{aligned}
R_1 &= -e^{j k_z \Delta z} \frac{a - b}{a + b} & (2.72) \\
a &= \Delta z \cos \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \sin \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \\
b &= c\Delta t \sin \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right)
\end{aligned}$$

として求めることができる。同様の方法で2次吸収境界条件の反射係数も求めることができ、

$$\begin{aligned}
R_2 &= -e^{j k_z \Delta z} \frac{a - b}{a + b} & (2.73) \\
a &= \Delta z \cos \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \left(\sin^2 \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta y} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{k_y \Delta y}{2} \right) \right) \\
b &= \frac{c\Delta t}{2} \sin \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \sin(\omega \Delta t)
\end{aligned}$$

となる。1次、2次のどちらも、入射角 θ が増して k_z が減少すると、 a が増加し b が減少するので反射係数が増加する。

$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \lambda/10$, $c\Delta t = \Delta x/\sqrt{3}$ として入射角 θ を変化させた場合の1次および2次吸収境界条件の反射係数を図 2.3 に示す。入射角が0度でも約 -40dB の反射が生じるのは、グリッド分散によって平面波の伝播速度が媒質定数で決まる値よりも僅かに遅くなっているためである。垂直入射の場合を元に定式化した1次吸収境界条件では、斜め入射による位相速度の増加分 $1/\cos\theta$ とグリッド分散による伝播速度の減少が互いに打ち消し合う入射角で無反射となり、斜め入射を考慮している2次吸収境界条件では、それよりも入射角が大きい場合に無反射となっている。また、1次、2次いずれも入射角が増加する程反射係数も増加し、吸収境界面にほぼ平行に入射する場合には全反射に近いことがわかる。

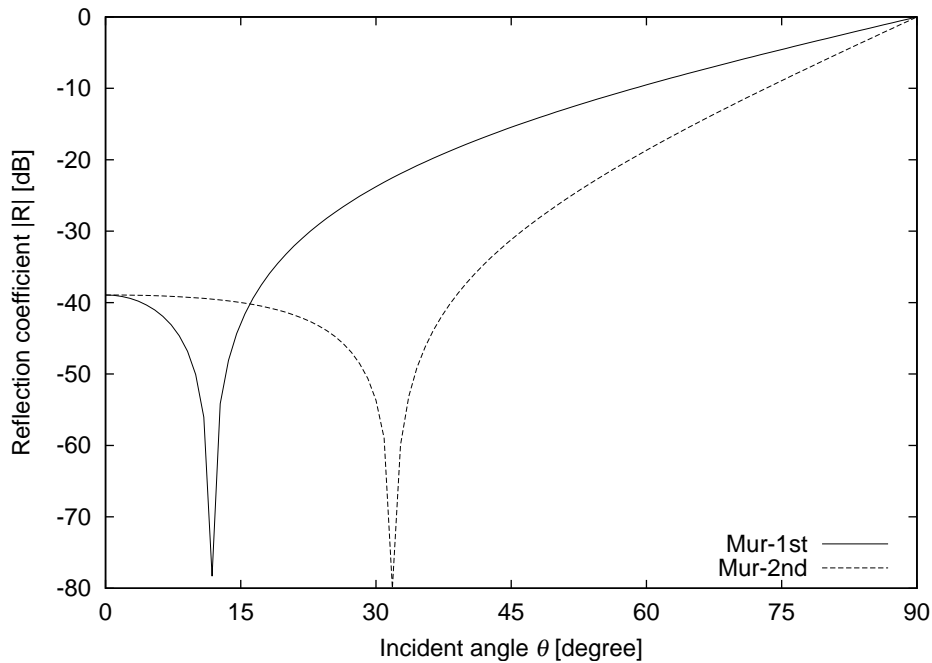


図 2.3: Mur の吸収境界条件の反射係数の入射角依存性

その他の吸収境界条件

Mur の吸収境界条件以外にも多くの吸収境界条件が提案されており、[3] では Higdon, Liao, Berenger による吸収境界条件も解説されている。その中でも、Berenger による Perfectly Matched Layer (PML) [5] は Mur 等とは異なった原理に基づく方法で、非物理的な無反射損失性媒質を用いる方法であり、広い範囲の入射角に対して反射係数を非常に小さくすることができる有効な吸収境界条件であるが、吸収境界面にほぼ平行に入射する入射波には反射が大きくなってしまふ点は Mur 等と変わらない。したがって、開放領域などで吸収境界条件を用いる場合には、電磁界が吸収境界面に沿って伝播するような状況は避けるべきである。

2.4 分散関係

FD-TD 法において、タイムステップが Δt 、各辺の大きさが Δx , Δy , Δz の立方体単位セルからなる一様な空間を角周波数 ω 、波数 k の平面波が伝播する場合の分散関係を導

出する。ここで

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \quad (2.74)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega) \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \quad (2.75)$$

とする。

簡単のため、媒質の導電率は 0 とし、自由電流も存在しないとして、マクスウェル方程式の回転に関する 2 式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.76)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.77)$$

を中央差分化して表すと以下ようになる。

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} (E_{x;i,j,k}^n - E_{x;i,j,k}^{n-1}) = \frac{1}{\Delta y} (H_{z;i,j,k}^{n-1} - H_{z;i,j-1,k}^{n-1}) - \frac{1}{\Delta z} (H_{y;i,j,k}^{n-1} - H_{y;i,j,k-1}^{n-1}) \quad (2.78)$$

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} (E_{y;i,j,k}^n - E_{y;i,j,k}^{n-1}) = \frac{1}{\Delta z} (H_{x;i,j,k}^{n-1} - H_{x;i,j,k-1}^{n-1}) - \frac{1}{\Delta x} (H_{z;i,j,k}^{n-1} - H_{z;i-1,j,k}^{n-1}) \quad (2.79)$$

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} (E_{z;i,j,k}^n - E_{z;i,j,k}^{n-1}) = \frac{1}{\Delta x} (H_{y;i,j,k}^{n-1} - H_{y;i-1,j,k}^{n-1}) - \frac{1}{\Delta y} (H_{x;i,j,k}^{n-1} - H_{x;i,j-1,k}^{n-1}) \quad (2.80)$$

$$\frac{\mu}{\Delta t} (H_{x;i,j,k}^n - H_{x;i,j,k}^{n-1}) = -\frac{1}{\Delta y} (E_{z;i,j+1,k}^n - E_{z;i,j,k}^n) + \frac{1}{\Delta z} (E_{y;i,j,k+1}^n - E_{y;i,j,k}^n) \quad (2.81)$$

$$\frac{\mu}{\Delta t} (H_{y;i,j,k}^n - H_{y;i,j,k}^{n-1}) = -\frac{1}{\Delta z} (E_{x;i,j,k+1}^n - E_{x;i,j,k}^n) + \frac{1}{\Delta x} (E_{z;i+1,j,k}^n - E_{z;i,j,k}^n) \quad (2.82)$$

$$\frac{\mu}{\Delta t} (H_{z;i,j,k}^n - H_{z;i,j,k}^{n-1}) = -\frac{1}{\Delta x} (E_{y;i+1,j,k}^n - E_{y;i,j,k}^n) + \frac{1}{\Delta y} (E_{x;i,j+1,k}^n - E_{x;i,j,k}^n) \quad (2.83)$$

今は平面波について考えているので、空間微分であれば $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -jk_x$ と置き換えることができる。差分の場合も

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} (H_{i,j,k}^n - H_{i-1,j,k}^n) &= \frac{1}{\Delta x} (\tilde{H} \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) - \tilde{H} \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \Delta x \mathbf{e}_x)))) \\ &= \frac{1 - \exp(jk_x \Delta x)}{\Delta x} \tilde{H} \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \\ &= \frac{1 - e^{jk_x \Delta x}}{\Delta x} H_{i,j,k}^n \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} (E_{i+1,j,k}^n - E_{i,j,k}^n) &= \frac{1}{\Delta x} (\tilde{E} \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \Delta x \mathbf{e}_x))) - \tilde{E} \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))) \\ &= \frac{\exp(-jk_x \Delta x) - 1}{\Delta x} \tilde{E} \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \\ &= \frac{e^{-jk_x \Delta x} - 1}{\Delta x} E_{i,j,k}^n \end{aligned} \quad (2.85)$$

このように置き換えて、隣のセルの値を用いない表現が可能である。時間差分についても同様に

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t} \left(E_{i,j,k}^n - E_{i,j,k}^{n-1} \right) &= \frac{1}{\Delta t} \left(\tilde{E} \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) - \tilde{E} \exp(j(\omega(t - \Delta t) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \right) \\ &= \frac{1 - \exp(-j\omega\Delta t)}{\Delta t} \tilde{E} \exp(-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{\Delta t} E_{i,j,k}^n\end{aligned}\quad (2.86)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(H_{i,j,k}^n - H_{i,j,k}^{n-1} \right) = \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{\Delta t} H_{i,j,k}^n \quad (2.87)$$

と置き換えることができるので、これらを用いると以下ようになる。

$$\varepsilon \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{\Delta t} E_{x;i,j,k}^n = \frac{1 - e^{jk_y\Delta y}}{\Delta y} H_{z;i,j,k}^{n-1} - \frac{1 - e^{jk_z\Delta z}}{\Delta z} H_{y;i,j,k}^{n-1} \quad (2.88)$$

$$\varepsilon \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{\Delta t} E_{y;i,j,k}^n = \frac{1 - e^{jk_z\Delta z}}{\Delta z} H_{x;i,j,k}^{n-1} - \frac{1 - e^{jk_x\Delta x}}{\Delta x} H_{z;i,j,k}^{n-1} \quad (2.89)$$

$$\varepsilon \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{\Delta t} E_{z;i,j,k}^n = \frac{1 - e^{jk_x\Delta x}}{\Delta x} H_{y;i,j,k}^{n-1} - \frac{1 - e^{jk_y\Delta y}}{\Delta y} H_{x;i,j,k}^{n-1} \quad (2.90)$$

$$\mu \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{\Delta t} H_{x;i,j,k}^n = -\frac{e^{-jk_y\Delta y} - 1}{\Delta y} E_{z;i,j,k}^n + \frac{e^{-jk_z\Delta z} - 1}{\Delta z} E_{y;i,j,k}^n \quad (2.91)$$

$$\mu \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{\Delta t} H_{y;i,j,k}^n = -\frac{e^{-jk_z\Delta z} - 1}{\Delta z} E_{x;i,j,k}^n + \frac{e^{-jk_x\Delta x} - 1}{\Delta x} E_{z;i,j,k}^n \quad (2.92)$$

$$\mu \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{\Delta t} H_{z;i,j,k}^n = -\frac{e^{-jk_x\Delta x} - 1}{\Delta x} E_{y;i,j,k}^n + \frac{e^{-jk_y\Delta y} - 1}{\Delta y} E_{x;i,j,k}^n \quad (2.93)$$

さらに、

$$\begin{aligned}H_{x;i,j,k}^n &= H_x \left(i\Delta x, \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta y, \left(k + \frac{1}{2} \right) \Delta z, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \\ &= \tilde{H}_x \exp \left(j(\omega(n + \frac{1}{2})\Delta t) - \mathbf{k} \cdot \left(i\Delta x \mathbf{e}_x + \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta y \mathbf{e}_y + \left(k + \frac{1}{2} \right) \Delta z \mathbf{e}_z \right) \right) \\ &= \tilde{H}_x A e^{j\frac{\omega\Delta t}{2}} e^{-j\frac{k_y\Delta y}{2}} e^{-j\frac{k_z\Delta z}{2}}\end{aligned}\quad (2.94)$$

$$H_{y;i,j,k}^n = \tilde{H}_y A e^{j\frac{\omega\Delta t}{2}} e^{-j\frac{k_z\Delta z}{2}} e^{-j\frac{k_x\Delta x}{2}} \quad (2.95)$$

$$H_{z;i,j,k}^n = \tilde{H}_z A e^{j\frac{\omega\Delta t}{2}} e^{-j\frac{k_x\Delta x}{2}} e^{-j\frac{k_y\Delta y}{2}} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned}H_{x;i,j,k}^{n-1} &= H_x \left(i\Delta x, \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta y, \left(k + \frac{1}{2} \right) \Delta z, \left(n - \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \\ &= \tilde{H}_x A e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} e^{-j\frac{k_y\Delta y}{2}} e^{-j\frac{k_z\Delta z}{2}}\end{aligned}\quad (2.97)$$

$$H_{y;i,j,k}^{n-1} = \tilde{H}_y A e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} e^{-j\frac{k_z\Delta z}{2}} e^{-j\frac{k_x\Delta x}{2}} \quad (2.98)$$

$$H_{z;i,j,k}^{n-1} = \tilde{H}_z A e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} e^{-j\frac{k_x\Delta x}{2}} e^{-j\frac{k_y\Delta y}{2}} \quad (2.99)$$

$$E_{x;i,j,k}^n = E_x \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) \Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t \right)$$

$$= \tilde{E}_x A e^{-j \frac{k_x \Delta x}{2}} \quad (2.100)$$

$$E_{y;i,j,k}^n = \tilde{E}_x A e^{-j \frac{k_y \Delta y}{2}} \quad (2.101)$$

$$E_{z;i,j,k}^n = \tilde{E}_x A e^{-j \frac{k_z \Delta z}{2}} \quad (2.102)$$

$$A = \exp(j(\omega n \Delta t - (k_x i \Delta x + k_y j \Delta y + k_z k \Delta z)))$$

を代入して整理すると、(2.88) は

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{\Delta t} E_{x;i,j,k}^n &= \frac{1 - e^{jk_y\Delta y}}{\Delta y} H_{z;i,j,k}^{n-1} - \frac{1 - e^{jk_z\Delta z}}{\Delta z} H_{y;i,j,k}^{n-1} \\ \varepsilon \frac{1 - e^{-j\omega\Delta t}}{\Delta t} \tilde{E}_x e^{-j \frac{k_x \Delta x}{2}} &= \frac{1 - e^{jk_y\Delta y}}{\Delta y} \tilde{H}_z e^{-j \frac{\omega\Delta t}{2}} e^{-j \frac{k_x \Delta x}{2}} e^{-j \frac{k_y \Delta y}{2}} \\ &\quad - \frac{1 - e^{jk_z\Delta z}}{\Delta z} \tilde{H}_y e^{-j \frac{\omega\Delta t}{2}} e^{-j \frac{k_z \Delta z}{2}} e^{-j \frac{k_x \Delta x}{2}} \\ \frac{\varepsilon}{\Delta t} (e^{j \frac{\omega\Delta t}{2}} - e^{-j \frac{\omega\Delta t}{2}}) \tilde{E}_x &= \frac{1}{\Delta y} (e^{-j \frac{k_y \Delta y}{2}} - e^{j \frac{k_y \Delta y}{2}}) \tilde{H}_z - \frac{1}{\Delta z} (e^{-j \frac{k_z \Delta z}{2}} - e^{j \frac{k_z \Delta z}{2}}) \tilde{H}_y \\ \varepsilon \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t/2} \tilde{E}_x &= -\frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y/2} \tilde{H}_z + \frac{\sin \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z/2} \tilde{H}_y \end{aligned} \quad (2.103)$$

となる。(2.89)~(2.93) も同様に

$$\varepsilon \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t/2} \tilde{E}_y = -\frac{\sin \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z/2} \tilde{H}_x + \frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x/2} \tilde{H}_z \quad (2.104)$$

$$\varepsilon \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t/2} \tilde{E}_z = -\frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x/2} \tilde{H}_y + \frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y/2} \tilde{H}_x \quad (2.105)$$

$$\mu \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t/2} \tilde{H}_x = \frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y/2} \tilde{E}_z - \frac{\sin \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z/2} \tilde{E}_y \quad (2.106)$$

$$\mu \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t/2} \tilde{H}_y = \frac{\sin \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z/2} \tilde{E}_x - \frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x/2} \tilde{E}_z \quad (2.107)$$

$$\mu \frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t/2} \tilde{H}_z = \frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x/2} \tilde{E}_y - \frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y/2} \tilde{E}_x \quad (2.108)$$

となって、行列を用いると次のようにまとめられる。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x & \tilde{E}_y & \tilde{E}_z & \tilde{H}_x & \tilde{H}_y & \tilde{H}_z \end{pmatrix}^T \quad (2.109)$$

$$M = \begin{pmatrix} s_t & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_z}{\varepsilon} & \frac{s_y}{\varepsilon} \\ 0 & s_t & 0 & \frac{s_z}{\varepsilon} & 0 & -\frac{s_x}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & s_t & -\frac{s_y}{\varepsilon} & \frac{s_x}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{s_z}{\mu} & -\frac{s_y}{\mu} & s_t & 0 & 0 \\ -\frac{s_z}{\mu} & 0 & \frac{s_x}{\mu} & 0 & s_t & 0 \\ \frac{s_y}{\mu} & -\frac{s_x}{\mu} & 0 & 0 & 0 & s_t \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

$$M\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.111)$$

ここで

$$s_x = \frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x / 2}$$

$$s_y = \frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y / 2}$$

$$s_z = \frac{\sin \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z / 2}$$

$$s_t = \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\Delta t / 2}$$

である。 x が自明でない解を持つためには、 $|M| = 0$ とならなければならないので、

$$|M| = s_t^6 - s_t^4 \frac{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}{\varepsilon \mu} = 0 \quad (2.112)$$

より、 $c^2 = 1/\varepsilon\mu$ として以下の式を得る。

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\Delta t / 2} \right)^2 = \left(\frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x / 2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y / 2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z / 2} \right)^2 \quad (2.113)$$

これが FD-TD 法における分散関係式である。等方で非分散性の媒質中における分散関係は $\omega^2/c^2 = k^2$ であるが、FD-TD 法では空間と時間を離散化したために、媒質定数が等方、非分散性でも異方性と分散性が生じ、グリッド分散と呼ばれる。これによって生じる誤差については後の節で詳しく考察する。

2.5 安定条件

分散関係式 (2.113) において、 k_x, k_y, k_z はそれぞれ独立に空間的なサンプリング定理を満たす範囲の値を取り得る。したがって、 $|k_x| \leq \pi/\Delta x$ より $(\sin \frac{k_x \Delta x}{2})^2 \leq 1$ であり、 k_y, k_z も同様であるから、(2.113) の右辺は以下の範囲の値を取り得る。

$$0 \leq \left(\frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z/2} \right)^2 \leq \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{2}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{2}{\Delta z} \right)^2 \quad (2.114)$$

左辺と合わせて

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{c^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\Delta t/2} \right)^2 \leq \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{2}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{2}{\Delta z} \right)^2 \\ 0 &\leq \left(\sin \frac{\omega \Delta t}{2} \right)^2 \leq (c\Delta t)^2 \left(\left(\frac{1}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.115)$$

となる。任意の波数の電磁界を初期値として与えた場合、タイムステップ Δt と単位セルの大きさ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ の関係が

$$(c\Delta t)^2 \left(\left(\frac{1}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z} \right)^2 \right) \leq 1 \quad (2.116)$$

であれば、分散関係式から実数の角周波数 ω がかならず存在して、解析空間中を安定に伝播することができる。したがって、3次元 FD-TD 法の安定条件は

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z} \right)^2}} \quad (2.117)$$

となって、タイムステップの上限を決定する。

2次元 FD-TD 法では、たとえば x-y 平面で扱う場合は $k_z = 0$ であるから

$$0 \leq \left(\frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z/2} \right)^2 \leq \left(\frac{2}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{2}{\Delta y} \right)^2 \quad (2.118)$$

となり、安定条件は

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y} \right)^2}} \quad (2.119)$$

となる。同様に、 $k_y = k_z = 0$ の1次元の場合の安定条件は

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (2.120)$$

である。

2.6 グリッド分散による位相速度の誤差

2.6.1 分散関係式

等方的で非分散性の自由空間中では、電磁波は周波数や進む方向によらず一定の速度 c で伝播し、分散関係式は次のようになる。

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (2.121)$$

ここで、 k_x, k_y, k_z はそれぞれ x, y, z 方向の波数であり、 $|\mathbf{k}|^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ である。しかし、FD-TD 法では時間と空間を離散化して微分を差分で計算するため、前の節で示したように分散関係式は次式で表される。

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\Delta t/2} \right)^2 = \left(\frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z/2} \right)^2 \quad (2.122)$$

この分散関係式から平面波の位相速度を導出し、自由空間の場合と比較する。

2.6.2 離散化された空間における位相速度

分散関係式 (2.122) を ω について解き、位相速度 v_p を $v_p = \omega/k$ より求める。(2.122) の \sin 関数を $k_x \Delta x, k_y \Delta y, k_z \Delta z \sim 0$ として 3 次の項まで残したマクローリン展開 $\sin x \simeq x - x^3/3!$ で近似すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\Delta t/2} \right)^2 &\simeq \left(\frac{2}{\Delta x} \left(\frac{k_x \Delta x}{2} - \frac{\left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right)^3}{3!} \right) \right)^2 \\ &+ \left(\frac{2}{\Delta y} \left(\frac{k_y \Delta y}{2} - \frac{\left(\frac{k_y \Delta y}{2} \right)^3}{3!} \right) \right)^2 + \left(\frac{2}{\Delta z} \left(\frac{k_z \Delta z}{2} - \frac{\left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right)^3}{3!} \right) \right)^2 \\ &= k_x^2 \left(1 - \frac{(k_x \Delta x)^2}{24} \right)^2 + k_y^2 \left(1 - \frac{(k_y \Delta y)^2}{24} \right)^2 + k_z^2 \left(1 - \frac{(k_z \Delta z)^2}{24} \right)^2 \\ &\simeq (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \frac{1}{12} (k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2) \\ \frac{2}{c \Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} &= k \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{12k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq k \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{24k^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \frac{\omega \Delta t}{2} &= \frac{c \Delta t}{2} k \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{24k^2} \right) \\ \omega &= \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left(\frac{c \Delta t}{2} k \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{24k^2} \right) \right)\end{aligned}$$

さらに $\sin^{-1} x \simeq x + x^3/3!$ を用いると

$$\begin{aligned}\omega &\simeq \frac{2}{\Delta t} \left(\frac{c \Delta t}{2} k \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{24k^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{c \Delta t}{2} k \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{24k^2} \right) \right)^3 \right) \\ &= ck \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{24k^2} + \frac{c^2 \Delta t^2 k^2}{24} \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{24k^2} \right)^3 \right) \\ &\simeq ck \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{24k^2} + \frac{c^2 \Delta t^2 k^2}{24} \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{8k^2} \right) \right) \\ &= ck \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{24k^2} + \frac{c^2 \Delta t^2 k^2}{24} - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{192} c^2 \Delta t^2 \right) \\ &\simeq ck \left(1 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{24k^2} + \frac{c^2 \Delta t^2 k^2}{24} \right)\end{aligned}\tag{2.123}$$

となる。位相速度 v_p は $v_p = \omega/k$ で求められるから、位相速度の誤差 Δv は

$$\Delta v = v_p - c = \frac{c}{24} \left(c^2 \Delta t^2 k^2 - \frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{k^2} \right)\tag{2.124}$$

となる。 $k_x^2 = \alpha k^2$, $k_y^2 = \beta k^2$, $k_z^2 = \gamma k^2$ と置き換えると、

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{c}{24} \left(c^2 \Delta t^2 k^2 - \frac{\alpha^2 k^4 \Delta x^2 + \beta^2 k^4 \Delta y^2 + \gamma^2 k^4 \Delta z^2}{k^2} \right) \\ &= \frac{ck^2}{24} \left(c^2 \Delta t^2 - (\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + \gamma^2 \Delta z^2) \right)\end{aligned}\tag{2.125}$$

であり、 Δv は波数の自乗に比例して分散性があることを示す。

2.6.3 タイムステップによる位相速度への影響

(2.124) より、タイムステップ Δt を $\Delta t \rightarrow 0$ とした場合に $|\Delta v|$ が 0 へ漸近するわけではなく、 $|\Delta v|$ を最小にする Δt_{opt} が存在することがわかる。(2.125) より、 $\Delta v = 0$ となる Δt_{opt} は

$$\Delta t_{opt} = \frac{\sqrt{\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + \gamma^2 \Delta z^2}}{c}\tag{2.126}$$

である。しかし、 Δt_{opt} は伝播方向によって変化するうえ、安定条件を満足しているとは限らない。

$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ であるから、

$$0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$$

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta$$

となることを考慮して Δt_{opt} が最小となる伝播方向を求めると、

$$\frac{\partial \Delta t_{opt}^2}{\partial \alpha} = \frac{2}{c^2} (\alpha \Delta x^2 - \gamma \Delta z^2) = 0$$

$$\frac{\partial \Delta t_{opt}^2}{\partial \beta} = \frac{2}{c^2} (\beta \Delta y^2 - \gamma \Delta z^2) = 0$$

を同時に満たす場合であり、この 2 式を連立させて解くと、 α , β および γ は

$$\alpha = \frac{\Delta y^2 \Delta z^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2} \quad (2.127)$$

$$\beta = \frac{\Delta z^2 \Delta x^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2} \quad (2.128)$$

$$\gamma = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2} \quad (2.129)$$

あるいは、まとめて

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x^2} \\ \frac{1}{\Delta y^2} \\ \frac{1}{\Delta z^2} \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

となる。 α , β の値にかかわらず、

$$\frac{\partial^2 \Delta t_{opt}^2}{\partial \alpha^2} = \frac{2}{c^2} (\Delta x^2 + \Delta z^2) > 0$$

$$\frac{\partial^2 \Delta t_{opt}^2}{\partial \beta^2} = \frac{2}{c^2} (\Delta y^2 + \Delta z^2) > 0$$

であるから、 Δt_{opt} はこのとき最小値を取り、

$$\begin{aligned} \Delta t_{opt} &= \frac{1}{c} \sqrt{\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + \gamma^2 \Delta z^2} \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \end{aligned} \quad (2.131)$$

となる。この値は安定条件 $c\Delta t \leq (1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2 + 1/\Delta z^2)^{-1/2}$ から許されるタイムステップの上限値である。したがって、すべての伝播方向において Δt_{opt} は安定条件を満足するタイムステップより大きいため、タイムステップを小さくするほど位相速度は低下し、グリッド分散は大きくなる。

2.6.4 伝播方向による位相速度への影響

(2.124) は波数ベクトルの方向によっても位相速度が異なることを示している。ここでは $|\Delta v|$ が最小となる伝播方向を求める。前節と同様に $k_x^2 = \alpha k^2$, $k_y^2 = \beta k^2$, $k_z^2 = \gamma k^2$ と置き換えて (2.124) に代入すると、

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{c}{24} \left(c^2 \Delta t^2 k^2 - \frac{\alpha^2 k^4 \Delta x^2 + \beta^2 k^4 \Delta y^2 + \gamma^2 k^4 \Delta z^2}{k^2} \right) \\ &= \frac{ck^2}{24} \left(c^2 \Delta t^2 - (\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + (1 - \alpha - \beta)^2 \Delta z^2) \right)\end{aligned}\quad (2.132)$$

となる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta v}{\partial \alpha} &= -\frac{ck^2}{12} (\alpha \Delta x^2 - (1 - \alpha - \beta) \Delta z^2) = 0 \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial \beta} &= -\frac{ck^2}{12} (\beta \Delta y^2 - (1 - \alpha - \beta) \Delta z^2) = 0\end{aligned}$$

を同時に満たす α , β および γ は

$$\alpha = \frac{\Delta y^2 \Delta z^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2}\quad (2.133)$$

$$\beta = \frac{\Delta z^2 \Delta x^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2}\quad (2.134)$$

$$\gamma = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2}\quad (2.135)$$

であり、このとき Δv は

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{ck^2}{24} \left(c^2 \Delta t^2 - \frac{\Delta x^2 \Delta y^4 \Delta z^4 + \Delta x^4 \Delta y^2 \Delta z^4 + \Delta x^4 \Delta y^4 \Delta z^2}{(\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2)^2} \right) \\ &= \frac{ck^2}{24} \left(c^2 \Delta t^2 - \frac{\Delta x^2 \Delta y^2 \Delta z^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2} \right) \\ &= \frac{ck^2}{24} \left(c^2 \Delta t^2 - \frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \right)\end{aligned}\quad (2.136)$$

となる。安定条件は $c\Delta t \leq (1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2 + 1/\Delta z^2)^{-1/2}$ であるから、 Δv は常に 0 以下であり、 $c\Delta t = (1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2 + 1/\Delta z^2)^{-1/2}$ の場合には分散性が無くなる。また、 Δt にかかわらず

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial \alpha^2} &= -\frac{ck^2}{12}(\Delta x^2 + \Delta z^2) < 0 \\ \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial \beta^2} &= -\frac{ck^2}{12}(\Delta y^2 + \Delta z^2) < 0\end{aligned}$$

であるから、(2.133)(2.134)(2.135) で決まる伝播方向が最も分散性を小さくする。

一方、伝播方向を変化させたとき、座標軸の方向を向く場合に位相速度の絶対値は極小、誤差は極大である。たとえば、伝播方向が x 軸方向の場合、 $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ であり、 $0 \leq m \leq 1$ なる適当な定数 m を用いて $\beta = 1 - m\alpha, \gamma = 1 - \alpha - \beta$ となる方向へ α を減少させると

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \Delta v}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=1, \beta=\gamma=0} &= -\frac{ck^2}{12} \left(\alpha \Delta x^2 + \beta \Delta y^2 (-m) + \gamma \Delta z^2 (m-1) \right) \Big|_{\alpha=1, \beta=\gamma=0} \\ &= -\frac{ck^2}{12} \Delta x^2 < 0\end{aligned}\tag{2.137}$$

であるから、 Δv は 0 へ向かって増加する。このときの位相速度の誤差は

$$\Delta v = \frac{ck^2}{24} (c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2)\tag{2.138}$$

となる。伝播方向が y 軸方向、 z 軸方向の場合も α, β, γ を入れ換えれば同様である。したがって、空間の離散化が最も粗い座標軸の方向へ伝播する場合に最も分散性が顕著となる。

2.6.5 セルサイズによる位相速度への影響

この節では、波長とセルサイズの比を変えた場合に位相速度がどのように変化するかを求める。

3次元平面波の場合 簡単のため、単位セルが $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ の立方体の場合で、 $k_x = k_y = k_z = k/\sqrt{3}$ の平面波の場合を考え、近似を用いずに位相速度を導出する。分散関係式は

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\Delta t/2} \right)^2 &= \left(\frac{\sin \frac{k_x \Delta x}{2}}{\Delta x/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{k_y \Delta y}{2}}{\Delta y/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{k_z \Delta z}{2}}{\Delta z/2} \right)^2 \\ &= 3 \left(\frac{\sin \frac{k \Delta x}{2\sqrt{3}}}{\Delta x/2} \right)^2\end{aligned}\tag{2.139}$$

となる。 $c > 0$, $\omega > 0$ であり、時間的にも空間的にもサンプリング定理を満たすように $0 < \omega \Delta t < \pi$, $0 < k \Delta x < \pi$ として k について解くと

$$\begin{aligned} \sin \frac{k \Delta x}{2\sqrt{3}} &= \frac{\Delta x / \sqrt{3}}{c \Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \\ k &= \frac{2\sqrt{3}}{\Delta x} \sin^{-1} \left(\frac{\Delta x / \sqrt{3}}{c \Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.140)$$

となる。平面波が伝播するためには、波数は実数でなければならないから、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta x / \sqrt{3}}{c \Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \right| &\leq 1 \\ \omega &\leq \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \frac{c \Delta t}{\Delta x / \sqrt{3}} \end{aligned} \quad (2.141)$$

でなければならない。したがって、

$$\omega_{c3} = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \frac{c \Delta t}{\Delta x / \sqrt{3}} \quad (2.142)$$

が $k_x = k_y = k_z$ の平面波のカットオフ角周波数となる。立方体単位セルを用いる 3 次元 FD-TD 法の安定条件は $\Delta t \leq \Delta x / \sqrt{3}c$ であるから、 ω_{c3} は常に実数として求められる。

位相速度 v_p は $v_p = \omega/k$ で求められるから、 $\Delta x = \alpha \lambda$ として

$$\begin{aligned} v_p &= \omega \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{\Delta x} \sin^{-1} \left(\frac{\Delta x / \sqrt{3}}{c \Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \right)} \\ &= \frac{2\pi c \alpha \lambda}{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{3} \sin^{-1} \left(\frac{\alpha \lambda / \sqrt{3}}{c \Delta t} \sin \frac{2\pi c \Delta t}{\lambda} \frac{1}{2} \right)} \\ &= c \frac{\alpha \pi / \sqrt{3}}{\sin^{-1} \left(\frac{\alpha \lambda / \sqrt{3}}{c \Delta t} \sin \frac{\pi c \Delta t}{\lambda} \right)} \end{aligned} \quad (2.143)$$

となる。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_p &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} c \frac{\alpha \pi}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \left(\frac{\alpha \pi}{\sqrt{3}} \frac{\lambda}{\pi c \Delta t} \sin \frac{\pi c \Delta t}{\lambda} \right) \\ &= c \frac{\alpha \pi / \sqrt{3}}{\sin^{-1}(\alpha \pi / \sqrt{3})} \end{aligned} \quad (2.144)$$

となるのに対し、安定条件の限界である $\Delta t = \Delta x / \sqrt{3}c$ の場合には

$$v_p = c \frac{\alpha \pi / \sqrt{3}}{\sin^{-1} \left(\frac{\alpha \lambda / \sqrt{3}}{c \alpha \lambda / \sqrt{3}c} \sin \frac{\pi c \alpha \lambda / \sqrt{3}c}{\lambda} \right)}$$

$$\begin{aligned}
&= c \frac{\alpha\pi/\sqrt{3}}{\sin^{-1}\left(\sin(\alpha\pi/\sqrt{3})\right)} \\
&= c
\end{aligned} \tag{2.145}$$

となって分散性が無くなる。

2次元平面波の場合 伝播方向が、たとえば x, y 平面内の場合、2次元空間の平面波として扱うことができる。 $k_x = k_y = k/\sqrt{2}$, $k_z = 0$ の場合、分散関係式は

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t/2} \right)^2 = 2 \left(\frac{\sin \frac{k\Delta x}{2\sqrt{2}}}{\Delta x/2} \right)^2 \tag{2.146}$$

となる。上の場合と同様に k について解くと

$$k = \frac{2\sqrt{2}}{\Delta x} \sin^{-1} \left(\frac{\Delta x/\sqrt{2}}{c\Delta t} \sin \frac{\omega\Delta t}{2} \right) \tag{2.147}$$

$$\omega_{c2} = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \frac{c\Delta t}{\Delta x/\sqrt{2}} \tag{2.148}$$

となる。 ω_{c2} は正方形単位セルの対角方向に伝播する平面波のカットオフ角周波数である。

位相速度 v_p は、 $\Delta x = \alpha\lambda$ として

$$v_p = \frac{\omega}{k} = c \frac{\alpha\pi/\sqrt{2}}{\sin^{-1} \left(\frac{\alpha\lambda/\sqrt{2}}{c\Delta t} \sin \frac{\pi c\Delta t}{\lambda} \right)} \tag{2.149}$$

となる。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では、

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_p &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} c \frac{\alpha\pi}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \left(\frac{\alpha\pi}{\sqrt{2}} \frac{\lambda}{\pi c\Delta t} \sin \frac{\pi c\Delta t}{\lambda} \right) \\
&= c \frac{\alpha\pi/\sqrt{2}}{\sin^{-1}(\alpha\pi/\sqrt{2})}
\end{aligned} \tag{2.150}$$

となるのに対し、正方形単位セルを用いる2次元FD-TD法の安定条件の限界である $\Delta t = \Delta x/\sqrt{2}c$ の場合には

$$\begin{aligned}
v_p &= c \frac{\alpha\pi/\sqrt{2}}{\sin^{-1} \left(\frac{\alpha\lambda/\sqrt{2}}{c\alpha\lambda/\sqrt{2}c} \sin \frac{\pi c\alpha\lambda/\sqrt{2}c}{\lambda} \right)} \\
&= c
\end{aligned} \tag{2.151}$$

となり、3次元の場合と同様に分散性が無くなる。

1次元平面波の場合 x 軸方向へ進む平面波 $k_x = k$, $k_y = k_z = 0$ の場合を考える。分散関係式は

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\Delta t/2} \right)^2 = \left(\frac{\sin \frac{k \Delta x}{2}}{\Delta x/2} \right)^2 \quad (2.152)$$

となる。上と同様に k について解くと

$$k = \frac{2}{\Delta x} \sin^{-1} \left(\frac{\Delta x}{c \Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \right) \quad (2.153)$$

$$\omega_{c1} = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \frac{c \Delta t}{\Delta x} \quad (2.154)$$

となり、 ω_{c1} が x 軸方向へ伝播する平面波のカットオフ角周波数となる。

位相速度 v_p は $\Delta x = \alpha \lambda$ として

$$v_p = \frac{\omega}{k} = c \frac{\alpha \pi}{\sin^{-1} \left(\frac{\alpha \lambda}{c \Delta t} \sin \frac{\pi c \Delta t}{\lambda} \right)} \quad (2.155)$$

となる。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では最も分散性が強くなり、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_p &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} c \frac{\alpha \pi}{\sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{\pi c \Delta t} \sin \frac{\pi c \Delta t}{\lambda} \right)} \\ &= c \frac{\alpha \pi}{\sin^{-1} \alpha \pi} \end{aligned} \quad (2.156)$$

となる。一方、1次元 FD-TD 法の安定条件の限界である $\Delta t = \Delta x/c$ の場合には

$$\begin{aligned} v_p &= c \frac{\alpha \pi}{\sin^{-1} \left(\frac{\alpha \lambda}{c \alpha \lambda / c} \sin \frac{\pi c \alpha \lambda / c}{\lambda} \right)} \\ &= c \end{aligned} \quad (2.157)$$

となって非分散性となるが、このタイムステップでは2次元、3次元のFD-TD法では安定条件を満足しない。立方体単位セルを用いる3次元FD-TD法の安定条件の限界である $\Delta t = \Delta x/\sqrt{3}c$ の場合には

$$v_p = c \frac{\alpha \pi}{\sin^{-1} \left(\sqrt{3} \sin \frac{\alpha \pi}{\sqrt{3}} \right)} \quad (2.158)$$

となる。

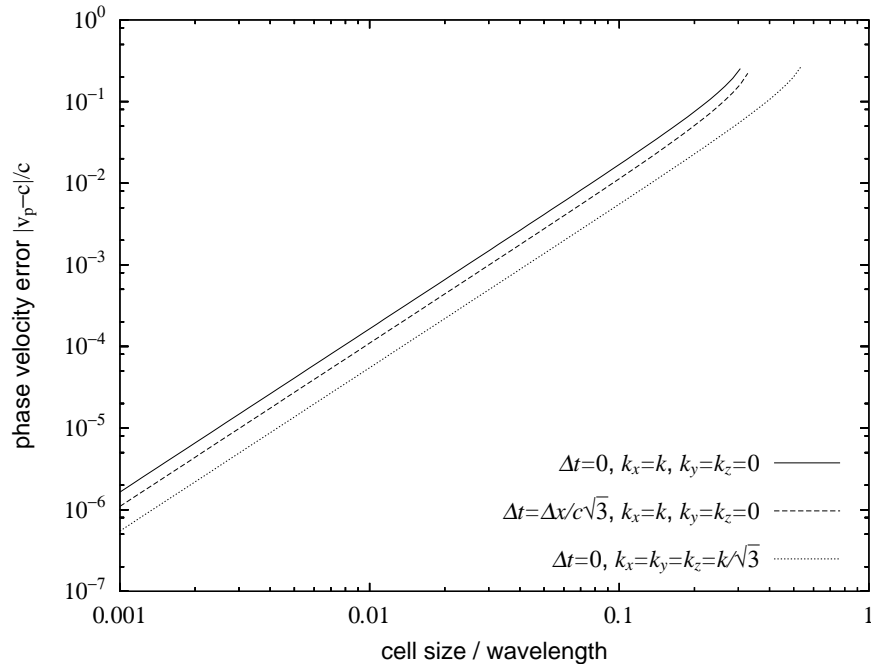


図 2.4: 立方体単位セルの場合の位相速度の誤差とセルサイズの関係

以上のように、特定の伝播方向やタイムステップの場合を除いて、位相速度は波長とセルサイズの比によって変化し、分散性を示す。言い換えれば、一定のセルサイズでは周波数が高くなるほど位相速度は低下し、カットオフ周波数に達したところで伝播できなくなる。タイムステップとセルサイズを決めてしまえば、その解析空間で最も位相速度が速いのは (2.133)(2.134)(2.135) で決まる方向へ伝播する場合であり、最も遅いのは単位セルの最も長い辺に沿った方向へ伝播する場合である。したがって、解析に必要な周波数の上限で単位セルの最も長い辺に沿った方向への位相速度の誤差が許容できるように、単位セルのサイズを選ばなくてはならない。

立方体単位セルの場合におけるセルサイズと位相速度の誤差の関係を図 2.4 に示す。縦軸は位相速度の相対誤差 $|v_p - c|/c$ であり、横軸はセルサイズと波長の比 $\alpha = \Delta x/\lambda$ である。(2.125) に示したように、位相速度の誤差は波長の自乗にほぼ反比例する。実線は、伝播方向が x 軸方向で、タイムステップが 0 の場合で、分散性が最も顕著に現れ、位相速度は (2.156) で求められる場合である。セルサイズの目安として波長の $1/10$ から $1/20$ が多くの文献で用いられているが、この場合の位相速度の誤差は $\alpha = 1/10$ のとき 1.7×10^{-2} 、 $\alpha = 1/20$ のとき 4.1×10^{-3} となる。破線は、タイムステップを安定条件の限界である

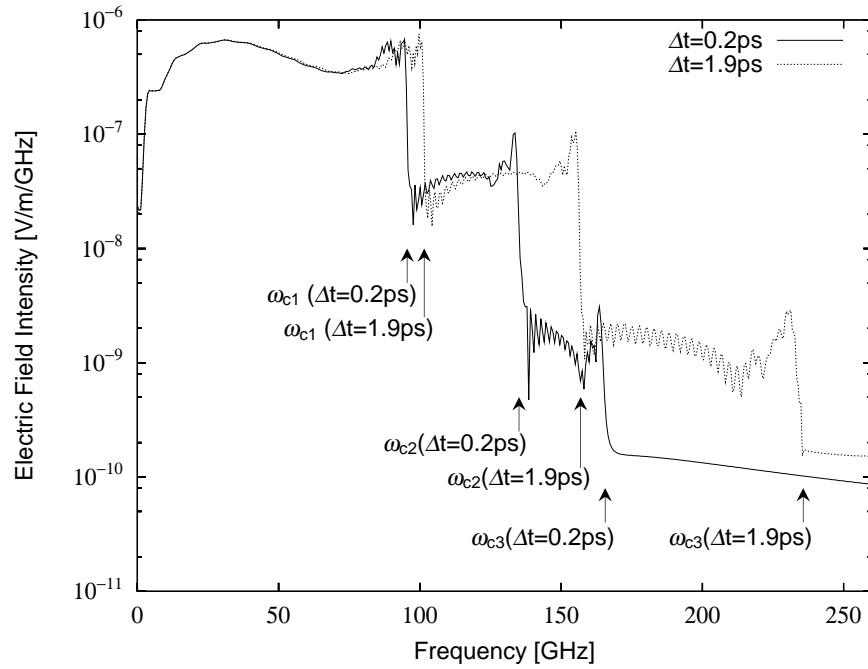


図 2.5: 1mm 立方体セルで解析した場合のスペクトルの例

$\Delta x/\sqrt{3}$ まで大きくした場合であり、位相速度は (2.158) で求められる。位相速度の誤差はやや小さくなり、 $\alpha = 1/10$ のとき 1.1×10^{-2} 、 $\alpha = 1/20$ のとき 2.8×10^{-3} となる。解析空間の一部でセルサイズを小さくしている場合にはタイムステップも小さくしなければならないため、位相速度の誤差はこれよりも大きくなる。点線は、伝播方向は最も位相速度の誤差が小さくなる $k_x = k_y = k_z$ であるがタイムステップは誤差が最も大きくなる $\Delta t = 0$ の場合である。位相速度は (2.144) で求められる。この伝播方向では、座標軸方向へ伝播する場合と比較して位相速度の誤差は $1/6$ であり、タイムステップを安定条件の限界まで大きくすると誤差は 0 になる。

通常は、グリッド分散誤差が問題となるような高い周波数のスペクトルを含まない初期条件や励振項を用いるため、グリッド分散によるカットオフ周波数を意識することはないが、この節の検証の一つとして、カットオフ周波数を越える高周波のスペクトルを含む電磁界を加えた場合のスペクトル強度の一例を図 2.5 に示す。一辺が 1mm の立方体単位セルを用いて解析したため、安定条件は $\Delta t \leq 1.9258\text{ps}$ であり、タイムステップが 0.2ps と 1.9ps の二通りの結果を示す。スペクトル強度の大きな変化が見られるのは表 2.1 にも示した、(2.142)(2.148)(2.154) で求められるカットオフ周波数の前後である。 $\Delta t=0.2\text{ps}$ の方が

表 2.1: 1mm 立方体セルの伝播方向別カットオフ周波数

Δt	0.2ps	1.9ps
$\omega_{c1}/2\pi$	95.48GHz	101.53GHz
$\omega_{c2}/2\pi$	135.12GHz	156.91GHz
$\omega_{c3}/2\pi$	165.58GHz	235.68GHz

グリッド分散が大きいと、周波数が高くなるとスペクトル強度にも差が出ており、カットオフ周波数も低周波側へ移動しているのがわかる。ナイキストのサンプリング定理によれば、タイムステップが Δt ならば周波数が $0 \sim 1/2\Delta t$ の範囲の信号を扱うことができるが、グリッド分散のため、十分に小さい誤差で解析できるのはごく低周波側の部分のみであり、タイムステップの大きさよりも空間の単位セルの大きさに左右される。むしろ、タイムステップは安定条件の限界まで大きい方がグリッド分散による誤差は小さくなる。

2.7 散乱界表示有限差分時間領域法

散乱体で電磁波が散乱される様子を解析する場合、散乱体から再放射される散乱界のみを必要とすることも多い。散乱界は、散乱体がある場合と無い場合について 2 回計算を行い、その差として求めることができるが、散乱体が線形媒質で照射する入射界が平面波のように解析的に求められる場合には、散乱界のみを FD-TD 法で直接計算することも可能である。この節では、散乱界を直接計算する FD-TD 法の定式化を示す。

2.7.1 マクスウェル方程式の散乱界表示

電磁界 \mathbf{E}, \mathbf{H} を入射界 $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$ と散乱界 $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$ に分けて考えると、全電磁界は入射界と散乱界の和で表される。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) \quad (2.159)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t) \quad (2.160)$$

解析空間は真空中で、その一部に散乱体があるとすると、入射界は真空中のマクスウェル方程式を満足する。

$$\nabla \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.161)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.162)$$

一方、全電磁界は各位置における媒質定数を考慮して

$$\nabla \times (\mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)) = -\mu(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t)) \quad (2.163)$$

$$\nabla \times (\mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t)) = \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)) + \sigma(\mathbf{r}) (\mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)) \quad (2.164)$$

となり、散乱界について整理すると

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) &= -\mu(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mu(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) \\ &= -\mu(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - (\mu(\mathbf{r}) - \mu_0) \frac{\partial \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.165)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) - \nabla \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) \\ &= \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) + (\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_0) \frac{\partial \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.166)$$

となつて、自由電流と自由磁流を含むマクスウェル方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mathbf{i}_m \quad (2.167)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{i} \quad (2.168)$$

と比較すると、入射界の項は散乱界を発生する自由電流、自由磁流とみなすことができる。これらの項は誘電率や透磁率、導電率が真空中とは異なる位置でのみ必要となる。

2.7.2 Yee のアルゴリズムの適用

(2.165) と (2.166) は通常の FD-TD 法と同様に単位セル上に電磁界を配置して Yee のアルゴリズムを適用することができる。このとき、(2.165) と (2.166) に現れる入射電磁界とその時間微分は、位置と時間の関数として求められるものとする。より一般的な形式である、媒質境界における定式化の結果を示すと、(2.165) は

$$H_{x;i,j,k}^{s;n} = H_{x;i,j,k}^{s;n-1} - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_{z;i,j+1,k}^{s;n} - E_{z;i,j,k}^{s;n}}{\Delta y_j} - \frac{E_{y;i,j,k+1}^{s;n} - E_{y;i,j,k}^{s;n}}{\Delta z_k} \right)$$

$$H_{y;i,j,k}^{s;n} = H_{y;i,j,k}^{s;n-1} - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_{x;i,j,k+1}^{s;n} - E_{x;i,j,k}^{s;n}}{\Delta z_k} - \frac{E_{z;i+1,j,k}^{s;n} - E_{z;i,j,k}^{s;n}}{\Delta x_i} \right. \\ \left. + (\mu_{i,j,k} - \mu_0) \frac{\partial H_{x;i,j,k}^i}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t} \right) \quad (2.169)$$

$$H_{z;i,j,k}^{s;n} = H_{z;i,j,k}^{s;n-1} - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_{y;i+1,j,k}^{s;n} - E_{y;i,j,k}^{s;n}}{\Delta x_i} - \frac{E_{x;i,j+1,k}^{s;n} - E_{x;i,j,k}^{s;n}}{\Delta y_j} \right. \\ \left. + (\mu_{i,j,k} - \mu_0) \frac{\partial H_{y;i,j,k}^i}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t} \right) \quad (2.170)$$

$$H_{x;i,j,k}^{s;n} = H_{x;i,j,k}^{s;n-1} - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left(\frac{E_{z;i,j,k+1}^{s;n} - E_{z;i,j,k}^{s;n}}{\Delta z_k} - \frac{E_{y;i,j,k+1}^{s;n} - E_{y;i,j,k}^{s;n}}{\Delta y_j} \right. \\ \left. + (\mu_{i,j,k} - \mu_0) \frac{\partial H_{z;i,j,k}^i}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t} \right) \quad (2.171)$$

となり、(2.166) は E^i に接するセルの誘電率や導電率が異なる場合も考慮して、

$$E_{x;i,j,k}^{s;n} = \frac{2\varepsilon_a - \sigma_a \Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} E_{x;i,j,k}^{s;n-1} \\ - \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \left((\varepsilon_a - \varepsilon_0) \frac{\partial E_{x;i,j,k}^i}{\partial t} + \sigma_a E_{x;i,j,k}^i \right)_{t=(n-\frac{1}{2})\Delta t} \\ + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \frac{1}{S} \left(H_{z;i,j,k}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i,j,k-1}} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \right. \\ - H_{y;i,j,k}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i,j-1,k}} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \\ - H_{z;i,j-1,k}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\mu_{i,j-1,k}}{\mu_{i,j-1,k-1}} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \\ \left. + H_{y;i,j,k-1}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\mu_{i,j,k-1}}{\mu_{i,j-1,k-1}} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \right) \quad (2.172) \\ \varepsilon_a = \frac{1}{S} \left(\varepsilon_{i,j,k} \frac{\Delta y_j}{2} \frac{\Delta z_k}{2} + \varepsilon_{i,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \frac{\Delta z_k}{2} \right. \\ \left. + \varepsilon_{i,j,k-1} \frac{\Delta y_j}{2} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} + \varepsilon_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \\ \sigma_a = \frac{1}{S} \left(\sigma_{i,j,k} \frac{\Delta y_j}{2} \frac{\Delta z_k}{2} + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \frac{\Delta z_k}{2} \right. \\ \left. + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta y_j}{2} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} + \sigma_{i,j-1,k-1} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \\ S = \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \\ E_{y;i,j,k}^{s;n} = \frac{2\varepsilon_a - \sigma_a \Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} E_{y;i,j,k}^{s;n-1} \\ - \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \left((\varepsilon_a - \varepsilon_0) \frac{\partial E_{y;i,j,k}^i}{\partial t} + \sigma_a E_{y;i,j,k}^i \right)_{t=(n-\frac{1}{2})\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \frac{1}{S} \left(H_{x;i,j,k}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i-1,j,k}} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \right. \\
& \quad - H_{z;i,j,k}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i,j,k-1}} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \\
& \quad - H_{x;i,j,k-1}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\mu_{i,j,k-1}}{\mu_{i-1,j,k-1}} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \\
& \quad \left. + H_{z;i-1,j,k}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\mu_{i-1,j,k}}{\mu_{i-1,j,k-1}} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \right) \\
\varepsilon_a & = \frac{1}{S} \left(\varepsilon_{i,j,k} \frac{\Delta z_k}{2} \frac{\Delta x_i}{2} + \varepsilon_{i,j,k-1} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \frac{\Delta x_i}{2} \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon_{i-1,j,k} \frac{\Delta z_k}{2} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} + \varepsilon_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \\
\sigma_a & = \frac{1}{S} \left(\sigma_{i,j,k} \frac{\Delta z_k}{2} \frac{\Delta x_i}{2} + \sigma_{i,j,k-1} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \frac{\Delta x_i}{2} \right. \\
& \quad \left. + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta z_k}{2} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} + \sigma_{i-1,j,k-1} \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \\
S & = \left(\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\Delta z_{k-1}}{2} \right) \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.173}$$

$$\begin{aligned}
E_{z;i,j,k}^{s;n} & = \frac{2\varepsilon_a - \sigma_a \Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} E_{z;i,j,k}^{s;n-1} \\
& \quad - \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \left((\varepsilon_a - \varepsilon_0) \frac{\partial}{\partial t} E_{z;i,j,k}^i + \sigma_a E_{z;i,j,k}^i \right)_{t=(n-\frac{1}{2})\Delta t} \\
& \quad + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \frac{1}{S} \left(H_{y;i,j,k}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i,j-1,k}} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \right. \\
& \quad - H_{x;i,j,k}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\mu_{i,j,k}}{\mu_{i-1,j,k}} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \\
& \quad - H_{y;i-1,j,k}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\mu_{i-1,j,k}}{\mu_{i-1,j-1,k}} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \\
& \quad \left. + H_{x;i,j-1,k}^{s;n-1} \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\mu_{i,j-1,k}}{\mu_{i-1,j-1,k}} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \right) \\
\varepsilon_a & = \frac{1}{S} \left(\varepsilon_{i,j,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_j}{2} + \varepsilon_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_j}{2} \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} + \varepsilon_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right) \\
\sigma_a & = \frac{1}{S} \left(\sigma_{i,j,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_j}{2} + \sigma_{i-1,j,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_j}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.174}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_{i,j-1,k} \frac{\Delta x_i}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} + \sigma_{i-1,j-1,k} \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \\
S = & \left(\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \left(\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\Delta y_{j-1}}{2} \right)
\end{aligned}$$

となる。隣接するセルの透磁率がすべて同じ場合は、透磁率を含まない形にすることができる。

$$\begin{aligned}
E_{x;i,j,k}^{s;n} = & \frac{2\varepsilon_a - \sigma_a \Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} E_{x;i,j,k}^{s;n-1} \\
& + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \left(\frac{H_{z;i,j,k}^{s;n-1} - H_{z;i,j-1,k}^{s;n-1}}{\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\Delta y_{j-1}}{2}} - \frac{H_{y;i,j,k}^{s;n-1} - H_{y;i,j,k-1}^{s;n-1}}{\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\Delta z_{k-1}}{2}} \right. \\
& \left. - \left((\varepsilon_a - \varepsilon_0) \frac{\partial}{\partial t} E_{x;i,j,k}^i + \sigma_a E_{x;i,j,k}^i \right)_{t=(n-\frac{1}{2})\Delta t} \right) \quad (2.175)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{y;i,j,k}^{s;n} = & \frac{2\varepsilon_a - \sigma_a \Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} E_{y;i,j,k}^{s;n-1} \\
& + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \left(\frac{H_{x;i,j,k}^{s;n-1} - H_{x;i,j,k-1}^{s;n-1}}{\frac{\Delta z_k}{2} + \frac{\Delta z_{k-1}}{2}} - \frac{H_{z;i,j,k}^{s;n-1} - H_{z;i-1,j,k}^{s;n-1}}{\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2}} \right. \\
& \left. - \left((\varepsilon_a - \varepsilon_0) \frac{\partial}{\partial t} E_{y;i,j,k}^i + \sigma_a E_{y;i,j,k}^i \right)_{t=(n-\frac{1}{2})\Delta t} \right) \quad (2.176)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{z;i,j,k}^{s;n} = & \frac{2\varepsilon_a - \sigma_a \Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} E_{z;i,j,k}^{s;n-1} \\
& + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_a + \sigma_a \Delta t} \left(\frac{H_{y;i,j,k}^{s;n-1} - H_{y;i-1,j,k}^{s;n-1}}{\frac{\Delta x_i}{2} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2}} - \frac{H_{x;i,j,k}^{s;n-1} - H_{x;i,j-1,k}^{s;n-1}}{\frac{\Delta y_j}{2} + \frac{\Delta y_{j-1}}{2}} \right. \\
& \left. - \left((\varepsilon_a - \varepsilon_0) \frac{\partial}{\partial t} E_{z;i,j,k}^i + \sigma_a E_{z;i,j,k}^i \right)_{t=(n-\frac{1}{2})\Delta t} \right) \quad (2.177)
\end{aligned}$$

(2.169)(2.170)(2.171) では入射磁界の時間微分がタイムステップ毎に必要となるが、時刻は散乱界の電界と同じ $n\Delta t$ の値が用いられることに注意が必要である。同様に (2.172)(2.173)(2.174) で必要となる入射電界とその時間微分は、散乱界の磁界と同じ $(n-\frac{1}{2})\Delta t$ の値が用いられる。

2.7.3 散乱界に対する境界条件

完全導体

完全導体の表面では、全電界の接線方向成分が 0 となる。接線方向を t と表すと、

$$E_t^n = E_t^{i;n} + E_t^{s;n} = 0$$

ゆえに、

$$E_t^{s;n} = -E_t^{i;n} \quad (2.178)$$

となって、散乱界の電界と同じ時刻の入射界の電界の値が必要となる。

完全導体内部の界は、完全導体表面の外側へは影響を及ぼさないので、計算をしなくてもよく、入射界を与える必要もない。

完全磁気導体

完全導体と同様に、全磁界の接線方向成分が 0 となるので、

$$H_t^{s;n} = -H_t^{i;n} \quad (2.179)$$

となって、散乱界の磁界と同じ時刻の入射界の磁界の値が必要となる。

吸収境界条件

Yee のアルゴリズムで計算を進めるのは散乱界のみであるから、吸収境界においては散乱界のみを考慮すればよく、通常の FD-TD 法と同じ吸収境界条件を用いることができる。

通常の FD-TD 法では、入射界となる電磁界が吸収境界の表面に対しほぼ並行に伝播すると、吸収境界から比較的大きい反射が生じる。それに対し、散乱界表示 FD-TD 法では、散乱体から再放射された散乱界のみを吸収すればよく、解析領域の端にある吸収境界の表面に対し垂直に近い方向から入射するため、吸収境界からの反射は小さく抑えられて解析の精度が向上することが期待できる。

2.7.4 全電磁界の計算

解析結果として全電磁界が必要であれば、Yee のアルゴリズムで求めた散乱界と時間および位置の関数として解析的に求めた入射界の和を取ればよい。このとき、グリッド分散

による誤差は散乱界にのみ含まれるため、通常の FD-TD 法で求めた結果と入射界の誤差の分だけ異なる。多重反射などで解析領域内に界が長く留まるような体系では、グリッド分散誤差の影響が蓄積されるので注意が必要である。

2.8 まとめ

第 2 章では、有限差分時間領域法の概要として、マクスウェル方程式を差分化して時間発展的に解く Yee のアルゴリズムを示し、差分化したことによって生じるグリッド分散と安定条件を示した。グリッド分散は異方性と周波数分散性を生じ、解析の精度に大きく影響を及ぼすため、単位セルの大きさ、タイムステップ、伝播方向とグリッド分散の関係を詳しく検討した。その結果、座標軸方向へ伝播する場合にグリッド分散が最も顕著に現れて、単位セルの大きさを $1/10$ 波長程度とするとグリッド分散による位相速度の誤差が $1\sim 2\%$ 生じること、タイムステップは安定条件から許される範囲で大きい方がグリッド分散は小さいことを示した。

有限の解析空間で開放領域を模擬するのに必要な吸収境界条件について、Mur の吸収境界条件のアルゴリズムを示し、入射角と反射係数の関係から吸収境界に平行に近い角度で入射する場合にはほとんど吸収できないことを示した。

最後の節では、本研究で用いる、開放領域での散乱問題に対して吸収境界条件を有効に機能させることが可能な、散乱界表示の有限差分時間領域法の概要を示した。

第 3 章

有限差分時間領域法における荷電粒子ビームの取扱い

3.1 自由電流としての取扱い

荷電粒子のビームは、マクスウェル方程式中では電荷密度と電流密度として表される。したがって、FD-TD 法はマクスウェル方程式中の次の 2 式

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \quad (3.2)$$

から定式化されているので、荷電粒子ビームを自由電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$ で表すことで荷電粒子ビームが発生する電磁界を FD-TD 法で解析することが可能である。本論文では、線形加速器やシンクロトロンで加速したパルス状の荷電粒子ビーム、特に相対論的な電子ビーム周辺の電磁界を解析対象とするため、荷電粒子ビームは移動する局在化した電流として扱う必要がある。

FD-TD 法自体は電荷の運動は記述しておらず、タイムステップごとに電流密度の空間分布を別に求めなければならない。このとき、Yee のアルゴリズムを適用するために、電流密度は方向成分別に単位セルの辺上で与えなければならない。すなわち、

$$i_{x;i,j,k}^n = i_x \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) \Delta x, j \Delta y, k \Delta z, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \quad (3.3)$$

$$i_{y;i,j,k}^n = i_y \left(i \Delta x, \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta y, k \Delta z, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \quad (3.4)$$

$$i_{z;i,j,k}^n = i_z \left(i \Delta x, j \Delta y, \left(k + \frac{1}{2} \right) \Delta z, \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) \quad (3.5)$$

となって、各方向成分が異なる位置に配置される。そのうえで、単位セル上に配置された状態で電荷保存則を満足するように、タイムステップごとに電流密度分布を移動させる必要がある。

荷電粒子ビームが単位セルの辺に沿った方向へ一定速度で進む場合で、ビームが進む方向のセルサイズがタイムステップごとにビームが進む距離の整数倍であれば電荷保存則は満足される [7]。たとえば、ビームの速度が $\boldsymbol{v} = v_z \boldsymbol{e}_z$ とすると、 M を整数として

$$\Delta z = M v_z \Delta t \quad (3.6)$$

ならば

$$i_{z;i,j,k}^n = i_{z;i,j,k+1}^{n+M} \quad (3.7)$$

となるため、 i, j, k 番目のセルに流入した電流は、 M タイムステップ遅れて $i, j, k + 1$ 番目のセルへ流出することになり、 i, j, k 番目のセルに電荷が蓄積されることはない。しかしながら、この方法はビームの方向が限られるうえ、セルサイズが位置によって異なる時には、すべてのセルに対して (3.6) の関係を満たすタイムステップは安定条件の限界よりもはるかに小さくしなければならない場合もある。また、ビームに伴う電磁界はビームと共に進むため、ビームの軌道と平行な吸収境界がある場合には吸収境界からの反射が少なからず生じる。吸収境界からの反射による影響を避けるためには、吸収境界をビームの軌道から十分に離す必要があり、解析空間を大きくしなければならない。いずれも計算時間を大きく増加させることになる。

より一般的な、任意の方向へ進むビームを扱う方法には PIC (Particle in Cell) 法を用いて荷電粒子の運動を扱う方法 [8] がある。この方法では、電荷密度が均一な単位セルと同じ大きさの直方体を単位として、その直方体がタイムステップごとにそれぞれの単位セルの面を通過する体積から電流密度を決定する。荷電粒子の速度が変化する場合にも適用可能なため、プラズマや荷電粒子の加速過程を含む自己無矛盾な電磁界の解析に用いられている [12][11]。しかし、荷電粒子の速度が変化しないとしても 3 次元空間でのアルゴリズムはやや複雑であり、吸収境界からの反射の影響を考慮しなくてはならないのは先に挙げた方法と同様である。

これまでに加速器の荷電粒子ビームを含む体系を FD-TD 法や FD-TD 法と同等の方法である時間領域における FIT (Finite Integration Theory) 法で解析した論文 [7][9][10] では、いずれもビームの軌道に平行な境界は導体壁で、ビームは座標軸の一つに沿って移動する電流として表現されている。しかしながら、開放領域においてビームの進行方向を自由に決めることができる解析は行われていない。

3.2 散乱界表示 FD-TD 法における入射波源としての取扱い

散乱界表示 FD-TD 法を用いて荷電粒子ビームが発生する電磁界を入射界として与えれば、自由電流として扱わずに荷電粒子ビーム周辺の電磁界の解析が可能である。この場合、散乱界のみが Yee のアルゴリズムで数値的に扱われるので、開放領域問題であっても吸収境界とビームに伴う電磁界が直接作用することはなく、吸収境界は散乱界に対して有効に機能することができる。また、荷電粒子ビームの軌道は、FD-TD 法の単位セルにかかわらず自由に決めることが可能で、解析空間に含まれている必要もない。

散乱界表示 FD-TD 法では、電磁界 \mathbf{E}, \mathbf{H} を入射界 $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$ と散乱界 $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$ に分けて扱い、散乱界に対するマクスウェル方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t) - \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + \frac{\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_0}{\varepsilon(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) - \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\mu(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) - \frac{\mu(\mathbf{r}) - \mu_0}{\mu(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) \quad (3.9)$$

ここで、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) \quad (3.11)$$

であり、解析空間は真空とした。(3.8) と (3.9) を Yee のアルゴリズムで数値的に解くためには、散乱体が占める、媒質定数が真空中とは異なる位置において、入射界を解析的に求めなければならない。

自由空間を運動する荷電粒子の周辺の電磁界は、一般的には遅延ポテンシャルを用いて解析的に求めることができる。しかし、荷電粒子ビームの場合には、電荷が分布する空間全体にわたって空間積分を行わなければならない、任意の電荷分布に対し積分した結果を関数で表すことは困難である。そのため、数値積分により入射界を計算することになるが、十分な精度で数値積分を行うためには非常に多数の繰り返し計算が必要であり、タイムステップごとに散乱体が位置するすべての単位セル上で計算すると計算時間が大幅に増加するため現実的ではない。

3.3 点電荷による入射波源と畳み込みによる解法

電荷密度が空間に分布している荷電粒子ビームによる入射界を求めるには数値積分による多くの計算量を必要とするが、点電荷であれば入射界は関数で表すことができ、特に加減速せずに直線軌道をとる点電荷ならば容易に計算が可能である。そこで、荷電粒子ビームの中心軌道は直線で速度は一定として、その軌道を通る同じ速度の点電荷による入射界を用いて、散乱界表示 FD-TD 法で散乱界、あるいは入射界を加えて全電磁界を求めると、ビームの電荷密度分布をデルタ関数としたインパルス応答となる。この求められた電磁界とパルス状ビームの波形を時間領域で畳み込み積分すると、ビームの波形を反映した散乱電磁界が得られる。ビームの軌道に垂直な面における分布はデルタ関数のままであるが、ビームの軌道にごく近い位置でなければビームの軌道に垂直な面での重心位置とみなすことができる。

高エネルギーの点電荷の周辺電磁界は、非常に時間幅が狭いパルスとなり、極めて高い周波数のスペクトルを含む。そのため、FD-TD 法のような離散時間系で扱う場合には、ナイキストのサンプリング定理に注意して、サンプリングに伴うエイリアス誤差が十分小さくなるようにサンプリング間隔を選ばなければならない。そこで、以下の節では、高エネルギーの点電荷の周辺電磁界のスペクトルを求め、エイリアス誤差が決められた値以下となるサンプリング間隔を決定する方法を示す。

3.4 等速直線運動する点電荷の周辺電磁界のスペクトル

3.4.1 真空中を等速直線運動する場合のスペクトル

真空中を等速直線運動する点電荷の周辺電磁界

電荷量 q の点電荷が真空中を一定速度 v で z 軸上を $+z$ 方向に運動しているとき、時刻 $t = 0$ のときに点電荷が原点を通過するとして、位置 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ での電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ と磁界 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ は、遅延ポテンシャルあるいは静電界のローレンツ変換を用いて、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\gamma q \mathbf{r}_p}{4\pi\epsilon_0 \tilde{r}^3} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{\mu_0 c_0^2} \quad (3.13)$$

となる [6]。ここで、 ϵ_0, μ_0, c_0 はそれぞれ真空中の誘電率、透磁率、光速度であり、

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_p &= \rho \mathbf{e}_\rho + (z - vt) \mathbf{e}_z \\
\tilde{r} &= \sqrt{\rho^2 + \gamma^2 (z - vt)^2} \\
\mathbf{v} &= v \mathbf{e}_z \\
\beta &= \frac{v}{c_0} \\
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}
\end{aligned}$$

である。この $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ のフーリエ変換 $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ を求める。

周波数領域での電磁界

本論文では、フーリエ変換とフーリエ逆変換に以下の変換対を用いる。

$$\hat{f}(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.14)$$

$$f(t) = \int \hat{f}(\omega) e^{+j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3.15)$$

周波数領域における真空中でのマクスウェル方程式は、

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_0 \hat{\mathbf{H}} \quad (3.16)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{i}} \quad (3.17)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} = \frac{\hat{\rho}}{\varepsilon_0} \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{H}} = 0 \quad (3.19)$$

となる。(3.16) の回転をとり (3.17) と (3.18) を代入すると、次のヘルムホルツ方程式を得る。

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} + k_0^2 \hat{\mathbf{E}} = \frac{\nabla \hat{\rho}}{\varepsilon_0} + j\omega\mu_0 \hat{\mathbf{i}} \quad (3.20)$$

k_0 は真空中の波数で、 $k_0 = \omega/c_0$ である。(3.20) の解は、右辺を $\hat{\mathbf{S}}$ と置き、ダイアディック・グリーン関数 $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を用いて、

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \int_{v'} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}') dv' \quad (3.21)$$

として求められる [13]。 $\bar{\mathbf{G}}$ の具体的な表式は、境界の無い自由空間では、

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{\mathbf{I}} \quad (3.22)$$

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \quad (3.23)$$

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r}, \quad r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (3.24)$$

である。 $\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は 3 次元スカラーヘルムホルツ方程式の自由空間でのグリーン関数で、

$$\nabla^2 \hat{G} + k_0^2 \hat{G} = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.25)$$

を満たす関数である。

ソース項

(3.20) の右辺にある $\hat{\rho}, \hat{\mathbf{i}}$ の具体的な表式を求め、ソース項を整理する。

電荷量 q の点電荷が z 軸上を $+z$ 方向に速度 v で移動し、時刻 $t = 0$ のときに原点を通過するのだから、時間領域での電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ と電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$ は

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) &= v\rho(\mathbf{r}, t) \\ &= qv\mathbf{e}_z\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) \end{aligned} \quad (3.27)$$

と表される。これをフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\mathbf{r}, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt \\ &= q\delta(x)\delta(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - vt) e^{-j\omega t} dt \\ &= q\delta(x)\delta(y) \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(\tilde{z}) e^{-j\omega \frac{z-\tilde{z}}{v}} \left(-\frac{d\tilde{z}}{v}\right) \\ &= q\delta(x)\delta(y) \frac{1}{v} e^{-j\omega \frac{z}{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tilde{z}) e^{j\omega \frac{\tilde{z}}{v}} d\tilde{z} \\ &= \frac{q}{v} e^{-j\kappa z} \delta(x)\delta(y) \end{aligned} \quad (3.28)$$

となる。ここで、 $\kappa = \omega/v = k_0/\beta$ である。同様に、電流密度のフーリエ変換は

$$\hat{\mathbf{i}}(\mathbf{r}, \omega) = qe^{-j\kappa z} \delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z \quad (3.29)$$

となる。(3.28) と (3.29) が電荷保存則

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{i}} + j\omega \hat{\rho} = 0 \quad (3.30)$$

を満たすことは容易に確かめられる。

(3.28) と (3.29) を (3.20) の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{S}} &= \frac{\nabla \hat{\rho}}{\varepsilon_0} + j\omega\mu_0 \hat{\mathbf{i}} \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \left(\frac{q}{v} e^{-j\kappa z} \delta(x)\delta(y) \right) + j\omega\mu_0 \left(q e^{-j\kappa z} \delta(x)\delta(y) \mathbf{e}_z \right) \\
&= \frac{q e^{-j\kappa z}}{\varepsilon_0 v} \left(\delta(y) \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \delta(x) + \delta(x) \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \delta(y) - (j\kappa - j\omega\mu_0 \varepsilon_0 v) \delta(x)\delta(y) \mathbf{e}_z \right)
\end{aligned}$$

であり、また、真空中では $v < c_0$ であることから

$$\begin{aligned}
j\kappa - j\omega\mu_0 \varepsilon_0 v &= j\kappa \left(1 - \frac{\omega c_0^{-2} v}{\omega/v} \right) \\
&= j\kappa (1 - \beta^2) \\
&= j\kappa \frac{1}{\gamma^2}
\end{aligned}$$

となるので、ソース項は次のようにまとめられる。

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{q e^{-j\kappa z}}{\varepsilon_0 v} \left(\delta(y) \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \delta(x) + \delta(x) \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \delta(y) - \frac{j\kappa}{\gamma^2} \delta(x)\delta(y) \mathbf{e}_z \right) \quad (3.31)$$

グリーン関数とソース項の内積

(3.21) に示したように、任意の位置 \mathbf{r} における電界 $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ は、ダイアディック・グリーン関数 $\bar{\mathbf{G}}$ とソース項 $\hat{\mathbf{S}}$ のスカラー積を全空間で積分することで求められる。(3.21) に (3.22) (3.23) (3.24) と (3.31) を代入すると、

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \int_{v'} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}') dv' \\
&= \int_{v'} -\frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \bar{\mathbf{I}} \cdot \\
&\quad \frac{q e^{-j\kappa z'}}{\varepsilon_0 v} \left(\delta(y') \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x') + \delta(x') \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} \delta(y') - \frac{j\kappa}{\gamma^2} \delta(x')\delta(y') \mathbf{e}_z \right) dv' \\
&= \int_{v'} -\frac{q e^{-jk_0 r} e^{-j\kappa z'}}{4\pi \varepsilon_0 v r} \left(\delta(y') \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x') + \delta(x') \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} \delta(y') - \frac{j\kappa}{\gamma^2} \delta(x')\delta(y') \mathbf{e}_z \right) dv' \\
&= -\frac{q}{4\pi \varepsilon_0 v} \iiint \frac{e^{-jk_0 r} e^{-j\kappa z'}}{r} dz' \\
&\quad \left(\delta(y') \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x') + \delta(x') \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} \delta(y') - \frac{j\kappa}{\gamma^2} \delta(x')\delta(y') \mathbf{e}_z \right) dy' dx' \quad (3.32)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z$$

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

である。

まず z' についての積分を実行する。 $Z = z' - z$, $R = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ と置いて、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_0 r} e^{-j\kappa z'}}{r} dz' &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-jk_0 \sqrt{R^2 + Z^2}) \exp(-j\kappa z')}{\sqrt{R^2 + Z^2}} dz' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-jk_0 \sqrt{R^2 + Z^2}) \exp(-j\kappa(z' - z)) \exp(-j\kappa z)}{\sqrt{R^2 + Z^2}} dz' \\ &= e^{-j\kappa z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-j(\kappa Z + k_0 \sqrt{R^2 + Z^2}))}{\sqrt{R^2 + Z^2}} dZ \end{aligned} \quad (3.33)$$

さらに $Z = R \sinh \phi$ とすると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_0 r} e^{-j\kappa z'}}{r} dz' &= e^{-j\kappa z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-j(\kappa R \sinh \phi + k_0 \sqrt{R^2 + R^2 \sinh^2 \phi}))}{\sqrt{R^2 + R^2 \sinh^2 \phi}} R \cosh \phi d\phi \\ &= e^{-j\kappa z} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jR(\kappa \sinh \phi + k_0 \cosh \phi)) d\phi \end{aligned} \quad (3.34)$$

となる。 $\kappa > k_0$ であることから、

$$\kappa \sinh \phi + k_0 \cosh \phi = \sqrt{\kappa^2 - k_0^2} \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - k_0^2}} \sinh \phi + \frac{k_0}{\sqrt{\kappa^2 - k_0^2}} \cosh \phi \right)$$

と置いて、

$$\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - k_0^2}} \right)^2 - \left(\frac{k_0}{\sqrt{\kappa^2 - k_0^2}} \right)^2 = 1$$

の関係から $\kappa/\sqrt{\kappa^2 - k_0^2} = \cosh \psi$, $k_0/\sqrt{\kappa^2 - k_0^2} = \sinh \psi$ と置き換えると、

$$\begin{aligned} \kappa \sinh \phi + k_0 \cosh \phi &= \sqrt{\kappa^2 - k_0^2} (\cosh \psi \sinh \phi + \sinh \psi \cosh \phi) \\ &= \sqrt{\kappa^2 - k_0^2} \sinh(\phi + \psi) \end{aligned}$$

が得られる。これを $\tilde{k} = \sqrt{\kappa^2 - k_0^2}$ と置き換えて (3.34) に代入して、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_0 r} e^{-j\kappa z'}}{r} dz' &= e^{-j\kappa z} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jR(\kappa \sinh \phi + k_0 \cosh \phi)) d\phi \\
&= e^{-j\kappa z} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jR\tilde{k} \sinh(\phi + \psi)) d\phi \\
&= e^{-j\kappa z} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jR\tilde{k} \sinh \tilde{\phi}) d\tilde{\phi} \\
&= 2e^{-j\kappa z} \int_0^{+\infty} \cos(R\tilde{k} \sinh \tilde{\phi}) d\tilde{\phi} \\
&= 2e^{-j\kappa z} K_0(R\tilde{k})
\end{aligned} \tag{3.35}$$

となる。 K_0 は 0 次の第 2 種変形ベッセル関数であり、 $K_0(z) = \int_0^{+\infty} \cos(z \sinh t) dt$ の関係を用いた [14]。

(3.35) を (3.32) に代入し、 x, y の積分を行うと、デルタ関数の性質

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \frac{d^n}{dx^n} \delta(x-a) dx = (-1)^n f^{(n)}(a) \quad (\alpha < a < \beta)$$

を用いて、

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 v} \iiint \frac{e^{-jk_0 r} e^{-j\kappa z'}}{r} dz' \\
&\quad \left(\delta(y') \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x') + \delta(x') \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} \delta(y') - \frac{j\kappa}{\gamma^2} \delta(x') \delta(y') \mathbf{e}_z \right) dy' dx' \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 v} \iint 2e^{-j\kappa z} K_0(R\tilde{k}) \\
&\quad \left(\delta(y') \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x') + \delta(x') \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} \delta(y') - \frac{j\kappa}{\gamma^2} \delta(x') \delta(y') \mathbf{e}_z \right) dy' dx' \\
&= -\frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v} \left(\int K_0(R\tilde{k}) \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x') dx' \Big|_{y'=0} + \int K_0(R\tilde{k}) \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} \delta(y') dy' \Big|_{x'=0} \right. \\
&\quad \left. - \frac{j\kappa}{\gamma^2} K_0(R\tilde{k}) \mathbf{e}_z \Big|_{x'=0, y'=0} \right) \\
&= -\frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v} \left(-\frac{\partial}{\partial x'} K_0(R\tilde{k}) \mathbf{e}_x - \frac{\partial}{\partial y'} K_0(R\tilde{k}) \mathbf{e}_y - \frac{j\kappa}{\gamma^2} K_0(R\tilde{k}) \mathbf{e}_z \right)_{x'=0, y'=0} \\
&= -\frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v} \left(K_1(R\tilde{k}) \tilde{k} \frac{x'-x}{R} \mathbf{e}_x + K_1(R\tilde{k}) \tilde{k} \frac{y'-y}{R} \mathbf{e}_y - \frac{j\kappa}{\gamma^2} K_0(R\tilde{k}) \mathbf{e}_z \right)_{x'=0, y'=0} \\
&= -\frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v} \left(-K_1(\rho\tilde{k}) \tilde{k} \mathbf{e}_\rho - \frac{j\kappa}{\gamma^2} K_0(\rho\tilde{k}) \mathbf{e}_z \right)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$ であり、 $dK_0(z)/dz = -K_1(z)$ を用いた。最後に \tilde{k}, κ, k_0 の関係を整理して、

$$\tilde{k} = \sqrt{\kappa^2 - k_0^2}$$

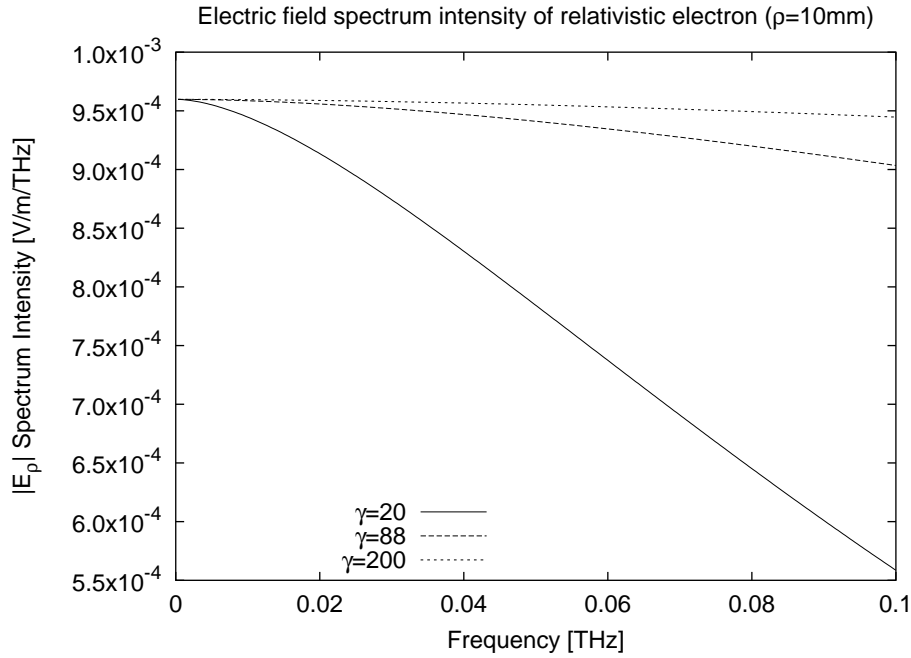


図 3.1: 軌道から 10mm の位置における電界の動径方向成分のスペクトル強度 (低周波部分)

$$= \frac{k_0}{\beta\gamma} = \frac{\kappa}{\gamma}$$

となることから、以下の表式を得る。

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v} \tilde{k} \left(K_1(\rho\tilde{k})\mathbf{e}_\rho + \frac{j}{\gamma} K_0(\rho\tilde{k})\mathbf{e}_z \right) \quad (3.36)$$

点電荷の軌道からの距離が $\rho = 10\text{mm}$ の位置における電界の動径方向成分のスペクトル強度 $|\hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{e}_\rho|$ を図 3.1, 図 3.2 に示す。

スペクトル強度と周波数、距離、エネルギーの関係

第 2 種変形ベッセル関数は、 $z \rightarrow 0$ では $K_0(z) \sim -\ln z$, $K_1(z) \sim 1/z$ となるので [14]、これを (3.36) に適用すると、

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \sim \frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v} \tilde{k} \left(\frac{1}{\rho\tilde{k}}\mathbf{e}_\rho - \frac{j}{\gamma} \ln(\rho\tilde{k})\mathbf{e}_z \right) \quad (\rho\tilde{k} \sim 0) \quad (3.37)$$

となる。 $1/x$ と $-\ln x$ との比較から、点電荷の軌道の近傍や低周波領域では電界の動径方向成分と軌道方向成分の比は γ 以上に大きくなり、動径方向成分が極めて優位となる。また、動径方向成分のみに注目すると、

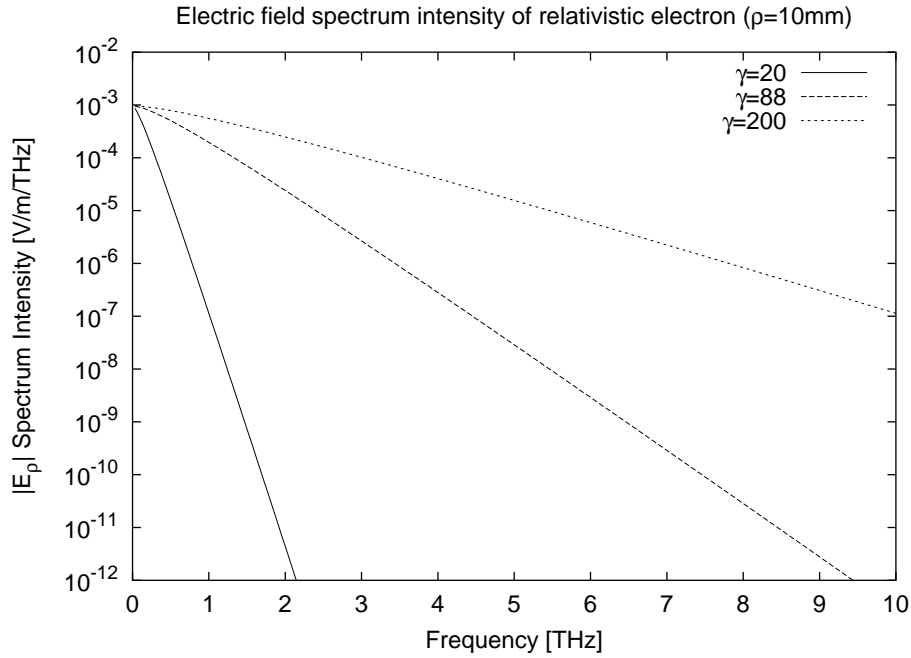


図 3.2: 軌道から 10mm の位置における電界の動径方向成分のスペクトル強度 (高周波部分)

$$\hat{E}_\rho(\mathbf{r}, \omega) \sim \frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v \rho} \quad (3.38)$$

となり、相対論的領域では周波数や荷電粒子の運動エネルギーには無関係で、軌道からの距離 ρ のみで電界のスペクトル強度が決まる。

一方、 $z \rightarrow +\infty$ では $K_n(z) \sim \sqrt{\pi/2z} e^{-z}$ と漸近表示されるので [14]、

$$\hat{E}(\mathbf{r}, \omega) \sim \frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v} \sqrt{\frac{\pi \tilde{k}}{2\rho}} e^{-\rho \tilde{k}} \left(\mathbf{e}_\rho + \frac{j}{\gamma} \mathbf{e}_z \right) \quad (\rho \tilde{k} \rightarrow +\infty) \quad (3.39)$$

となる。電界の動径方向成分と軌道方向成分の比は一定値 γ となり、スペクトルの強度は周波数および軌道からの距離の増加とともに指数関数的に減少する。

3.4.2 媒質中を等速直線運動する場合のスペクトル

点電荷が真空中ではなく、誘電率 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 、透磁率 $\mu = \mu_0 \mu_r$ の媒質中を等速直線運動をする場合を考える。点電荷の速度 v が媒質中の電磁波の速度 $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ を越える場合にはチェレンコフ放射を生じる。

(3.20) に代わる媒質中での電界のヘルムホルツ方程式は

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} + k \hat{\mathbf{E}} = \frac{\nabla \hat{\rho}}{\varepsilon} + j\omega \mu \hat{\mathbf{i}} \quad (3.40)$$

であり、ダイアディック・グリーン関数 $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{\mathbf{I}} \quad (3.41)$$

$$= -\frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \bar{\mathbf{I}}, \quad r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (3.42)$$

となる。 k は媒質中の波数で、 $k = \omega/c = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ である。真空中の場合と同様に、(3.40) の右辺をソース項 $\hat{\mathbf{S}}$ としてまとめると、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}} &= \frac{\nabla \hat{\rho}}{\varepsilon} + j\omega \mu \hat{\mathbf{i}} \\ &= \frac{qe^{-jkz}}{\varepsilon v} \left(\delta(y) \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \delta(x) + \delta(x) \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \delta(y) - (j\kappa - j\omega\mu\varepsilon v) \delta(x)\delta(y) \mathbf{e}_z \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

である。

$v < c$ の場合

$$\begin{aligned} j\kappa - j\omega\mu\varepsilon v &= j\kappa \left(1 - \frac{\omega c^{-2} v}{\omega/v} \right) \\ &= j\kappa \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= j\kappa(1 - \beta'^2) \\ &= j\kappa \frac{1}{\gamma'^2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{qe^{-jkz}}{\varepsilon v} \left(\delta(y) \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \delta(x) + \delta(x) \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \delta(y) - \frac{j\kappa}{\gamma'^2} \delta(x)\delta(y) \mathbf{e}_z \right) \quad (3.44)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \beta' &= \beta \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \\ &= \frac{v}{c} \\ \frac{1}{\gamma'^2} &= 1 - \beta'^2 \\ &= \frac{1}{\gamma^2} + (1 - \varepsilon_r \mu_r) \beta^2 \end{aligned}$$

である。(3.44) は、真空中の場合のソース項 (3.31) とくらべると、 ε_0, γ を ε, γ' で置き換えただけである。したがって、

$$\begin{aligned}\tilde{k} &= \sqrt{\kappa^2 - k^2} \\ &= \frac{k}{\beta'\gamma'} = \frac{\kappa}{\gamma'}\end{aligned}$$

を用いると、位置 \mathbf{r} における電界 $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ は、

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\varepsilon v} \tilde{k} \left(K_1(\rho\tilde{k})\mathbf{e}_\rho + \frac{j}{\gamma'} K_0(\rho\tilde{k})\mathbf{e}_z \right) \quad (3.45)$$

となる。すなわち、媒質中での電界の r および ω への依存性は、真空中で点電荷の速度が $\varepsilon_r\mu_r$ 倍に増加した場合、あるいは、その分だけエネルギーが増加した場合と同じである。

$v > c$ の場合

γ' が実数になるように、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma'^2} &= \beta'^2 - 1 \\ &= \frac{v^2}{c^2} - 1 \\ &= -\frac{1}{\gamma^2} + (\varepsilon_r\mu_r - 1)\beta^2\end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned}j\kappa - j\omega\mu\varepsilon v &= j\kappa(1 - \beta'^2) \\ &= -j\kappa\frac{1}{\gamma'^2}\end{aligned}$$

であるから、

$$\hat{\mathbf{S}} = -\frac{qe^{-j\kappa z}}{\varepsilon v} \left(\delta(y)\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \delta(x) + \delta(x)\mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \delta(y) + \frac{j\kappa}{\gamma'^2} \delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z \right) \quad (3.46)$$

となる。電界 $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ は、ダイアディック・グリーン関数 $\bar{\mathbf{G}}$ とソース項 $\hat{\mathbf{S}}$ のスカラー積を全空間で積分することで求められるから、(3.41) と (3.46) を用いて、

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \int_{v'} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}') dv' \\ &= \int_{v'} -\frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \bar{\mathbf{I}} \cdot \\ &\quad \frac{qe^{-j\kappa z'}}{\varepsilon v} \left(\delta(y')\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x') + \delta(x')\mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} \delta(y') + \frac{j\kappa}{\gamma'^2} \delta(x')\delta(y')\mathbf{e}_z \right) dv'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon v} \iiint \frac{e^{-jkr} e^{-j\kappa z'}}{r} dz' \\
&\quad \left(\delta(y') \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x') + \delta(x') \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} \delta(y') + \frac{j\kappa}{\gamma'^2} \delta(x') \delta(y') \mathbf{e}_z \right) dy' dx'
\end{aligned} \tag{3.47}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\
\mathbf{r}' &= x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z \\
r &= \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}
\end{aligned}$$

である。真空中の場合と同じく、 $Z = z' - z$, $R = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$, $Z = R \sinh \phi$ と置いて z' についての積分を実行すると、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jkr} e^{-j\kappa z'}}{r} dz' = e^{-j\kappa z} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jR(\kappa \sinh \phi + k \cosh \phi)) d\phi \tag{3.48}$$

となる。今度は、 $\kappa < k$ であることから、

$$\kappa \sinh \phi + k_0 \cosh \phi = \sqrt{k^2 - \kappa^2} \left(\frac{\kappa}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \sinh \phi + \frac{k}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \cosh \phi \right)$$

と置いて、

$$\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \right)^2 - \left(\frac{\kappa}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \right)^2 = 1$$

の関係から $k/\sqrt{k^2 - \kappa^2} = \cosh \psi$, $\kappa/\sqrt{k^2 - \kappa^2} = \sinh \psi$ と置き換えると、

$$\begin{aligned}
\kappa \sinh \phi + k \cosh \phi &= \sqrt{k^2 - \kappa^2} (\sinh \psi \sinh \phi + \cosh \psi \cosh \phi) \\
&= \sqrt{k^2 - \kappa^2} \cosh(\phi + \psi)
\end{aligned}$$

となる。 $\tilde{k} = \sqrt{k^2 - \kappa^2}$ と置き換えて、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jkr} e^{-j\kappa z'}}{r} dz' &= e^{-j\kappa z} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jR(\kappa \sinh \phi + k \cosh \phi)) d\phi \\
&= e^{-j\kappa z} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jR\tilde{k} \cosh(\phi + \psi)) d\phi \\
&= e^{-j\kappa z} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jR\tilde{k} \cosh \tilde{\phi}) d\tilde{\phi} \\
&= 2e^{-j\kappa z} \int_0^{+\infty} \exp(-jR\tilde{k} \cosh \tilde{\phi}) d\tilde{\phi} \\
&= 2e^{-j\kappa z} \int_0^{+\infty} \cos(R\tilde{k} \cosh \tilde{\phi}) - j \sin(R\tilde{k} \cosh \tilde{\phi}) d\tilde{\phi} \\
&= -\pi e^{-j\kappa z} (Y_0(R\tilde{k}) + jJ_0(R\tilde{k})) \\
&= -j\pi e^{-j\kappa z} H_0^{(2)}(R\tilde{k})
\end{aligned} \tag{3.49}$$

を得る。ここで、 J_0 , Y_0 , $H_0^{(2)}$ はそれぞれ 0 次のベッセル関数、ノイマン関数、第 2 種ハンケル関数であり、

$$\begin{aligned} J_0(x) &= +\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(x \cosh t) dt, \quad x > 0 \\ Y_0(x) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(x \cosh t) dt, \quad x > 0 \\ H_0^{(2)}(z) &= J_0(z) - jY_0(z) \end{aligned}$$

の関係を用いた [14]。残りの x' , y' についての積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon v} \iiint \frac{e^{-jk_r r} e^{-j\kappa z'}}{r} dz' \\ &\quad \left(\delta(y') \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x') + \delta(x') \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} \delta(y') + \frac{j\kappa}{\gamma'^2} \delta(x') \delta(y') \mathbf{e}_z \right) dy' dx' \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon v} \iint -j\pi e^{-j\kappa z} H_0^{(2)}(R\tilde{k}) \\ &\quad \left(\delta(y') \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x') + \delta(x') \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} \delta(y') + \frac{j\kappa}{\gamma'^2} \delta(x') \delta(y') \mathbf{e}_z \right) dy' dx' \\ &= \frac{jqe^{-j\kappa z}}{4\epsilon v} \left(-H_1^{(2)}(\rho\tilde{k}) \tilde{k} \mathbf{e}_\rho + \frac{j\kappa}{\gamma'^2} H_0^{(2)}(\rho\tilde{k}) \mathbf{e}_z \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$ であり、 $dH_0^{(2)}(z)/dz = -H_1^{(2)}(z)$ を用いた。最後に \tilde{k} , κ , k の関係を整理して、

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \sqrt{k^2 - \kappa^2} \\ &= \frac{k}{\beta'\gamma'} = \frac{\kappa}{\gamma'} \end{aligned}$$

となることから、以下の表式を得る。

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{qe^{-j\kappa z}}{4\epsilon v} \tilde{k} \left(-jH_1^{(1)}(\rho\tilde{k}) \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\gamma'} H_0^{(1)}(\rho\tilde{k}) \mathbf{e}_z \right) \quad (3.50)$$

第 2 種ハンケル関数は、 $z \rightarrow 0$ では

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(z) &\sim -j\frac{2}{\pi} \ln z \\ H_1^{(2)}(z) &\sim j\frac{1}{\pi} \Gamma(1) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-1} \\ &\sim j\frac{2}{\pi} \frac{1}{z} \end{aligned}$$

となるので [14]、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &\sim \frac{qe^{-j\kappa z}}{4\epsilon v} \tilde{k} \left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{\rho\tilde{k}} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\gamma'} j\frac{2}{\pi} \ln(\rho\tilde{k}) \mathbf{e}_z \right) \quad (\rho\tilde{k} \sim 0) \\ &= \frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon v} \tilde{k} \left(\frac{1}{\rho\tilde{k}} \mathbf{e}_\rho + \frac{j}{\gamma'} \ln(\rho\tilde{k}) \mathbf{e}_z \right) \quad (3.51) \end{aligned}$$

となり、真空中の場合 (3.37) の ε_0, γ を ε, γ' で置き換えた結果となる。ただし、 $1/\gamma' = \sqrt{(v/c_0)^2 \varepsilon_r \mu_r - 1}$ であるから、真空中や $v < c$ の場合とは異なって、点電荷の運動エネルギーや媒質の誘電率、透磁率の増加とともに $1/\gamma'$ は増加して $\sqrt{\varepsilon_r \mu_r - 1}$ に漸近する。

$z \rightarrow +\infty$ では

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left(-j\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$$

と漸近表示されるので [14]、

$$H_0^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left(-j\left(z - \frac{1}{4}\pi\right)\right) = \frac{1+j}{\sqrt{\pi z}} \exp(-jz)$$

$$H_1^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left(-j\left(z - \frac{3}{4}\pi\right)\right) = \frac{-1+j}{\sqrt{\pi z}} \exp(-jz)$$

を (3.50) に適用すると、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{qe^{-j\kappa z}}{4\varepsilon v} \tilde{\mathbf{k}} \left(-jH_1^{(2)}(\rho\tilde{\mathbf{k}}) \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\gamma'} H_0^{(2)}(\rho\tilde{\mathbf{k}}) \mathbf{e}_z \right) \\ &\sim \frac{qe^{-j\kappa z}}{4\varepsilon v} \tilde{\mathbf{k}} \frac{e^{-j\tilde{\mathbf{k}}\rho}}{\sqrt{\pi\rho\tilde{\mathbf{k}}}} \left(-j(-1+j) \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\gamma'} (1+j) \mathbf{e}_z \right) \quad (\tilde{\mathbf{k}}\rho \rightarrow +\infty) \\ &= \frac{qe^{-j\kappa z}}{4\varepsilon v} \sqrt{\frac{\tilde{\mathbf{k}}}{\pi\rho}} e^{-j\tilde{\mathbf{k}}\rho} (1+j) \left(\mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\gamma'} \mathbf{e}_z \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$= \frac{q}{4\varepsilon v} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi\rho\gamma'}} \exp\left(-j\kappa\left(\frac{\rho}{\gamma'} + z\right)\right) (1+j) \left(\mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\gamma'} \mathbf{e}_z \right) \quad (3.53)$$

となる。(3.53) では、電界のスペクトル強度 $|\hat{\mathbf{E}}|$ は、線状電流からの放射のように点電荷の軌道からの距離 ρ に対して $|\hat{\mathbf{E}}| \propto 1/\sqrt{\rho}$ の関係にあり、 $v < c$ の場合とは異なって遠方への放射、すなわちチェレンコフ放射となる。このとき、等位相面や電界の方向は、点電荷の軌道に対して $\tan\vartheta = \gamma'$ となるような角度 ϑ をなす円錐面状に伝搬する。また、周波数 ω に対しては、スペクトル強度は $|\hat{\mathbf{E}}| \propto \sqrt{\kappa} \propto \sqrt{\omega}$ となり、高周波成分ほど強くなる。しかし、実際の媒質では、X線領域まで考慮すると分散や吸収があり、誘電率や透磁率はやがて真空中の値へ近付くので、スペクトル強度も減少し、ついには $v < c$ となってチェレンコフ放射を起こさなくなる [16]。

温度 20°C、圧力 1atm の空気のマイクロ波領域における比誘電率は 1.000536 であり [15]、比透磁率は 1 とすると、約 22MeV ($\gamma = 43.2$) 以上の電子ならばチェレンコフ放射を生じる。点電荷の軌道からの距離が $\rho = 10\text{mm}$ の位置における真空中、および空気中の電界の

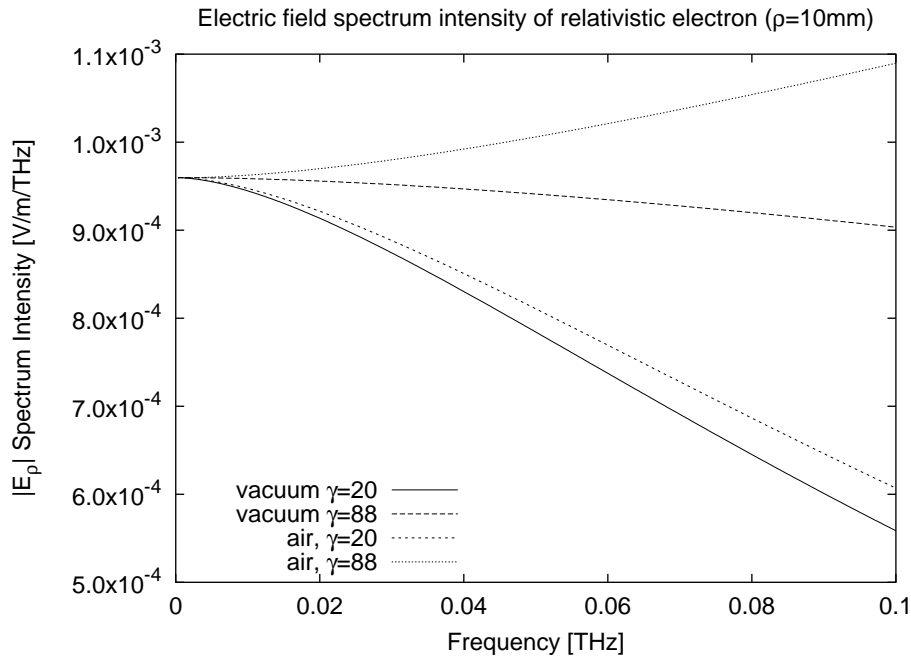


図 3.3: 軌道から 10mm の位置における電界の動径方向成分のスペクトル強度 (低周波部分)

動径方向成分のスペクトル強度 $|\hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{e}_\rho|$ を $\gamma = 20$ (10.2MeV) と $\gamma = 88$ (45MeV) の場合について図 3.3, 図 3.4 に示す。

媒質中における等速直線運動する点電荷の周辺電磁界のスペクトルは、チェレンコフ放射を起こすまでは、真空中で点電荷の運動エネルギーが $\epsilon_r \mu_r$ 倍となった場合に相当する。また、チェレンコフ放射が生じた場合には、媒質定数に分散性がなければ高周波側でスペクトルが発散してしまうため、このままでは適当な離散時間間隔でサンプリングすることはできない。したがって、以下の節では真空中の場合のみを扱うことにする。

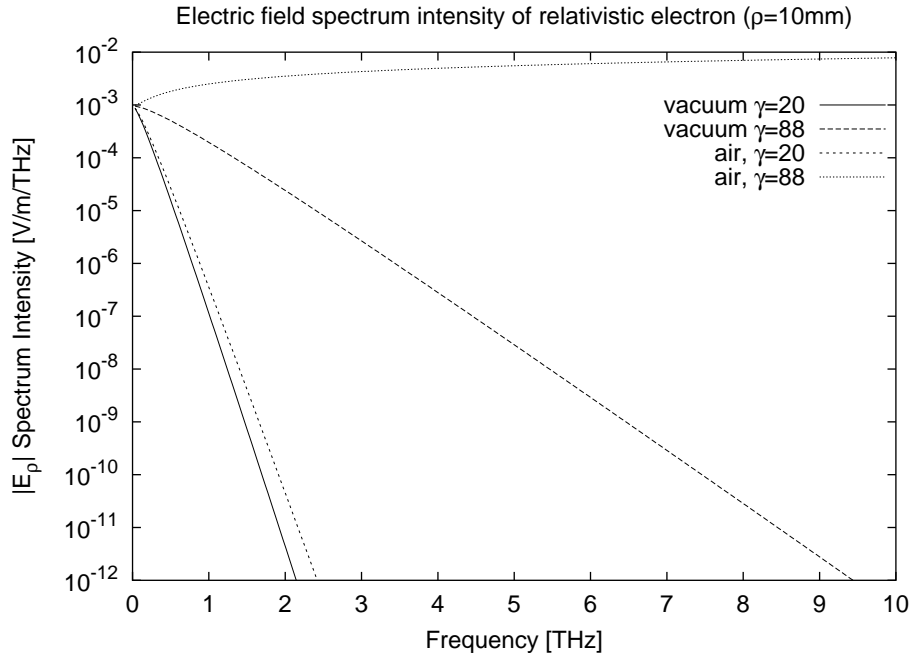


図 3.4: 軌道から 10mm の位置における電界の動径方向成分のスペクトル強度 (高周波部分)

3.5 等速直線運動する点電荷の周辺電磁界のサンプリング間隔の決定

3.5.1 サンプリングとエイリアス誤差

連続信号 $f(t)$ とそのスペクトル $\hat{f}(\omega)$ との変換対を

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (3.54)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3.55)$$

として、 $f(t)$ をサンプリング間隔 Δt でサンプリングする場合を考える。 n を整数として離散系列 $g_n = f(n\Delta t)$ の離散時間フーリエ変換対は、

$$\hat{g}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \exp(-j\omega n\Delta t) \Delta t \quad (3.56)$$

$$g_n = \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \hat{g}(\omega) \exp(j\omega n\Delta t) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3.57)$$

となる。離散時間フーリエ変換で求めたスペクトル $\hat{g}(\omega)$ は、角周波数について周期が $2\pi/\Delta t$ の周期関数になる。一方、(3.55) において $t = n\Delta t$ の離散系列を表すと、

$$\begin{aligned}
 f(n\Delta t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(j\omega n\Delta t) \frac{d\omega}{2\pi} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi m}{\Delta t}\right) \exp\left(j\left(\omega + \frac{2\pi m}{\Delta t}\right)n\Delta t\right) \frac{d\omega}{2\pi} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi m}{\Delta t}\right) \exp(j\omega n\Delta t + 2\pi mnj) \frac{d\omega}{2\pi} \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi m}{\Delta t}\right) \exp(j\omega n\Delta t) \frac{d\omega}{2\pi}
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

となる。(3.57) と (3.58) を比較すると、

$$\hat{g}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi m}{\Delta t}\right) \tag{3.59}$$

である。ナイキストのサンプリング定理を満たすように、 $|\omega| > \pi/\Delta t$ の範囲でスペクトル $\hat{f}(\omega)$ が 0 であれば、 $|\omega| < \pi/\Delta t$ の範囲では、連続信号のスペクトル $\hat{f}(\omega)$ とサンプリングされた信号のスペクトル $\hat{g}(\omega)$ は一致し、サンプリングにより情報を失うことはない。しかし、 $\hat{f}(\omega)$ が $|\omega| > \pi/\Delta t$ で 0 でなければ、その部分は周期 $2\pi/\Delta t$ の周期関数である $\hat{g}(\omega)$ では表せないだけでなく、 $|\omega| < \pi/\Delta t$ の部分と重なりあうことになり $\hat{g}(\omega)$ にエイリアス誤差を生じる。

3.5.2 真空中を等速直線運動する点電荷が生じる電磁界のサンプリング

真空中を等速直線運動する点電荷が生じる電磁界は以下の式で求められる [6]。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\gamma q \mathbf{r}_p}{4\pi\epsilon_0 \tilde{r}^3} \tag{3.60}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{\mu_0 c_0^2} \tag{3.61}$$

ここで、 ϵ_0, μ_0, c_0 はそれぞれ真空中の誘電率、透磁率、光速度であり、電荷量 q 、速度 v の点電荷の軌道を円筒座表系の z 軸に合わせ、 $t = 0$ のときの点電荷の位置を座標系の原点にとった。また、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z \\
 \mathbf{r}_p &= \rho \mathbf{e}_\rho + (z - vt) \mathbf{e}_z \\
 \tilde{r} &= \sqrt{\rho^2 + \gamma^2 (z - vt)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v \mathbf{e}_z \\ \beta &= \frac{v}{c_0} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

である。これを FD-TD 法の入射界として用いる場合は、FD-TD 法のタイムステップでサンプリングすることになり、サンプリング定理を満たしていなければエイリアス誤差が含まれる。しかし、(3.60) のスペクトルは、 $\tilde{k} = k_0/\beta\gamma = \omega/v\gamma = \kappa/\gamma$ として

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v} \tilde{k} \left(K_1(\rho\tilde{k}) \mathbf{e}_\rho + \frac{j}{\gamma} K_0(\rho\tilde{k}) \mathbf{e}_z \right) \quad (3.62)$$

$$\sim \frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v} \sqrt{\frac{\pi\tilde{k}}{2\rho}} e^{-\rho\tilde{k}} \left(\mathbf{e}_\rho + \frac{j}{\gamma} \mathbf{e}_z \right) \quad (\rho\tilde{k} \rightarrow +\infty) \quad (3.63)$$

となって、周波数と共に指数関数的に減少するものの 0 にはならないため、エイリアス誤差の発生は避けられない。通常、計測した連続信号をサンプリングする場合には、低域通過フィルタで信号の周波数帯域を制限してサンプリング定理を満足するようにしてからサンプリングをおこなう。しかし、数値計算においては (3.60) のような関数を離散的な時間間隔で計算すること自体がサンプリングであり、帯域制限をおこなうには関数自身に修正を加えなければならない。スペクトルも周波数の関数として (3.62) のように求められているならば、スペクトル関数と帯域制限窓関数の積を逆フーリエ変換することで帯域制限された時間領域の関数を求めることは理論的には可能であるが、(3.60) のような見通しのよい関数形で表すことは容易ではない。

幸いなことに、真空中を等速直線運動する点電荷が生じる電磁界のスペクトルは、(3.62) に示したように周波数と共に指数関数的に減少するうえ、FD-TD 法では十分な精度で解析可能な周波数は主に空間メッシュの間隔に左右され、タイムステップから決まる最大周波数の数分の一である。そのため、サンプリング間隔を十分に小さくすることでエイリアス誤差を許容できる大きさに抑えることが可能である。以下でエイリアス誤差を求め、サンプリング間隔との関係を導く。

3.5.3 エイリアス誤差

ここではエイリアス誤差 $\epsilon(\omega)$ を

$$\epsilon(\omega) \equiv \frac{|\hat{g}(\omega) - \hat{f}(\omega)|}{|\hat{f}(\omega)|} \quad (3.64)$$

と定義する。(3.60) を Δt 間隔でサンプリングする場合を考え、 $\hat{f}(\omega)$ に (3.62) の e_ρ 方向成分を用いる。 Δt が適当に小さいならば、 $\omega_s = 2\pi/\Delta t$ として

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega + \omega_s)| &\gg |\hat{f}(\omega + 2\omega_s)| \gg |\hat{f}(\omega + 3\omega_s)| \gg \dots \\ |\hat{f}(\omega - \omega_s)| &\gg |\hat{f}(\omega - 2\omega_s)| \gg |\hat{f}(\omega - 3\omega_s)| \gg \dots \end{aligned}$$

とできるので、(3.59) の離散時間フーリエ変換のスペクトルは

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi m}{\Delta t}\right) \\ &\sim \hat{f}(\omega - \omega_s) + \hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega + \omega_s) \end{aligned} \quad (3.65)$$

とできる。よって、エイリアス誤差は

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &\sim \frac{|\hat{f}(\omega - \omega_s) + \hat{f}(\omega + \omega_s)|}{|\hat{f}(\omega)|} \\ &= \frac{|\overline{\hat{f}(\omega_s - \omega)} + \hat{f}(\omega_s + \omega)|}{|\hat{f}(\omega)|} \end{aligned} \quad (3.66)$$

となる。ここで上線は複素共役を表す。 $\rho\tilde{k} = \rho\omega/v\gamma$ が十分小さい場合は

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v} \tilde{k} K_1(\rho\tilde{k}) \\ &\sim \frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v\rho} \end{aligned} \quad (3.67)$$

とできるので、 $\omega = 0$ の場合のエイリアス誤差は

$$\begin{aligned} \epsilon(0) &\sim \frac{|\overline{\hat{f}(\omega_s)} + \hat{f}(\omega_s)|}{|\hat{f}(0)|} \\ &\sim \frac{\left| \frac{qe^{j\kappa_s z}}{2\pi\epsilon_0 v} \tilde{k}_s K_1(\rho\tilde{k}_s) + \frac{qe^{-j\kappa_s z}}{2\pi\epsilon_0 v} \tilde{k}_s K_1(\rho\tilde{k}_s) \right|}{\left| \frac{q}{2\pi\epsilon_0 v\rho} \right|} \\ &= \rho\tilde{k}_s K_1(\rho\tilde{k}_s) 2 |\cos(\kappa_s z)| \end{aligned} \quad (3.68)$$

となる。 $z \neq 0$ のときは、 $\overline{\hat{f}(\omega_s)}$ と $\hat{f}(\omega_s)$ が異なる位相で重なり合うため、その大きさは $z = 0$ のときよりも小さくなる。したがって、 $z = 0$ の場合にエイリアス誤差は最大となる。

周波数およびサンプリング間隔とエイリアス誤差の関係を示すために、変形ベッセル関数を指数関数で近似し、(3.68) を整理する。 Δt が適当に小さければ $\rho\tilde{k}_s = \rho\omega_s/v\gamma$ は十分大きく、 $\tilde{k}_s \gg \tilde{k}$ として

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega_s \pm \omega) &= \frac{qe^{-j(\kappa_s \pm \kappa)z}}{2\pi\epsilon_0 v} (\tilde{k}_s \pm \tilde{k}) K_1(\rho(\tilde{k}_s \pm \tilde{k})) \\ &\sim \frac{qe^{-j(\kappa_s \pm \kappa)z}}{2\pi\epsilon_0 v} \sqrt{\frac{\pi(\tilde{k}_s \pm \tilde{k})}{2\rho}} \exp(-\rho(\tilde{k}_s \pm \tilde{k})) \\ &\sim \frac{qe^{-j(\kappa_s \pm \kappa)z}}{2\pi\epsilon_0 v} \sqrt{\frac{\pi\tilde{k}_s}{2\rho}} \left(1 \pm \frac{\tilde{k}}{2\tilde{k}_s}\right) \exp(-\rho(\tilde{k}_s \pm \tilde{k}))\end{aligned}\quad (3.69)$$

と近似できる。これにより、エイリアス誤差 $\epsilon(\omega)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}\epsilon(\omega) &\sim \frac{|\hat{f}(\omega_s - \omega) + \hat{f}(\omega_s + \omega)|}{|\hat{f}(\omega)|} \\ &\sim \frac{\left| \frac{qe^{j(\kappa_s - \kappa)z}}{2\pi\epsilon_0 v} \sqrt{\frac{\pi\tilde{k}_s}{2\rho}} \left(1 - \frac{\tilde{k}}{2\tilde{k}_s}\right) e^{-\rho(\tilde{k}_s - \tilde{k})} + \frac{qe^{-j(\kappa_s + \kappa)z}}{2\pi\epsilon_0 v} \sqrt{\frac{\pi\tilde{k}_s}{2\rho}} \left(1 + \frac{\tilde{k}}{2\tilde{k}_s}\right) e^{-\rho(\tilde{k}_s + \tilde{k})} \right|}{\left| \frac{qe^{-j\kappa z}}{2\pi\epsilon_0 v \rho} \right|} \\ &= \sqrt{\frac{\pi\rho\tilde{k}_s}{2}} \left| \left(1 - \frac{\tilde{k}}{2\tilde{k}_s}\right) e^{j\kappa_s z} e^{-\rho\tilde{k}_s} e^{\rho\tilde{k}} + \left(1 + \frac{\tilde{k}}{2\tilde{k}_s}\right) e^{-j\kappa_s z} e^{-\rho\tilde{k}_s} e^{-\rho\tilde{k}} \right| \\ &= \sqrt{\frac{\pi\rho\tilde{k}_s}{2}} e^{-\rho\tilde{k}_s} \left| \left(e^{j\kappa_s z + \rho\tilde{k}} + e^{-(j\kappa_s z + \rho\tilde{k})} \right) - \frac{\tilde{k}}{2\tilde{k}_s} \left(e^{j\kappa_s z + \rho\tilde{k}} - e^{-(j\kappa_s z + \rho\tilde{k})} \right) \right| \\ &= \sqrt{\frac{\pi\rho\tilde{k}_s}{2}} e^{-\rho\tilde{k}_s} \left| 2 \cosh(j\kappa_s z + \rho\tilde{k}) - \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}_s} \sinh(j\kappa_s z + \rho\tilde{k}) \right|\end{aligned}\quad (3.70)$$

$\tilde{k}_s \propto 1/\Delta t$ であるから、サンプリング間隔が小さくなり $\rho\tilde{k}_s$ が大きくなるに従って、エイリアス誤差は指数関数的に減少することがわかる。一方、 ω については、 $\rho\tilde{k} = \rho\omega/v\gamma$ を介して $\cosh(\rho\tilde{k})$ にほぼ比例して周波数と共にエイリアス誤差が増加する。すなわち、 $\rho\tilde{k}$ が大きくなると急激にエイリアス誤差が増加することを示している。

3.5.4 サンプリング間隔の決定

(3.70) のように近似されたエイリアス誤差をサンプリング間隔 Δt について解き、エイリアス誤差を一定以下に抑えるのに必要なサンプリング間隔を決定する。簡単のため、(3.70)

において $z = 0$ とし、 $\omega = 0$ の場合のエイリアス誤差を求めると、

$$\epsilon(0) \sim \sqrt{2\pi\rho\tilde{k}_s} \exp(-\rho\tilde{k}_s) \quad (3.71)$$

となる。両辺の対数を取ってから $\epsilon(0) \sim 0.01$ となる $\rho\tilde{k}_s = 6.5$ の近傍で $\ln\rho\tilde{k}_s$ を一次のテイラー展開すると、

$$\ln\epsilon(0) \sim \frac{\ln 2\pi}{2} + \frac{\ln\rho\tilde{k}_s}{2} - \rho\tilde{k}_s \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} &\sim -\frac{12}{13}\rho\tilde{k}_s + \frac{\ln 13\pi}{2} - \frac{1}{2} \\ &\sim -0.923\rho\tilde{k}_s + 1.355 \end{aligned} \quad (3.73)$$

となり、 $\tilde{k}_s = \omega_s/v\gamma = 2\pi/v\gamma\Delta t$ の関係から

$$\Delta t = \frac{2\pi}{v\gamma} \frac{0.923\rho}{1.355 - \ln\epsilon(0)} \quad (3.74)$$

$$= \frac{\rho[\text{mm}]}{\gamma} \frac{19.3}{1.355 - \ln\epsilon(0)} [\text{ps}] \quad (\text{ただし } v \approx c_0) \quad (3.75)$$

として許容できるエイリアス誤差から必要なサンプリング間隔を求めることができる。たとえば、45 MeV の電子 ($\gamma = 88$) の軌道から $\rho = 10\text{mm}$ の位置で $\omega = 0$ でのエイリアス誤差を 0.01 以下にするためには、 $\Delta t = 0.368\text{ps}$ 以下でサンプリングする必要がある。 $\omega = 0$ の場合のエイリアス誤差 (3.68) およびそれを近似した (3.73) を 図 3.5 に示す。

3.6 デジタルフィルタの設計と誤差解析

3.6.1 散乱界 FD-TD 法におけるデジタルフィルタの利用

高エネルギーの点電荷が作る電磁界のような、非常に高い周波数のスペクトルが含まれる界を離散時間系で扱う場合には、エイリアス誤差を避けるために十分に小さい時間間隔でサンプリングする必要がある。しかし、FD-TD 法では、タイムステップを小さくすると解析に要する計算時間が増大するだけでなく、グリッド分散も増加して解析の精度が悪化する。そのため、散乱界 FD-TD 法の入射界として点電荷の電磁界を用いる場合でも、FD-TD 法のタイムステップは変えずに入射界のサンプリング間隔のみを小さくしたい。

これには、デジタル信号処理におけるダウンサンプリングの操作を行えばよい。ダウンサンプリングは、単にサンプリングされたデータを間引くのではなく、新しいサンプリング間隔でサンプリング定理が満たされるように低域通過フィルタで帯域制限を行い、そ

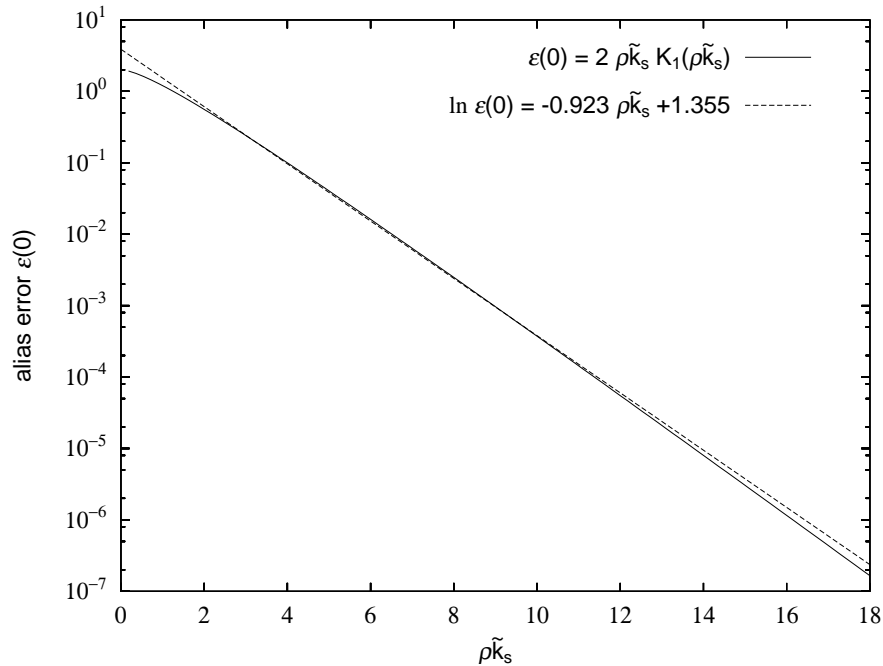


図 3.5: サンプル間隔と $\omega = 0$ でのエイリアス誤差の関係 ($\rho\tilde{k}_s = 2\pi\rho/v\gamma\Delta t$)

の後に離散時間系のデータ列を間引いてサンプル間隔の変換を行う。ここで用いられる低域通過フィルタには、遮断周波数以上では十分な減衰量を持ち、遮断周波数以下では挿入損失や位相歪みが数値解析の精度に影響しない程度に小さいことが要求される。

以下の節では、元となるアナログフィルタの伝達関数を求め、デジタルフィルタの伝達関数へ変換し、デジタルフィルタの構成と諸定数を決定する。さらに、設計したデジタルフィルタの周波数特性を導出し、要求される通過帯域での振幅誤差や位相歪みから必要なフィルタの次数や遮断周波数を求める。

3.6.2 デジタルフィルタの設計

基本低域通過フィルタの伝達関数

アナログフィルタには、ベッセルフィルタ、バターースフィルタ、チェビシェフフィルタなどいくつかの型があるが、ここでは通過帯域での振幅誤差や位相歪みが少なく、阻止帯域での減衰量も比較的大きいバターースフィルタを基本低域通過フィルタとして用いる。

遮断角周波数 ω_c が 1 である N 次のバターースフィルタは、その伝達関数を $G_N(s)$ で

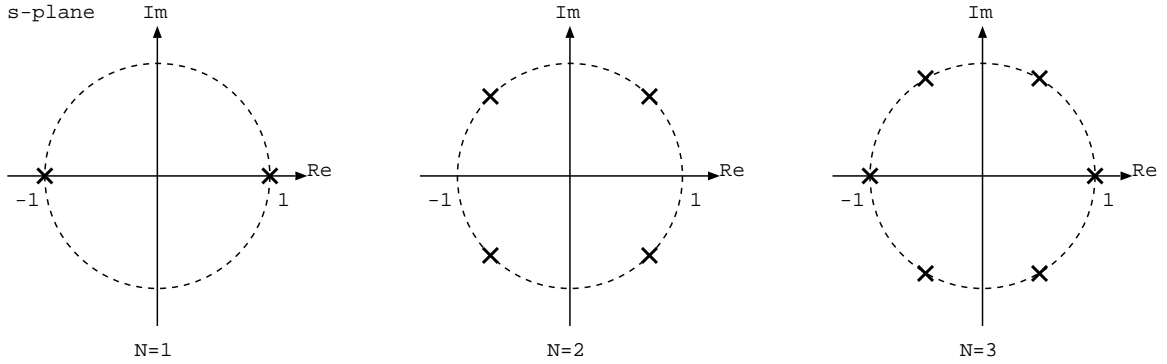


図 3.6: $G_N(s)G_N(-s)$ の極

表すと、周波数特性 $G_N(j\omega)$ の大きさの自乗が

$$|G_N(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2N}} \quad (3.76)$$

となる。 $|G_N(j\omega)|^2$ は周波数に対して単調に変化し、次数 N が大きくなると理想低域通過フィルタの特性に近づく。ここでは、この周波数特性を持つ伝達関数 $G_N(s)$ を求める。

周波数特性の $j\omega$ を s で置き換えると

$$\begin{aligned} |G_N(j\omega)|^2 &= G_N(j\omega) \overline{G_N(j\omega)} \\ &= G_N(j\omega) G_N(-j\omega) \\ &= G_N(s) G_N(-s) \\ G_N(s) G_N(-s) &= \frac{1}{1 + \omega^{2N}} \\ &= \frac{1}{1 + (-js)^{2N}} \\ &= \frac{1}{1 + (-1)^N s^{2N}} \end{aligned} \quad (3.77)$$

であるから、 $G_N(s)G_N(-s)$ の極の位置は N が奇数のときは $s^{2N} = 1$ 、偶数のときは $s^{2N} = -1$ の解となる。すなわち

$$N \text{ が奇数: } s_k = \exp\left(j \frac{k}{N} \pi\right) \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1 \quad (3.78)$$

$$N \text{ が偶数: } s_k = \exp\left(j \frac{2k + 1}{2N} \pi\right) \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1 \quad (3.79)$$

となって、図 3.6 に示すようにこれらの $2N$ 個の極は複素 s 平面上の単位円上に均等に配置される。また、 $G_N(s)$ と $G_N(-s)$ の積の極であるから、 $G_N(s)$ と $G_N(-s)$ の極が原点

に対して対称に位置している。また、虚数軸に対しても対称となることから、 $G_N(s)$ の極は、これらの内の左半面に位置するもののみで構成することができて、安定な伝達関数を得ることができる。したがって、バターワースフィルタの伝達関数は、

$$N = 1: \quad G_1(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (3.80)$$

$$N = 2: \quad G_2(s) = \frac{1}{s - e^{j\frac{3}{4}\pi}} \frac{1}{s - e^{j\frac{5}{4}\pi}} \quad (3.81)$$

$$N = 3: \quad G_3(s) = \frac{1}{s + 1} \frac{1}{s - e^{j\frac{2}{3}\pi}} \frac{1}{s - e^{j\frac{4}{3}\pi}} \quad (3.82)$$

⋮

となる。 N が 2 以上の場合は、複素共役となる極をまとめて以下のように表される。

$$\begin{aligned} N \text{ が偶数: } G_N(s) &= \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1}{s - (-e^{-j\frac{2k-1}{2N}\pi})} \frac{1}{s - (-e^{j\frac{2k-1}{2N}\pi})} \\ &= \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1}{s^2 + 2 \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) s + 1} \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} N \text{ が奇数: } G_N(s) &= \frac{1}{s + 1} \prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{s - (-e^{-j\frac{k}{N}\pi})} \frac{1}{s - (-e^{j\frac{k}{N}\pi})} \\ &= \frac{1}{s + 1} \prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{s^2 + 2 \cos\left(\frac{k}{N}\pi\right) s + 1} \end{aligned} \quad (3.84)$$

遮断周波数の変換

基本低域通過フィルタは遮断角周波数が 1 であったが、任意の遮断角周波数 ω_c のフィルタとするには、伝達関数の s を s/ω_c に置き換えればよい。これは、伝達関数がインパルス応答のラプラス変換であることを考えれば、時間軸の変換を行ったことになる。遮断周波数の変換により、(3.80)(3.83)(3.84) の各因数は次のように変換される。

$$\frac{1}{s + 1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(s/\omega_c) + 1} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad (3.85)$$

$$\frac{1}{s^2 + 2\alpha s + 1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(s/\omega_c)^2 + 2\alpha(s/\omega_c) + 1} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\alpha\omega_c s + \omega_c^2} \quad (3.86)$$

双一次変換法によるデジタル伝達関数への変換

ここでは、インパルス応答のラプラス変換であるアナログ伝達関数 $G(s)$ から離散インパルス応答の z 変換であるデジタル伝達関数 $H(z)$ への変換を行う。 $G(s)$ から $H(z)$ への変換にはいくつかの方法があるが、双一次変換法を用いることにする。

サンプリング周期が T_s の z 平面と s 平面は、 $z = e^{sT_s}$ で対応させることもできるが、 $s = j\omega$ とすると $\arg z = \omega T_s$ であるから、角周波数を $-\pi/T_s \leq \omega \leq \pi/T_s$ の範囲に限らなければ s と z が 1 対 1 の対応とならない。そこで、まず s 平面を

$$\frac{sT_s}{2} = \tanh \frac{s'T_s}{2} \quad (3.87)$$

の関係を用いて s' 平面に写像すると、 s' 平面では虚数軸方向、すなわち角周波数は $-j\pi/T_s$ から $j\pi/T_s$ の範囲に写像される。そして、 s' 平面を z 平面へ

$$z = e^{s'T_s} \quad (3.88)$$

で写像すると、 s 平面から z 平面へ 1 対 1 で写像される。(3.87) と (3.88) をまとめると、

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T_s} \tanh \frac{s'T_s}{2} \\ &= \frac{2}{T_s} \frac{e^{\frac{s'T_s}{2}} - e^{-\frac{s'T_s}{2}}}{e^{\frac{s'T_s}{2}} + e^{-\frac{s'T_s}{2}}} \\ &= \frac{2}{T_s} \frac{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \end{aligned} \quad (3.89)$$

となって s 平面と z 平面が双一次変換で結びつけられる。これを用いると、バターースフィルタのアナログ伝達関数 $G_N(s)$ の各因数 (3.85)(3.86) は次のようにデジタル伝達関数の因数に変換される。

$$\begin{aligned} \frac{\omega_c}{s + \omega_c} &\rightarrow \frac{\omega_c}{\frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + \omega_c} = \frac{\omega_c T_s (1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1}) + \omega_c T_s (1 + z^{-1})} \\ &= \frac{\omega_c T_s (1 + z^{-1})}{(2 + \omega_c T_s) + (-2 + \omega_c T_s) z^{-1}} \\ &= \frac{\omega_c T_s (1 + z^{-1})}{\omega_c T_s + 2} \\ &= \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{-2 + \omega_c T_s}{2 + \omega_c T_s} z^{-1}} \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\alpha\omega_c s + \omega_c^2} \rightarrow \frac{\omega_c^2}{\left(\frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^2 + 2\alpha\omega_c \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + \omega_c^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_c^2 \left(\frac{T_s}{2}(1+z^{-1})\right)^2}{(1-z^{-1})^2 + 2\alpha\omega_c \frac{T_s}{2}(1-z^{-1})(1+z^{-1}) + \omega_d^2 \left(\frac{T_s}{2}(1+z^{-1})\right)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 (1+2z^{-1}+z^{-2})}{1 + \alpha\omega_c T_s + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 + 2\left(\left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 - 1\right)z^{-1} + \left(1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 - \alpha\omega_c T_s\right)z^{-2}} \\
&= \frac{\frac{\left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 + \alpha\omega_c T_s} (1+2z^{-1}+z^{-2})}{1 + \frac{2\left(\left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 - 1\right)}{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 + \alpha\omega_c T_s} z^{-1} + \frac{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 - \alpha\omega_c T_s}{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 + \alpha\omega_c T_s} z^{-2}} \quad (3.91)
\end{aligned}$$

双一次変換法では、全周波数域にわたるアナログ伝達関数を制限された周波数域のデジタル伝達関数へと変換するため、変換の前後で周波数が一致しない。(3.87)に $s = j\omega$, $s' = j\omega'$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{sT_s}{2} &= \tanh \frac{s'T_s}{2} \\
\frac{j\omega T_s}{2} &= \tanh \frac{j\omega' T_s}{2} \\
&= j \tan \frac{\omega' T_s}{2} \\
\omega &= \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega' T_s}{2} \quad (3.92)
\end{aligned}$$

となって、 s 平面と s' 平面で周波数が非線形な関係になっている。 s' 平面から z 平面への変換 (3.88) では $z = e^{j\omega' T_s}$ であるから、周波数は変わらずに変換される。したがって、 s 平面での周波数と z 平面での周波数の間には (3.92) の関係がある。このため、デジタルフィルタの遮断周波数などを希望通りにするためには、原型となるアナログフィルタの遮断周波数を (3.92) で補正する、プリワーピングと呼ばれる操作を必要とする。

デジタルフィルタの構成

ここでは、伝達関数 $H(z)$ からデジタルフィルタの構成と定数を決定する。

伝達関数 $H(z)$ は入力 $x(nT_s)$ と出力 $y(nT_s)$ の比の z 変換がその定義である。状態変数 $v(nT_s)$ を導入して

$$\begin{aligned}
H(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{y(nT_s)/v(nT_s)}{x(nT_s)/v(nT_s)} \right] \\
&= \frac{Y(z)/V(z)}{X(z)/V(z)} \quad (3.93)
\end{aligned}$$

と表すことができる。ここで $X(z), Y(z), V(z)$ はそれぞれ $x(nT_s), y(nT_s), v(nT_s)$ の z 変換である。いま、 $H(z)$ が

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (3.94)$$

の形で表されているとすると、

$$X(z) = (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) V(z) \quad (3.95)$$

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) V(z) \quad (3.96)$$

となる。両辺を逆 z 変換すると、

$$x(nT_s) = v(nT_s) + b_1 v((n-1)T_s) + b_2 v((n-2)T_s) \quad (3.97)$$

$$y(nT_s) = a_0 v(nT_s) + a_1 v((n-1)T_s) + a_2 v((n-2)T_s) \quad (3.98)$$

となって離散時間における入力、出力、状態変数の関係を表す差分方程式を得る。ここで z 変換の性質

$$\mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}F(z)] = f((n-1)T_s) \quad (3.99)$$

を用いた。(3.97) は

$$v(nT_s) = x(nT_s) - b_1 v((n-1)T_s) - b_2 v((n-2)T_s) \quad (3.100)$$

と表せば、現在の状態変数を現在の入力と過去の状態変数から決定する式とみなすことができる。同様に、(3.98) は現在と過去の状態変数から現在の出力を決定する式である。図 3.7 はデジタルフィルタの構成要素である加算器、乗算器、遅延器を用いたブロック図で (3.94) の伝達関数を持つデジタルフィルタを表したものである。

双一次変換法で求めたバターースフィルタのデジタル伝達関数は、(3.94) の積の形で表される。したがって、伝達関数の因数毎に状態変数を用意し、各差分方程式の入力と出力を順次縦列に接続すれば、任意の次数のバターースフィルタの差分方程式を作ることができる。

これまでの結果をまとめると、遮断角周波数が ω'_c である N 次のバターース低域通過フィルタのデジタル伝達関数 $H_N(z)$ は次のようになる。

$$H_1(z) = \frac{a_{00} + a_{01} z^{-1}}{1 + b_{01} z^{-1}} \quad (3.101)$$

$$N \text{ が偶数: } H_N(z) = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{a_{k0} + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}}{1 + b_{k1} z^{-1} + b_{k2} z^{-2}} \quad (3.102)$$

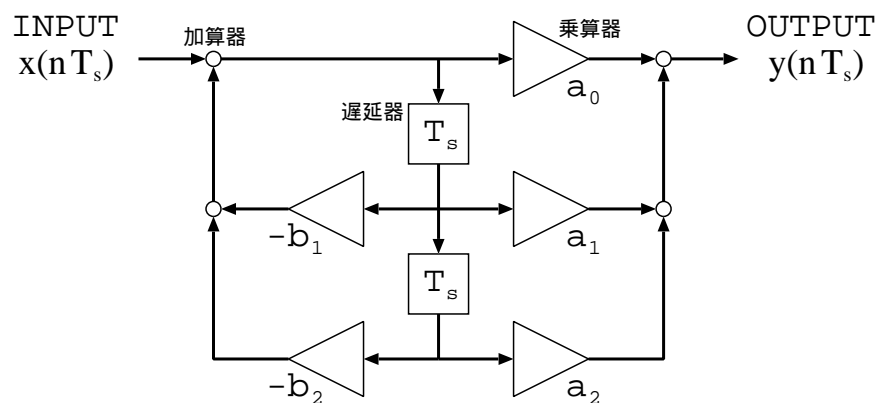


図 3.7: デジタルフィルタの構成

$$N \text{ が奇数: } H_N(z) = H_1(z) \prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{a_{k0} + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}}{1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}} \quad (3.103)$$

$$\omega_c = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega'_c T_s}{2}$$

$$a_{00} = a_{01} = \frac{\omega_c T_s}{\omega_c T_s + 2}$$

$$b_{01} = \frac{\omega_c T_s - 2}{\omega_c T_s + 2}$$

$$a_{k0} = a_{k2} = \frac{\left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 + \alpha_k \omega_c T_s}$$

$$a_{k1} = 2a_{k0}$$

$$b_{k1} = \frac{1 \left(\left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 - 1 \right)}{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 + \alpha_k \omega_c T_s}$$

$$b_{k2} = \frac{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 - \alpha_k \omega_c T_s}{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 + \alpha_k \omega_c T_s}$$

$$N \text{ が偶数: } \alpha_k = \cos \left(\frac{2k-1}{2N} \pi \right)$$

$$N \text{ が奇数: } \alpha_k = \cos \left(\frac{k}{N} \pi \right)$$

この伝達関数を用いて、 N が奇数のときの差分方程式は、

$$\left. \begin{aligned} v_0(nT_s) &= x(nT_s) - b_{01}v_0((n-1)T_s) \\ y_0(nT_s) &= a_{00}v_0(nT_s) + a_{01}v_0((n-1)T_s) \\ v_k(nT_s) &= y_{k-1}(nT_s) - b_{k1}v_k((n-1)T_s) - b_{k2}v_k((n-2)T_s) \\ y_k(nT_s) &= a_{k0}v_k(nT_s) + a_{k1}v_k((n-1)T_s) + a_{k2}v_k((n-2)T_s) \\ y(nT_s) &= y_{\frac{N-1}{2}}(nT_s) \end{aligned} \right\} \quad (3.104)$$

となり、 N が偶数のときは

$$\left. \begin{aligned} y_0(nT_s) &= x(nT_s) \\ v_k(nT_s) &= y_{k-1}(nT_s) - b_{k1}v_k((n-1)T_s) - b_{k2}v_k((n-2)T_s) \\ y_k(nT_s) &= a_{k0}v_k(nT_s) + a_{k1}v_k((n-1)T_s) + a_{k2}v_k((n-2)T_s) \\ y(nT_s) &= y_{\frac{N}{2}}(nT_s) \end{aligned} \right\} \quad (3.105)$$

となる。

3.6.3 デジタルフィルタによる振幅および位相への影響

デジタルフィルタの周波数特性

伝達関数が $H(z)$ であるデジタルフィルタの周波数特性は、伝達関数の z を $e^{j\omega T_s}$ で置き換えたシステム関数 $H(\omega)$ で求められる。

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_s}} \quad (3.106)$$

フィルタの振幅特性 $A(\omega)$ と位相特性 $\phi(\omega)$ は、

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |H(\omega)| \\ &= \sqrt{H(\omega)\overline{H(\omega)}} \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$= \sqrt{(\Re H(\omega))^2 + (\Im H(\omega))^2} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \arg H(\omega) \\ &= \tan^{-1} \frac{\Im H(\omega)}{\Re H(\omega)} \end{aligned} \quad (3.109)$$

で求められる。ここで上線は複素共役を表し、 \Re , \Im はそれぞれ実部と虚部を表す。また、信号がフィルタを通過するのに要する時間 τ と位相誤差 $\delta\phi$ を

$$\tau \equiv \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{\phi(\omega)}{\omega} \quad (3.110)$$

$$\delta\phi(\omega) \equiv \phi(\omega) + \omega\tau \quad (3.111)$$

と定義する。位相遅れは位相変化が負であることに注意が必要である。

バターース低域通過フィルタの周波数特性

1 次バターースフィルタ 双一次変換法で設計した 1 次のバターース低域通過フィルタの周波数特性は以下ようになる。

$$H_1(z) = \frac{a_{00}(1+z^{-1})}{1+b_{01}z^{-1}} \quad (3.112)$$

$$a_{00} = \frac{\omega_c T_s}{\omega_c T_s + 2}, \quad b_{01} = \frac{\omega_c T_s - 2}{\omega_c T_s + 2}$$

$$H_1(\omega) = H_1(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_s}}$$

$$= \frac{a_{00}(1 + \cos(\omega T_s) - j \sin(\omega T_s))}{1 + b_{01}(\cos(\omega T_s) - j \sin(\omega T_s))} \quad (3.113)$$

$$A_1(\omega) = |H_1(\omega)|$$

$$= \frac{a_{00} \sqrt{(1 + \cos(\omega T_s))^2 + (\sin(\omega T_s))^2}}{\sqrt{(1 + b_{01} \cos(\omega T_s))^2 + (b_{01} \sin(\omega T_s))^2}}$$

$$= \frac{a_{00} \sqrt{2 + 2 \cos(\omega T_s)}}{\sqrt{(1 + b_{01}^2 + 2b_{01} \cos(\omega T_s))}} \quad (3.114)$$

$$\phi_1(\omega) = \arg H_1(\omega)$$

$$= \tan^{-1} \frac{-\sin(\omega T_s)}{1 + \cos(\omega T_s)} - \tan^{-1} \frac{-b_{01} \sin(\omega T_s)}{1 + b_{01} \cos(\omega T_s)}$$

$$= -\frac{\omega T_s}{2} + \tan^{-1} \frac{b_{01} \sin(\omega T_s)}{1 + b_{01} \cos(\omega T_s)} \quad (3.115)$$

$$\tau_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{\phi(\omega)}{\omega}$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{1}{\omega} \left(\frac{-\omega T_s}{2} + \frac{b_{01} \omega T_s}{1 + b_{01}} \right)$$

$$= T_s \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{\omega_c T_s - 2}{\omega_c T_s + 2}}{1 + \frac{\omega_c T_s - 2}{\omega_c T_s + 2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\omega_c} \quad (3.116)$$

$$\delta\phi_1(\omega) = \phi_1(\omega) + \omega\tau_1$$

$$= -\frac{\omega T_s}{2} + \tan^{-1} \frac{b_{01} \sin(\omega T_s)}{1 + b_{01} \cos(\omega T_s)} + \frac{\omega}{\omega_c}$$

$$= \omega \left(\frac{1}{\omega_c} - \frac{T_s}{2} \right) + \tan^{-1} \frac{b_{01} \sin(\omega T_s)}{1 + b_{01} \cos(\omega T_s)} \quad (3.117)$$

特に $\omega_c T_s = 2$ の場合には $b_{01} = 0$ であるから

$$\delta\phi_1(\omega) = \omega \left(\frac{T_s}{2} - \frac{T_s}{2} \right) = 0 \quad (3.118)$$

となって位相歪みは生じない。 ω_c を (3.92) でプリワーピングを施す前の角周波数に戻すと、

$$\omega'_c = \frac{2}{T_s} \tan^{-1} \frac{\omega_c T_s}{2} = \frac{2\pi}{4T_s} \quad (3.119)$$

であり、カットオフ周波数がサンプリング周期の $1/4$ 、すなわちナイキスト周波数の $1/2$ とした場合には位相歪みを生じないことがわかる。

高次バターースフィルタ 2次以上のバターース低域通過フィルタの伝達関数は (3.102)(3.103) に示したように、(3.94) の積、あるいはそれと $H_1(z)$ との積の形で表されるので、因数毎の周波数特性を求め、振幅特性はそれらの積を、位相特性は和を求めればよい。

次数が偶数の場合の周波数特性は次のようになる。

$$H_N(z) = \prod_{k=1}^{N/2} H^k(z) \quad (3.120)$$

$$a_{k0} = \frac{\left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 + \alpha_k \omega_c T_s}, \quad \alpha_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$$

$$b_{k1} = \frac{1 \left(\left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 - 1\right)}{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 + \alpha_k \omega_c T_s}, \quad b_{k2} = \frac{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 - \alpha_k \omega_c T_s}{1 + \left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right)^2 + \alpha_k \omega_c T_s}$$

$$H^k(\omega) = H^k(z) \Big|_{e^{j\omega T_s}}$$

$$= \frac{a_{k0} (1 + 2 \cos(\omega T_s) + \cos(2\omega T_s) - 2j \sin(\omega T_s) - j \sin(2\omega T_s))}{1 + b_{k1} \cos(\omega T_s) + b_{k2} \cos(2\omega T_s) - j b_{k1} \sin(\omega T_s) - j b_{k2} \sin(2\omega T_s)} \quad (3.121)$$

$$H_N(\omega) = \prod_{k=1}^{N/2} H^k(\omega) \quad (3.122)$$

$$A^k(\omega) = |H^k(\omega)|$$

$$= \frac{a_{k0} \sqrt{(1 + 2 \cos(\omega T_s) + \cos(2\omega T_s))^2 + (2 \sin(\omega T_s) + \sin(2\omega T_s))^2}}{\sqrt{(1 + b_{k1} \cos(\omega T_s) + b_{k2} \cos(2\omega T_s))^2 + (b_{k1} \sin(\omega T_s) + b_{k2} \sin(2\omega T_s))^2}}$$

$$= \frac{4a_{k0} \cos^2(\omega T_s/2)}{\sqrt{(1 + b_{k1} \cos(\omega T_s) + b_{k2} \cos(2\omega T_s))^2 + (b_{k1} \sin(\omega T_s) + b_{k2} \sin(2\omega T_s))^2}} \quad (3.123)$$

$$A_N(\omega) = \prod_{k=1}^{N/2} A^k(\omega) \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned}
\phi^k(\omega) &= \arg H^k(\omega) \\
&= \tan^{-1} \frac{-2 \sin(\omega T_s) - \sin(2\omega T_s)}{1 + 2 \cos(\omega T_s) + \cos(2\omega T_s)} - \tan^{-1} \frac{-b_{k1} \sin(\omega T_s) - b_{k2} \sin(2\omega T_s)}{1 + b_{k1} \cos(\omega T_s) + b_{k2} \cos(2\omega T_s)} \\
&= -\omega T_s + \tan^{-1} \frac{b_{k1} \sin(\omega T_s) + b_{k2} \sin(2\omega T_s)}{1 + b_{k1} \cos(\omega T_s) + b_{k2} \cos(2\omega T_s)}
\end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\phi_N(\omega) = \sum_{k=1}^{N/2} \phi^k(\omega) \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned}
\tau^k &= \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{\phi^k(\omega)}{\omega} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{1}{\omega} \left(-\omega T_s + \frac{b_{k1} \omega T_s + b_{k2} 2\omega T_s}{1 + b_{k1} + b_{k2}} \right) \\
&= T_s \left(1 - \frac{b_{k1} + 2b_{k2}}{1 + b_{k1} + b_{k2}} \right) \\
&= T_s \frac{2\alpha_k}{\omega_c T_s} = \frac{2\alpha_k}{\omega_c}
\end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\tau_N(\omega) = \sum_{k=1}^{N/2} \tau^k(\omega) = \frac{2}{\omega_c} \sum_{k=1}^{N/2} \alpha_k \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned}
\delta\phi^k(\omega) &= \phi^k(\omega) + \omega\tau^k \\
&= -\omega T_s + \tan^{-1} \frac{b_{k1} \sin(\omega T_s) + b_{k2} \sin(2\omega T_s)}{1 + b_{k1} \cos(\omega T_s) + b_{k2} \cos(2\omega T_s)} + \omega \frac{2\alpha_k}{\omega_c} \\
&= \omega \left(\frac{2\alpha_k}{\omega_c} - T_s \right) + \tan^{-1} \frac{b_{k1} \sin(\omega T_s) + b_{k2} \sin(2\omega T_s)}{1 + b_{k1} \cos(\omega T_s) + b_{k2} \cos(2\omega T_s)}
\end{aligned} \tag{3.129}$$

$$\delta\phi_N(\omega) = \sum_{k=1}^{N/2} \delta\phi^k(\omega) \tag{3.130}$$

次数が奇数のときは、偶数の場合と異なる部分のみを書き出すと、

$$H_N(z) = H_1(z) \prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} H^k(z) \tag{3.131}$$

$$\alpha_k = \cos \left(\frac{k}{N} \pi \right)$$

$$H_N(\omega) = H_1(\omega) \prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} H^k(\omega) \tag{3.132}$$

$$A_N(\omega) = A_1(\omega) \prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A^k(\omega) \tag{3.133}$$

$$\phi_N(\omega) = \phi_1(\omega) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \phi^k(\omega) \quad (3.134)$$

$$\tau_N(\omega) = \tau_1(\omega) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \tau^k(\omega) = \frac{1}{\omega_c} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \alpha_k \right) \quad (3.135)$$

$$\delta\phi_N(\omega) = \delta\phi_1(\omega) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \delta\phi^k(\omega) \quad (3.136)$$

となる。

バターースフィルタ通過における振幅および位相の変化

遮断周波数 f_c が $1/10T_s$ の場合の振幅特性 $A(f)$ 、挿入損失 $\sqrt{1 - A(f)^2}$ 、位相誤差 $\delta\phi(f)$ を図 3.8, 3.9, 3.10 に示す。横軸は遮断周波数を基準とした周波数である。

アナログのバターースフィルタの周波数特性は $f \gg f_c$ ではほぼ $(f/f_c)^{-N}$ となるが、図 3.8 ではプリワーピング (3.92) によって周波数が高い方へ変換されているため、ナイキスト周波数 $1/2T_s = 5f_c$ に近付くとアナログフィルタよりも急激に振幅が減少する。これは、低域通過フィルタとしてはむしろ望ましい現象である。

図 3.9 に示した挿入損失は、 $f \ll f_c$ ではプリワーピングの影響は小さいため、アナログフィルタの場合とほぼ同じ $(f/f_c)^N$ となっている。

図 3.10 の位相誤差では、次数が大きくなると位相誤差がやや増加すること、遮断周波数以下ではおよそ周波数の 3 乗で誤差が増加することがわかる。位相誤差が 0.01 rad となるのは、遮断周波数の約 $1/4$ の周波数である。

表 3.1 には、(3.116)(3.128)(3.135) で求められるフィルタの通過時間 τ を $1/\omega_c$ を単位に近似値で示した。この ω_c はプリワーピングを施した後の値である。次数が増加すると通過時間ほぼ 0.62 ずつ増加している。

3.6.4 入射界のダウンサンプリングに用いるフィルタの設計

ここでは、サンプリング間隔 T_s でサンプリングした入射界を FD-TD 法のタイムステップ Δt にダウンサンプリングする場合に必要な低域通過フィルタの次数 N と遮断周波数 f_c を求める。パラメータは誤差の許容値 ϵ である。

FD-TD 法の単位セルが立方体セルで、一辺の長さ Δx を最大周波数 f_m の波長の $1/10$

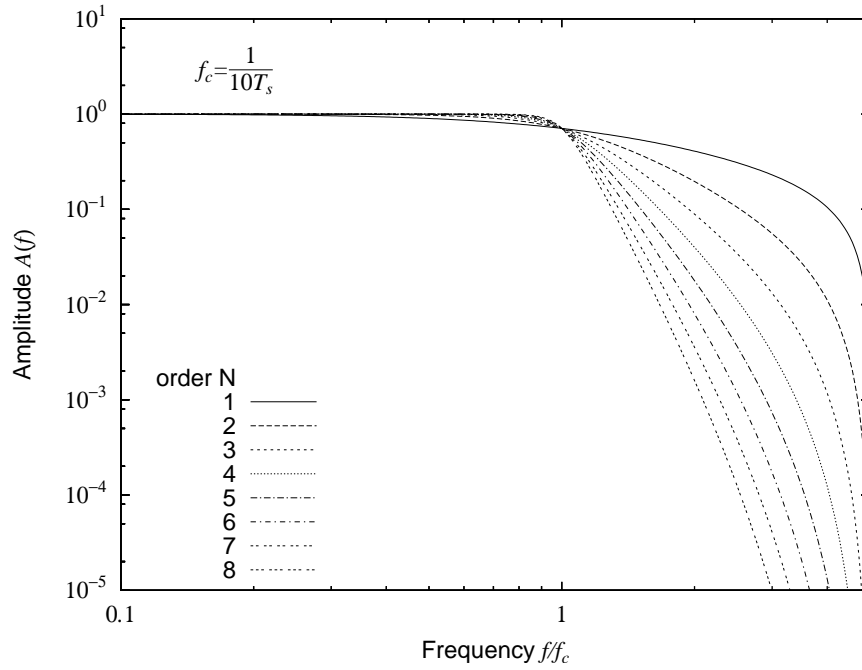


図 3.8: 双一次変換法によるバターースフィルタの振幅特性

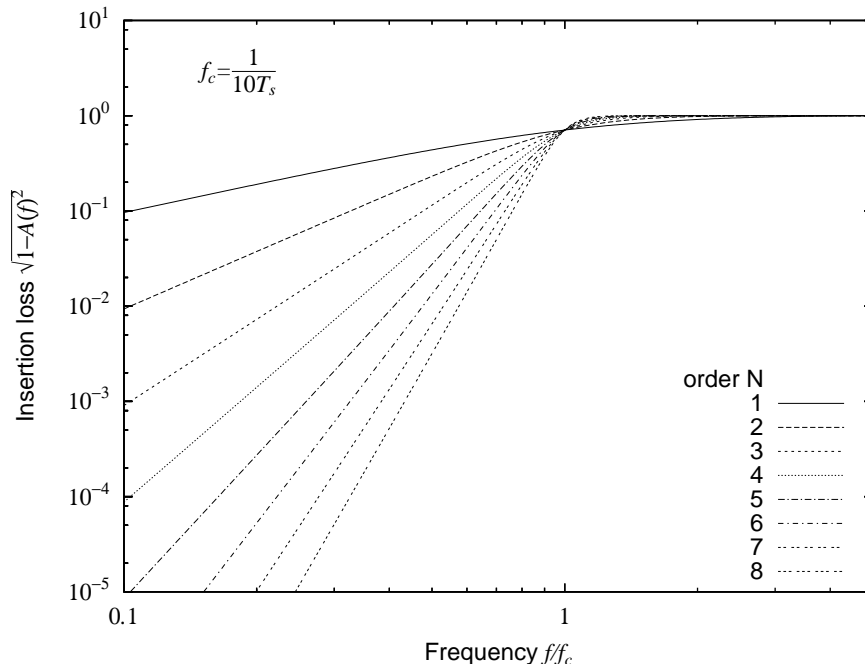


図 3.9: 双一次変換法によるバターースフィルタの挿入損失

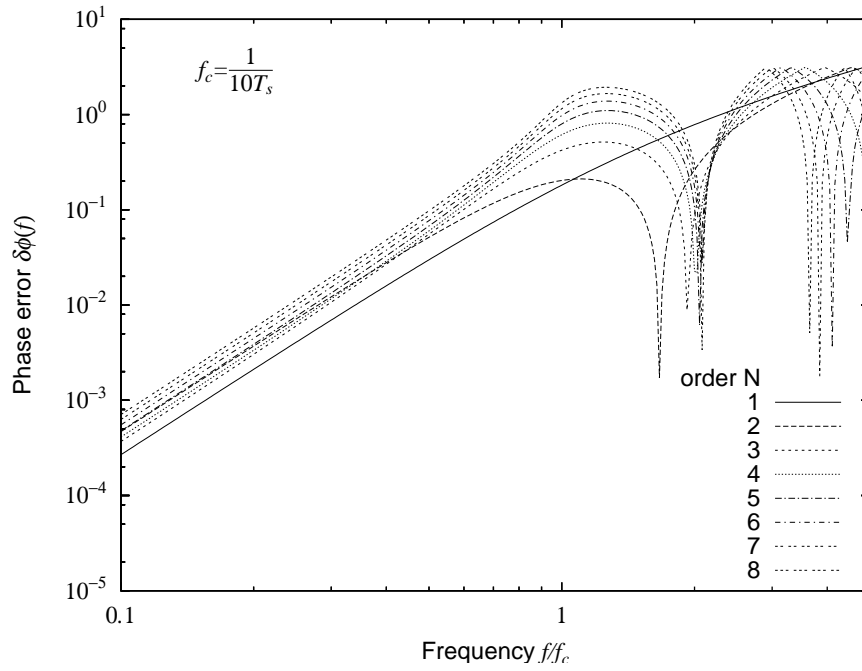


図 3.10: 双一次変換法によるバターースフィルタの位相誤差

表 3.1: 双一次変換法によるバターースフィルタの通過時間

次数 N	通過時間 τ_N
1	$1.000/\omega_c$
2	$1.414/\omega_c$
3	$2.000/\omega_c$
4	$2.613/\omega_c$
5	$3.236/\omega_c$
6	$3.864/\omega_c$
7	$4.494/\omega_c$
8	$5.126/\omega_c$

とすると、

$$\frac{1}{\Delta t} \leq \frac{v\sqrt{3}}{\Delta x} = \frac{v\sqrt{3}}{v/10f_m} = 10\sqrt{3}f_m \quad (3.137)$$

となる。 $1/\Delta t = 17f_m$ とすると、グリッド分散による位相速度の相対誤差は、周波数が f_m のときにおよそ 0.011 となる。 Δx を最小波長の $1/30$ にすれば位相速度の相対誤差は 1.2×10^{-3} であり、そのときは $1/\Delta t = 52f_m$ である。

フィルタの通過損失を $(f/f_c)^N$ として、周波数が f_m のときに通過損失が ϵ を越えない条件から

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_m}{f_c}\right)^N &\leq \epsilon \\ f_c &\geq f_m \epsilon^{-1/N} \end{aligned} \quad (3.138)$$

となる。一方、ダウンサンプリング後のエイリアス誤差が $f = 0$ において ϵ を越えない条件からは

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1/\Delta t}{f_c}\right)^{-N} &\leq \epsilon \\ f_c &\leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{1/N} \frac{1}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.139)$$

となる。これらを同時に満足する N は

$$\begin{aligned} f_m \epsilon^{-1/N} &\leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{1/N} \frac{1}{\Delta t} \\ f_m \Delta t &\leq \left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)^{1/N} \\ \log(f_m \Delta t) &\leq \frac{1}{N} \log \frac{\epsilon^2}{2} \\ N &\geq \frac{\log \frac{\epsilon^2}{2}}{\log(f_m \Delta t)} \quad (f_m \Delta t < 1) \end{aligned} \quad (3.140)$$

であり、これをもとに N を決定すれば、(3.139) と (3.138) で遮断周波数 f_c の上限と下限が決められる。図 3.11 と 図 3.12 にセルサイズが $1/10$ 波長の場合と $1/30$ 波長の場合における誤差の許容値 ϵ とフィルタの次数 N 、遮断周波数 f_c の上限と下限を示す。例えば、セルサイズが $1/10$ 波長で誤差の許容値を 0.01 とすると、4 次のフィルタを用いて遮断周波数を $0.18/\Delta t$ から $0.25/\Delta t$ とすればよいことが図 3.11 から読み取れる。

遮断周波数を決めれば、最大周波数 f_m におけるフィルタによる位相誤差を計算することができる。遮断周波数が高い方が位相誤差は小さいので、必要ならばフィルタの次数や遮断周波数を上げて位相誤差を減少させる。

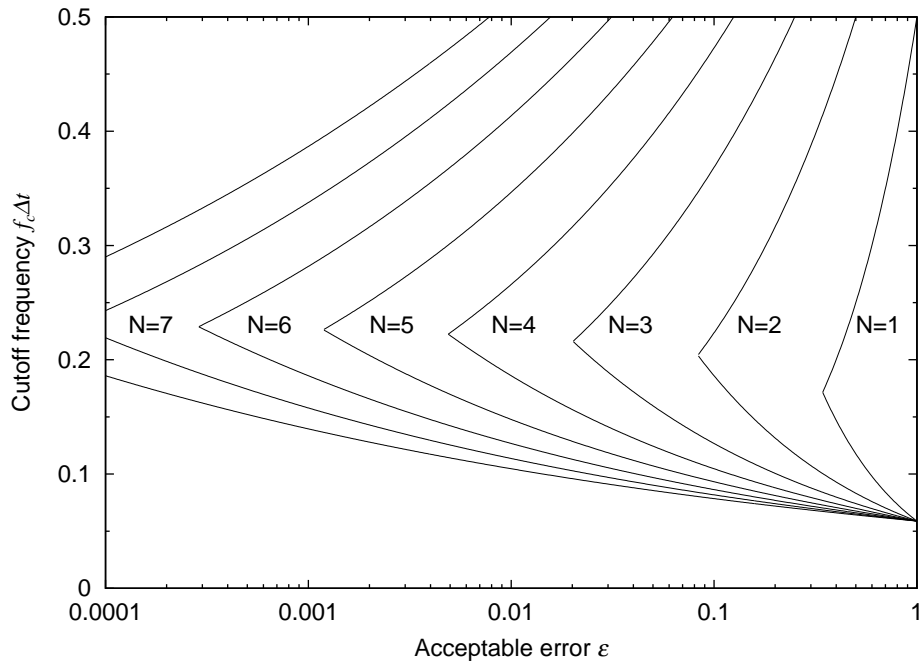


図 3.11: 誤差の許容値とフィルタの次数、遮断周波数の関係 (セルサイズが 1/10 波長)

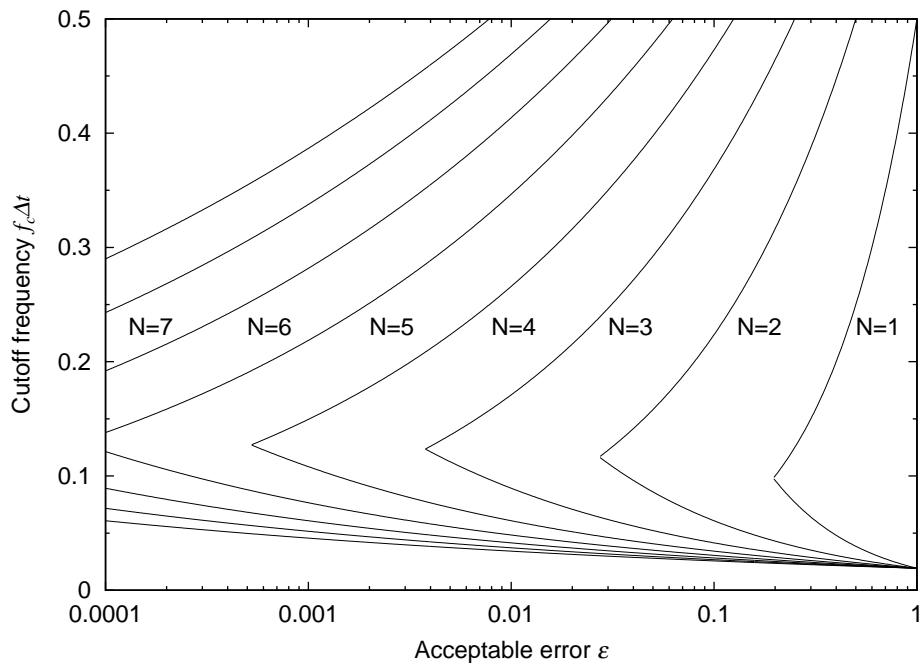


図 3.12: 誤差の許容値とフィルタの次数、遮断周波数の関係 (セルサイズが 1/30 波長)

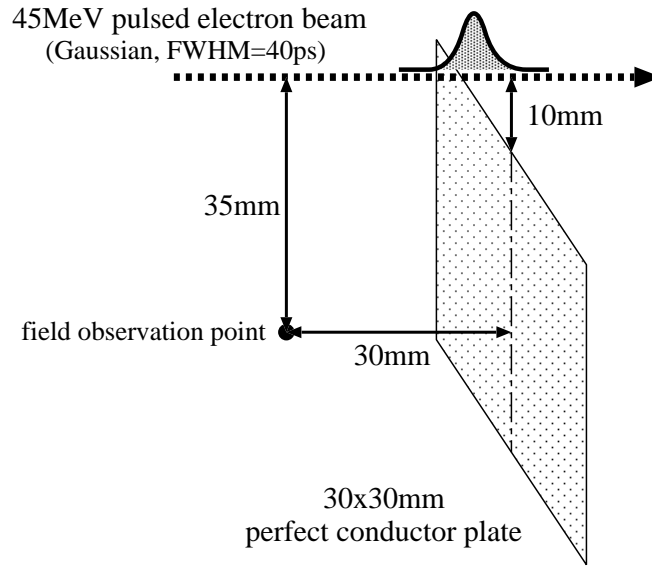


図 3.13: 解析モデル

3.7 解析例

この節では、本論文で提案した手法を用いて行った数値解析の結果を示す。

3.7.1 解析モデル

解析モデルを図 3.13 に示す。解析空間内に $30 \times 30\text{mm}$ の完全導体の反射板があり、その一辺の縁の中央から 10mm 離れて、反射板に対して垂直に、エネルギー 45MeV ($\gamma = 88$) のパルス状電子ビームが通過する。パルスの波形は、半値幅 (FWHM) が 40ps のガウス波形であり、ビームの太さは 0 の線状ビームとした。この電子ビームからの直接の電磁界と反射板からの散乱電磁界を、反射板から 30mm 、電子ビームの軌道から 35mm 離れた観測点で観察した。

3.7.2 数値解析に用いたパラメータ

ビームパルス波形の半値幅が 40ps ならば、標準偏差 σ_t は

$$\sigma_t = \frac{\text{FWHM}}{\sqrt{2 \ln 2}} = \frac{40\text{ps}}{2.355} = 17\text{ps} \quad (3.141)$$

であり、そのスペクトルの標準偏差 σ_f は

$$\sigma_f = \frac{1}{2\pi\sigma_t} = 9.4\text{GHz} \quad (3.142)$$

となる。ガウス波形のスペクトルは、 $3\sigma_f$ でスペクトル強度がおおよそ 10^{-2} となるので、解析に必要な最高周波数 f_m を 30GHz とし、FD-TD 法の単位セルの大きさは一辺が 30GHz の $1/10$ 波長 である 1mm の立方体とした。

解析空間は、外側に 8 層は PML 吸収境界条件を用いて開放領域を模擬し、それを含めて $50 \times 50 \times 50$ 個の単位セルからなる。30 × 30mm の反射板は、解析領域の中央から 15mm ビームの下流側に、厚みのない完全導体として置いた。

空間の単位セルの大きさを $1 \times 1 \times 1\text{mm}$ としたので、安定条件は、

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_0 \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} = 1.9258\text{ps} \quad (3.143)$$

となる。タイムステップは大きい方が計算時間やグリッド分散誤差の点で有利なので、 $\Delta t = 1.9\text{ps}$ とした。この場合のグリッド分散による位相速度の相対誤差は、 f_m ($\lambda = 10\text{mm}$, $\alpha = \lambda/\Delta x = 0.1$) において (2.155) を用いて、

$$\frac{|v_p - c_0|}{c_0} = 1 - \frac{\alpha\pi}{\sin^{-1}\left(\frac{\alpha\lambda}{c_0\Delta t} \sin \frac{\pi c_0\Delta t}{\Delta t}\right)} = 1.1 \times 10^{-2} \quad (3.144)$$

である。他のパラメータもこの誤差を目安に決定する。

入射界のサンプリングにおけるエイリアス誤差 ϵ を 1×10^{-2} 以下とするためには、サンプリング間隔 T_s は、ビームの軌道と反射板の距離が $\rho = 10\text{mm}$ なので (3.75) を用いて、

$$T_s \leq \frac{\rho[\text{mm}]}{\gamma} \frac{19.3}{1.355 - \ln \epsilon} = 0.368\text{ps} \quad (3.145)$$

としなければならない。FD-TD 法のタイムステップ Δt を 1.9ps としたので、1 タイムステップにつき 6 回以上入射界のサンプリングを行えば $T_s \leq 1.9\text{ps}/6 = 0.317\text{ps}$ となり、サンプリングによるエイリアス誤差は 10^{-2} 以下にできる。この節で示す解析では $T_s = 1.9\text{ps}/8 = 0.2375\text{ps}$ とした。この場合のエイリアス誤差は 3.7×10^{-4} となる。

ダウンサンプリングに用いる低域通過フィルタは、図 3.11 を参照すると、フィルタの挿入損失やダウンサンプリングの際のエイリアス誤差を 10^{-2} とするには、4 次以上のパワースフィルタで遮断周波数 f_c を $1/4\Delta t \sim 1/5\Delta t$ とすればよいことがわかる。ここでは 6 次のフィルタを用いて、遮断周波数をやや高めの $1/4\Delta t = 131.6\text{GHz}$ とした。ダウンサンプリングに伴う振幅の誤差は 5×10^{-4} 程度となる。また、 f_m/f_c は 0.228 であり、 f_m におけるフィルタの位相誤差は 5×10^{-3} 程度である。

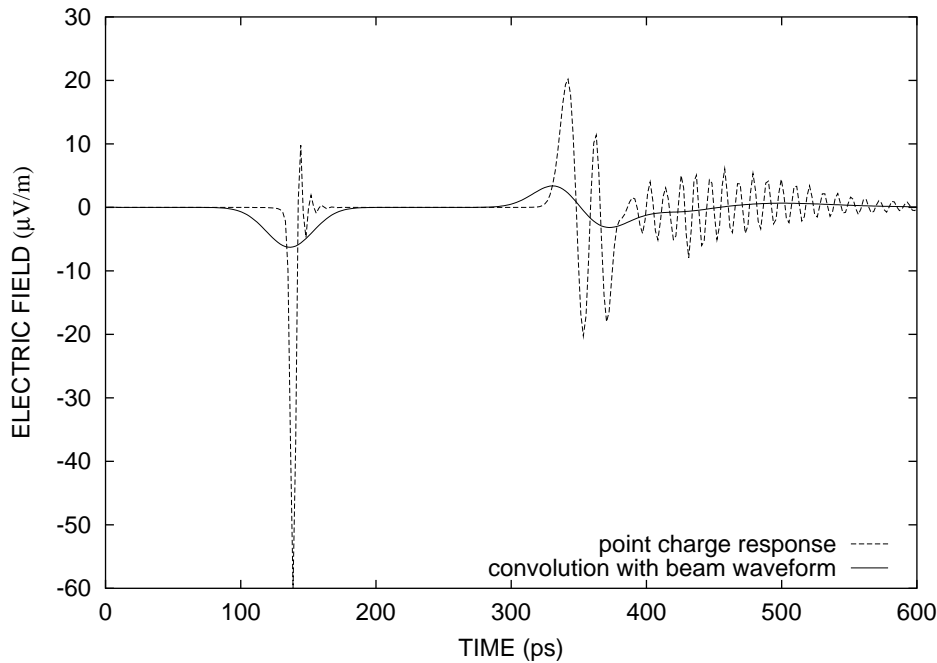


図 3.14: ビームパルスの波形と畳み込みを行う前後の電界の波形の比較

3.7.3 解析結果と考察

図 3.14 は、点電荷の入射界を用いて反射板からの散乱界を求め、入射界と合わせて全電磁界とした波形である。図 3.13 に示した観測点における、電界のビームの軌道へ向いた方向の成分を表示した。

破線はビームパルスの波形と畳み込み積分を行う前の波形で、時刻が 140ps にある負のピークがビームパルスの代わりに用いた点電荷からの直接の入射電界であり、300ps 以降に続く振動が反射板からの散乱電界である。点電荷からの入射電界にもパルスの後方に振動が見られるが、これはダウンサンプリングに用いたフィルタによるものである。また、反射板からの散乱電界の振動成分は、グリッド分散による 1 次元方向へのカットオフ周波数 $\omega_{c1} = 101.53\text{GHz}$ 付近のスペクトルである。いずれもビームパルスの波形である半値幅 40ps のガウス波形のスペクトルにはほとんど含まれない周波数なので、実線で示したパルス波形との畳み込み積分を行った後の波形では振動成分は除去されている。

図 3.15 は、本論文で提案した方法、すなわち、点電荷の入射界を用いて畳み込み積分でビームパルスの波形を反映させた電界の波形と、入射界をビームパルスの電流密度分布が

ら数値積分で求めた場合の電界の波形を比較したものである。数値積分は、ビームパルスのガウス波形を $\pm 6\sigma$ にわたって、幅 1σ ごとに収束判定が 10^{-6} のロンバーグ積分を用いて行った。両者は非常によく一致しており、本論文で提案した点電荷を用いる方法とそれに伴う入射界のサンプリング間隔やデジタルフィルタの諸定数の決定は妥当であるといえる。

解析モデルに太さがない線状ビームを用いたため、数値積分はビーム軌道上の 1 次元の積分で済むが、収束判定を厳しくしているため、1 点の入射界を求めるために多いときで 2000 回程度の繰り返し計算を要した。そのため、計算時間のほとんどは入射界の計算に占められた。収束判定を 10^{-3} 程度としても数百回の繰り返し計算が必要であった。それに対し、点電荷の入射界を用いる場合では、サンプリングに必要な回数 (この解析では 8 回) の繰り返しで済むため、入射界の計算は FD-TD 法本体の計算よりもはるかに少ない計算時間しか要しない。

図 3.15 で両者の点の時刻が一致していないのは、ダウンサンプリングに用いたフィルタの通過時間を畳み込み積分の後で補正したためである。この場合は双一次変換法で定数を決定した 6 次バターワースフィルタを用いているので、双一次変換法によるプリワーピングも考慮して、

$$\begin{aligned}\omega'_c &= 131.6\text{GHz} \\ T_s &= 0.2375\text{ps} \\ \omega_c &= \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega'_c T_s}{2} \\ \tau &= \frac{3.864}{\omega_c} = 4.658\text{ps}\end{aligned}\tag{3.146}$$

の通過時間を考慮してある。

図 3.16 は、点電荷の入射界のサンプリングを FD-TD 法のタイムステップと同じ 1.9ps でサンプリングした場合と、タイムステップを 0.2ps にしてサンプリングも 0.2ps とした場合を示した。基準として、ビーム波形から数値積分で入射界を求めた場合の波形も示してある。

入射界を 1.9ps でサンプリングした波形は、エイリアス誤差のため、数値積分で入射界を求めた場合と比較して散乱界の部分で誤差が大きくなっている。時刻が 140ps にあるビームパルスからの入射界によるピークはほぼ一致しているが、これは観測点がビームの軌道から 35mm 離れており、反射板の縁よりも距離が離れているので、エイリアス誤差が反射板で生じる散乱界よりも小さいためである。

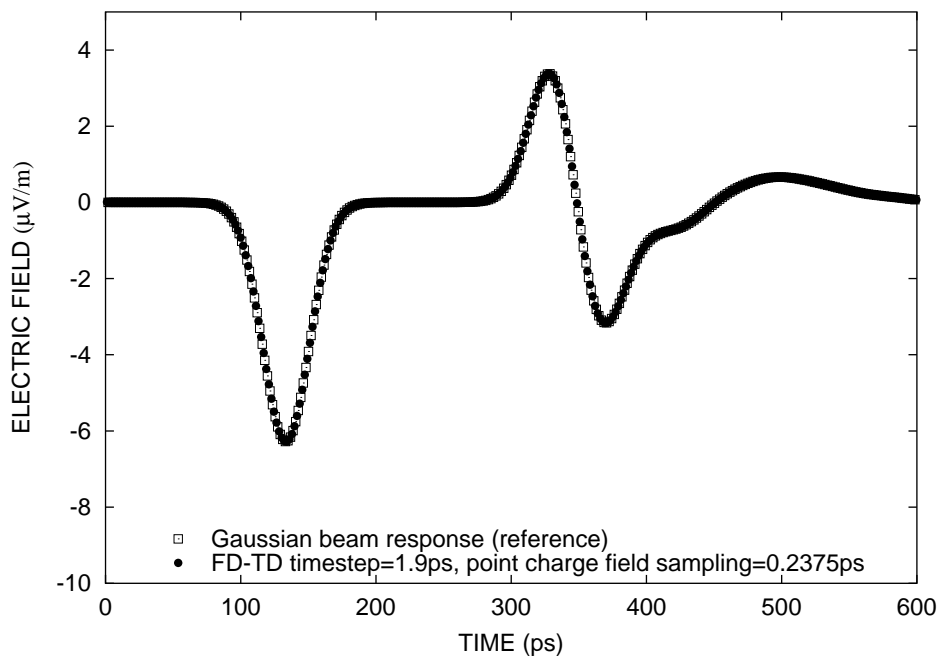


図 3.15: ビーム波形から数値積分で求めた入射界を用いた場合と点電荷の入射界を用いた場合の電界の波形

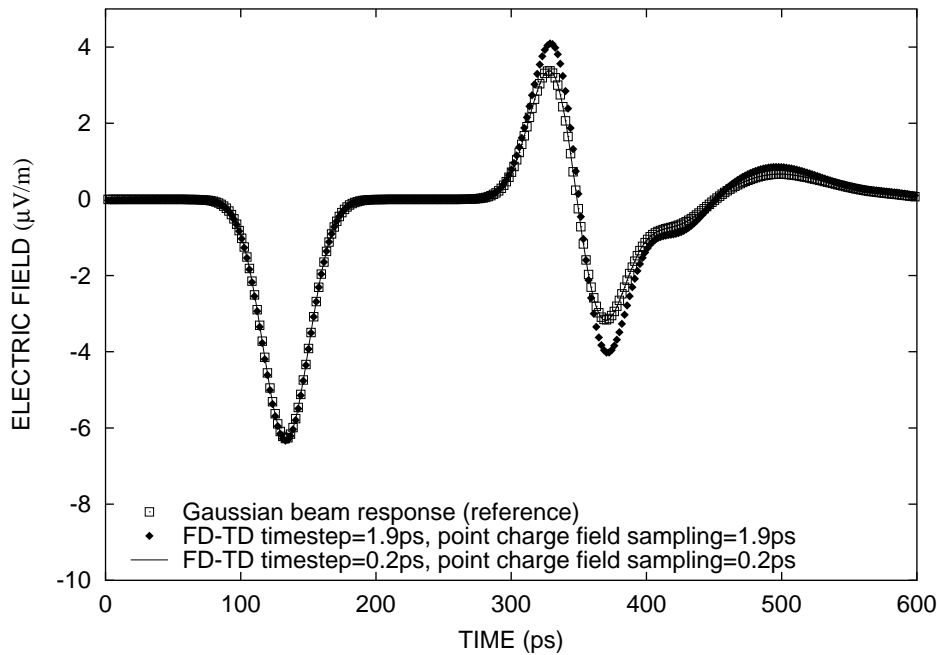


図 3.16: 点電荷の入射界のサンプリング間隔が粗い場合と FD-TD 法のタイムステップもサンプリング間隔と共に小さくした場合の電界の波形

図 3.16 に実線で示した、タイムステップを 0.2ps とした場合の電界の波形は、入射界を数値積分で求めた場合の波形とよく一致している。しかし、タイムステップを小さくしたために、計算時間は $1.9/0.2 = 9.5$ 倍必要である。

3.7.4 ビームの軌道が空間差分の格子に沿わない場合

本論文で提案した方法では、荷電粒子ビームの軌道を空間差分の格子にかかわらずに自由に決めることができる。そうした解析の例として、図 3.17 に示す解析体系で、ビームの軌道を反射板に対し垂直な場合と、斜めにした場合の電界の様子を示す。空間の単位セルは、その 3 辺が x, y, z 軸と並行になっており、 $x-y$ 平面に平行な反射板に対して斜めになったビームの軌道は、単位セルの各辺とは一致しない。先に挙げた解析例と比較して、解析空間が $200 \times 200 \times 200\text{mm}$ 、反射板が $180 \times 180\text{mm}$ と大きくなっている他は、解析に用いたパラメータなどは同様である。図 3.18~図 3.23 に示す電界の様子は、ビーム軌道を含む解析空間中央の $z-x$ 平面内での電界ベクトルを 95ps ごとに示したものである。図中、上方にある太矢印がビームの軌道であり、 $z = 180\text{mm}$ にある太い縦線が反射板の断面であ

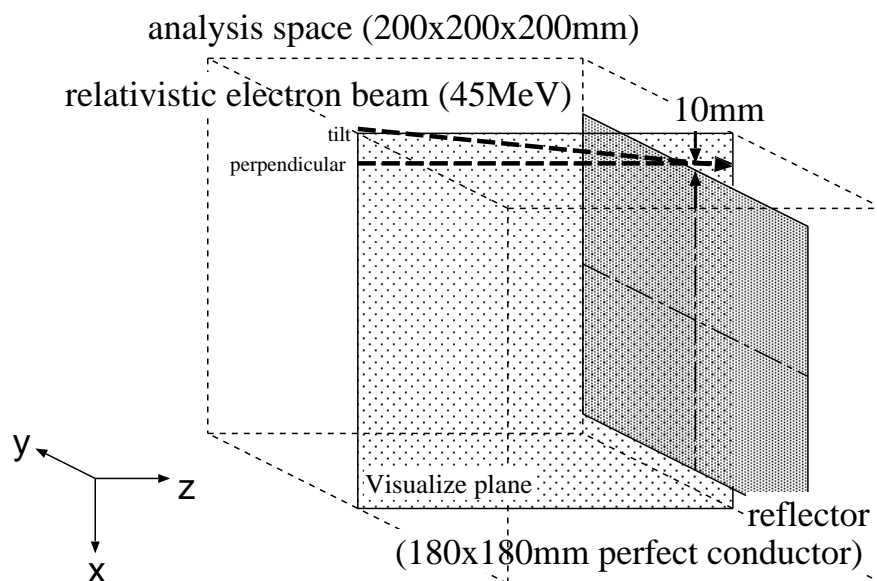
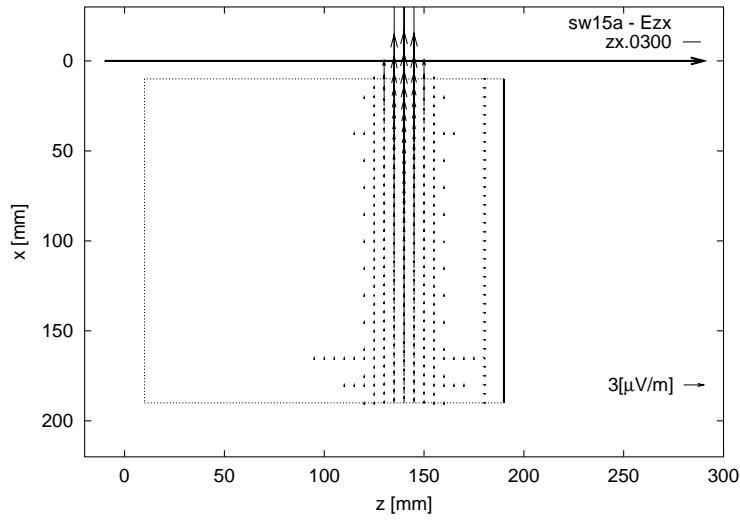


図 3.17: 解析モデル (2)

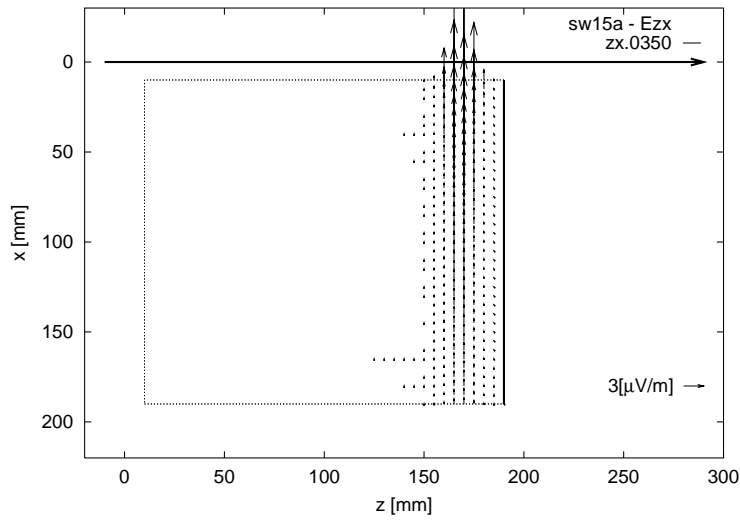
る。反射板のビームに対し上流側の点線で囲まれた範囲の z 方向、 x 方向の電界を 5mm 毎にベクトルで示している。

図 3.18~図 3.20 はビームの軌道が反射板に対し垂直な場合の電界の様子である。ビームに伴う電界が反射板に対しほぼ垂直に入射し、反射されると共に、反射板のビーム軌道に近い端に集中的に誘起された電荷が拡散するのに伴って円弧状に電界が広がっているのが観察される。

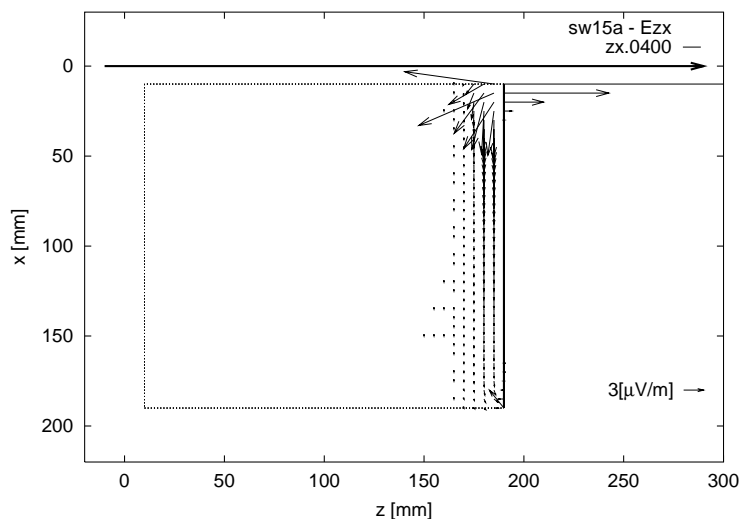
図 3.21~図 3.23 はビームの軌道が反射板に対し $z-x$ 平面内で 0.1 rad 傾いている場合の電界の様子である。ビームに伴う入射界も反射板に対して斜めに入射し、図では左上から入射して左下へ入射角と同じ反射角で反射されている様子がわかる。また、誘起された電荷による電界が円弧状に広がるのは、ビームの軌道が反射板に対し垂直な場合と同じである。これらは物理的に予測される妥当な振る舞いであり、空間差分の格子とビームの軌道が一致しない場合でも FD-TD 法により時間領域での電磁界を求めることができた。



$t = 570\text{ps}$



$t = 665\text{ps}$



$t = 760\text{ps}$

図 3.18: $z-x$ 平面における電界ベクトル (ビーム軌道が垂直: No.1)

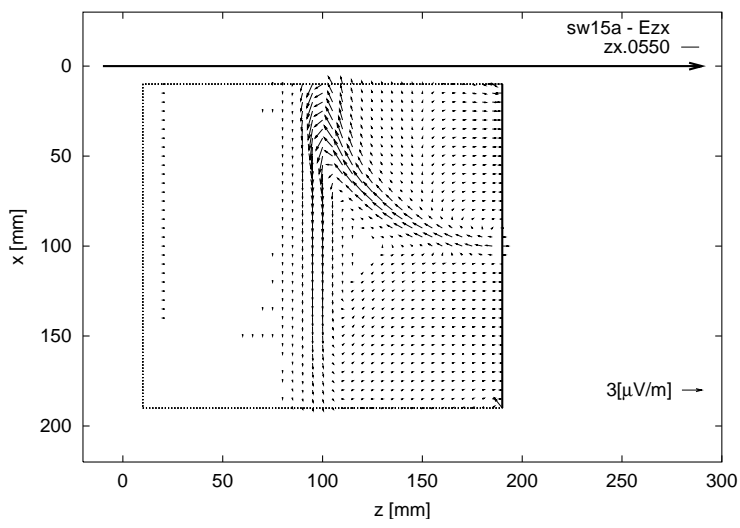
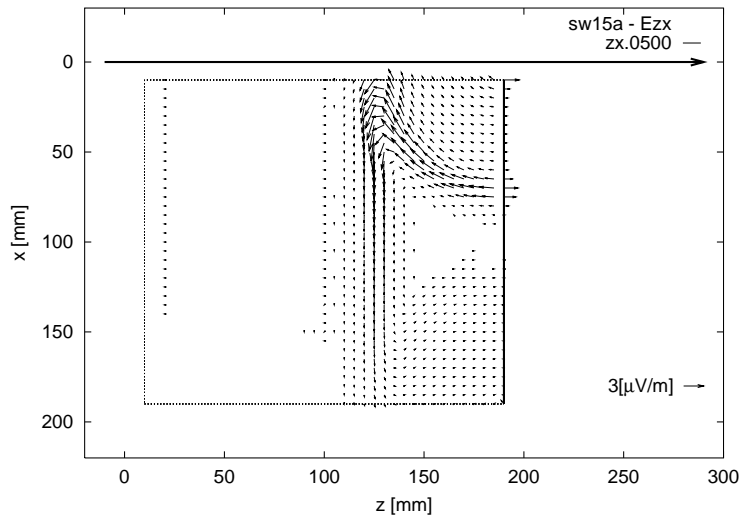
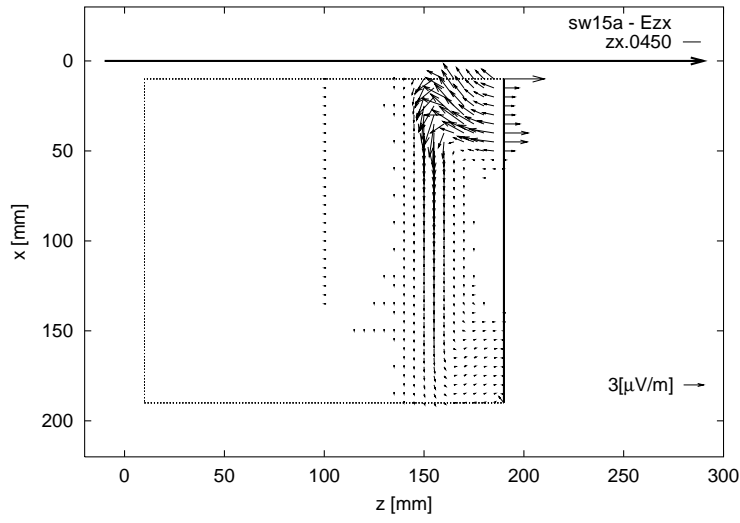
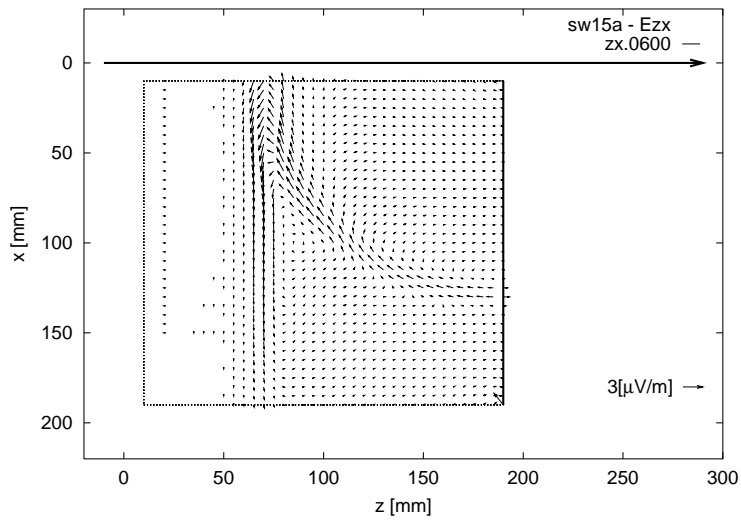
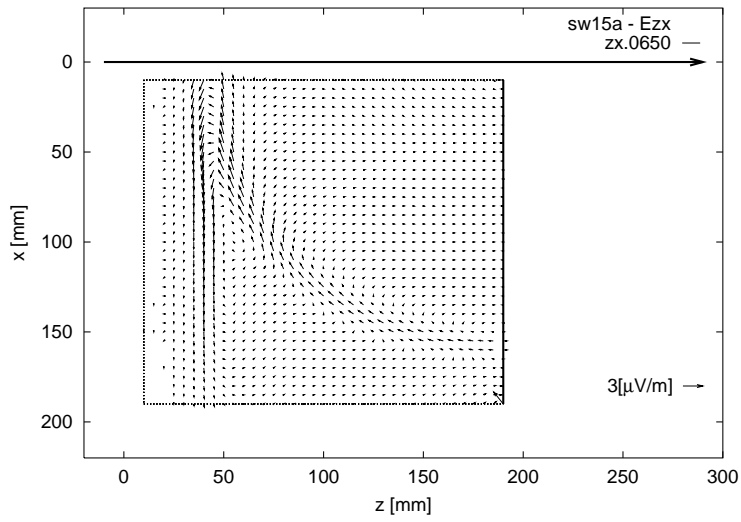


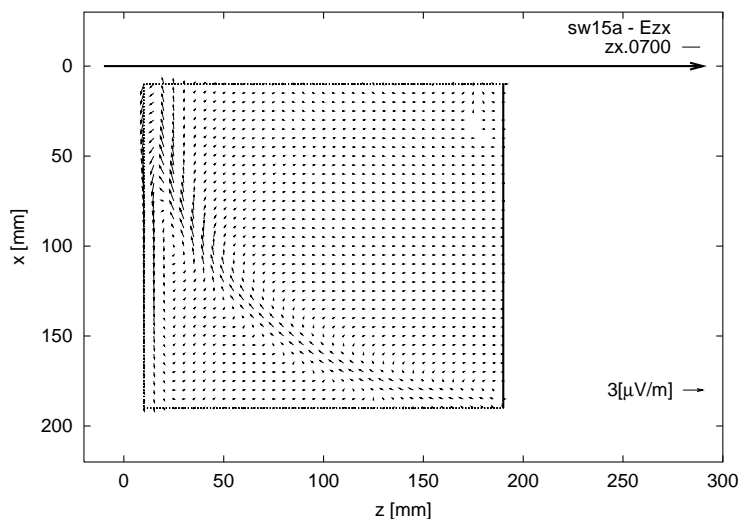
図 3.19: $z-x$ 平面における電界ベクトル (ビーム軌道が垂直: No.2)



$t = 1140\text{ps}$

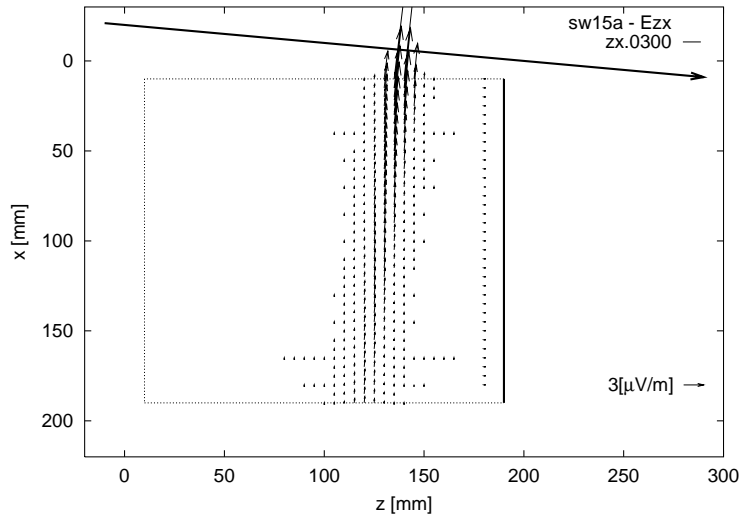


$t = 1235\text{ps}$

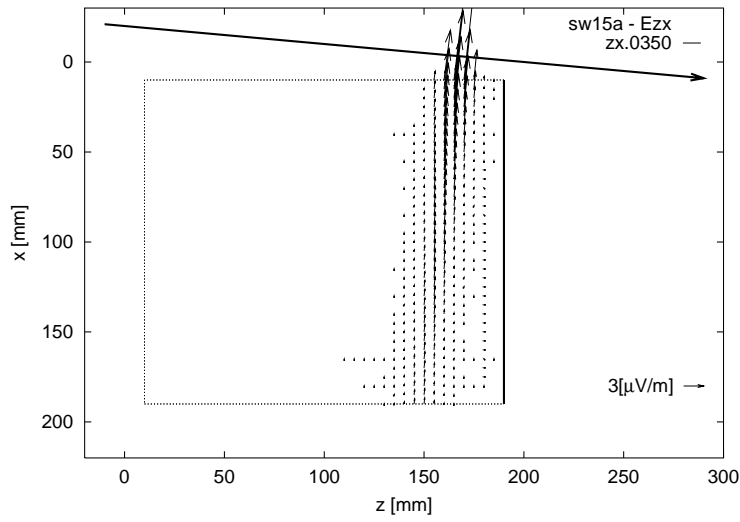


$t = 1330\text{ps}$

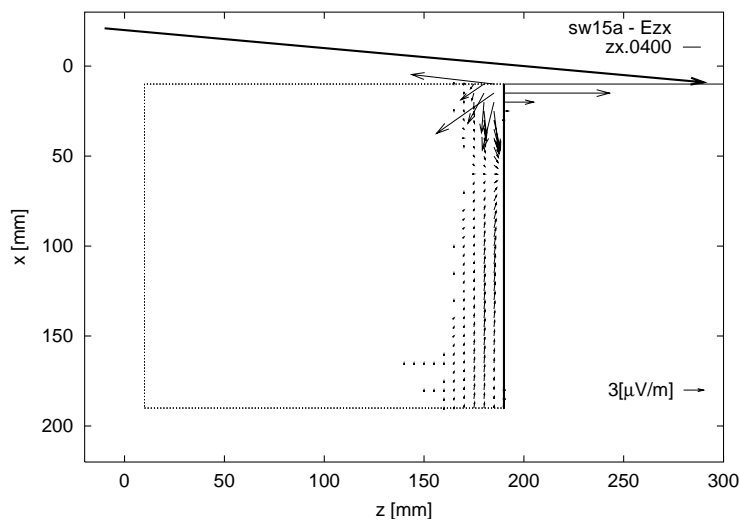
図 3.20: $z-x$ 平面における電界ベクトル (ビーム軌道が垂直: No.3)



$t = 570\text{ps}$

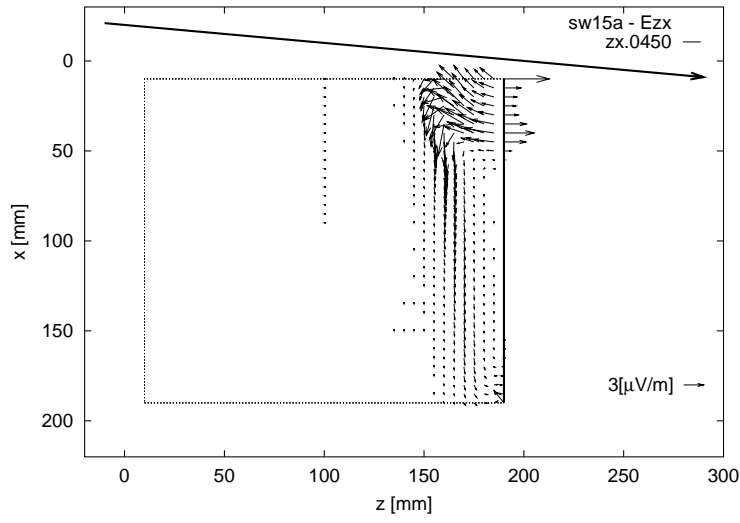


$t = 665\text{ps}$

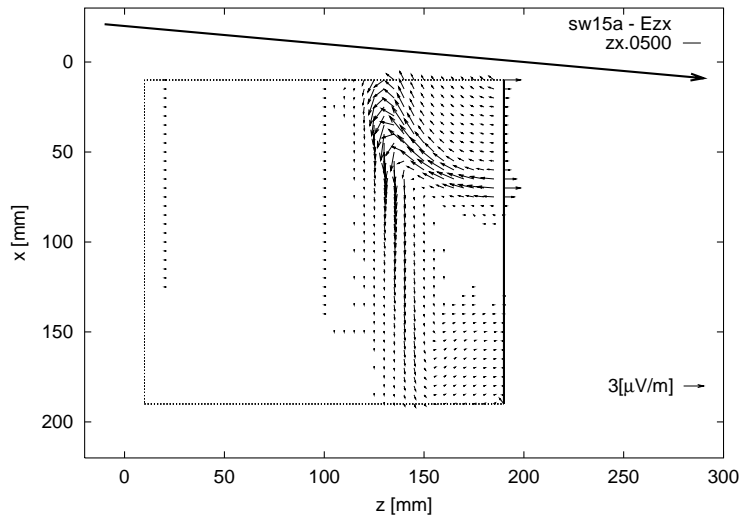


$t = 760\text{ps}$

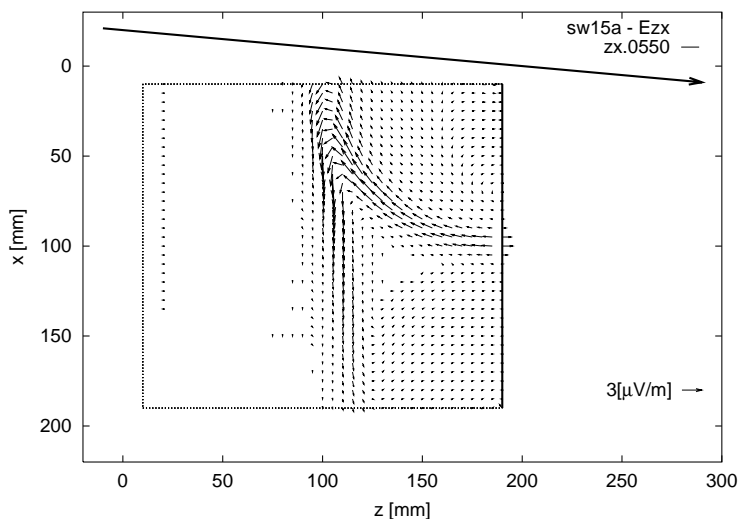
図 3.21: $z-x$ 平面における電界ベクトル (ビーム軌道が斜め: No.1)



$t = 855\text{ps}$

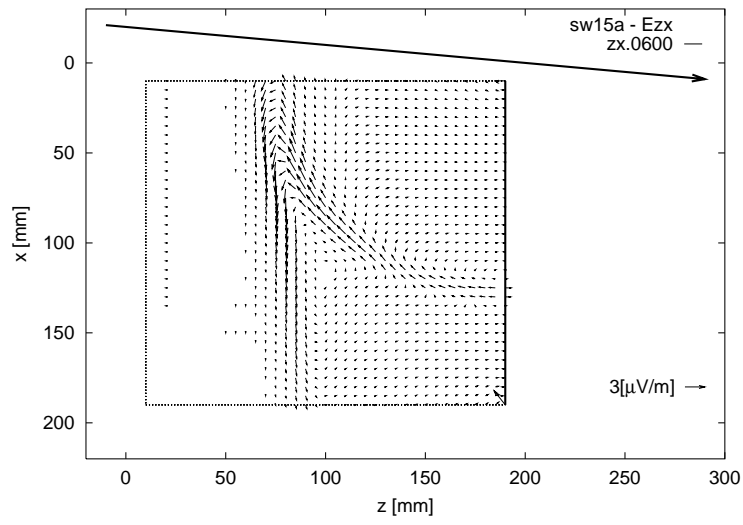


$t = 950\text{ps}$

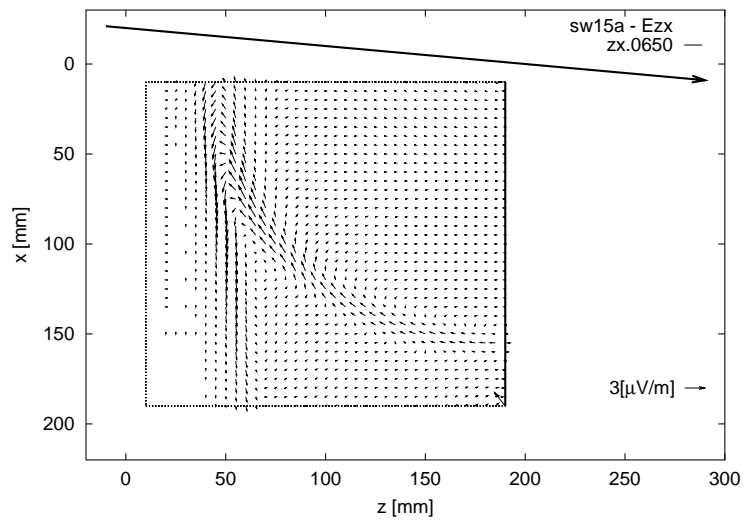


$t = 1045\text{ps}$

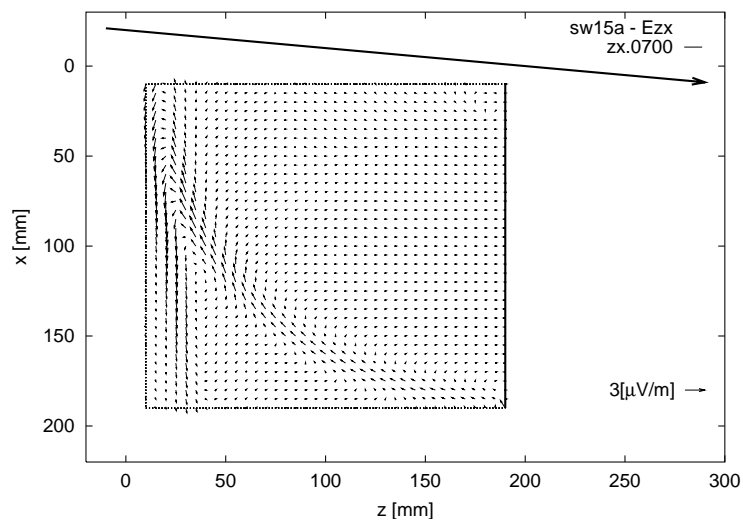
図 3.22: $z-x$ 平面における電界ベクトル (ビーム軌道が斜め: No.2)



$t = 1140\text{ps}$



$t = 1235\text{ps}$



$t = 1330\text{ps}$

図 3.23: $z-x$ 平面における電界ベクトル (ビーム軌道が斜め: No.3)

第 4 章

応用：定在波測定による電子線形加速器の 微細構造パルス幅推定法の解析

4.1 定在波測定による微細構造パルス幅推定法の概要と輻射 波の影響

伊藤らによって開発された新しいマイクロパルス幅の計測法 [20][21] は、図 4.1 に示すような体系で、電子ビームの通過と同時に到来する電磁波（入射波）と反射板で反射された反射波により形成される定在波のビーム軌道に沿った空間分布をプローブアンテナとクリスタル検波器で測定する。この方法では、プローブアンテナとクリスタル検波器に広帯域性を必要とするが、ピコ秒オーダーの時間分解能を持つ装置は必要としない。図 4.1 ではプローブアンテナを動かす代わりに反射板がビーム軌道に沿って移動する。

電子ビームが十分に長い一様なマイクロパルス列から出来ているとすると、反射板からマイクロパルスの間隔の半整数倍の距離となる位置では、入射波と反射波が同時に到達して打ち消し合い、定在波は検出されない。しかし、そこから少し離れた位置では、入射波と反射波の到達に時間差が生じるため、打ち消し合いが不完全となり、定在波として検出される。その強度は、入射波と反射波の時間差、すなわち定在波がゼロとなる位置からの変位とマイクロパルスの波形により決まる。また、入射波と反射波の時間差がパルス幅よりも十分に大きい位置では、検波器の出力は単に入射波のパワーと反射波のパワーの和となる。したがって、定在波の空間分布は、理想的には図 4.2 のように、一定レベルの出力に一定間隔でマイクロパルス波形に応じた dip ができた分布となる。マイクロパルスの波

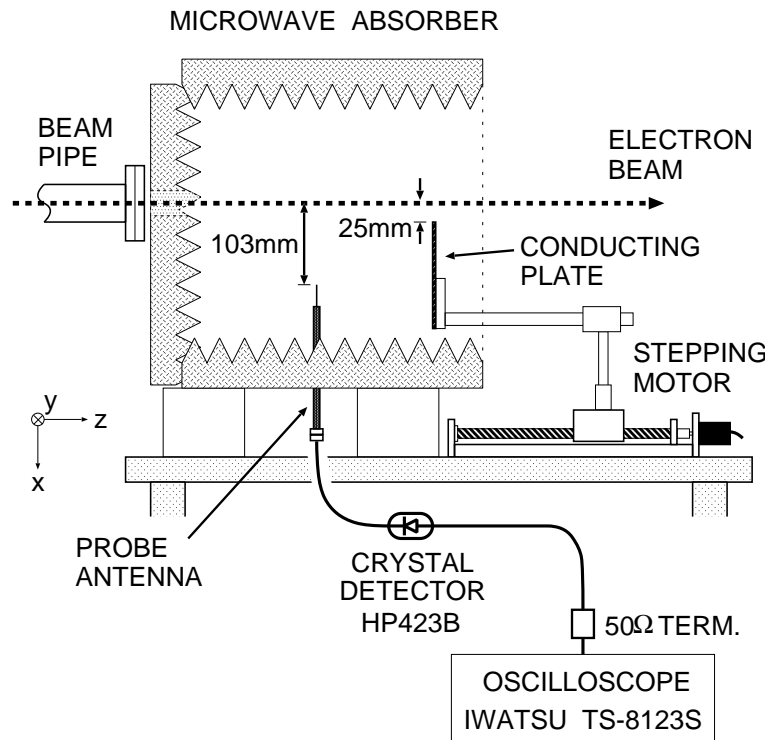


図 4.1: 実験体系図

形がガウス波形ならば、平坦部の 55.88% で定義した dip 幅がマイクロパルスの標準偏差の 1.809 倍と一致する。

しかしながら、実際に測定される定在波の空間分布は 図 4.3 のようになる。理想的な場合と異なり、定在波が最小の位置でもゼロとはならないうえ、dip の間でも定在波の強度が一定ではないため、dip の幅を一意に決定することができない。[20][21] では、dip の底でも定在波の強度が 0 とならないのは電子ビームのマクロパルスを構成する各マイクロパルスの強度が一定ではないためであり、また、定在波分布にピークを生じるのは、反射板のビーム軌道に近い端に誘起された正電荷と電子ビームによるダイポール放射による輻射波が反射波よりも遅れて到達し、輻射波の横方向成分が入射波と同相で重なり合うためとしている。そのため、dip 位置よりも反射板から遠い位置では輻射波の影響は小さいとして dip 毎に最大値と最小値を定め、マクロパルスの波形も考慮して dip の幅を決定しマイクロパルスのパルス幅を推定している。

以下の節では、数値シミュレーションを用いて入射波・反射波・輻射波の関係を考慮し、

上記のパルス幅推定法の妥当性を検討する。

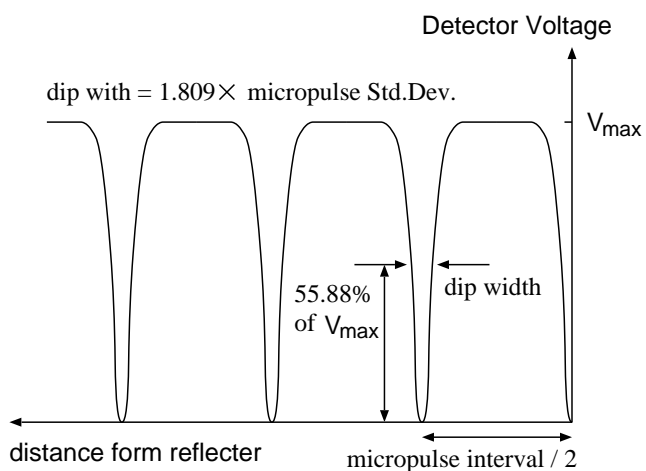


図 4.2: 理想的な定在波の空間分布

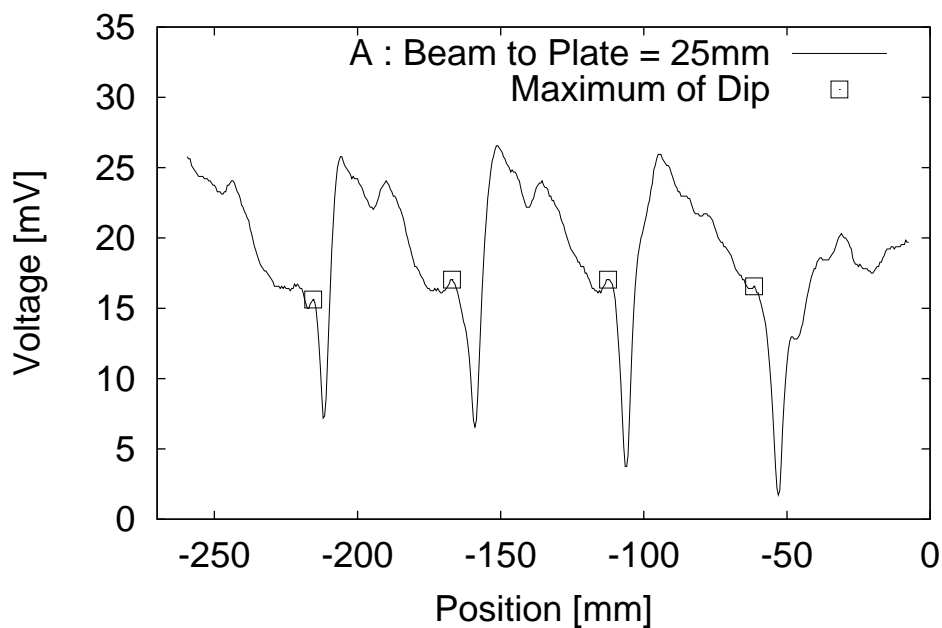


図 4.3: 実験により得られた定在波の空間分布 (縦軸は検波器の出力電圧)

4.2 数値解析による輻射波の影響の見積り

4.2.1 解析体系

解析体系を図 4.4 に示す。解析空間は 1mm 立方の単位セルが $200 \times 200 \times 200$ 個からなり、各面の外側 8 層は PML 吸収境界条件で、自由空間を模擬している。反射板は $180 \times 180\text{mm}$ で、縁から 10mm 上方を $+z$ 方向に 45MeV ($\gamma = 88$) の電子ビームが通過するモデルである。マイクロパルスは FWHM が 40ps のガウス波形で、パルスの間隔は 353.7ps (106.1mm) である。

解析に用いた FD-TD 法のタイムステップ Δt は 1.9ps であり、安定条件

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_0 \sqrt{3}} = 1.9258\text{ps} \quad (4.1)$$

の上限に近い値とした。単位セルのサイズが $1/10$ 波長となる 30 GHz において、グリッド分散による位相速度の異方性は約 0.01 である。入射界のサンプリング間隔は $\Delta t/8 = 0.2375\text{ps}$ であり、サンプリングによるエイリアス誤差は 3.73×10^{-4} となる。ダウンサンプリングに用いる低域通過フィルタは 6 次バターワースフィルタで、カットオフ周波数は $1/4\Delta t$ とした。フィルタによる位相誤差は 5×10^{-3} 以下である。

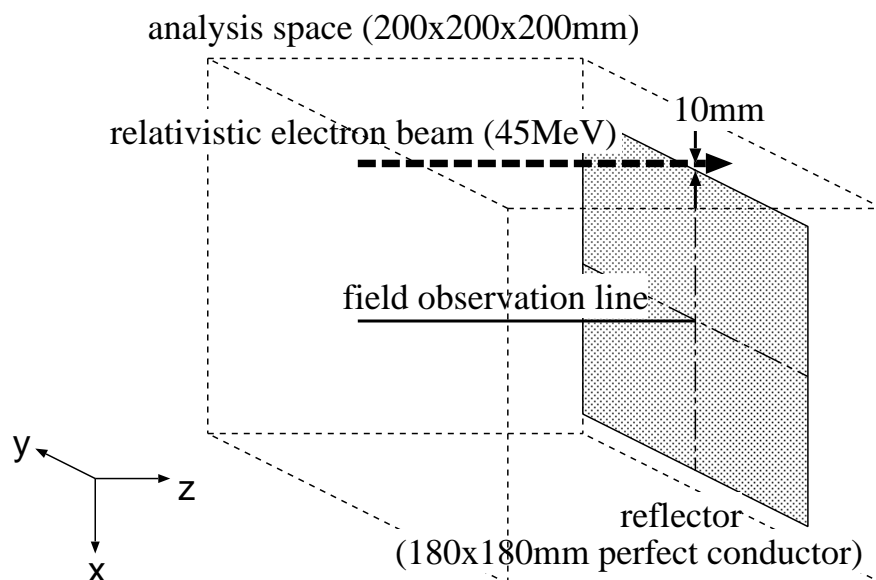


図 4.4: 解析体系図

4.2.2 反射波・輻射波の発生の様子

まず、単一のマイクロパルスが通過する際に反射板上に誘起される電荷密度、電流密度と反射板の上流側の電界の様子を時間を追って示す。

図 4.5～図 4.14 は、それぞれの時刻における反射板のビーム上流側表面における誘起された電流密度、電荷密度と、反射板に対し垂直でビームの軌道を含む平面 ($z-x$ 平面) における電界ベクトルの様子である。上段は、反射板表面に平行な磁界から求めた表面電流密度のベクトル図であり、一点鎖線で囲まれた範囲が反射板である。ビームは反射板の 10mm 上方、 $x = 0\text{mm}$, $y = 100\text{mm}$ の位置を $x-y$ 平面に垂直に、図の紙面手前から奥へ通過する。電流密度の大きさは、図の右下にベクトルの縮尺を示してある。ただし、マイクロパルス全体の電荷量を素電荷 ($1.6 \times 10^{-19}\text{C}$) としてあるので、実際の電流密度はマイクロパルスに含まれる電子数を掛けた値、北大 45MeV LINAC ではおよそ 10^9 倍になる。中段は、反射板表面に垂直な電界から求めた表面電荷密度であり、等密度線図である他は上段と同様である。等密度線は、 $1\mu\text{C}/\text{m}^2$ 毎に太線、 $0.2\mu\text{C}/\text{m}^2$ 毎に細線で、0 以上は実線、負の値は点線となっている。下段は、反射板に対し垂直でビームの軌道を含む平面 ($y=100\text{mm}$ の $z-x$ 平面) におけるその平面内の電界ベクトルで、図の上方にある太矢印がビームの軌道であり、 $z = 180\text{mm}$ にある太い縦線が反射板の断面である。反射板の左側にある点線で囲まれた範囲の z 方向、 x 方向の電界を 5mm 毎にベクトルで示している。電界強度の大きさは、図の右下にベクトルの縮尺を示してある。

図 4.5 ($t=570\text{ps}$) では、FWHM が 40ps、すなわち空間における FWHM で 12mm、標準偏差で 5.1mm のガウス波形のマイクロパルスの中心が反射板の手前およそ 50mm の位置にある。ほぼ光速で運動する電荷の電界は運動方向に対し垂直な方向へ集中するため、反射板上には電流や電荷はまだほとんど誘起されていない。ビームの移動と共にビームに付随する電界 (入射界) も移動し、図 4.7 ($t=741\text{ps}$) ではビームパルスの中心が反射板のほぼ真上に達している。このとき、反射板の表面上では入射界によって表面電流が誘導され、ビーム軌道に最も近い点へ向かって表面電流が流れる。この表面電流が反射波を作り、反射板上で表面に平行な電界を打ち消す。また、入射電界の強さはビームからの距離の自乗に反比例するので、反射板上のビーム軌道に近い位置ほど表面電流密度が大きくなる。その結果ビーム軌道に最も近い位置に正電荷が集中し、対となる負電荷が反射板のビーム軌道から離れた三辺に分散して現れている。

ビームパルスが通過した後の図 4.9 ($t=855\text{ps}$) では、ビームの方向へ集中する表面電流は無くなり、反射板の一点に集中していた正電荷が反射板上を半円形に拡散し、それに対

応する電流密度分布が現れている。また、反射板で反射された反射波が $-z$ 方向へ平面波状のまま伝播しているのに加え、反射板上を $+x$ 方向へ拡散している正電荷に伴う輻射波が $z-x$ 平面で円弧状に広がっている。この輻射波は、入射波や反射波と同程度の電界強度となっている。

図 4.11 ($t=1045\text{ps}$) 以降では、ビーム軌道に近い位置では、反射波と輻射波が一部重なっているのがわかる。輻射波は、 x 方向には入射波と同じ向きの電界となるため、輻射波と反射波は x 方向の電界が打ち消し合う。反射板から平面波状に伝播する反射波と、反射板のエッジから球面波状に伝播する輻射波とは時間差が生じるが、ビーム軌道に近く反射板から遠い位置では時間差が小さく、反射波が輻射波と打ち消し合うために定在波分布に輻射波の影響が強く現れると思われる。逆に、ビーム軌道から遠く反射板に近い位置では、反射波と輻射波の時間差が大きいうえ、輻射波の電界の方向が $-z$ 方向を向くため、定在波分布に輻射波が与える影響は小さいことが予想される。

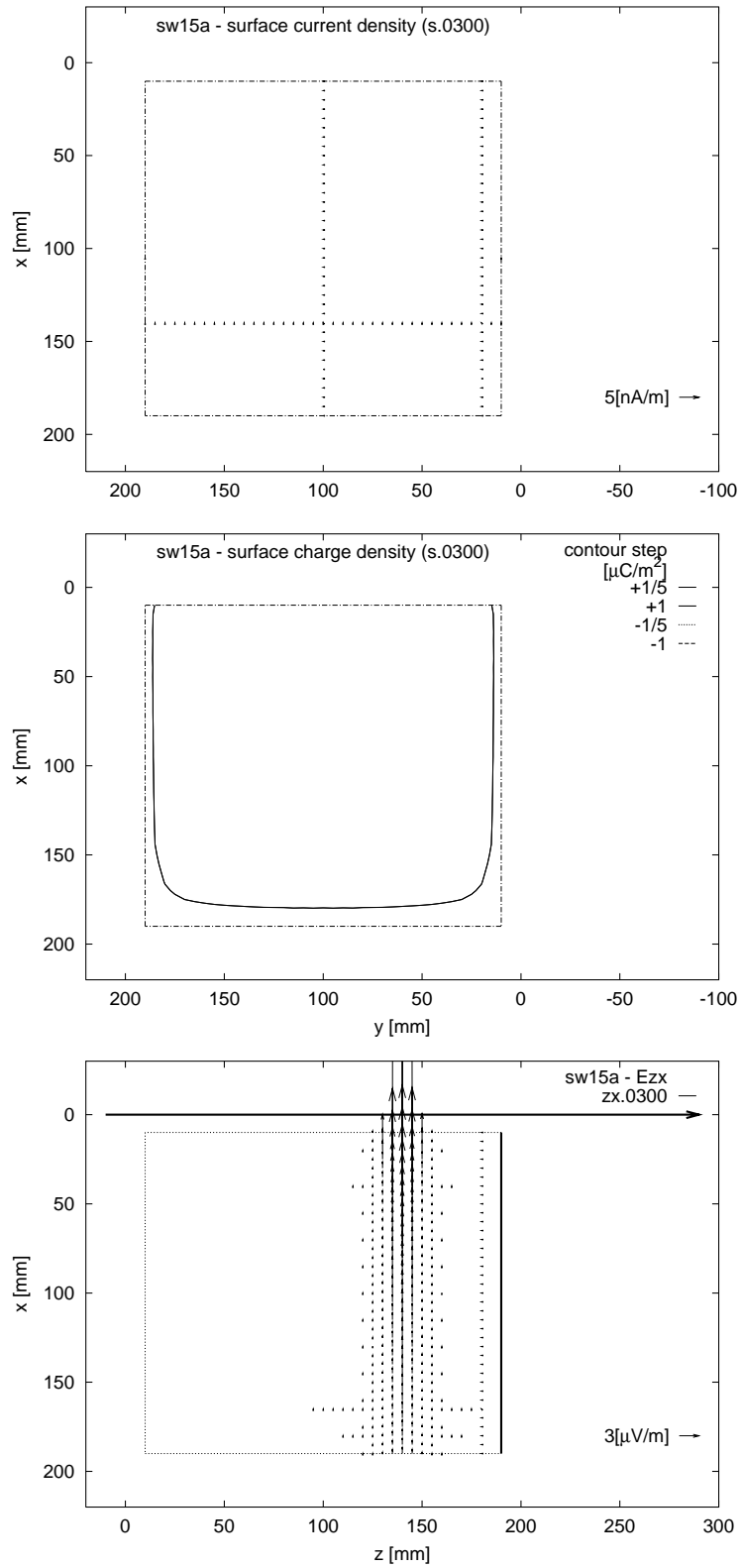


図 4.5: 反射板上の電流密度、電荷密度、 z - x 平面での電界ベクトル ($t=570\text{ps}$)

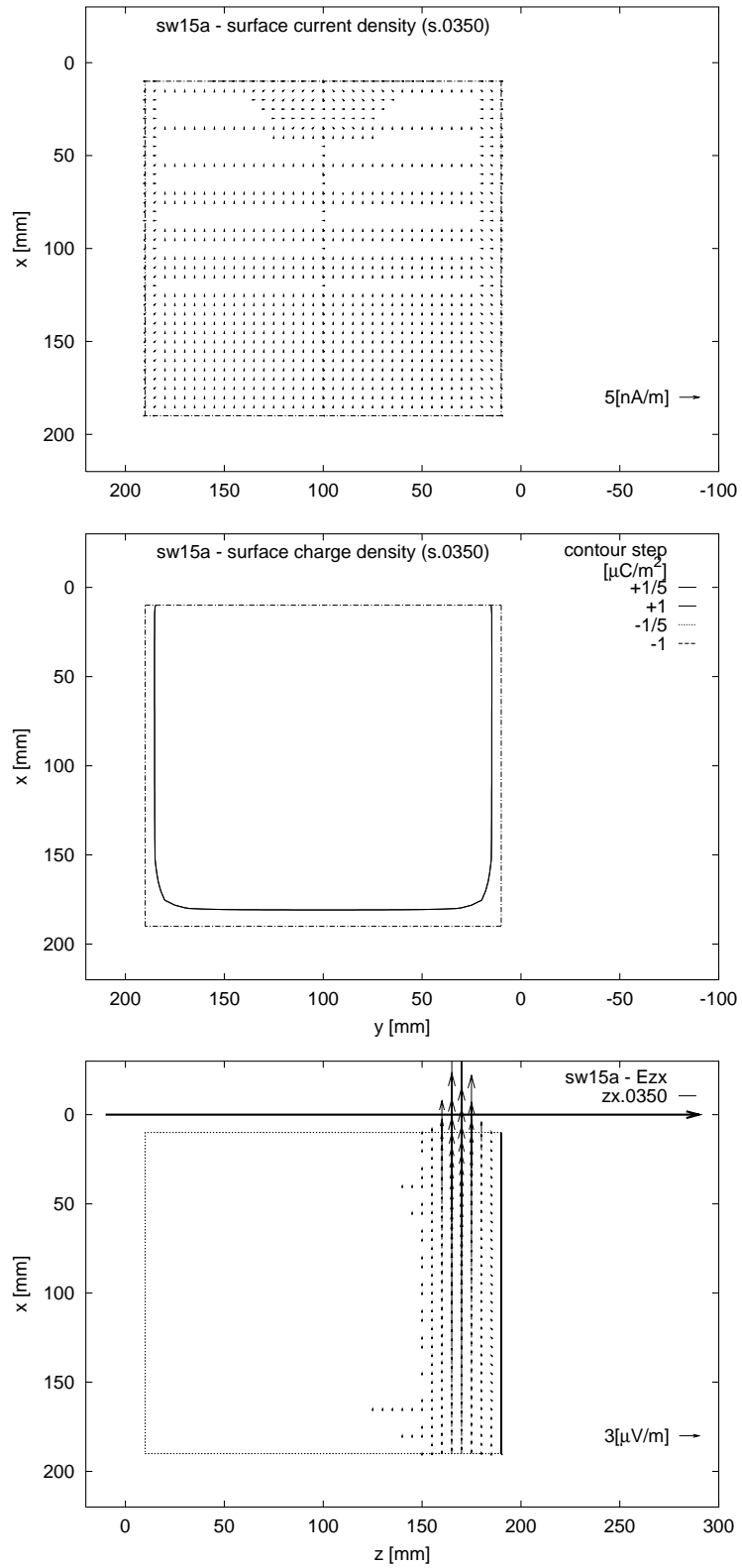


図 4.6: 反射板上の電流密度、電荷密度、 $z-x$ 平面での電界ベクトル ($t=665\text{ps}$)

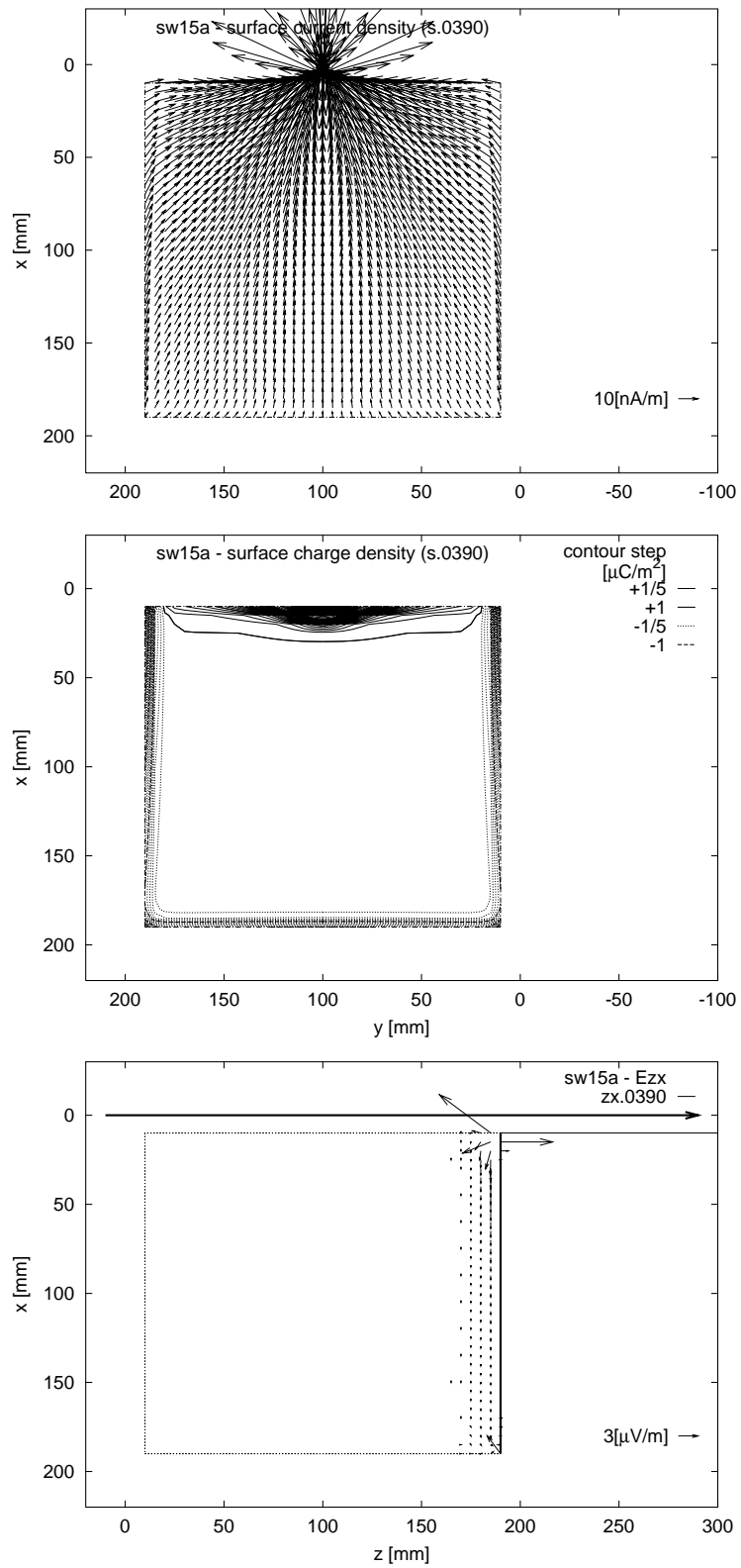


図 4.7: 反射板上の電流密度、電荷密度、 $z-x$ 平面での電界ベクトル ($t=741\text{ps}$)

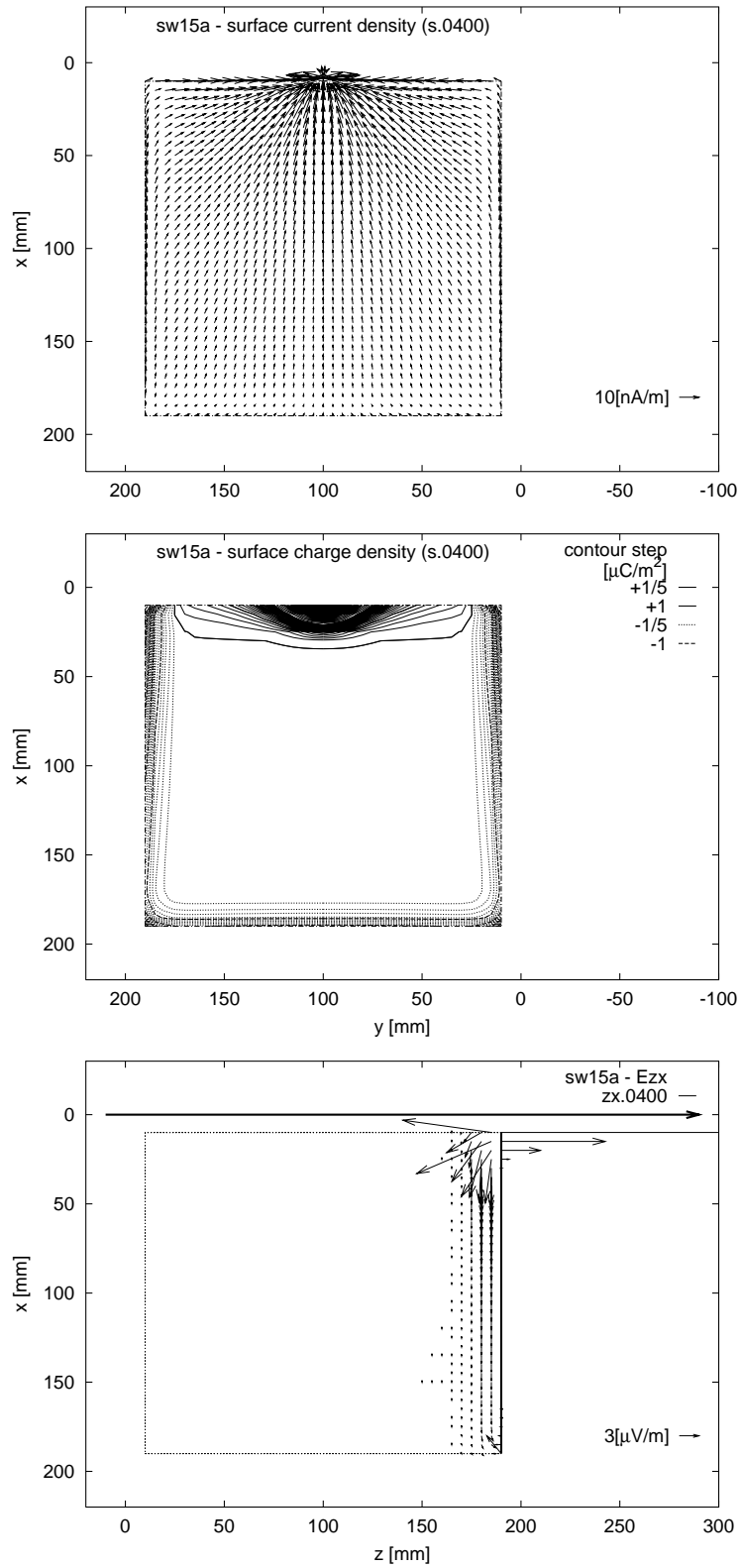


図 4.8: 反射板上の電流密度、電荷密度、 z - x 平面での電界ベクトル ($t=760\text{ps}$)

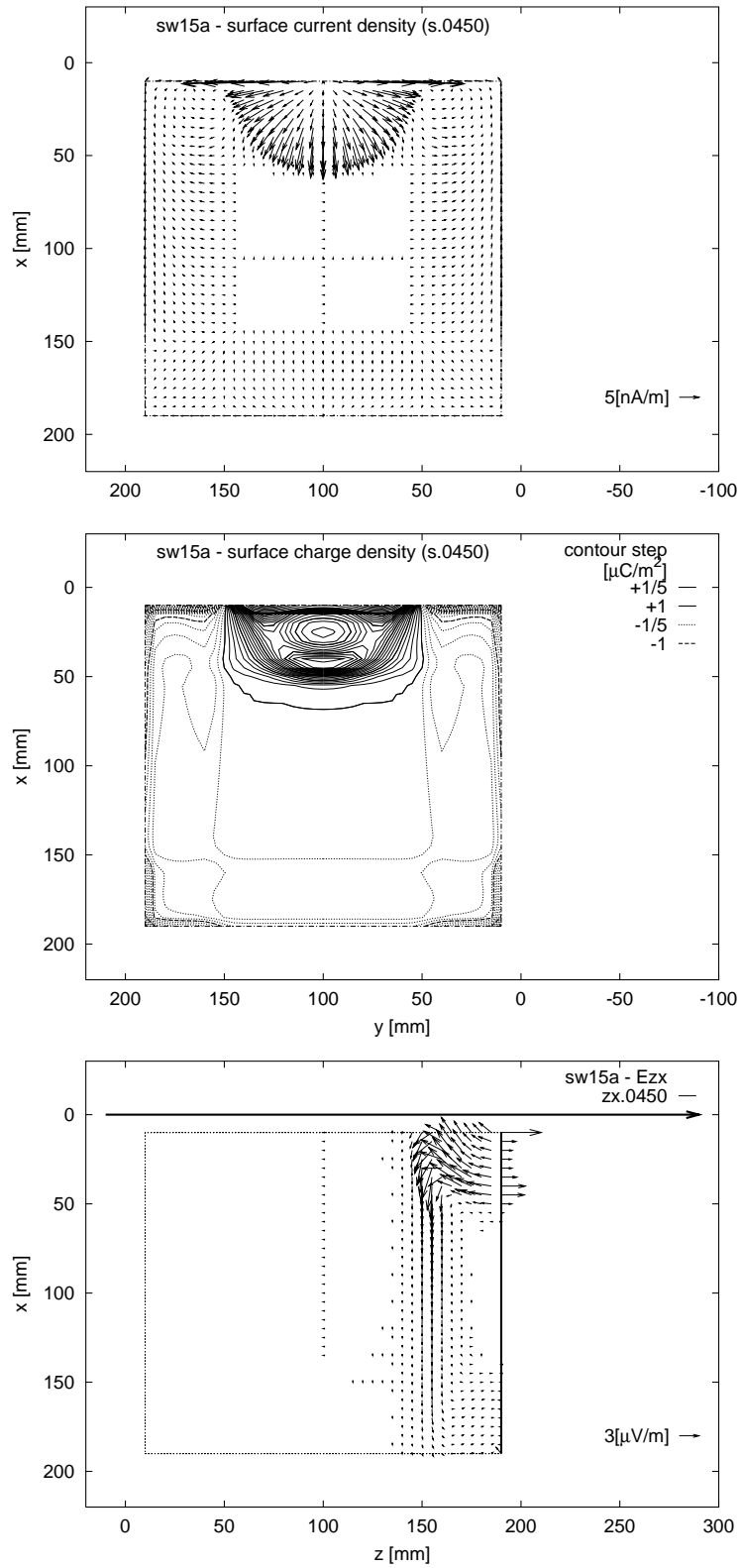


図 4.9: 反射板上の電流密度、電荷密度、 $z-x$ 平面での電界ベクトル ($t=855\text{ps}$)

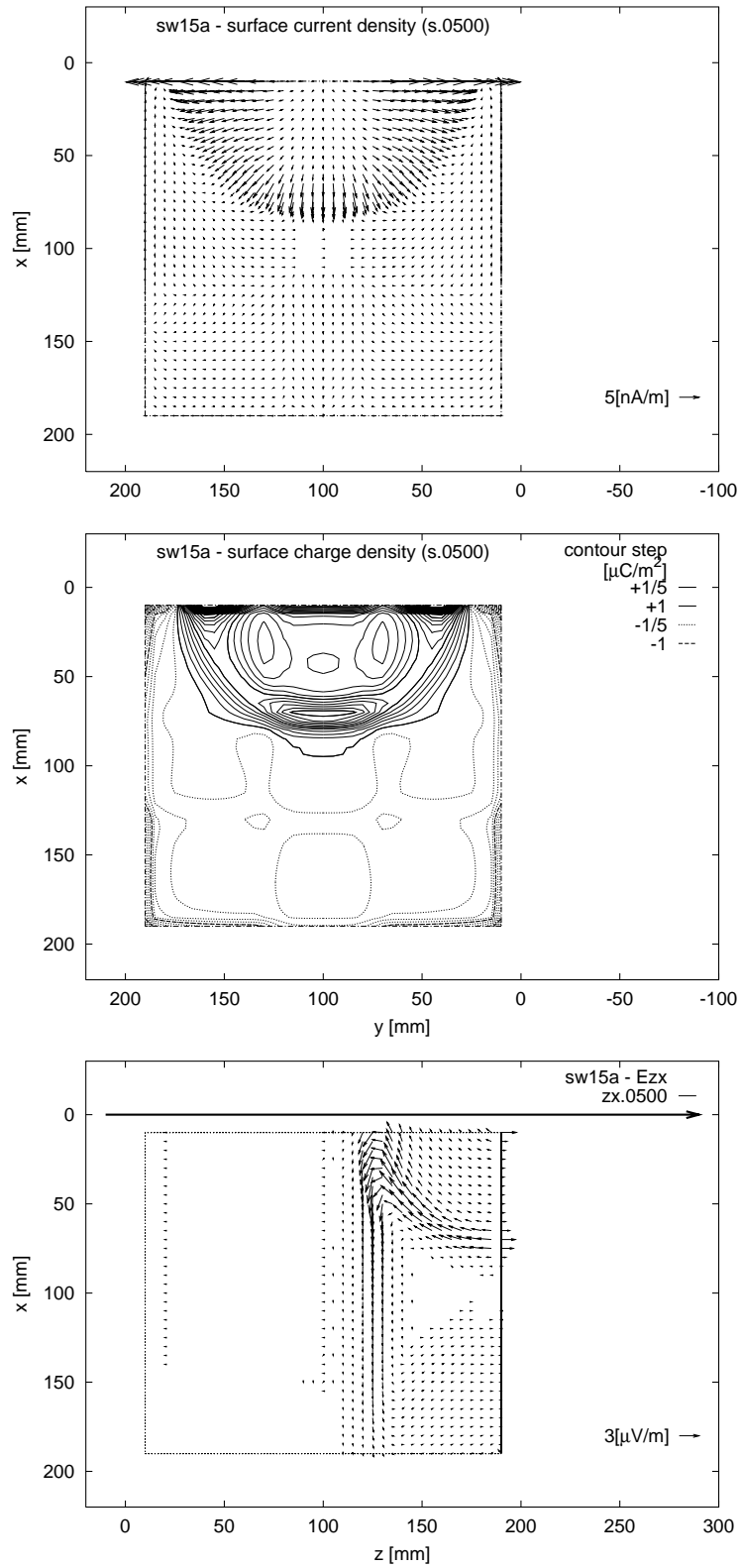


図 4.10: 反射板上の電流密度、電荷密度、 $z-x$ 平面での電界ベクトル ($t=950\text{ps}$)

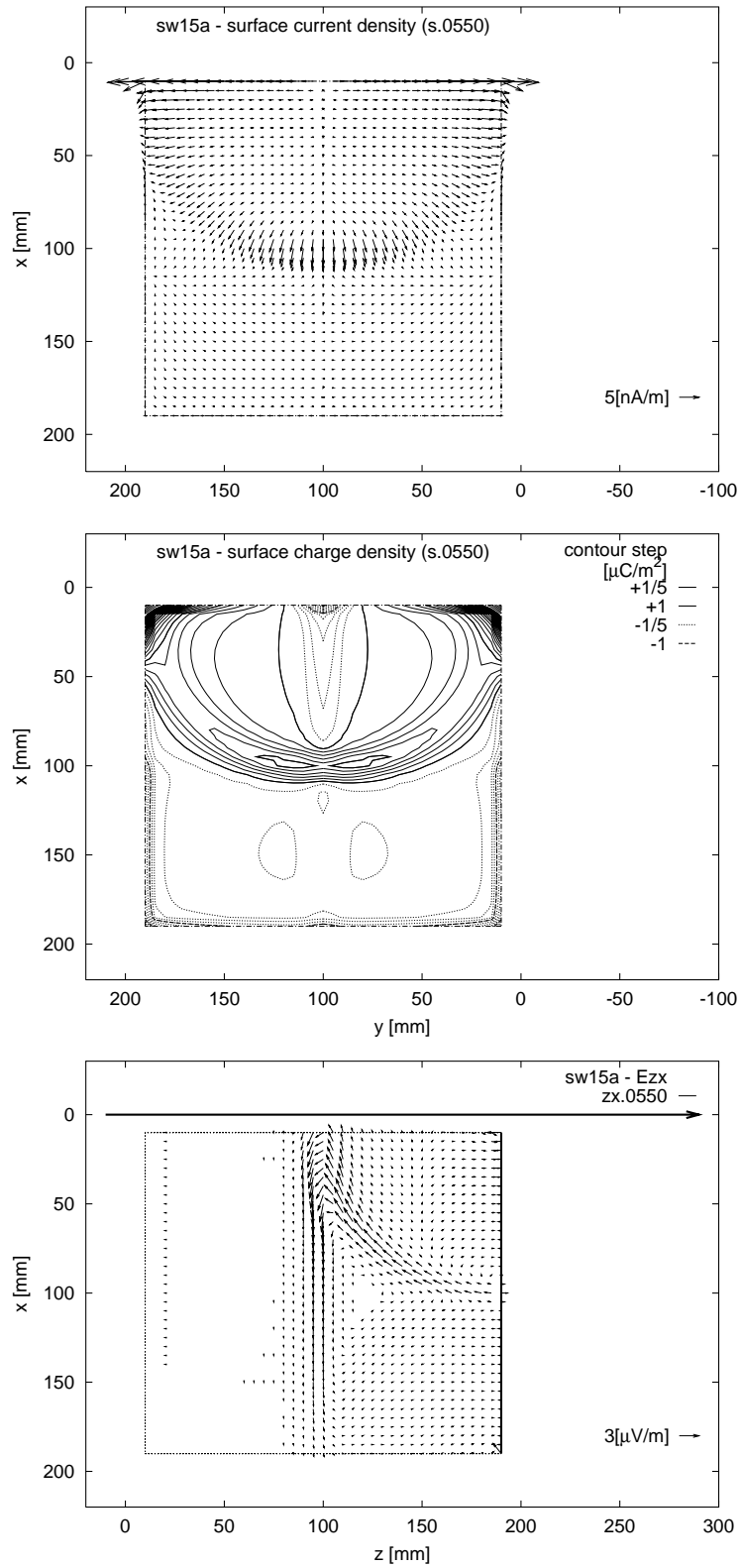


図 4.11: 反射板上の電流密度、電荷密度、 $z-x$ 平面での電界ベクトル ($t=1045\text{ps}$)

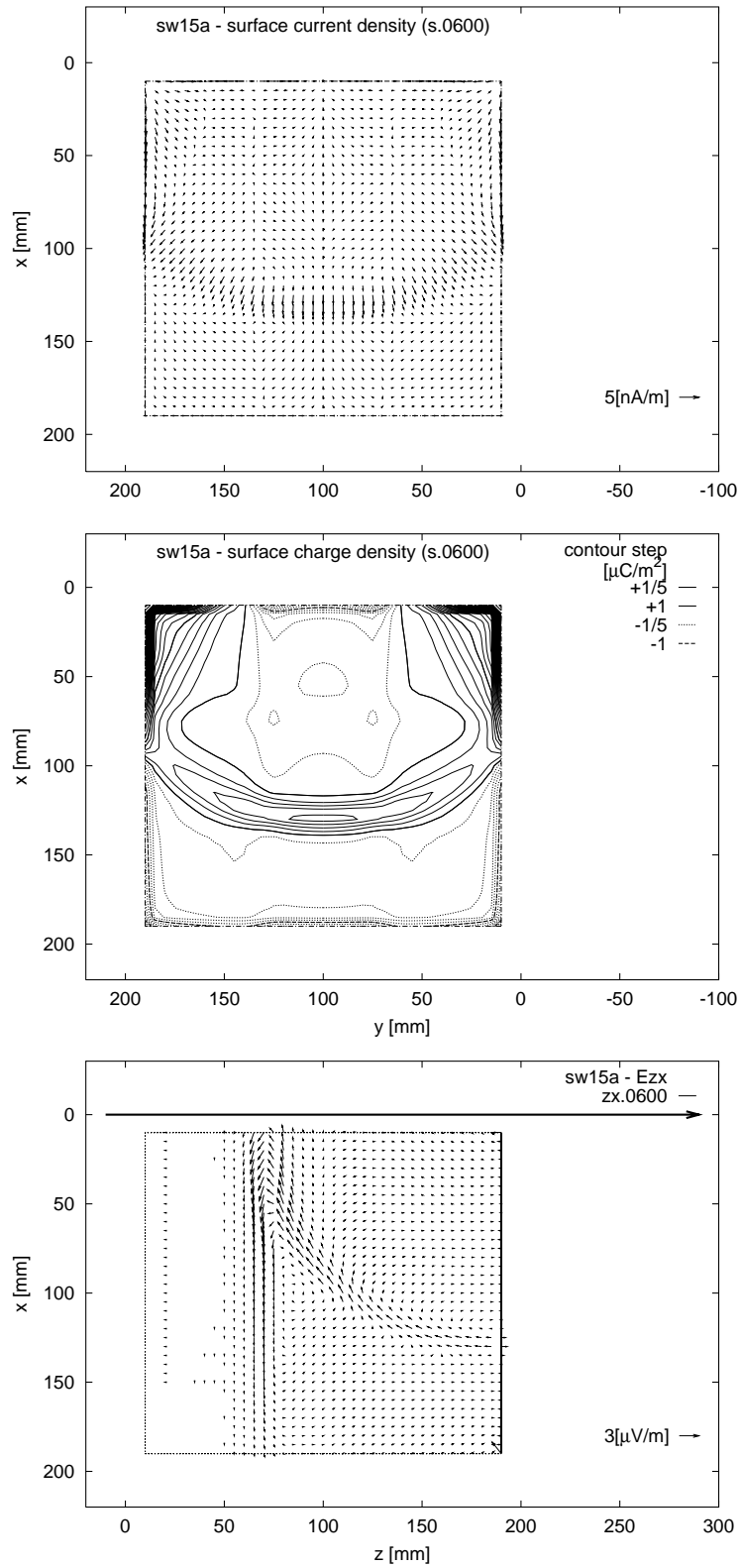


図 4.12: 反射板上の電流密度、電荷密度、 z - x 平面での電界ベクトル ($t=1140\text{ps}$)

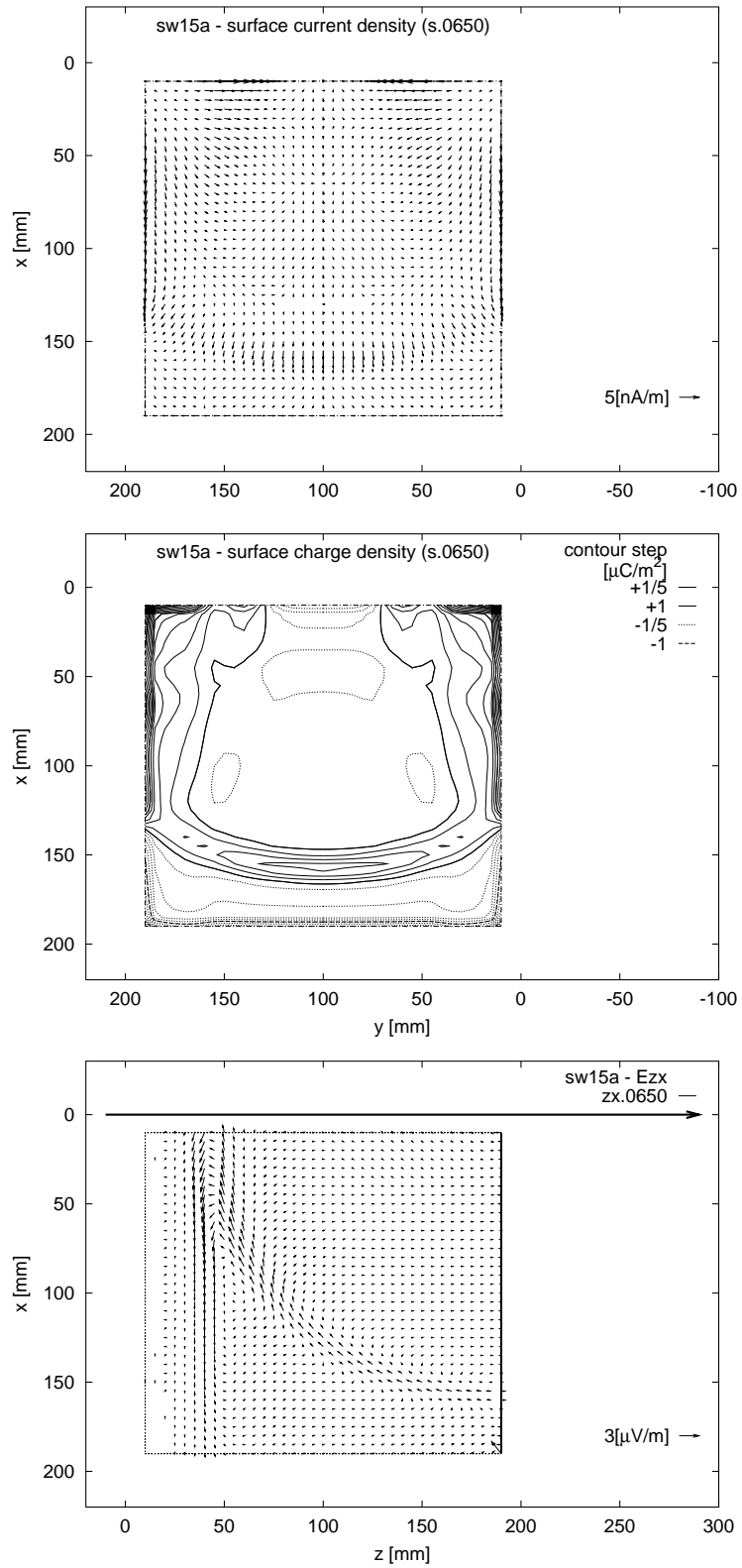


図 4.13: 反射板上の電流密度、電荷密度、 $z-x$ 平面での電界ベクトル ($t=1235\text{ps}$)

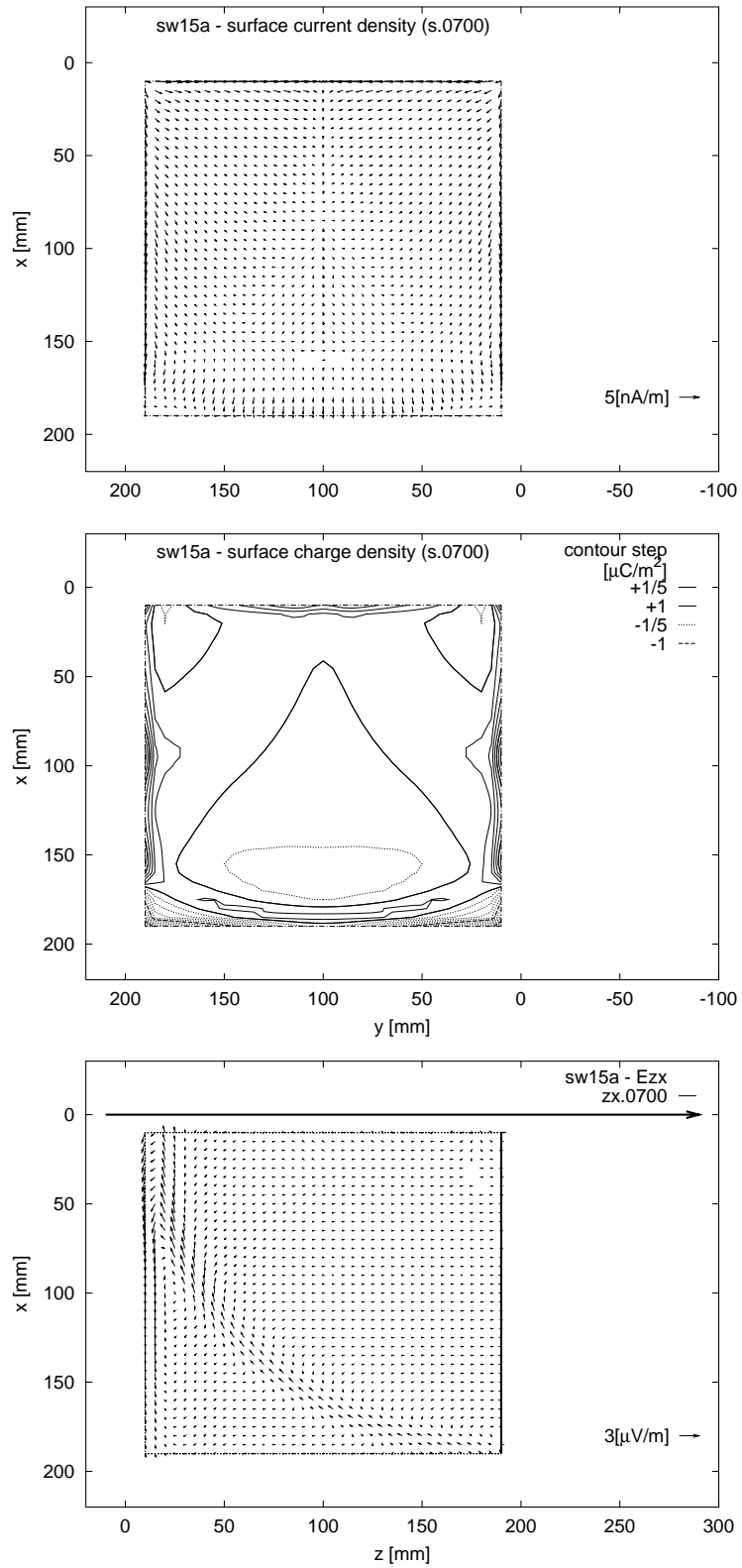


図 4.14: 反射板上の電流密度、電荷密度、 $z-x$ 平面での電界ベクトル ($t=1330\text{ps}$)

4.2.3 連続パルス列の場合の定在波の時間変化

次に、電子ビームが 106 mm 間隔の一様な微細構造パルス列からなる場合の定在波の時間波形を示す。定在波の観測位置は、反射板の中央から反射板とは垂直に、ビームの上流側へ延びる線上である。

図 4.15 は、反射板からの距離が 10mm, 30mm, 50mm, 53mm の位置における電界の時間変化を示す。微細構造パルス 3 周期分を示してある。図中に負側の振幅として現れる電子ビームに伴う入射波は、観測位置が反射板から離れるに従って早い時刻に現れ、正側の振幅として現れる反射板からの反射波は、逆に反射板から離れるに従って遅れた時刻に現れている。そのため、反射板から 50mm の位置では、入射波と反射波が一部打ち消し合っているために電界の振幅が小さくなっており、53mm ではほぼ完全に打ち消し合っている。しかし、時刻が 400ps, 750ps 付近に輻射波による負側の振幅が現れており、反射板からの距離が微細構造パルスの間隔の 1/2 である 53mm の位置でも定在波の強度は完全に 0 とはならない。

図 4.16 は、反射板からの距離が 53mm, 55mm, 75mm, 85mm の位置における電界の時間変化である。反射板からの距離が微細構造パルスの間隔 106mm の 1/2 である 53mm から遠くなるに従い、再び入射波と反射波に時間差が生じて振幅が現れる。正側の振幅に現れる反射波は一定の振幅に戻るのに対し、負側の入射波は、反射板から離れて早い時刻に現れるようになると輻射波と重なり合うようになり、入射波のみの場合よりも振幅が大きくなっている。入射波と反射波のみを考慮した理想的な定在波分布では定在波分布の腹の部分は一定の振幅であったが、輻射波の影響を考慮すると定在波分布にピークを生じることがわかる。

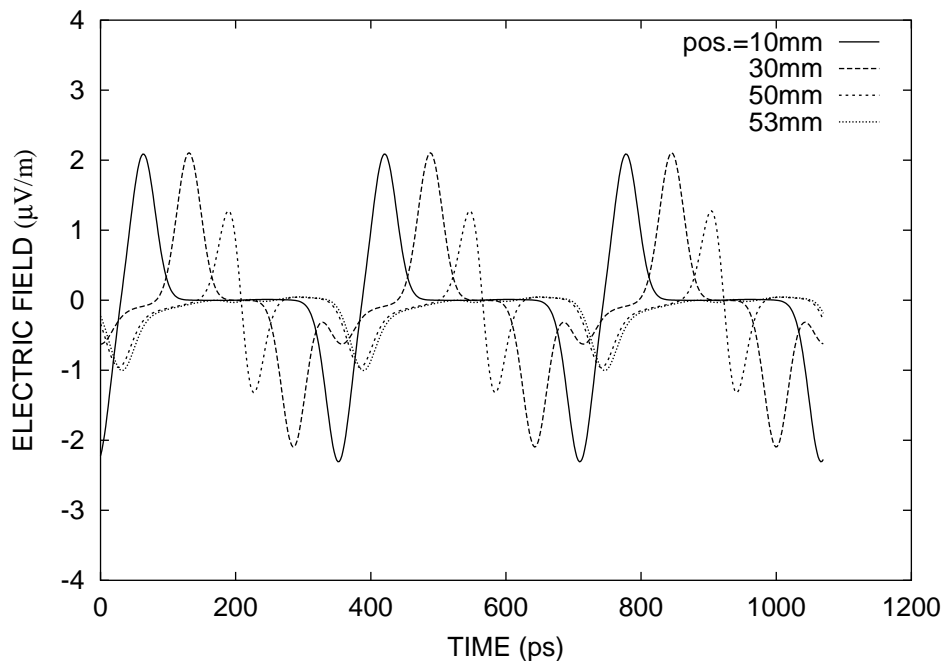


図 4.15: 定在波の時間波形 (1)

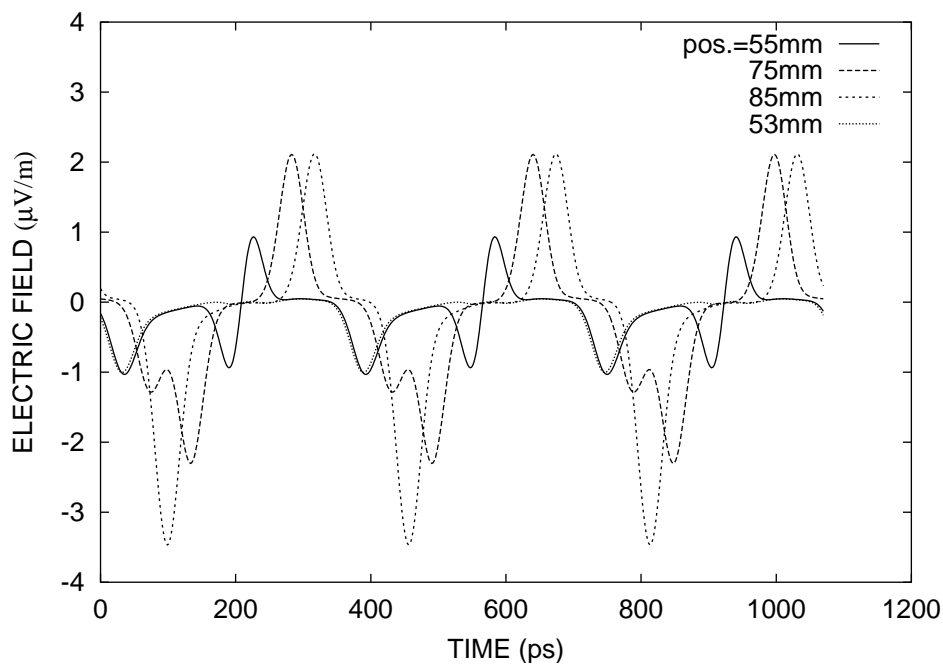


図 4.16: 定在波の時間波形 (2)

4.2.4 輻射波の発生および測定結果に与える影響の評価

数値解析で得られた、反射板中央から垂直に上流側へ伸びる線上における動径方向電界 E_x のエンベロープを 図 4.17 に示す。入射波と輻射波は、負側の振幅に現れ、反射波は正側の振幅となる。

図 4.17 では、正側のエンベロープはマイクロパルスの間隔の 1/2 である 53mm 毎に dip を形成しているのに対し、負側は入射波が反射波と打ち消しあっても輻射波が存在するために dip は 0 まで達しない。また、dip よりも反射板に近い位置で入射波と輻射波が同時に到達するため、負側のエンベロープにピークが生じている。輻射波の振幅は反射板から遠い程大きくなっているが、これは、輻射波が反射板のエッジから円弧状に広がり、遠方では電界が入射波と同じ方向を向くためである。

実験体系でクリスタル検波器を通して測定される定在波分布は、動径方向電界 E_x のパワーの分布である。そこで、解析結果でも各位置での動径方向電界の自乗をマイクロパルスの周期 353.7ps にわたって積算した値を求め、定在波のパワーの分布として 図 4.18 に示す。電界の正側のみのパワーを検出可能であれば、図 4.18 の破線のようになり、輻射波の影響はほとんど無く、dip の幅を容易に決定することができる。しかし、実際の検波出力 図 4.3 には、図 4.18 の実線のように正負両側のパワーが現れている場合に近い。この場合には輻射波の影響があるため、dip の幅を決定することが難しい。

しかしながら、輻射波が入射波や反射波と十分な時間差を持って到達する位置では、輻射波のパワーが単に加算されているだけである。定在波分布にピークが生じている位置では輻射波と入射波がほぼ同時に到達しているので、ピークと dip があまり近くない場合に限り、輻射波のパワーの分を差し引くことで dip の幅を決定し、マイクロパルスの幅を推定することが可能である。[20][21] では、dip の底の部分と、反射板から遠い方の肩の部分を用いて dip の幅を決定しており、これは、輻射波のパワーが一定としてその分を差し引いていることに相当する。輻射波の強度は、反射板からの距離によらずほぼ一定であるが、球殻状に広がるため、動径方向成分は反射板から離れる程大きくなって一定値に近づく。そのため、反射板に近い dip では、dip の最大値を大きく見積もることになり、dip 幅を実際よりも広くとらえてしまう。一方で、反射板から遠い dip では、輻射波の影響はほぼ一定になるものの、輻射波と入射波が dip の付近でも重なるようになるため、dip の幅を狭く見積もってしまう。したがって、このことを考慮してパルス幅推定に用いる dip を選べば [20][21] で用いた方法で妥当なパルス幅推定を行うことができる。この解析に用いた 180mm 四方の反射板を用いた解析モデルでは、反射板中央から垂直に 53mm 離れた位置

のディップは、入射波や反射波と輻射波が微細構造パルスの間隔の $1/2$ の時間だけ遅れて到達するため、輻射波の影響は電力が単に加算されているだけであり、定在波分布のディップの幅から微細構造パルスの幅を求めるのには適していると言える。

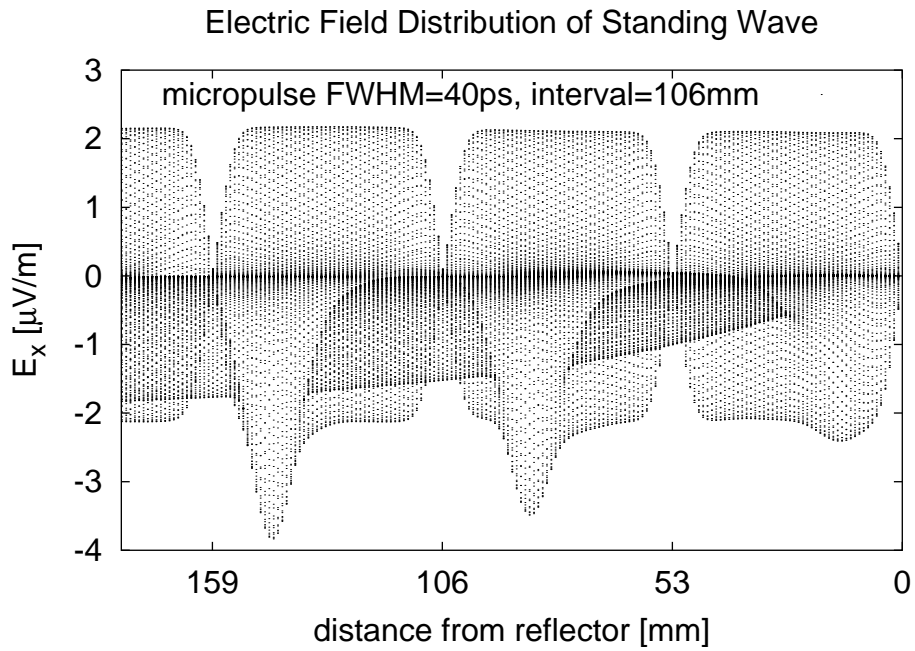


図 4.17: 解析結果—定在波の空間エンベロップ

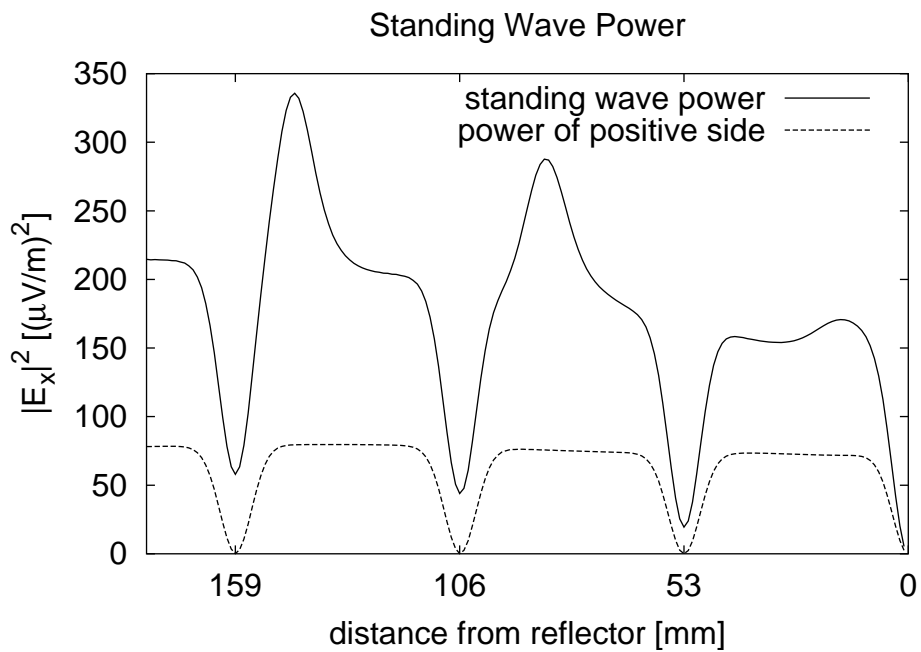


図 4.18: 解析結果—定在波のパワーの空間分布

Part II

境界要素法による薄い金属境界を含む体系 のポアソン方程式の解法

第 5 章

境界要素法の概要

5.1 積分方程式の導出

Γ を境界とする領域 Ω 内で、 Γ 上の境界条件 \bar{u} または $\bar{q} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ を満足する場 u を求める。ただし、 u の支配方程式は非同次ヘルムホルツ方程式

$$(\nabla^2 + k^2)u = b \quad (5.1)$$

とする。支配方程式がポアソン方程式

$$\nabla^2 u = b \quad (5.2)$$

の場合は $k = 0$ とすればよい。 u が近似解とすると、

$$(\nabla^2 + k^2)u - b = \epsilon \neq 0 \quad (5.3)$$

の誤差 ϵ が領域 Ω 内に分布している。重みつき残差法の考えで、重み関数 w を用いて解析領域 Ω 内で

$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 + k^2)u - b\} w \, d\Omega = 0 \quad (5.4)$$

となるように u を決定する。この式の左辺はグリーンの公式を用いて

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{(\nabla^2 u)w + k^2 u w - b w\} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \{(\nabla^2 w)u + k^2 u w - b w\} \, d\Omega + \int_{\Gamma} w \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u \nabla w \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \{(\nabla^2 + k^2)w\} u \, d\Omega - \int_{\Omega} b w \, d\Omega + \int_{\Gamma} w \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u \nabla w \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (5.5)$$

と変形する。ここで、重み関数 w に基本解として自由空間でのグリーン関数 u^* を用いる。 u^* はディラックのデルタ関数 δ を用いて

$$(\nabla^2 + k^2)u^* = \delta \quad (5.6)$$

の解であるから、式 (5.5) をさらに変形して、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 + k^2)u^* u \, d\Omega - \int_{\Omega} bu^* \, d\Omega + \int_{\Gamma} u^* \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u \nabla u^* \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta u \, d\Omega - \int_{\Omega} bu^* \, d\Omega + \int_{\Gamma} u^* \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u \nabla u^* \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

となり、境界積分方程式が得られる。

5.2 境界要素法

得られた境界積分方程式 (5.7) を数値的に解くために、境界 Γ を離散化する。3次元問題ならば、境界 Γ は N 個の面要素に分割される。

$$\int_{\Omega} \delta u \, d\Omega - \int_{\Omega} bu^* \, d\Omega + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^* q_j \, d\Gamma - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u_j q^* \, d\Gamma = 0 \quad (5.8)$$

ここで、 $q_j = \nabla u_j \cdot \mathbf{n}_j$ 、 $q^* = \nabla u^* \cdot \mathbf{n}_j$ とした。要素に分割された境界上での場の変数 u 、 q を表す最も簡単な方法は、代表点での値 u_i 、 q_i でその要素上は一定とする方法である。このような要素を一定要素とよぶ。一定要素を用いた場合は、式 (5.8) では要素毎の積分記号の中から u_j 、 q_j を出すことができ、

$$\int_{\Omega} \delta u \, d\Omega - \int_{\Omega} bu^* \, d\Omega + \sum_{j=1}^N q_j \int_{\Gamma_j} u^* \, d\Gamma - \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Gamma_j} q^* \, d\Gamma = 0 \quad (5.9)$$

となる。ここまで観測点 \mathbf{r}_i のついては任意であったが、 \mathbf{r}_i を要素 j の代表点 \mathbf{r}_j に一致させると、 N 本の式を立てることができる。このとき、基本解 $u^*(r)$ が $r = 0$ のところで発散する特異性を持つため、 $i = j$ のときの積分は注意が必要である。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta(\mathbf{r}_i) u(\mathbf{r}) \, d\Omega &= c_i u_i \\ \int_{\Omega} b(\mathbf{r}) u^*(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \, d\Omega &= b_i \\ \int_{\Gamma_j} u^*(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \, d\Gamma &= g_{ij} \\ \int_{\Gamma_j} q^*(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \, d\Gamma &= h_{ij} \end{aligned}$$

の記号を導入すると、式 (5.9) は

$$c_i u_i - b_i + \sum_{j=1}^N q_j g_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j h_{ij} = 0 \quad (5.10)$$

となる。式 (5.10) は、 i が 1 から N までの分だけ N 本ある。これら N 本の式は、式 (5.9) から得られたものであるから N 元連立一次方程式となる。行列表示すると、

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -c_1 + h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & -c_2 + h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & -c_N + h_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \mathbf{o} \quad (5.11)$$

あるいはまとめて

$$GQ - HU - B = \mathbf{o} \quad (5.12)$$

となる。ソース項 b は既知とすると、境界条件で u_i または q_i のいずれかが与えられているので、変数 U の N 要素と Q の N 要素、合計 $2N$ 個のうち N 個は既知であり、未知変数は N 個である。方程式は N 本なので、この連立方程式は解けて一意な解を持つ。

この解と境界条件を合わせると、境界上の全ての要素で u_j, q_j がわかっている。領域 Ω 内の任意の位置 \mathbf{r} での場 $u(\mathbf{r})$ は、式 (5.9) より

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{r}) u \, d\Omega = u(\mathbf{r}) = + \int_{\Omega} b u^* \, d\Omega - \sum_{j=1}^N q_j \int_{\Gamma_j} u^* \, d\Gamma + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Gamma_j} q^* \, d\Gamma \quad (5.13)$$

として求めることができる。

5.3 境界積分

h_{ij}, g_{ij} の計算は、一般にはガウスの積分公式などで数値的に積分を実行する。しかし、 $i = j$ のときには、積分核にある u^*, q^* が特異性を持つため、解析的に評価する必要がある。

$$h_{ii} = \int_{\Gamma_i} \nabla u^* \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

$$g_{ii} = \int_{\Gamma_i} u^* \, d\Gamma$$

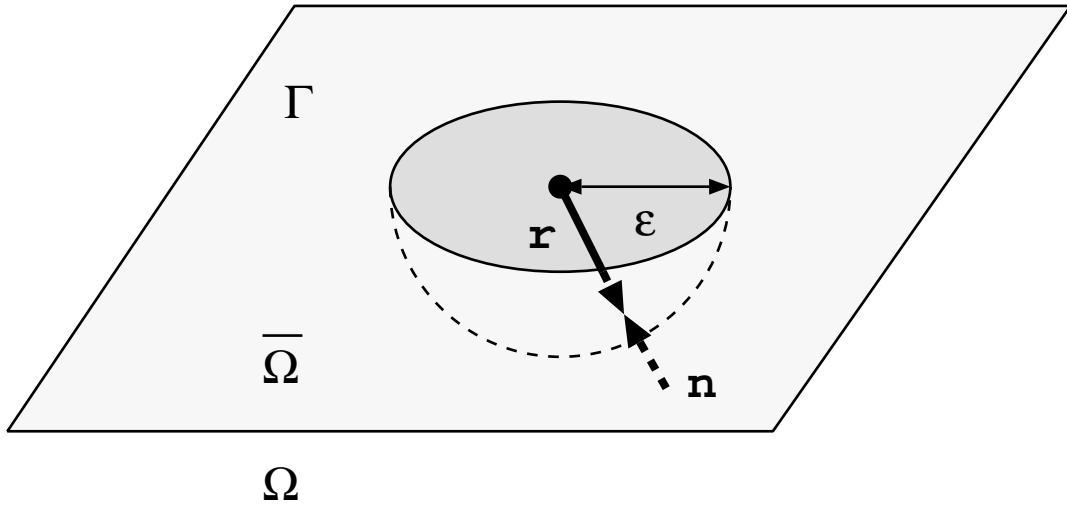


図 5.1: 特異積分の評価のための付加半球

を計算するにときは、 r_i のところで Γ_i を半径 ϵ の微小な半球で Ω 側に迂回させ、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとる。

5.3.1 h_{ii}

$$u^* = -\frac{1}{4\pi r} \exp(-jkr) \quad (5.14)$$

より

$$\begin{aligned} \nabla u^* &= \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi r} \left(\frac{1}{r} + jk \right) \exp(-jkr) \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned} \quad (5.15)$$

半球部分以外では $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$ なので、半球部分のみを計算すれば良い。半球部分では常に $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = -1$ なので

$$\begin{aligned} h_{ii} &= \int_{\Gamma_i} \nabla u^* \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\text{半球}} -\frac{1}{4\pi r} \left(\frac{1}{r} + jk \right) \exp(-jkr) d\Gamma \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{4\pi \epsilon} \left\{ \frac{\exp(-jk\epsilon)}{\epsilon} + jk \exp(-jk\epsilon) \right\} \int_{\text{半球}} d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2\pi\epsilon^2}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{\exp(-jk\epsilon)}{\epsilon} + jk \exp(-jk\epsilon) \right\} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

このとき r_i は Ω の外になるので、

$$c_i = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{r}_i) u \, d\Omega = 0 \tag{5.17}$$

である。したがって、式 (5.12) の H の対角成分は、

$$h_{ii} - c_i = -\frac{1}{2} \tag{5.18}$$

である。

5.3.2 g_{ii}

$$g_{ii} = \int_{\Gamma_i} u^* \, d\Gamma = \int_{\Gamma_i} -\frac{1}{4\pi r} \exp(-jkr) \, d\Gamma \tag{5.19}$$

半球部分では

$$\int_{\text{半球}} -\frac{1}{4\pi r} \exp(-jkr) \, d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{2\pi\epsilon^2}{4\pi\epsilon} \exp(-jk\epsilon) \right) = 0 \tag{5.20}$$

であるので平面部分だけを計算すれば良い。平面部分の積分は、特異性を考慮した数値積分公式を用いるか、 r_i 付近をサブ要素に分割して数値積分を行なう。

あるいは、

$$u^* = -\frac{1}{4\pi r} \exp(-jkr) = -\frac{1}{4\pi r} (\exp(-jkr) - 1) - \frac{1}{4\pi r} \tag{5.21}$$

とすると、第1項は $r \rightarrow 0$ の極限で0になるので通常の数値積分公式を適用可能であり、第2項は解析的に積分する。大きさが $2a \times 2b$ の四角形一定要素では

$$\int_{\Gamma_i} -\frac{1}{4\pi r} \, d\Gamma = \frac{1}{\pi} \left\{ a \ln \left(\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right) + b \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right) \right\} \tag{5.22}$$

である。

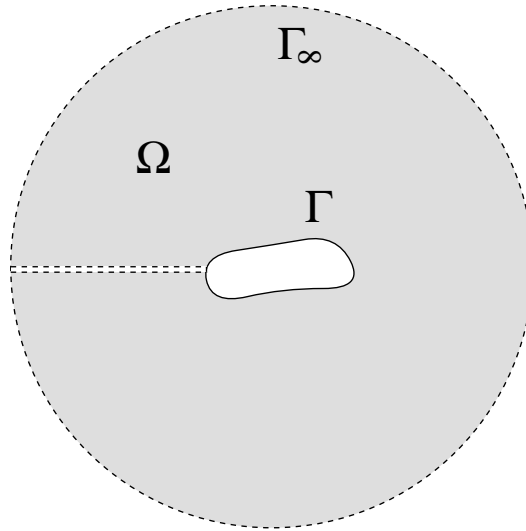


図 5.2: 開放領域

5.4 開放領域

境界要素法の特徴の一つは、開放領域を容易に導入できることである。図 5.2 のような開放領域に、閉じた境界 Γ があるとする。 Γ を取り囲む境界 Γ_∞ を考え、 Γ_∞ を半径が無量大の球殻とする。

境界積分方程式 (5.7) で Γ_∞ 上の積分は

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\infty} (u^* q - u q^*) d\Gamma &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\infty} -\frac{1}{4\pi r} \exp(-jkr) \left[q + \left(\frac{1}{r} + jk \right) u \right] r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\infty} -\frac{1}{4\pi} \exp(-jkr) [(q + jku)r + u] \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (5.23)$$

となる。 $r \rightarrow \infty$ のとき $u \rightarrow 0$ とすれば $[(q + jku)r + u] \rightarrow 0$ で、 Γ_∞ 上の境界積分は 0 となる。 $u^* = -\frac{1}{4\pi r} \exp(-jkr)$ であるから、 Γ 付近のソースによる u は、 $r \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow 0$ となり、 Γ_∞ 上の境界積分を計算しなくてよい。したがって、差分法や有限要素法のように開放領域を扱うために特別な処理を導入する必要は無く、閉じた境界 Γ 上の法線ベクトル n が Γ の内側を向いていればよい。

第 6 章

境界積分と薄い金属境界の扱い

6.1 境界要素法における薄い金属板の扱い

静電ポテンシャル問題、あるいは電磁波の散乱問題で境界となるのは、主として誘電体や導体の表面である。そして、導体が金属などの良導体の場合は、箔状、あるいは薄板状の金属を解析体系に組み込む必要がある場合も多い。しかし、薄板の表裏のように境界が極めて接近している場合は、境界上を数値積分する際の誤差が大きくなるように、境界の離散化を細かくしたり、領域を分割するなどの手法が必要になり [23]、節点数と計算量が増大する。

この章では、静電ポテンシャル問題において、厚さが無限に薄い完全導体板の定式化を示し、完全導体上での境界条件も考慮して、節点数と計算量を通常の金属境界で扱うよりも低減できることを示す。また、金属板の有限の厚みを考慮する方法も示し、解析例において通常の境界との比較を行なう。

6.2 基礎方程式

静電ポテンシャル問題の基礎方程式は、電位を ϕ 、電荷密度を ρ 、誘電率を ε として、以下のポアソン方程式で表される。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{6.1}$$

ただし、解析領域において、媒質定数の ε は等方で一様とする。

自由空間中でのグリーン関数を基本解 u^* として、グリーンの定理を用いて以下の積分方程式が導かれる。

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{r})\delta(r) d\Omega - \int_{\Gamma} u(\mathbf{r}')\nabla u^*(r) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}') d\Gamma + \int_{\Gamma} u^*(r)q(\mathbf{r}') d\Gamma - \int_{\Omega} b(\mathbf{r}')u^*(r) d\Omega = 0 \quad (6.2)$$

u はポテンシャル ϕ 、 q はフラックスで $\nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})$ 、 b は基礎方程式中でソース項となる $-\rho/\varepsilon$ を表し、解析領域とその境界を Ω, Γ で表す。 $\mathbf{n}(\mathbf{r}')$ は境界上の位置 \mathbf{r}' における外向き単位法ベクトルである。 $u^*(r)$ の具体的な形は、2次元ポアソン方程式では

$$u^*(r) = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (6.3)$$

となる。

6.3 厚さが無限小の金属板の定式化

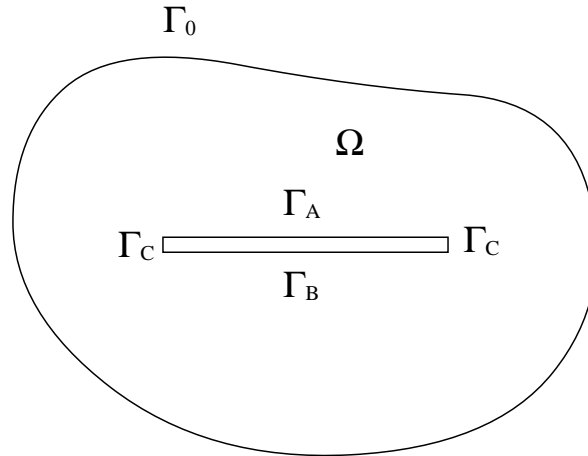


図 6.1: 薄い金属板を含む解析体系

図 6.1 のような解析領域内に薄い金属板がある場合を考え、金属板の片面を Γ_A 、その裏側を Γ_B 、側面を Γ_C で表し、その他の境界を Γ_O とする。そして、金属板の厚さを無限小として Γ_C 上の積分を省くと、(6.2) 式は次のようになる。

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{r})\delta(r) d\Omega + \int_{\Gamma_A + \Gamma_B + \Gamma_O} u^*(r)q(\mathbf{r}') d\Gamma + \int_{\Gamma_A + \Gamma_B + \Gamma_O} u(\mathbf{r}')\nabla u^*(r) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}') d\Gamma - \int_{\Omega} b(\mathbf{r}')u^*(r) d\Omega = 0 \quad (6.4)$$

r が Γ_A, Γ_B 上にはない場合、 Γ_A と Γ_B は同じ位置にあって、単位法ベクトルの向きが互いに逆になる、すなわち、

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_B} = -\mathbf{n}(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_A} \quad (6.5)$$

となるので、 Γ_A と Γ_B 上の境界積分を同時に行なうと、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_A} u^*(r)q(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_A} d\Gamma + \int_{\Gamma_B} u^*(r)q(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_B} d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_A} u^*(r) \left\{ q(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_A} + q(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_B} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_A} u(\mathbf{r}')\nabla u^*(r) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_A} d\Gamma + \int_{\Gamma_B} u(\mathbf{r}')\nabla u^*(r) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_B} d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_A} \left\{ u(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_A} - u(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_B} \right\} \nabla u^*(r) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_A} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.7)$$

となる。ここで境界条件を考えると、金属板の表面は等電位面なので、表側と裏側のポテンシャルは等しく、

$$u(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_A} = u(\mathbf{r}')\Big|_{\Gamma_B} \quad (6.8)$$

である。よって、(6.7) 式の境界積分は常に 0 となり、計算する必要がなくなる。

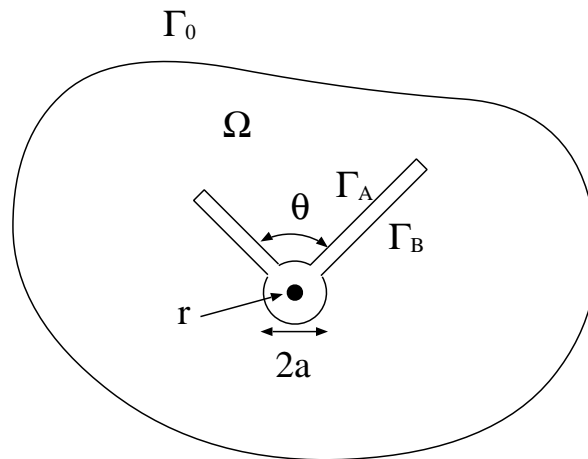


図 6.2: 特異積分

次に、 r が Γ_A, Γ_B 上にある場合の特異積分を考える。厚さが無限小の金属板が角 θ で曲がっているところに観測点 r を置く。このとき、図 6.2 のように r は Γ_A と Γ_B の間にあって、 r の近傍では境界は半径 a の円弧で迂回する。そして、 $a \rightarrow 0$ の極限をとって

コーシーの主値と迂回部分の値で特異積分を評価する。この場合、 \boldsymbol{r} は領域 Ω の外にあるので、

$$\int_{\Omega} u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}) d\Omega = 0 \quad (6.9)$$

である。また、コーシーの主値となる区間においては、 Γ_A と Γ_B は重なっているので、(6.6)(6.7) 式と同様にまとめて積分できる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_A} u^*(\boldsymbol{r})q(\boldsymbol{r}')\Big|_{\Gamma_A} d\Gamma + \int_{\Gamma_B} u^*(\boldsymbol{r})q(\boldsymbol{r}')\Big|_{\Gamma_B} d\Gamma \\ = p.v. \int_{\Gamma_A} u^*(\boldsymbol{r}) \left\{ q(\boldsymbol{r}')\Big|_{\Gamma_A} + q(\boldsymbol{r}')\Big|_{\Gamma_B} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_A} u(\boldsymbol{r})\nabla u^*(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}')\Big|_{\Gamma_A} d\Gamma + \int_{\Gamma_B} u(\boldsymbol{r})\nabla u^*(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}')\Big|_{\Gamma_B} d\Gamma \\ = p.v. \int_{\Gamma_A} \left\{ u(\boldsymbol{r})\Big|_{\Gamma_A} - u(\boldsymbol{r})\Big|_{\Gamma_B} \right\} \nabla u^*(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\Big|_{\Gamma_A} d\Gamma \\ - \frac{2\pi - \theta}{2\pi} u(\boldsymbol{r})\Big|_{\Gamma_A} - \frac{\theta}{2\pi} u(\boldsymbol{r})\Big|_{\Gamma_B} \end{aligned} \quad (6.11)$$

通常境界での特異積分と同じく、(6.10) 式では特異性が弱いため迂回部分の積分は 0 であり、また、(6.11) 式の主値部分は (6.8) 式より 0 となる。(6.11) 式をさらにまとめると、

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi - \theta}{2\pi} u(\boldsymbol{r})\Big|_{\Gamma_A} - \frac{\theta}{2\pi} u(\boldsymbol{r})\Big|_{\Gamma_B} = -u(\boldsymbol{r})\Big|_{\Gamma_A} + \frac{\theta}{2\pi} \left\{ u(\boldsymbol{r})\Big|_{\Gamma_A} - u(\boldsymbol{r})\Big|_{\Gamma_B} \right\} \\ = -u(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

となって、角 θ によらない値となる。

また、 \boldsymbol{r} が薄い金属板の側面に位置する場合にも同様の方法で求められ、同じ結果を得る。

以上をまとめると、厚さが無限に薄い金属板を含む場合、境界積分方程式 (6.4) は次のようになる。

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r}) + \int_{\Gamma_A} u^*(\boldsymbol{r}) \left\{ q(\boldsymbol{r}')\Big|_{\Gamma_A} + q(\boldsymbol{r}')\Big|_{\Gamma_B} \right\} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_O} u^*(\boldsymbol{r})q(\boldsymbol{r}') d\Gamma - \int_{\Gamma_O} u(\boldsymbol{r}')\nabla u^*(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}') d\Gamma \\ - \int_{\Omega} b(\boldsymbol{r}')u^*(\boldsymbol{r}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$c(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 & (\boldsymbol{r} \notin \Omega) \\ 1 & (\boldsymbol{r} \in \Omega \text{ or } \boldsymbol{r} \in \Gamma_{A,B}) \\ \theta/2\pi & (\boldsymbol{r} \in \Gamma_O) \end{cases}$$

θ は境界上の点 \boldsymbol{r} から領域を見込む角

(6.13) 式の積分記号は、特異積分に対してはコーシーの主値として評価する。

(6.13) 式を線形要素で離散化、行列表示すると、通常の境界のみからなる場合と同じ表式

$$GQ - HU = B \quad (6.14)$$

となる。ただし、節点 m が厚さが無限小の金属板上にある場合、 m に関する行列の要素は以下のようにになっている。

$$H_{im} = 0$$

$$H_{mm} = 1$$

$$Q_m = q(\mathbf{r}_m)|_{\Gamma_A} + q(\mathbf{r}_m)|_{\Gamma_B}$$

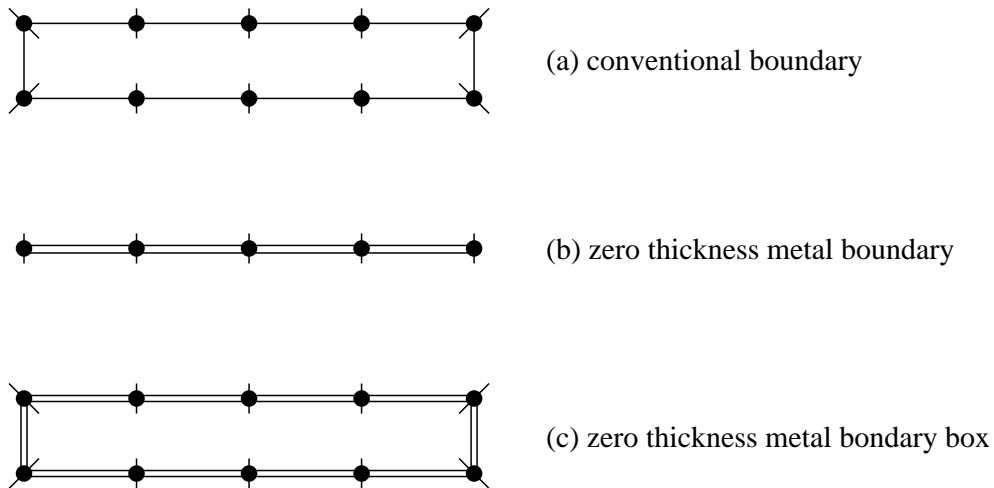


図 6.3: 通常境界および厚さが無限に薄い金属板境界による有限厚さの金属板の境界離散化

薄い金属板を通常境界で扱った場合 (図 6.3(a)) と、厚さが無限に薄い金属板とした場合 (b) を比較すると、後者の場合には節点と境界要素を金属板の両側で統合したため、節点数と要素数が半減し、必要な計算機の記憶容量と計算量は $1/4$ になる。そのうえ、境界積分も G のみを計算すればよいので、計算量はさらに半分の $1/8$ になる。

金属板の厚さを考慮する場合は、(c) のように厚さが無限に薄い金属板を箱状に設定すれば解析可能である。この場合は節点数は (a) と変わらないものの、(b) と同様に境界積分の計算量は $1/2$ になる。さらに、節点のすぐ裏側にある境界に対しては、積分核が特異とな

る $r = 0$ の近くまで数値積分をすることになって計算誤差が入り易いが、(c) では特異性が強い H の境界積分が不要であり、数値積分の誤差を避けることができ精度が向上する。

以上の議論は 3 次元の静電ポテンシャル問題でも同様に進めることができる。

6.4 数値計算例

数値計算例として、マイクロ波伝送線路の一種である遮蔽型マイクロストリップラインの特性インピーダンスの計算を行なった。解析対象とする遮蔽型マイクロストリップラインは、図 6.4 のような断面が一様な矩形の外部導体とリボン状の中心導体の間で TEM モードの電磁波を伝送するもので、その特性インピーダンスは中心導体の厚さにも影響される。そこで、中心導体の厚さが薄い場合の計算を、境界の分割数を変えて行ない、通常の場合と厚さが無限小の金属板を用いた場合とで比較した。

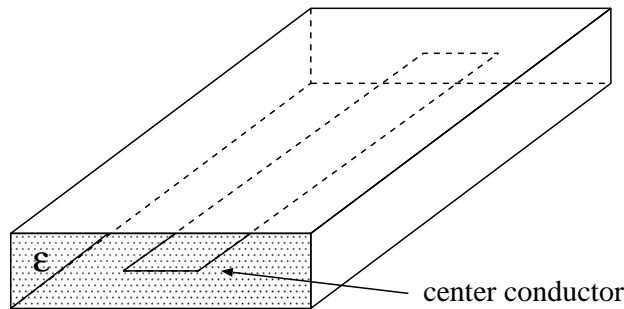


図 6.4: 遮蔽型マイクロストリップライン

中心導体と外部導体の間が比誘電率 ϵ_r の物質で満たされている場合の特性インピーダンス Z は次の式で求められる [24]。

$$Z = \frac{1}{v_0 C \sqrt{\epsilon_r}} \quad (6.15)$$

ここで v_0 は光速、 C は $\epsilon_r = 1$ のとした場合の単位長さあたりのストリップラインの外部導体と中心導体間の静電容量である。この C はストリップラインの断面内での 2 次元静電ポテンシャル問題を解くことで求めることができる。

中心導体を外部導体に対し電位 V とする境界条件で静電ポテンシャル問題を解き、中心導体表面 Γ_{cc} でフラックス q を積分すると、ガウスの法則より中心導体上にある単位長さあたりの電荷量 Q が求められる。

$$-\int_{\Gamma_{cc}} q d\Gamma = -\int_{\Gamma_{cc}} \nabla\phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_{cc}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (6.16)$$

これより

$$C = \frac{Q}{V} \quad (6.17)$$

が求められて、(6.15) 式より Z が算出される。

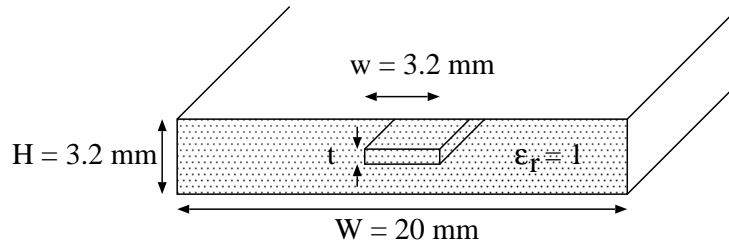


図 6.5: マイクロストリップラインの解析モデル

解析モデルは 図 6.5 に示すように、外部導体の高さが $H = 3.2\text{mm}$ 、幅が $W = 20\text{mm}$ 、中心導体は幅が $w = 3.2\text{mm}$ 、厚さは $t = 0, 0.032, 0.064, 0.16, 0.32\text{mm}$ の 5 種類とした。導体間の空間の比誘電率 ε_r は 1 とした。

境界の離散化は線形要素で行ない、外部導体は、幅 20mm を 50 要素に、高さ 3.2mm を 5 要素に等分割した。中心導体は 図 6.6 に示したように、厚さ方向を 4 要素に等分割し、幅方向の分割数 N を 1 から 30 まで変えて計算した。ただし、計算に用いたプログラムは角点の特異性を考慮していないため、中心導体の幅方向には角から 0.05mm の位置に常に節点を配置して、特に N が小さいときにおける角点による誤差を抑えた。厳密には、特異要素の導入などで角点特異性を考慮する必要がある [25]。また、使用したプログラムでは、境界積分はガウスの 4 点積分で計算を行ない、特異積分に関しては解析的に求めている。

計算結果は、横軸に中心導体の片面の要素数 N 、縦軸に求められた特性インピーダンス Z を 図 6.7 に示した。中心導体が比較的厚い $t = 0.32\text{mm}$ の結果は、通常境界で計算しても、厚さが無限小の境界で計算しても $N = 1$ の場合を除いてほとんど変わらない。ところが、中心導体の厚さを薄くするに従い、 N が小さい方で双方の差が大きくなっている。通常境界を用いた場合は、中心導体の 1 要素の長さ w/N が厚さ t の 5 倍を越えると誤差が目立ち始めるのに対し、厚さが無限小の境界を用いると N が 3 以上になれば、 N が大きいときの値に対し $\pm 1\%$ の範囲に収まっている。これは、前節の最後に書いたとお

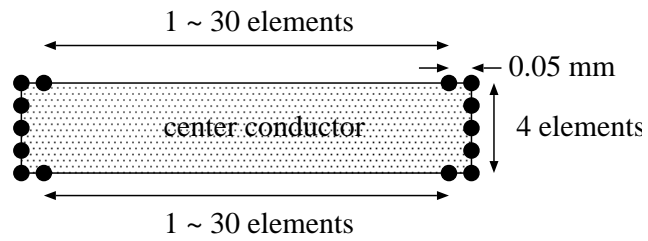


図 6.6: 中心導体上の節点の配置

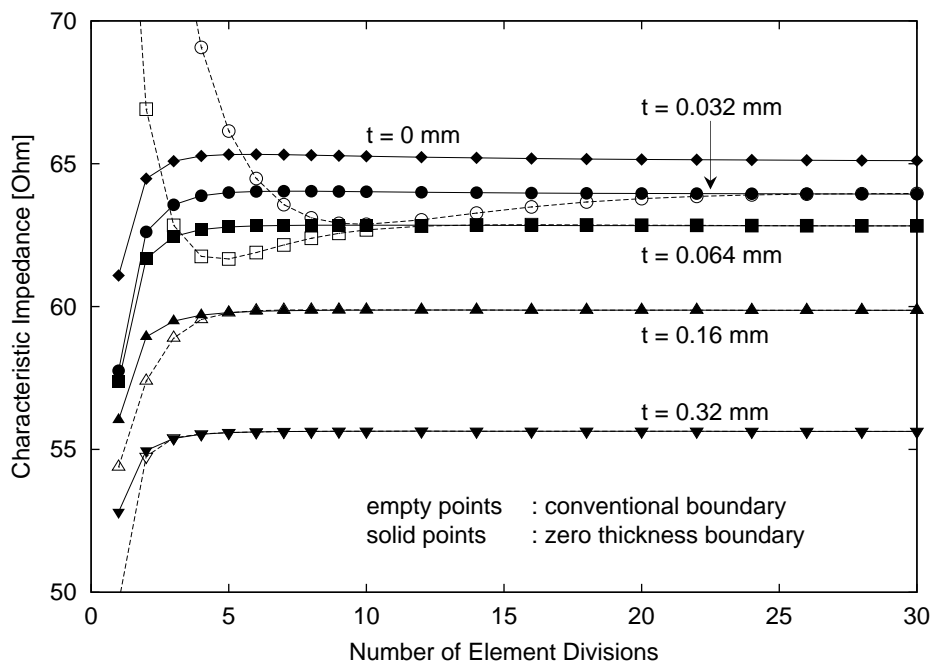


図 6.7: 数値解析で求められたマイクロストリップラインの特性インピーダンス

り特異性の強い H の境界積分をしていないためであり、薄い金属板の厚さを考慮する必要がある場合でも少ない節点数で安定な結果が得られることを示している。

厚さが無限小の境界をそのまま使えば $t = 0$ の場合の特性インピーダンスが計算できる。この場合は、解析的にも特性インピーダンスを求められており、図 6.5 の断面形状では 65.3Ω である [26]。数値解は、 $N = 30$ のときに 65.1Ω と解析的な解に近い値が得られている。約 0.5% の誤差は、角点の影響及び線形補間による誤差等が原因として考えられる。 $t = 0$ の場合も、 $N = 3$ 、即ち中心導体を両端の要素を含めて 5 要素で計算しても、解析解にかなり近い値が得られている。

6.5 まとめ

この章では、静電ポテンシャル問題において、厚さが無限小の金属板を境界積分方程式中に導入し、定式化を行なった。境界を離散化し、境界要素法として数値解を求める際に、無限に薄い金属板の両面を合わせて境界要素とするため、従来の方法と比べて境界要素の数が半減する。また、金属面が等ポテンシャルであることから特異性が強い H の境界積分が不要となって、計算量がさらに半減するだけでなく、数値積分による誤差も減少する。これは、厚さが無限小の金属境界を組み合わせて薄い金属板の厚さを考慮する解析において、大きな利点となることがマイクロストリップラインの解析例から示された。さらに、領域分割をしないで厚さが 0 である場合の解析が可能で、妥当な解が得られることを示した。

第 7 章

結論

本論文は、加速器のビームモニタの解析に用いる数値解析手法として有限差分時間領域法 (FD-TD 法) と境界要素法を取り上げ、FD-TD 法については荷電粒子ビームを空間差分の格子の制約を受けずに取り入れる方法を提案し、境界要素法については電極等の薄い金属境界の効率的な定式化を提案した。以下に本研究により得た知見をまとめる。

FD-TD 法の時間および空間差分に起因する数値的な分散性と異方性について検討し、波長と空間差分間隔の比に対して位相速度の誤差を示した。これは、空間差分間隔を決定する目安となる。異方性については、空間差分の格子に沿う方向へ伝播する場合に位相速度の誤差が最も大きくなり、分散性については、位相速度の相対誤差が周波数の自乗で増加する。また、時間差分の間隔は小さい方が誤差が増加する。数値解析における空間の離散化は波長の $1/10$ 程度とすることが多いが、この場合の格子へ沿う方向への位相速度の相対誤差はおよそ 1% となる。

FD-TD 法で荷電粒子ビームを扱う方法について、パルス状荷電粒子ビームを移動する局在化した電流として扱う方法では開放領域の扱いやビーム軌道の自由度の点で困難が多いことを指摘し、これらの困難を避けられる散乱界表示 FD-TD 法で運動する点電荷を波源とする入射界を用いて数値解を得た後、畳み込み積分でビームの波形を結果に反映させる方法を提案した。この方法では任意の荷電粒子ビームの軌道を扱うことが容易であり、また、開放領域を精度良く模擬することができる。さらに、ビームを点電荷で代表することで入射界の計算量を低減し、畳み込み積分を周波数領域を経由して行うことと合わせて実用的な計算量で荷電粒子ビームを含む体系の電磁界が計算可能である。

点電荷の入射界を用いる方法では、入射界のサンプリング間隔によっては大きなエイリアス誤差が生じるため、等速直線運動する点電荷の周辺電磁界のスペクトルからエイリア

ス誤差を求めた。エイリアス誤差は点電荷の運動エネルギーの逆数やサンプリング周波数、点電荷の軌道と電磁界を求める位置との距離に対してほぼ指数関数的に減少する。また、許容できるエイリアス誤差からサンプリング間隔決定する式を導出した。

エイリアス誤差を考慮して決定したサンプリング間隔は適切な FD-TD 法の時間差分の間隔よりもかなり小さくなる場合もあるため、入射界は細かいサンプリング間隔で計算し、その結果を FD-TD 法の時間差分の間隔で扱えるように変換する方法を用いた。その際に必要となる数値的な低域通過フィルタの設計について述べ、フィルタを通すことによって生じる振幅や位相の誤差を示し、FD-TD 法の解析精度に影響を与えないフィルタの諸定数の決定法を示した。

これらの手法を適用した解析例を示し有用性を確認すると共に、定在波分布測定による電子線形加速器の微細構造パルス幅推定の解析に応用した。実験結果として得られていた複雑な定在波分布は、解析結果の定在波分布と比較から輻射波の寄与が大きい、パルス幅の推定に際しては輻射波の影響を避け、妥当な推定法となっていることがわかった。

また、境界要素法について、薄い金属などの境界要素において表裏両面の境界の距離を零とする定式化を示した。この場合、隣接した境界に対する境界積分を解析的に処理して数値積分に起因する誤差は取り除かれる。さらに、境界条件を考慮すると、2 項ある境界積分のうち、より特異性が強い境界積分が相殺され、この境界要素に対する数値積分の計算量が半減し、精度が向上する。また、有限の厚さを持つ金属境界に適用することも可能であり、マイクロストリップラインの解析に用いてその有効性を示した。

謝辞

本論文を閉じるに当たり、終始一貫懇切なる御指導を賜りました、北海道大学工学研究科量子エネルギー工学専攻 プラズマ理工学講座エネルギー変換工学分野の榎戸 武揚 教授に心から厚く御礼申し上げます。さらに、本研究に対して貴重な御助言を頂きました、成田 正邦 教授、澤村 貞史 教授に厚く御礼申し上げます。また、日頃より適切な御助言を賜わり、議論を深めて頂きました富岡 智 助教授に心より感謝申し上げます。

道都大学の伊藤 裕康 講師 には様々な御助言、議論をして頂きました。深く感謝致します。

北海道大学 45 MeV 電子 LINAC の利用に当りまして大変お世話になりました谷田 弘明 技官、佐藤 孝一 技官に厚く御礼申し上げます。

研究活動やさまざまな議論におつき合い頂いたエネルギー変換工学分野の北川 広貴 技官、同研究室の加藤 靖人 さん、伊藤 芳浩 君をはじめとする学生諸君、そして北海道自動車短期大学の加賀田 誠 講師に感謝致します。

参考文献

- [1] K. S. Yee, “Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell’s Equations in Isotropic Media”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 14, pp. 302–307, 1966.
- [2] K. S. Kunz and R. J. Lubbers, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*, Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.
- [3] 宇野 亨, *FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析*, Tokyo: コロナ社, 1998.
- [4] G. Mur, “Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations”, *IEEE Trans. on Electromagn. Compat.*, vol. 23, pp. 377–382, 1981.
- [5] J. P. Berenger, “A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetics Waves”, *Journal of Computational Physics*, vol. 114, no. 1, pp. 185–200, 1994.
- [6] V. D. Barger and M. G. Olsson (小林, 土佐 訳), *電磁気学 II*, Tokyo: 培風館, 1992.
- [7] T. Weiland, “Transverse Beam Cavity Interaction. Part I: Short Range Forces”, *Nuclear Instruments and Methods*, vol. 212, pp. 13–21, 1983.
- [8] J. Villasenor and O. Buneman, “Rigorous Charge Conservation for Local Electromagnetic Field Solvers”, *Computer Physics Communications*, vol. 69, pp. 306–316, 1992.
- [9] T. Shiozawa, T. Yoshitake, “Efficiency Enhancement in a Cherenkov Laser Loaded with a Kerr-Like Medium”, *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 31, pp. 539–545, 1995.
- [10] B. R. Poole et al., “3-D Electromagnetic Modeling of Wakefields in Accelerator Components”, *AIP Conf. Proc.*, no. 391, pp. 155–160, 1997.

- [11] T. Weiland, “Time Domain Electromagnetic Field Computation with Finite Difference Method”, *Int. J. of Numerical Modeling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 9, pp. 295–319, 1996.
- [12] J. Wang, P. Liewer and V. Decyk, “3D Electromagnetic Plasma Particle Simulations on a MIMD Parallel Computer”, *Computer Physics Communications*, vol. 87, pp. 35–53, 1995.
- [13] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, 2nd ed., Piscataway, NJ: IEEE PRESS, 1991.
- [14] M. Abramowitz and I. A. Stegun ed., *HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS*(tenth printing), New York, NY: Dover Publications, Inc., 1972.
- [15] 東京天文台 編, 理科年表 昭和 61 年, Tokyo: 丸善, 1985.
- [16] J. V. Jelley, *ČERENKOV RADIATION and its applications*, London: PERGAMON PRESS, 1958.
- [17] 佐川 雅彦, 貴家 仁志, 高速フーリエ変換とその応用, Tokyo: 昭光堂, 1993.
- [18] 久保田 一, 大石 邦夫, C 言語によるデジタル信号処理, Tokyo: コロナ社, 1999.
- [19] 宮川 洋 他, デジタル信号処理, 電子通信学会, 1975
- [20] H. Itoh et al., “A New Estimate Method of Micro-pulse Width Using Standing Wave Measurement”, *The 11th Sympo. on Accel. Sci. and Tech.*, Hyogo, Japan, pp. 415–417, 1997.
- [21] H. Itoh et al., “Measurement of the Width of Electron Beam Micro-Pulses Using Standing Waves”, *プラズマ・核融合学会誌*, vol. 74, pp. 29-36, 1998.
- [22] S. Nisiyama et al., “Scattered Fields Analysis with FD-TD Method around a Pulsed Electron Beam based on Point Charge Responses”, *The 24th Linear Accel. Meeting in Japan*, Sapporo, Japan, pp. 380–382, 1999
- [23] C. A. Brebbia, J. Dominguez 共著, 田中 正隆, 松本 敏昭, 中村 正行 共訳: 詳解 境界要素法, オーム社

- [24] B. Song and J. Fu, “Modified indirect boundary element technique and its application to electromagnetic potential problems”, *IEE Proc.-H*, vol. 139, no. 3, pp. 292–296, 1992.
- [25] 五十嵐 一, 本間 利久, “角点特異性を考慮した境界要素法”, *境界要素法論文集*, vol. 11, pp. 101–106, 1994.
- [26] J. C. Tippet, D. C. Chang, “A new approximation for the capacitance of a rectangular-coaxial-strip transmission line”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol 24, no. 9, pp. 602–604, 1976.