



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2007年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2007
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/28239">https://hdl.handle.net/2115/28239</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GRAPH2007.pdf, 講義ノート一括ダウンロード版



2003 ~ 2007 年度 北海道大学 工学部 情報工学科/電子工学科

# グラフ理論 講義ノート

2003 ~ 2007 年度

井上 純一

北海道大学 大学院情報科学研究科 複合情報学専攻

URL: [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/index.html](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/index.html)



# 目次

<b>第 1 回講義</b>	<b>7</b>
1.1 インTRODクシヨN — ウォーミングアップ —	7
1.1.1 ここで扱う「グラフ」とはいったい何か？	7
1.1.2 様々なグラフとその例	9
<b>第 2 回講義</b>	<b>17</b>
2.1 定義と例	17
2.1.1 単純グラフ	17
2.1.2 同形	18
2.1.3 ラベル付きグラフとラベルなしグラフ	19
2.1.4 連結グラフ	19
2.1.5 次数および次数列	19
2.1.6 部分グラフ	20
2.1.7 行列によるグラフの表現方法	21
<b>第 3 回講義</b>	<b>39</b>
3.1 様々なグラフの例	39
3.1.1 空グラフ	39
3.1.2 完全グラフ	39
3.1.3 正則グラフ	39
3.1.4 閉路グラフ	40
3.1.5 道グラフ	40
3.1.6 車輪	40
3.1.7 ピーターソン・グラフ	41
3.1.8 二部グラフ	41
3.1.9 完全二部グラフ	41
3.1.10 $k$ -立方体	42
3.1.11 単純グラフの補グラフ	42
3.2 グラフにまつわるいくつかのパズル	42
3.2.1 8つの円の配置問題	43
3.2.2 4つの立方体パズル	44
<b>第 4 回講義</b>	<b>63</b>
4.1 道と閉路	63
4.1.1 連結性	63
4.1.2 非連結化集合と分離集合	69

<b>第 5 回講義</b>	<b>83</b>
5.1 オイラー・グラフとハミルトン・グラフ	83
5.1.1 オイラー・グラフ	83
5.1.2 ハミルトン・グラフ	85
<b>第 6 回講義</b>	<b>103</b>
6.1 木とその数え上げ	103
6.1.1 木の基本的な性質	103
6.1.2 全域木	104
6.1.3 基本閉路集合と基本カットセット集合	105
<b>第 7 回講義</b>	<b>113</b>
6.1.4 木の数え上げ	113
6.1.5 点行列と行列木定理	117
<b>第 8 回講義</b>	<b>139</b>
8.1 平面性	139
8.1.1 平面グラフとオイラーの公式	139
8.1.2 交差数と厚さ	144
<b>第 9 回講義</b>	<b>157</b>
8.1.3 双対グラフ	157
8.2 グラフの彩色	161
8.2.1 点彩色	162
<b>第 10 回講義</b>	<b>173</b>
8.2.2 地図の彩色	173
8.2.3 辺彩色	175
8.2.4 彩色多項式	178
<b>第 11 回講義</b>	<b>195</b>
9.1 有向グラフ	195
9.1.1 有向グラフの定義・概念とその性質	195
9.1.2 オイラー有向グラフとトーナメント	199
<b>第 12 回講義</b>	<b>209</b>
9.1.3 マルコフ連鎖	209
<b>第 13 回講義</b>	<b>221</b>
10.1 マッチング, 結婚, Menger の定理	221
10.1.1 Hall の結婚定理	221
10.1.2 横断理論	222
10.1.3 横断と結婚問題, 及び, Hall の定理との関係	222
10.1.4 Hall の定理の応用例: ラテン方阵	223
10.1.5 Menger の定理	224
10.2 ネットワークフロー	225
10.2.1 最大フローの逐次構成法	227
10.2.2 最大マッチングへの適用	228

2004 年度 期末試験 (情報工学科 3 年生/電子工学科 4 年生)	235
2004 年度 期末試験解答 (情報工学科 3 年生/電子工学科 4 年生)	237
2005 年度 期末試験 (情報工学科 3 年生/電子工学科 4 年生)	241
2005 年度 期末試験解答 (情報工学科 3 年生/電子工学科 4 年生)	243
2005 年度 期末試験総評 (情報工学科 3 年生/電子工学科 4 年生)	247
2006 年度 期末試験 (情報工学科 3 年生/電子工学科 4 年生)	249
2006 年度 期末試験解答 (情報工学科 3 年生/電子工学科 4 年生)	251
2006 年度 期末試験総評 (情報工学科 3 年生/電子工学科 4 年生)	255
2007 年度 期末試験 (電子工学科 4 年生)	257
2007 年度 期末試験解答 (電子工学科 4 年生)	261
2007 年度 期末試験総評 (電子工学科 4 年生)	267



# 第1回講義

## 1.1 イントロダクション — ウォーミングアップ —

まずは本講義で扱う「グラフ」の定義から始め、本講義で習う事項を概観することにしよう。それぞれの概念の詳細および応用例は回を進めるごとに追々見て行くことになる。

講義を進めるうちに幾つかの定理、系、補題が出てくるが、本講義ではそれらの中で比較的重要と思われるものに関しては、その証明を追ってみるが、それ以外のものに関しては、具体的な例/応用例を取り上げ、諸定理の意味を直観的に理解し、有用性を確認するにとどめる。講義で取り上げなかった証明に関しては各自が教科書/参考図書等を読み、必ず一度はその流れを追ってみること。

途中に現れる例題 \*.\* は北海道大学工学部情報工学科(選択科目として電子工学科)において過去5年間(2002~2007年度)にわたり当講義(および、情報工学演習II(B))で「演習問題」として出題されたものに解答/解説をつけたもの(場合によっては補助問題/発展問題もついている)である。時間の都合上、講義時間内には取り上げるのでないものもあるが、各自がこれらの例題とその解答を一度は追っておくこと。グラフ理論の理解にはできるだけ多くの例題にあたり、沢山のグラフを自分で実際に描きながら問題を解くことが重要であるように思う。

こうした毎回の「演習問題」に対し、こちらが示した解答例とは異なった別解法の提示やコメント、解答例における誤植、間違い等の指摘をして頂いた、一部の熱心な受講生の皆さんに感謝します。

### 1.1.1 ここで扱う「グラフ」とはいったい何か？

グラフに関する詳しい説明を始める前に、ウォーミングアップとして基本的な概念を概観することにす。どの科目でもそうであるが、グラフ理論においても、はじめに覚えなければならない幾つかの用語や定義がある。決して難しくはないが、これから教科書や講義ノート、あるいはより進んだ専門書、論文等を読み進めるにあたり支障がでないように、この段階できちんと押さえておくことが慣用である。

点, 辺, 次数

グラフという我々のもつイメージとしては物理実験などでお馴染みの速度の時間的な変化を表す「グラフ」、企業の年度別収益などを表す「棒グラフ」などが思い浮かぶが、グラフ理論で扱うグラフはこれらとは異なり、点および辺からなる、より抽象的な幾何学図形である。

グラフ … 点 (vertex) (図 1.1 の P, Q, R, S, T), 及び, 辺 (edge) (図 1.1 の  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{QR}$  等) からなる図形。  
次数 (degree) … ある点を端点とする辺の本数。

例：図 1.1 の点 P の次数は 3. 図 1.1 の点 Q の次数は 4.

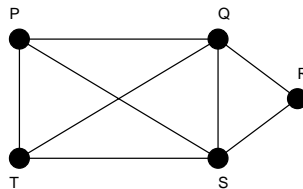


図 1.1: この講義で扱う「グラフ」の一例. このグラフの点数は  $n = 5$ , 辺数は  $m = 8$  であり, それぞれの点の次数は  $\text{deg}(P) = \text{deg}(T) = 3, \text{deg}(Q) = \text{deg}(S) = 4, \text{deg}(R) = 2$  である.

これを式で表すと次のように書ける<sup>1</sup>. グラフにおける次数とは, 下記のように P,Q のように点を指定して初めて定義される量であることに注意しよう.

$$\begin{cases} \text{deg}(P) = 3 \\ \text{deg}(Q) = 4 \end{cases} \quad (1.1)$$

### グラフに意味を持たせる

我々は今までにも無意識のうちに上記のようなグラフを用いて実問題を表してきた. 例えば, 図 1.1 の P,Q,R,S,T … フットボールチーム  $\Rightarrow$  各点の次数がそのチームが行う試合数となる. こうすることによって, 格段に対象に対する見通しが良くなるからであるが, 例えば, このグラフから点 P の次数を確認することで「 $\text{deg}(P) = 3 \Rightarrow$  チーム P が行う試合数は 3 である」のように有益な情報を得ることができる. グラフ理論ではこうした見方を体系立てて学んでいく.

この他にも, 電気回路, 道路等, 様々な形でグラフに意味を持たせ, その対象をグラフ理論的な考察に基づき調べることができる.  $\Rightarrow$  例題 1.1 2,3 参照.

### グラフの同形性

グラフとは点の集合とそれらの結び方(辺の集合)の表現であり, 距離的な性質とは無関係である. 例えば, 下記の 2 つの図形はグラフ理論においては同じものとして扱われる. 従って, 実問題をグラフで表現す

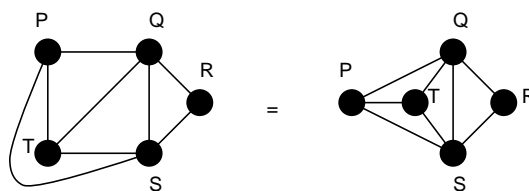


図 1.2: 同形な 2 つのグラフの一例. 辺を適切に移動することにより, 左図から右図が得られることを各自が確認してみるとよい.

際には扱いやすいもの(調べたい関係性が見やすいもの)を選ぶことが肝要である. 後にみるが, より数学的には 2 つのグラフ A, B が同形か否かは, 同形写像と呼ばれる A の点と B の点の間の一対一対応が存在するか否かで判定される<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> 点(頂点)の個数をこの講義ノートでは「点数」と呼び, 例えば, 5 個の数からなる持つグラフの点数を  $n = 5$  と表記するが, 教科書によっては, この数を位数と呼び, グラフ G の位数を  $|G|$  と表すものも多い(また, 辺数は  $||G||$  と表す場合もある). このように, 同じグラフ理論の記号でも教科書や文献によっては異なる記号, 呼び方をすることがあり, それが初学時の悩みの種となっている. 本講義では一貫した呼び方, 記号を使うので問題はないが, 近い将来, より進んだ学習をする際には注意が必要である.

<sup>2</sup> 同形な 2 つのグラフに同じ値が与えられるものをグラフの不変量と呼び, 点数や変数はこの不変量の一つである.

グラフの表現には図 1.2 のような点と線による描画の他に、隣接行列、接続行列等の行列を用いることもできる。この表現法は計算機上でグラフを扱うためには有用である。これらの行列に関する詳細は次回以降に見て行くことになる。

### 1.1.2 様々なグラフとその例

全てのグラフはその幾何学的な性質の違いからグループに分類され、それぞれのグループには名前が付けられている。ここでは、その中のいくつかを概観する。

#### 多重辺、ループ、単純グラフ

多重辺 (multiple edges) … 任意の 2 点  $P, Q$  を 2 本以上の辺 が結んでいる場合、それを多重辺と

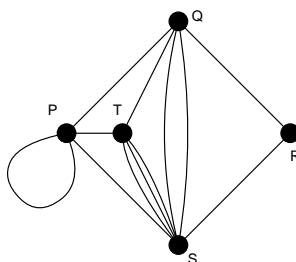


図 1.3: この図において、辺  $\overline{TS}, \overline{QS}$  は多重辺であり、点 P には一つのループがある。

呼ぶ。

ループ (loop) … 任意の点 P から P 自身へ戻る辺

⇒ 単純グラフ (simple graph) … 多重辺やループを含まないグラフ

#### 有向グラフ

有向グラフ (directed graph : digraph と呼ばれることが多い) … 辺に向きが与えられたグラフ

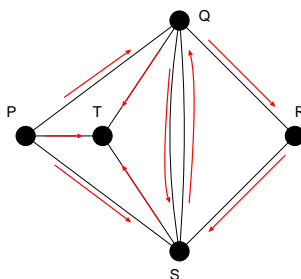


図 1.4: 有向グラフの一例。各辺に向きを持たせることにより、任意の 2 点間の関係性 (例えば、P は Q に好意を持っている等) を明示させることができる。

歩道 (walk) … 連結した辺の列。

道 (path) … どの点も高々一度しか現れない歩道.  
 閉路 (cycle) … 図 1.2 の右側の  $Q \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow Q$  のような道.

有向グラフを用いた例としては例題 1.1 の 2 を参照.

連結グラフと非連結グラフ

「全部つながっているか」「つながっていないか」でグラフを分類することもできる.

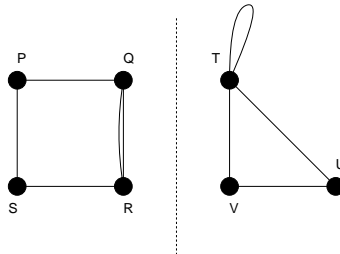


図 1.5: 非連結グラフの一例. 成分数は 2 である.

連結グラフ (connected graph) … どの 2 つの点も道で結ばれているグラフ.  
 非連結グラフ (disconnected graph) … 連結グラフではないグラフ (図 1.5 参照).

非連結グラフを構成する各連結グラフを成分 (component) と呼ぶ. 図 1.5 の例でみるならば, 「この非連結グラフは 2 つの成分を持つ」ということになる.

オイラー・グラフとハミルトン・グラフ

グラフにはその考案者の名前が付けられたものも多い. ここに出てくる 2 つのグラフ: オイラー・グラフ, ハミルトン・グラフはそれらの中で最も有名なものである.

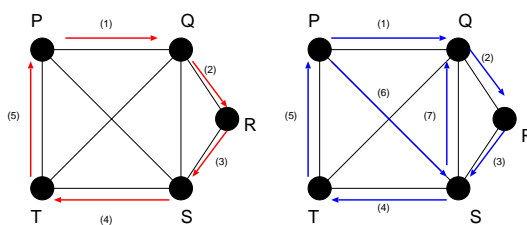


図 1.6: この図はハミルトン・グラフではあるが (左図), オイラー・グラフではない (右図).

- オイラー・グラフ (Eulerian graph)
- … 全ての辺をちょうど 1 回ずつ通って出発点に戻る歩道を含むグラフ.
- ハミルトン・グラフ (Hamiltonian graph)
- … 全ての点をちょうど 1 回ずつ通って出発点に戻る歩道を含むグラフ.

連結グラフの点の数が多い場合, そのグラフがオイラー・グラフか, ハミルトン・グラフであるか, を実

際に該当する歩道を見つけることによって判定するのは容易なことではない。このようなとき、与えられた連結グラフがオイラー・グラフであるための条件、ハミルトン・グラフであるための条件 (これは十分条件) が知られており、それぞれ Euler (オイラー) の定理, Ore (オーレ) の定理としてまとめられている。これらを用いることにより、与えられた連結グラフのオイラー性、ハミルトン性を判定することができるようになる。これらは後に詳しく学ぶ<sup>3</sup>。

木

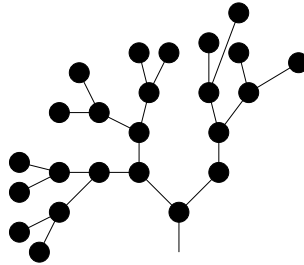


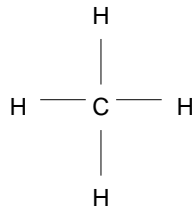
図 1.7: 木の一例.

木 (tree) … どの 2 点の間にも道が 1 本しかない連結グラフ (図 1.7 参照).  
ワークステーションのファイルシステム, 生物進化の系統図などは木構造を持つ.

<sup>3</sup> オイラー閉路の問題はケーニヒスベルグ (現カーニングラード) の街にある橋を 1 回ずつ通ってもとにもどる問題を数学者オイラーが考えたことに由来するらしい。カーニングラードはポーランドに近い東欧のロシア領らしいが、せっかくグラフ理論で学んだわけだから、実際にどのような橋の配置だったのかを確かめに現地を一度訪れてみたいような気もしてくる。

例題 1.1 (2004 年度 演習問題 1)

1. 化学式  $C_5H_{12}$  を持つ分子にはいくつかの構造の異なる分子が存在する (「構造異性体」). これらの分子を全て挙げ, 図 ( $CH_4$ ) に従って, それぞれに対応するグラフを描け.



2. John は Joan が好きで, Jean は Jane が好きで, Joe は Jean と Joan が好きで, Jean と Joan は互いに好きである. John, Joan, Jean, Jane 及び Joe の間の関係を説明する有向グラフを描け.  
 3. a,b,c,d,e,f の 6 チームでホッケーの試合をすることになった. 各チームの行った試合数は

チーム名	a	b	c	d	e	f
試合数	2	2	4	4	3	1

であった. このとき, 考え得る試合の組み合わせをグラフで表し, それらを全て描け. ただし, 同一カードは 2 試合以上行わないものとする.

(解答例) :

1. グラフ理論的にこの問題を言い換えてみると, 問題である『 $C_nH_{2n+2}$  の構造異性体の数を数える』ことは, 『 $n$  個の点の次数が 4 であり, 残りの  $2n+2$  個の点の次数が 1 である「ラベルなし木」の総数を数える』ということになる.

炭素原子同士のつなげ方を決めれば, 水素原子の配置の仕方は自動的に決まるので, 可能な炭素原子の配置を数えあげて行けばよい. 図 1.8(左) にその結果を載せる.

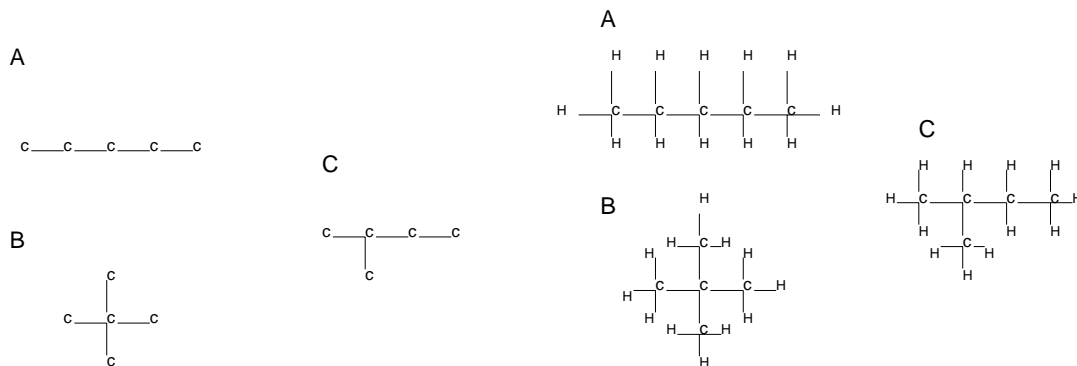


図 1.8:  $n = 5$  の場合に可能な炭素原子配列 (左). なお, A は「ペンタン」, B は「2-2-ジメチルプロパン」, C は「2-メチルブタン」と呼ばれる有機化合物である. また, 右図は  $C_5H_{12}$  の構造異性体.

従って, 求める構造異性体は上記の炭素原子の残りの手に水素原子を付加すればよく, 答えは下の図 1.8(右) のようになる.

注：求めるグラフは「木」でなければならない（つまり、どの2点間にも道が2本以上存在してはならない）ので、図 1.9 のような配置は許されず、実際、この炭素配列で水素原子も並べてみると  $C_5H_{10}$  となり、 $C_5H_{12}$  とは異なるものが出来上がってしまう。<sup>4</sup>

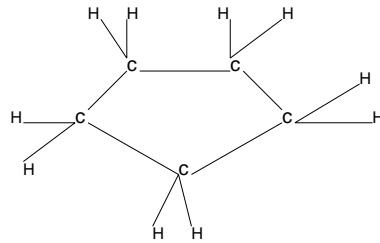


図 1.9:  $C_5H_{10}$ .

2. 求める有向グラフは (好意を持っている人物)  $\rightarrow$  (好意を持たれている人物) のように矢印をつける約束にすると図 1.10(左) のようになる.

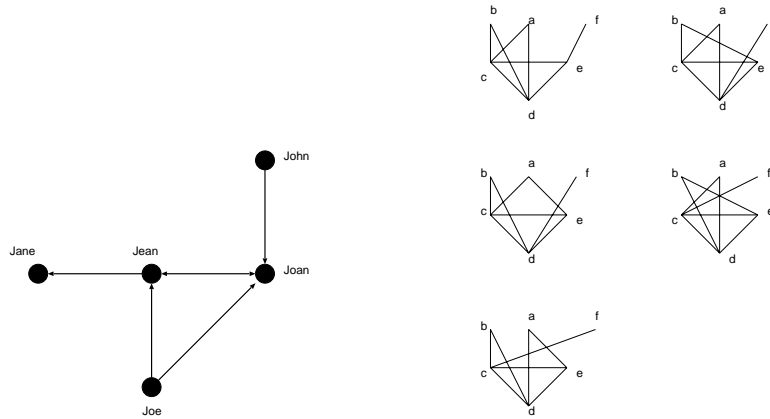


図 1.10: John, Joan, Jean, Jane 及び Joe の関係図 (左). 考え得る対戦カードを表す 5 種類のグラフ (右).

3. 考え得る組み合わせのグラフは図 1.10(右) のように 5 通りある.

**例題 1.2** (2005 年度 **演習問題 1**)

- (1) 点の集合が  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  で与えられ、かつ、辺の集合が  $E = \{\overline{v_1v_3}, \overline{v_2v_3}, \overline{v_3v_4}, \overline{v_4v_1}, \overline{v_4v_3}, \overline{v_5v_6}\}$  からなるグラフを描け.
- (2) ヘビはカエルを食べ、トリはクモを食べる。トリとクモはどちらも虫を食べる。カエルはカタツムリ、クモ、および、虫を食べる。この捕食行動を表す有向グラフを描け.

(解答例)

簡単なので結果だけ描く.

- (1) 単純グラフとは明示されていないので、図 1.11 (左) のような多重辺を含む非連結なグラフとなる.
- (2) 名前を s(へび), f(カエル), sn(カタツムリ), sp(クモ), b(トリ), i(虫) とし、(食べるもの) (食べられるもの) のように矢印を描く約束にすれば、図 1.11 (右) のようになる.

<sup>4</sup> 系統的な木の数え上げに関しては後に Cayley (ケイリー) の定理で学ぶことになります.

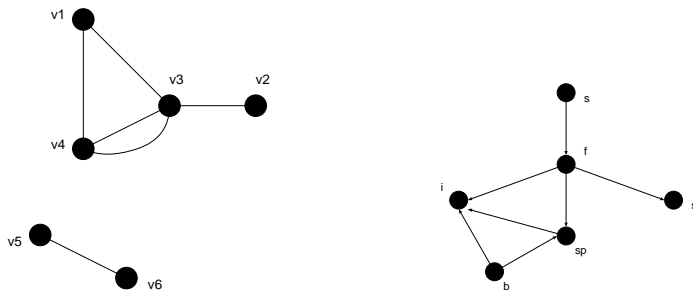


図 1.11: 多重辺のある成分を含む, 非連結グラフ (左). 捕食関係を表す有向グラフ (右).

**例題 1.3** (2006 年度 演習問題 1)

以下の問いに答えよ.

- (1) 身の回りの事柄で, それが「木」のグラフで表現できるものを一つ挙げよ.  
(ただし, 講義で取り上げたワークステーションのファイルシステム, 生物進化の系統図, 有機化合物の構造以外を選ぶこと)
- (2) どの辺の 2 つの端点も異なる集合 (グループ) に属するように  $n$  個の点を 2 分割するようなグラフを 2 部グラフと呼んでいる. このとき,  $n = 7$  である 2 部グラフを描き, そのグラフが奇数本の辺からなる閉路を含まないことを示せ.  
(実はグラフに奇数本の辺からなる閉路が含まれないことが 2 部グラフであるための必要十分条件となっているのであるが, この証明は後に詳しく見て行くことにする. ここでは, 具体的に上記の事実を  $n = 7$  の 2 部グラフに対して示すだけでよい.)

(解答例)

- (1) 木の構造を持つものであれば何でも良いが, 例えばトーナメント形式の対戦カードの表などは木である.
- (2) 例えば  $n = 7$  の二部グラフは図 1.12 のようになる. 従って, このグラフの中に現れる閉路:  $3 \rightarrow 5 \rightarrow$

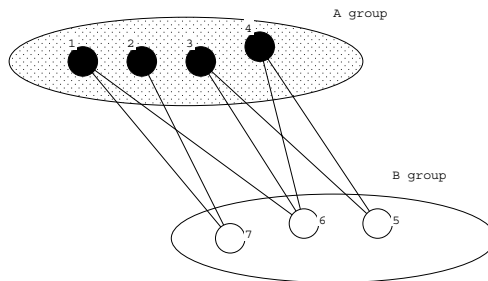


図 1.12: 7 個の点からなる二部グラフの例. 全ての点は group A が group B のいずれかに所属し, お互い異なるグループに属する点どうしだけが辺で結ばれる.

$4 \rightarrow 6 \rightarrow 3$  を見ると確かに偶数本の辺からなり, 奇数本の辺ではない. 一般的に言って, 二部グラフはその定義より, 一つの点から出発し (これを group A としよう), 様々な経路を経て自分自身に戻ることができ, 閉路ができたとするならば, 必ず  $A \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow A$  のような経路をたどるはずであり, 従って, この中に含まれる辺の個数 (ここで書いたところの  $\rightarrow$  の個数) は必ず偶数本であり, 奇数本であることはありえない.

例題 1.4 (2007 年度 演習問題 1)

- (1) 身の回りでオイラー・グラフ, ハミルトン・グラフの性質をうまく使っている実例をそれぞれ挙げよ.
- (2) 点集合  $V$  と辺集合  $E$  がそれぞれ,

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{\overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \overline{v_3v_4}, \overline{v_4v_5}, \overline{v_5v_1}, \overline{v_1v_3}, \overline{v_3v_5}, \overline{v_5v_2}, \overline{v_2v_4}, \overline{v_4v_1}\}$$

で与えられるグラフの概形を描け. また, このグラフの持つ特徴を考察し, それらのうち 2 つを挙げよ.

(解答例)

(1) 例えば, 展示会の会場を設計する場合, 各ブース (点とみなす) に出し物があり, 来場者に各ブースを 2 度以上通らずに会場内をまわり, 入口から出口 (入り口と共用) へとスムーズに移動してもらうためには, ハミルトン・グラフが適しており, ハミルトン・グラフの各頂点に各ブースが対応するような会場を設計すれば良い. 一方, 展示物が各ブースではなく, 各通路に展示されているような場合. 例えば, 美術館などに展示されている絵画は順路上に掲げられている場合が多いが, このような場合には来客が入り口から全ての通路を 1 回だけ通り, 一筆書きの順路で出口 (入り口と共用) へと戻れるように会場を設計することが望ましい. この場合にはオイラー・グラフが適している.

また, 雪国である札幌市特有の問題として「市内の除雪作業」がある. この場合, 除雪車の巡回経路はオイラー・グラフであることが望ましい. では実際, 札幌市内の道路をオイラー・グラフとみなして良いか否かであるが, 市内の主な道路は交差点の各々が「北 14 条西 9 丁目」のように指定される「碁盤の目」のように区画化されていることに注意すると, 各道路の交差点での次数は 4 であることから (市内の最外郭を無視した「部分グラフ」を取り出すと), 後に詳しくみるオイラーの定理より, オイラー・グラフとみなすことができる. 従って, このオイラー・グラフ上のオイラー閉路を適切に選んで除雪車を巡回させることで, 既に除雪した道路は 2 度と通らないで済むという意味でコストを削減することができる. もっとも, 市内の住宅街周辺のローカルな道路 (除雪作業においては, より本質的である) は碁盤の目状ではなく, (当然奇数次の点も含む) より複雑な形状であるため, そのようなローカルな道路も含めた場合, オイラー閉路が存在しない場合もあることに注意しなければならない.

(2) 問題の点, 辺集合からなるグラフを実際に描いてみると 1.13 となる. このグラフは (点数 5 の) 完全グ

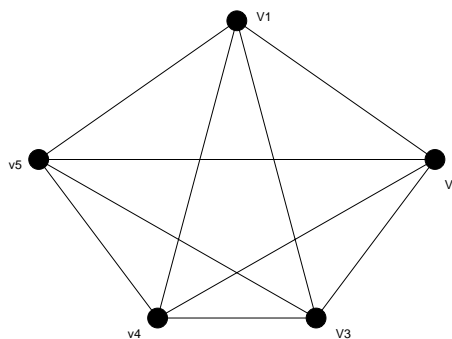


図 1.13: 答えのグラフ. 完全グラフと呼ばれる.

ラフと呼ばれ, 例えば次のような特徴を有する.

- 全ての点は自分以外の全ての点と結ばれる.
- 問題のグラフは 10 本の辺を有する. (一般に辺の数は点数を  $n$  とすると  ${}_nC_2 = n(n-1)/2$  本ある.)
- オイラー・グラフであり, ハミルトン・グラフでもある. ただし, オイラー・グラフであるのは点の個数が奇数のときのみ. 今の場合には点数 5 なのでオイラー.

この完全グラフは今後頻出するので覚えておくと良い.

## 第2回講義

### 2.1 定義と例

この節ではグラフ理論に現れる数々の定義を例を交えながら解説する。部分的に前回講義で紹介した事項をも含むが、例えば「同形」の定義など、より正確な記述をここから学んで行くことになる。

#### 2.1.1 単純グラフ

単純グラフ：グラフにループが含まれず、頂点のどの対も高々1つのリンクで結ばれているグラフ。

$V(G)$ ：グラフ  $G$  の点集合 (vertex set)

$E(G)$ ：グラフ  $G$  の辺集合 (edge set)

$\psi_G$ ：グラフ  $G$  の接続関数 (incidence function)

どのグラフ (単純グラフも含む)  $G$  も  $V(G)$  と  $E(G)$  からなる。

難しく言う ⇒ 『グラフ  $G$  は  $V(G)$  と  $V(G)$  の元の内順序対からなる有限な族 (複数個の同じ元があってもよい) である  $E(G)$  からなる。』

図 2.14 に単純グラフとその点集合及び辺集合を載せる。前出のグラフ  $G$  の接続関数とは  $G$  の各辺に  $G$  の頂点の対を対応させる関数であり、この図の例でいくと

$$\psi_G(e_1) = uv, \quad \psi_G(e_2) = vw$$

$$\psi_G(e_3) = wu, \quad \psi_G(e_4) = wz$$

のようになる。

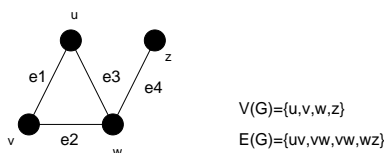


図 2.14: 単純グラフ  $G$  の例と点集合  $V(G)$  及び辺集合  $E(G)$ .

一方、図 2.15 に一般グラフ (general graph) (ループや多重辺をも許されたグラフ) の一例を載せる。この図において各辺の現れる回数は  $uv$  (1 回),  $vv$  (ループ, 2 回),  $vw$  (3 回),  $wv$  (2 回),  $wz$  (1 回) である。

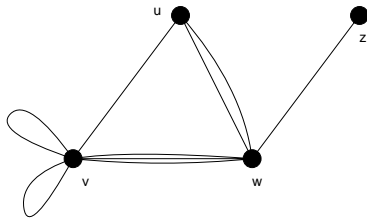


図 2.15: 一般グラフ G の一例.

### 2.1.2 同形

2つのグラフ  $G_1$  と  $G_2$  の間に一対一の対応関係があり,  $G_1$  の任意の2点を結ぶ辺数が  $G_2$  の対応する2点を結ぶ辺数に等しいとき,  $G_1$  と  $G_2$  は同形 (isomorphic) であるという. 図 2.16 の2つのグラフ  $G_1$  及

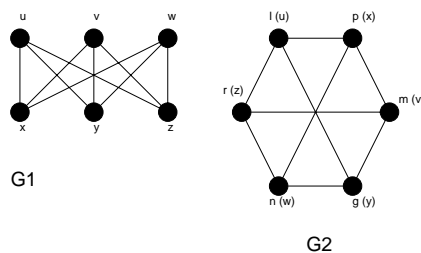


図 2.16: 同形グラフ  $G_1$  と  $G_2$ .

び  $G_2$  は同形であり,  $G_2$  中に書き込んだような対応関係を持つ.

(補足事項)

先に定義した接続関数を用いると, 2つのグラフ  $G_1, G_2$  が同形であるとき, 1対1写像:

$$\theta : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$$

$$\phi : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$$

が次の関係:

$$\psi_{G_1}(e) = uv \iff \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立つ. このような写像の対  $(\phi, \theta)$  を  $G_1, G_2$  間の同形写像と呼び, この同形写像が存在する場合,  $G_1, G_2$  は同形であると言い, 式では  $G_1 \cong G_2$  と表現する.

これを実際に図 2.16 の  $G_1, G_2$  で確かめると

$$\theta(u) = l, \theta(v) = m, \theta(w) = n$$

$$\theta(x) = p, \theta(y) = g, \theta(z) = r$$

及び

$$\phi(\overline{ux}) = \overline{lp} = \overline{\theta(u)\theta(x)}$$

$$\phi(\overline{uz}) = \overline{lr} = \overline{\theta(u)\theta(z)}$$

... ..

となるから

$$\psi_{G_1}(\overline{ux}) = ux \iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{ux})) = \psi_{G_2}(\overline{lp}) = lp = \theta(u)\theta(x)$$

等の成立が確かめられ、従って、図 2.16 の  $G_1, G_2$  は同形であることがわかる (もちろん、この場合の写像  $\phi, \theta$  は同形写像である)。

### 2.1.3 ラベル付きグラフとラベルなしグラフ

各点に名前の付されたグラフをラベル付きグラフと呼ぶ。前回の講義でみた例題 1.1 で扱った炭素原子を並べた木に関しても、この課題では「ラベルなし」としてその場合を数えたが、ラベル付きの木として扱う際には図の 2 つの木は別個の木として扱うことになる。

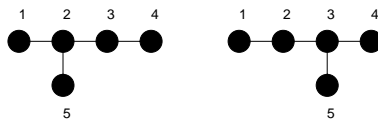


図 2.17: 例題 1 で扱った炭素原子の木をラベル付きで考えると両者は異なる木とみなされる。

### 2.1.4 連結グラフ

連結グラフとは平たく言えば「一つにつながっているグラフ」ということになるが、点同士が「連結する」「連結される」という概念を用いると、下記のように、もう少し丁寧に連結グラフを定義することができる。

まず、グラフ  $G$  の点  $u, v$  に関して、 $G$  に  $u, v$  を結ぶ道があれば、 $u$  は  $v$  に連結されると言う。

そこで、グラフ  $G$  を構成する任意の 2 点  $u, v$  に対し、

$$u \text{ は } v \text{ に連結される} \iff u \text{ は } v \text{ と同じ } V_i \text{ に属する}$$

というようにグラフ  $G$  を  $G$  の点からなる空でない部分集合  $V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_n$  で分割したとき、各集合からなる部分グラフ  $G(V_1), G(V_2), \dots, G(V_n)$  をそれぞれグラフ  $G$  の成分 (component) と呼び、成分が 1 つだけのグラフを連結グラフ (connected graph) と定義する。図 2.18 に連結グラフ ( $G_1$ ) 及び、成分数が 3 である非連結グラフ ( $G_2$ ) の例を載せる。言うまでもないことだが、非連結グラフ (disconnected graph) とは連結グラフでないグラフのことである。

### 2.1.5 次数および次数列

グラフ  $G$  及びその中の点  $v$  に関する、次にあげる重要な概念を押さえておこう。

- 点  $v$  の次数 (degree)  
 $v$  に接続している辺の本数。ただし、ループの場合は 2 本とカウントする。式で書くと  $\deg(v)$  となる。

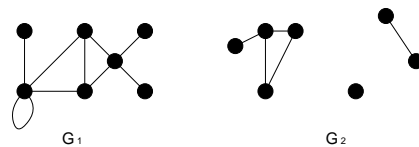


図 2.18: 連結グラフ  $G_1$  と非連結グラフ  $G_2$ .  $G_2$  の成分数は 3 である.

- 孤立点 (isolated vertex)  
次数ゼロの点
- 端点 (end-vertex)  
次数 1 の点
- グラフ  $G$  の次数列 (degree sequence)  
次数を増加順に記したもの. 必要となれば同じ次数を繰り返しても良い. 図 2.18 の  $G_1$  の例で言うと, この連結グラフの次数列は  $(1, 1, 1, 3, 3, 4, 5)$ .

また, グラフの次数に関して次の有名な補題が知られている.

握手補題 (handshaking lemma) : 任意のグラフの全ての点の次数を合計すれば必ず偶数になる.

また, 整数列  $d_1, d_2, \dots, d_n$  が与えられたとき,  $n$  個の点からなるグラフ  $G$  に対し, 各  $i$  に関して

$$\deg(v_i) = d_i \tag{2.2}$$

が成立するとき, 数列  $d_1, d_2, \dots, d_n$  はグラフ的であるという. 例えば, 数列  $(4, 3, 2, 2, 1)$  はグラフ的であり,

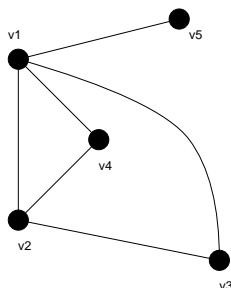


図 2.19: 「グラフ的」であるグラフの一例.

そのグラフは図 2.19 である. 対応関係は

$$d(v_1) = 4, d(v_2) = 3, d(v_3) = 2, d(v_4) = 2, d(v_5) = 1 \tag{2.3}$$

となる.

### 2.1.6 部分グラフ

グラフ  $G$  の部分グラフ (subgraph) : 点が全て  $V(G)$  に属し, その辺が全て  $E(G)$  に属するグラフ.

従って、いかなる場合にも、グラフ  $G$  の点と辺の除去、及び辺の縮約 (辺を除去し、その辺の両端についていた 2 点を同一視して 1 点にすること) という操作を行うことにより、グラフ  $G$  の部分グラフを作ることができる。

### 2.1.7 行列によるグラフの表現方法

グラフを計算機上で表現する場合には個々のグラフの特徴を数量化し、その数字を用いてコーディングする必要がある。このとき、下記に挙げる隣接行列及び、接続行列という行列による表現方法が便利である。

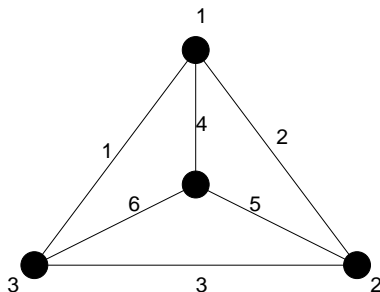
グラフ  $G$  の点及び辺が  $1, 2, \dots, n, 1, 2, \dots, m$  とそれぞれラベル付けされているとすると

隣接行列 (adjacency matrix) : 点  $i$  と点  $j$  を結ぶ辺の本数を第  $ij$  要素とする  $n \times n$  の行列

接続行列 (incidence matrix) : 点  $i$  が辺  $j$  に接続している場合、第  $ij$  要素が 1 であり、接続していない場合 0 であるような  $n \times m$  の行列<sup>5</sup>

#### 例題 2.1 (2003 年度 レポート課題 #1 問題 1)

図に与えられたグラフについて以下の問いに答えよ。



- (1) このグラフの次数列を書け。
- (2) 図のグラフに対して隣接行列  $A$  及び接続行列  $M$  を求めよ。

(解答例)

- (1) 次数列は  $(3, 3, 3, 3)$ 。
- (2) それぞれの定義に従えば隣接行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

接続行列  $M$  は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

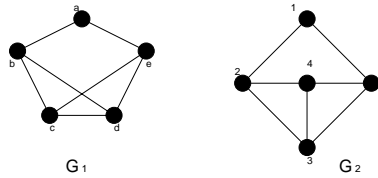
<sup>5</sup> 点  $v$  において辺  $e$  が「ループ」として接続している場合、このグラフの接続行列の第  $ve$  成分を、教科書によっては 1 と定義しているものと 2 と定義している 2 通りがあるようであるが、この講義ではこの場合 1 として接続行列を定義する。従って、接続行列の成分は必ず 0 か 1 である。

となる.

**例題 2.2** (2004 年度 演習問題 2)

以下の問題に答えよ.

1. 図の  $G_1$  と  $G_2$  の間の同形写像  $\phi, \theta$  を見つけよ.



また,  $G_1$  の任意の辺  $e$  及び点  $u, v$  に対して

$$\psi_{G_1}(e) = uv \iff \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立っていることを 2,3 の  $\{e, u, v\}$  の組に対して確かめよ.

2. 図 2.16 のグラフ  $G_2$  の部分グラフを 2 つ挙げよ.
3. 次の隣接行列  $A$ , 接続行列  $M$  で与えられるグラフをそれぞれ描け.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(解答例)

1. 求める同形写像  $\theta, \phi$  はグラフ  $G_1, G_2$  の各点に対して

$$\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4, \theta(e) = 5$$

各辺に対して

$$\begin{aligned} \phi(\overline{ab}) &= \overline{12}, \phi(\overline{bc}) = \overline{23}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}, \phi(\overline{bd}) = \overline{24} \\ \phi(\overline{de}) &= \overline{45}, \phi(\overline{ce}) = \overline{35}, \phi(\overline{ea}) = \overline{51} \end{aligned}$$

従って, この写像の下で

$$\begin{aligned} \psi_{G_1}(\overline{ab}) = ab &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{ab})) = \psi_{G_2}(\overline{12}) = \theta(a)\theta(b) \\ \psi_{G_1}(\overline{bc}) = bc &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{bc})) = \psi_{G_2}(\overline{23}) = \theta(b)\theta(c) \\ \psi_{G_1}(\overline{cd}) = cd &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{cd})) = \psi_{G_2}(\overline{34}) = \theta(c)\theta(d) \\ \psi_{G_1}(\overline{de}) = de &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{de})) = \psi_{G_2}(\overline{45}) = \theta(d)\theta(e) \\ \psi_{G_1}(\overline{ea}) = ea &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{ea})) = \psi_{G_2}(\overline{51}) = \theta(e)\theta(a) \\ \psi_{G_1}(\overline{ce}) = ce &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{ce})) = \psi_{G_2}(\overline{35}) = \theta(c)\theta(e) \\ \psi_{G_1}(\overline{bd}) = bd &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{bd})) = \psi_{G_2}(\overline{24}) = \theta(b)\theta(d) \end{aligned}$$

が成り立つ.

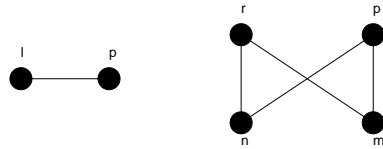


図 2.20: グラフ  $G_2$  の部分グラフの例.

2. 例えば図 2.20 のようなグラフが  $G_2$  の部分グラフである.
3. まず, 隣接行列  $A$  について考える. この隣接行列のサイズから, 求めるグラフの点の数は  $n = 5$  であり, 隣接行列は必ず対称行列であることに注意しよう. また, この行列  $A$  の対角成分は全てゼロであることから, このグラフにはループが含まれないことが直ちにわかる. 以上に注意しながら隣接行列の定義に従ってグラフを描くと図 2.21 のようになる. もちろん, この図と全く同じでなくても, 同形なグラ

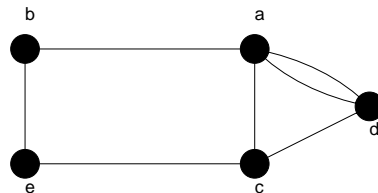


図 2.21: 隣接行列が  $A$  で与えられるグラフ. ここで, 隣接行列  $A$  の第 1 行, 2 行, ... の番号として, 図の点 a, b, ... が対応していることに注意.

フならば正解である.

次は接続行列  $M$  を持つグラフに関してであるが, 以下の点に注意しながら考察するとグラフが描きやすい.

- 隣接行列の各列には必ず 2 個の 1 があり, 対応する行の番号が付された点同士が結ばれ, それにより出来上がる辺にはその列の番号が割り当てられる.
- 第  $i$  行, 第  $j$  行に 1 が立っている列が  $l$  本ある場合, 点  $i, j$  間には  $l$  重の多重辺が存在する.

以上に注意しながらグラフを描くと図 2.22 のようになる.

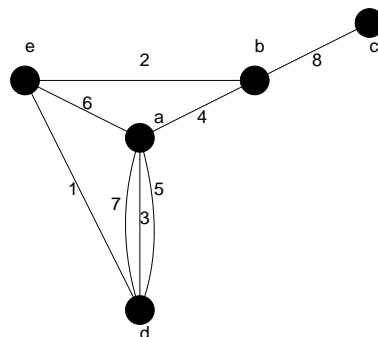
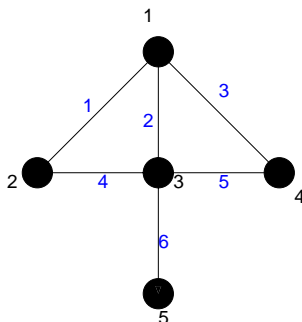


図 2.22: 接続行列が  $M$  で与えられるグラフ. ここで, 接続行列  $M$  の第 1 列, 2 列 ... の番号として, 図の a, b, ... が対応していることに注意.

例題 2.3 (2005 年度 演習問題 2)

以下の問いに答えよ.

- (1) 5 個の点と 8 本の辺をもつ次のようなグラフを描け.
  - (i) 単純グラフ
  - (ii) ループがない, 単純でないグラフ
  - (iii) 多重辺がない, 単純でないグラフ
- (2) 図に与えられるグラフの隣接行列  $A$ , 接続行列  $M$  を求めよ.



- (3) 6 点からなるグラフで, 各点の次数列が  $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$  であるものを描け. この次数をもつ単純グラフは存在するか?

(解答例)

- 1. (i)(ii)(iii) を満たすグラフは図 2.23 のようになる.

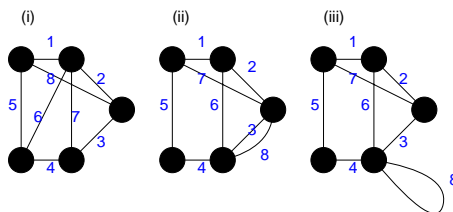


図 2.23: 5 個の点と 8 本の辺をもつグラフで条件 (i)(ii)(iii) を満たすもの.

- 2. 定義に従えば, 隣接行列  $A$ , 接続行列  $M$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

- 3. 図 2.24 を参照. 単純グラフは無い.

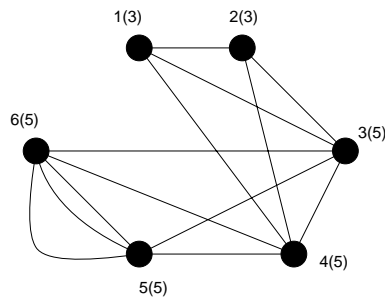


図 2.24: 6 点からなるグラフで次数列  $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$  であるもの.

**例題 2.4** (2006 年度 演習問題 2)

以下の問いに答えよ.

- (1) 講義ノート #1 の例題 1.3 (2) の解答に載せた図の二部グラフの隣接行列と接続行列, 及び次数列をそれぞれ求めよ. ただし, 接続行列を求める際には, 各自がどのように各辺に番号をふったのかを明示して解答を作成すること.
- (2) 次数列  $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$  はグラフ的か? 理由とともに答えよ.
- (3) 例題 2.2 の 1. にならって図 2.25 に載せた 2 つのグラフ  $G_1, G_2$  の同形写像  $\theta, \phi$  を見つけ,  $G_1$  の任意の辺  $e$  及び点  $u, v$  に対して

$$\psi_{G_1}(e) = uv \iff \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立っていることを  $\{e, u, v\}$  の組に対して確かめよ.

(解答例)

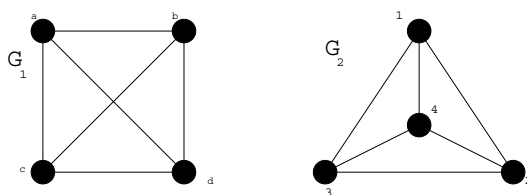


図 2.25: ここでその同形性を議論するグラフ  $G_1, G_2$ .

(1) 問題の二部グラフの隣接行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

となる. また, 図 2.26 のように各辺に番号を振ると, このグラフの接続行列  $M$  は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

と書ける.

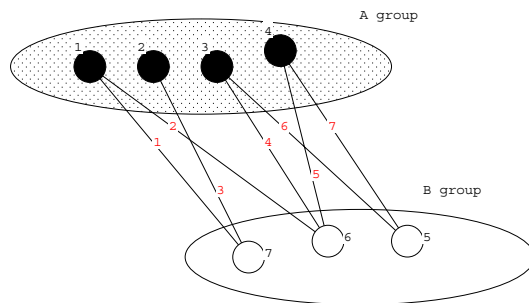


図 2.26: 図のように各辺に番号を振って接続行列を求める.

- (2) 図 2.27 に描いた完全二部グラフ  $K_{3,3}$  の次数列は  $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$  であるから, この次数列  $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$  は「グラフ的」である.

完全二部グラフ  $K_{3,3}$  の描き方は解答例以外にも様々考えられる. この解答例と同形なグラフであれば正解.

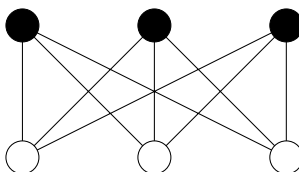


図 2.27: 図の完全二部グラフの次数列は  $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$  である.

- (3) 写像  $\theta, \phi$  を

$$\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4 \quad (2.9)$$

$$\phi(\overline{ab}) = \overline{12}, \phi(\overline{ac}) = \overline{13}, \phi(\overline{ad}) = \overline{14}, \phi(\overline{bd}) = \overline{24}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}, \phi(\overline{bc}) = \overline{23} \quad (2.10)$$

とすれば, 接続関数  $\psi_{G_1}, \psi_{G_2}$  に対して

$$\psi_{G_1}(\overline{ab}) = ab \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ab})) = \psi_{G_2}(\overline{12}) = 12 = \theta(a)\theta(b) \quad (2.11)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{ac}) = ac \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ac})) = \psi_{G_2}(\overline{13}) = 13 = \theta(a)\theta(c) \quad (2.12)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{ad}) = ad \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ad})) = \psi_{G_2}(\overline{14}) = 14 = \theta(a)\theta(d) \quad (2.13)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{bd}) = bd \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{bd})) = \psi_{G_2}(\overline{24}) = 24 = \theta(b)\theta(d) \quad (2.14)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{cd}) = cd \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{cd})) = \psi_{G_2}(\overline{34}) = 34 = \theta(c)\theta(d) \tag{2.15}$$

$$\psi_{G_1}(\overline{bc}) = bc \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{bc})) = \psi_{G_2}(\overline{23}) = 23 = \theta(b)\theta(c) \tag{2.16}$$

が成り立つ. 従って, グラフ  $G_1, G_2$  は同形である.

以下の一連の例題とその解答例では連結グラフを地下鉄の路線図に見立てた場合の交通量, 乗客の流れ等をグラフ理論を用いて考察する方法を例題形式で見えていく. もちろん, ここで取り上げるグラフで話が済むような, そんな単純な地下鉄路線は東京にもロンドンにもなく(札幌の地下鉄はかなりシンプルだが, ほとんど閉路を含まない「木」であるように思われる), その意味で現実の問題とは程遠いが, ここで学ぶ方法・概念を, より大きなサイズの複雑なグラフへと応用することで実際の地下鉄路線の問題を扱うことは, サイズ増加にともなう計算技術上の問題をクリアしさえすれば, いつでも可能であることに注意されたい. 下記の例題 2.5-a から例題 2.5-f は我々が最終的に調べたい例題 2.5-g へ向けての誘導となっている.

**例題 2.5-a** (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

グラフ  $G$  の任意の 2 点  $u, v$  間の距離を  $d(u, v)$  とする. 今, 点  $u$  を固定し,  $v (\neq u)$  を任意の  $G$  内の点とすると,  $d(u, v)$  の最大値を点  $u$  からの最遠距離と定義し,  $e(u)$  と書くことにする. また,  $G$  内の全ての点  $u$  に対する  $e(u)$  の最小値をグラフ  $G$  の半径と呼び,  $R(G)$  と書く. さらに, 全ての  $u$  に対する  $e(u)$  の最大値を  $G$  の直径と呼び,  $D(G)$  と書く. また, 半径に等しい最短距離を持つ点の集合を  $G$  の中心と呼び, 最遠距離を持つ点の集合を  $G$  の周辺と言う. 例えば図 2.28(左) のグラフ  $G$  を例にとれば各点の最遠距離は  $e(1) = 2, e(2) = 2, e(3) = 2, e(4) = 2, e(5) = 2$  であり,  $R(G) = 2, D(G) = 2$ , 中心は  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 周辺は  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  である.

これを参考にして図 2.28(右) のグラフの各点の最遠距離, 半径, 直径, 中心, 及び, 周辺を求めよ.

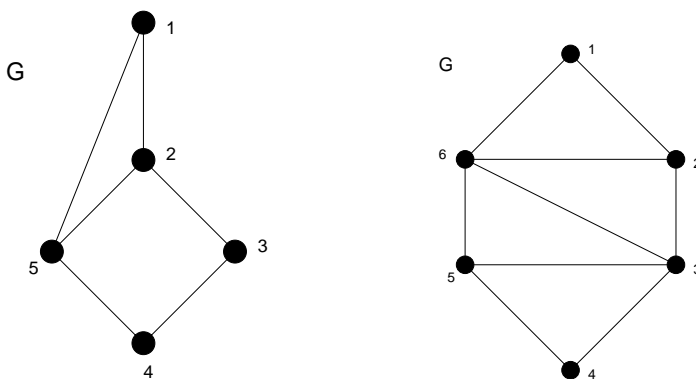


図 2.28: グラフ  $G$ (左) の各点の最遠距離は  $e(1) = 2, e(2) = 2, e(3) = 2, e(4) = 2, e(5) = 2$  であり,  $R(G) = 2, D(G) = 2$ , 中心は  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 周辺は  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  である. 右がここで考える連結グラフ  $G$ (地下鉄路線図).

(解答例)

まず,  $u, v$  間の距離  $d(u, v)$  とは点  $u$  から点  $v$  へ至る経路の中での最短路であることに注意する. すると, 問題の図 2.28(右) の点 1 を基点とした際の各他点への距離は

$$d(1, 2) = 2, \quad d(1, 3) = 2, \quad d(1, 4) = 3, \quad d(1, 5) = 2, \quad d(1, 6) = 1 \tag{2.17}$$

であるから、点 1 に関する最遠距離  $e(1)$  は

$$e(1) = \max_{y \neq 1} d(1, y) = 3 \tag{2.18}$$

となる. 2, ..., 6 を基点とした場合も (2.17)(2.18) と同様にして順次, 最遠距離を求めていくと

$$d(2, 1) = 1, d(2, 3) = 1, d(2, 4) = 2, d(2, 5) = 1, d(2, 6) = 1, e(2) = \max_{y \neq 2} d(2, y) = 2$$

$$d(3, 1) = 2, d(3, 2) = 1, d(3, 4) = 1, d(3, 5) = 1, d(3, 6) = 2, e(3) = \max_{y \neq 3} d(3, y) = 2$$

$$d(4, 1) = 3, d(4, 2) = 2, d(4, 3) = 1, d(4, 5) = 1, d(4, 6) = 2, e(4) = \max_{y \neq 4} d(4, y) = 3$$

$$d(5, 1) = 2, d(5, 2) = 1, d(5, 3) = 1, d(5, 4) = 1, d(5, 6) = 1, e(5) = \max_{y \neq 5} d(5, y) = 2$$

$$d(6, 1) = 1, d(6, 2) = 1, d(6, 3) = 2, d(6, 4) = 2, d(6, 5) = 1, e(6) = \max_{y \neq 6} d(6, y) = 2$$

以上の結果から、問題文中、図 2.28 (右) のグラフ  $G$  の半径  $R(G)$ , 及び、直径  $D(G)$  は

$$R(G) \equiv \min_x e(x) = 2 \tag{2.19}$$

$$D(G) \equiv \max_x e(x) = 3 \tag{2.20}$$

となる. また、中心は  $\{2, 3, 4, 5\}$ , 周辺は  $\{1, 4\}$  である.

**例題 2.5-b** (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

$A$  をグラフ  $G$  の隣接行列とすると、次の和 :

$$S(r) = A + A^2 + A^3 + \dots + A^r = \sum_{k=1}^r A^k \tag{2.21}$$

の要素  $[S(r)]_{ij}$  は点  $i$  から点  $j$  に至る長さ  $r$  以下の歩道の総数であることを図 2.28(右) のグラフ  $G$  の例を用いて示せ. また、(2.21) 式で  $r$  の値を 1 から徐々に増やしていったとき、 $S(r)$  の非対角要素が全て非ゼロになったときの  $r$  の値は、例題 2.5-a で述べた直径  $D(G)$  になっていることを図 2.28(右) の  $G$  に対して示せ.

(解答例)

まず、グラフ  $G$  の隣接行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

である. 従って, やや退屈ではあるが, この隣接行列に関して  $A^2, A^3$  を逐次計算してみると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 8 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 6 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

となる ( $A$  が対称行列であるから,  $A^2, A^3$  も対称行列であることに注意). よって,  $S(1), S(2), S(3)$  は順次に

$$S(1) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

$$S(2) = A + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$S(3) = A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 3 & 5 & 8 \\ 8 & 10 & 10 & 5 & 12 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 7 & 10 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 8 & 4 \\ 5 & 12 & 10 & 8 & 10 & 10 \\ 7 & 10 & 6 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

となり,  $r = 3$  で初めて,  $S(r)$  は要素が全て非ゼロとなる. 従って, この  $r = 3$  は例題 2.5-a で求めた直径  $D(G)$  に等しいことがわかる.

例題 2.5-c (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

例題 2.5-b での  $S(r)$  の代わりに,  $\eta$  を  $\eta \geq 1$  の定数として

$$W(r) = \frac{A}{\eta} + \left(\frac{A}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{A}{\eta}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{A}{\eta}\right)^r = \sum_{k=1}^r \left(\frac{A}{\eta}\right)^k \quad (2.27)$$

を考える. 例えば, これは図 2.28(右) のグラフ  $G$  が地下鉄の路線図であるとするならば, 「近い駅間ほど乗客の利用頻度 (価値) が高い」などのように現実の問題と関連させ, 意味づけすることができる. さて, この行列  $W(r)$  に対し

$$C_r(i, r) = [W(r)]_{1i} + [W(r)]_{2i} + \cdots + [W(r)]_{ni} = \sum_{j=1}^n [W(r)]_{ji} \quad (2.28)$$

を点  $i$  における長さ  $r$  のターミナル容量と呼ぶ. 図 2.28(右) のグラフ  $G$  の各点に対して長さ 2 のターミナル容量を求めよ. ただし,  $\eta = 6$  とする. また, 図 2.28(右) のグラフを地下鉄の路線図と考えた場合, ここで得られた結果は何を意味するか, を簡潔に述べよ.

(解答例)

問題文の定義に従って,  $W(2)$  を求めてみる.  $\eta = 6$  であるから直ちに

$$\begin{aligned} W(2) &= \frac{1}{\eta} A + \frac{1}{\eta^2} A^2 \\ &= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 & 2 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 8 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 8 & 7 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad (2.29) \end{aligned}$$

となる.

従って,  $C_2(i, 2)$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} C_2(1, 2) &= \frac{1}{36}(2 + 7 + 1 + 0 + 2 + 7) = \frac{19}{36} \\ C_2(2, 2) &= \frac{1}{36}(7 + 4 + 7 + 2 + 8 + 8) = \frac{36}{36} \\ C_2(3, 2) &= \frac{1}{36}(1 + 7 + 3 + 7 + 8 + 2) = \frac{28}{36} \\ C_2(4, 2) &= \frac{1}{36}(0 + 2 + 7 + 2 + 7 + 1) = \frac{19}{36} \\ C_2(5, 2) &= \frac{1}{36}(2 + 8 + 8 + 7 + 4 + 7) = \frac{36}{36} \\ C_2(6, 2) &= \frac{1}{36}(7 + 8 + 2 + 1 + 7 + 3) = \frac{28}{36} \end{aligned}$$

が得られる.

ここで,  $\eta = 1$  の場合を考えてみると, 隣接行列の積の性質から  $C_2(i, 2)$  の値は, グラフ  $G$  の全ての点から点  $i$  に至る 2 以下の歩道が何本あるか, を表し,  $\eta = 6$  の場合には, 長さ 1 の歩道の方が, 長さ 2 の歩道よりも利用価値が高いということであるから, ここで得られた結果は, 利用価値をも考慮に入れた場合の地下鉄各駅  $i$  の利用頻度 (乗客量) を表している. この観点からは, 駅 2, 5 が最も乗客量が多く, 1, 4 が最も少ない. これはグラフ  $G$  の形状から明らかであろう. しかし, グラフのサイズが大きくなり, 複雑になってくれ

ば、ここでの系統的な分析方法が有効となってくる.

なお、 $D(G) = 3$  であるから、 $W(3)$ , 及び、 $C_3(i, 3)$  をついでに求めておくと

$$\begin{aligned}
 W(3) &= \frac{1}{\eta} A + \frac{1}{\eta^2} A^2 + \frac{1}{\eta^3} A^3 \\
 &= W(2) + \frac{1}{\eta^3} A^3 \\
 &= \frac{1}{216} \begin{pmatrix} 12 & 42 & 6 & 0 & 12 & 42 \\ 42 & 24 & 42 & 12 & 48 & 48 \\ 6 & 42 & 18 & 42 & 48 & 12 \\ 0 & 12 & 42 & 12 & 42 & 6 \\ 12 & 48 & 48 & 42 & 24 & 42 \\ 42 & 48 & 12 & 6 & 42 & 18 \end{pmatrix} + \frac{1}{216} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 8 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 7 & 6 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{216} \begin{pmatrix} 14 & 48 & 9 & 3 & 15 & 47 \\ 48 & 30 & 50 & 15 & 57 & 55 \\ 9 & 50 & 22 & 47 & 55 & 16 \\ 5 & 15 & 47 & 14 & 48 & 9 \\ 15 & 57 & 55 & 48 & 30 & 50 \\ 47 & 55 & 16 & 9 & 50 & 22 \end{pmatrix} \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
 C_3(1, 3) &= \frac{1}{216}(14 + 48 + 9 + 3 + 15 + 47) = \frac{136}{216} \\
 C_3(2, 3) &= \frac{1}{216}(48 + 30 + 50 + 15 + 57 + 55) = \frac{255}{216} \\
 C_3(3, 3) &= \frac{1}{216}(9 + 50 + 22 + 47 + 55 + 16) = \frac{199}{216} \\
 C_3(4, 3) &= \frac{1}{216}(3 + 15 + 47 + 14 + 48 + 9) = \frac{136}{216} \\
 C_3(5, 3) &= \frac{1}{216}(15 + 57 + 55 + 48 + 30 + 50) = \frac{255}{216} \\
 C_3(6, 3) &= \frac{1}{216}(47 + 55 + 16 + 9 + 50 + 22) = \frac{199}{216}
 \end{aligned}$$

となり、乗客量に関する順位は  $r = 2$  の場合と変わらない.

**例題 2.5-d** (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

図 2.28(右) のグラフの各辺に図 2.29 のような重みをつける. この重みは地下鉄の各区間の「非混雑度」を表すものとし、この値が大きほど、客は快適に乗車することができる. このように各辺が「重み付け」されたグラフを重み付きグラフと呼ぶが、この重み付きグラフの場合には隣接行列  $A$  の各要素  $[A]_{ij}$  は  $i, j$  間の辺数ではなく、重みを付けた辺数の和となる. これをふまえて、図 2.29 の重み付きグラフ  $G$  に対して隣接行列  $A$  を求めよ.

(解答例)

重み付きグラフに対する隣接行列の定義に従えば、問題文中の図 2.29 に与えられたグラフ  $G$  に対する隣接

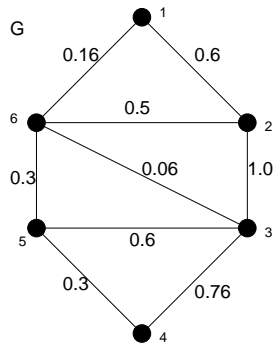


図 2.29: 図 2.28(右) のグラフの各辺に重みを付けたグラフ G.

行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.16 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.60 \\ 0.16 & 0.00 & 0.30 & 0.00 & 0.06 & 0.50 \\ 0.00 & 0.30 & 0.00 & 0.30 & 0.60 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.30 & 0.00 & 0.76 & 0.00 \\ 0.00 & 0.06 & 0.60 & 0.76 & 0.00 & 1.00 \\ 0.60 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

となる.

**例題 2.5-e** (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

例題 2.5-d での隣接行列に対し,  $X \equiv A/\eta$  とおこう ( $\eta = 6$ ). このとき, 図 2.22 のグラフ G に対し

$$X^\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} X^r = \mathbf{0} \text{ (ゼロ行列)} \quad (2.32)$$

となることを示せ.

(解答例)

$A^r$  の第  $ij$  要素は

$$[A^r]_{ij} = \sum_{l_1=1}^6 \sum_{l_2=1}^6 \cdots \sum_{l_{r-1}=1}^6 A_{il_1} A_{l_1 l_2} A_{l_2 l_3} \cdots A_{l_{r-2} l_{r-1}} A_{l_{r-1} j} \quad (2.33)$$

と書ける. ところで, 行列  $A$  の要素が全て 1 である場合には

$$[A^r]_{ij} = \sum_{l_1=1}^6 \sum_{l_2=1}^6 \cdots \sum_{l_{r-1}=1}^6 1 = 6^{r-1} \quad (2.34)$$

となり ( $\eta = 6$  であることに注意), 行列  $X = A/\eta$  の  $r$  乗の第  $ij$  要素は

$$[X^r]_{ij} = \frac{6^{r-1}}{6^r} = \frac{1}{6} \quad (2.35)$$

となり、有限値が残る。しかし、今の場合、各要素は 1 以下であるから、 $R$  を 1 以上の実数として  $[A^r]_{ij}$  は次のように評価できる。

$$[A^r]_{ij} = \sum_{l_1=1}^6 \sum_{l_2=1}^6 \cdots \sum_{l_{r-1}=1}^6 A_{il_1} A_{l_1 l_2} A_{l_2 l_3} \cdots A_{l_{r-2} l_{r-1}} A_{l_{r-1} j} \leq 6^{r-1} \left(\frac{1}{R}\right)^r \quad (2.36)$$

従って、行列  $X^r$  の第  $ij$  要素は

$$[X^r]_{ij} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{R}\right)^r \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2.37)$$

となる。従って

$$X^\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} X^r = 0 \quad (2.38)$$

が成立することがわかる。

**例題 2.5-f** (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

$X^\infty = 0$  となる (単位行列ではない) 正方行列  $X$  に対し

$$X + X^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} X^k = (I - X)^{-1} - I \quad (2.39)$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $I$  は単位行列である。また、この事実を用いて、例題 2.5-d で求めた隣接行列に対し  $W(\infty)$  を計算せよ。

(解答例)

次の恒等式に着目する。

$$\begin{aligned} I &= (I + X + X^2 + \cdots) - (X + X^2 + \cdots) \\ &= (I - X) + (I - X)X + (I - X)X^2 + \cdots \\ &= (I - X)(I + X + X^2 + \cdots) \end{aligned} \quad (2.40)$$

従って

$$I + X + X^2 + \cdots = (I - X)^{-1} \quad (2.41)$$

すなわち

$$X + X^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} X^k = (I - X)^{-1} - I \quad (2.42)$$

が成り立つ。

そこで、この結果を用いて  $W(\infty)$  を計算することにしよう。やや面倒であるが、決して難しくはない計算の結果

$$W(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} X^k = (I - (A/\eta))^{-1} - I$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0117 & 0.0363 & 0.0038 & 0.0026 & 0.0190 & 0.1074 \\ 0.0363 & 0.0118 & 0.0541 & 0.0068 & 0.0319 & 0.0933 \\ 0.0038 & 0.0541 & 0.0714 & 0.0653 & 0.1146 & 0.0240 \\ 0.0026 & 0.0068 & 0.0653 & 0.0210 & 0.1400 & 0.0241 \\ 0.0190 & 0.0319 & 0.1146 & 0.1400 & 0.0597 & 0.1812 \\ 0.1074 & 0.0933 & 0.0240 & 0.0241 & 0.1812 & 0.0487 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

が得られるので、ターミナル容量は

$$C_{\infty}(1, \infty) = 0.1808$$

$$C_{\infty}(2, \infty) = 0.2341$$

$$C_{\infty}(3, \infty) = 0.2793$$

$$C_{\infty}(4, \infty) = 0.2598$$

$$C_{\infty}(5, \infty) = 0.5463$$

$$C_{\infty}(6, \infty) = 0.4786$$

のように求まる.

**例題 2.5-g** (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

例題 2.5-f の結果から図 2.29 の連結グラフ  $G$  で与えられた地下鉄路線図及び、各駅での乗客量等に関して何が言えるか？ また、ここでのグラフ理論的考察から、この地下鉄をより快適なものとするためにはどのような改善点が考えられるか、を自由に論じよ.

(解答例)

駅 5 をみると、例えば駅 3 と比べて駅 5 につながる各路線の非混雑度が小さいが、一方で、ターミナル容量は全ての駅で最大である。従って、このターミナル容量の値に従えば、駅 5 につながる路線を整備し(例えば、停車時間をうまく調節するなどして)、非混雑度を上げていく企業努力がこの地下鉄には必要であると言える。

例題 2.6 (2003 年度情報工学演習 II(B) #1)

グラフの隣接行列と接続行列に関して以下の問題 (1) ~ (5) に答えよ.

(1) 次の隣接行列  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

を持つグラフを描け.

(2) 次の接続行列  $G$  :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

を持つグラフを描け.

- (3) ループを持たないグラフの隣接行列における任意の行または列の要素和から該当するグラフに関して何がわかるか答えよ.
- (4) ループを持たないグラフの接続行列における任意の行の要素和から該当するグラフに関して何がわかるか答えよ.
- (5) ループを持たないグラフの接続行列における任意の列の要素和から該当するグラフに関して何がわかるか答えよ.

(解答例)

(1) 隣接行列の定義に従ってグラフを描くと, 図 2.30 のようになる.

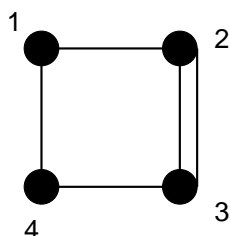


図 2.30: 問題の隣接行列を持つグラフ.

- (2) 与えられた接続行列の第 1 ~ 3 行のそれぞれの要素和は共に 1 であること, そして点 1, 2, 3 にはそれぞれ辺 1, 2, 3 が接続されていることから, まず, 図 2.31 の左側のような状況になっていることがわかる. 一方, 接続行列の第 4 列の要素和は  $1 + 1 + 1 = 3$  であることから, 点 4 には辺 3 本が接続されていることもわかる. 以上を考慮すると図 2.31 の右側となり, これが求めるグラフとなる.
- (3) 1 つの点に入る, あるいは出る辺の本数.
- (4) 各点に入る辺の本数.
- (5) 1 つの辺に付いた点の数. 従って, 各列の要素和は最小で 1, 最大でも 2 である.

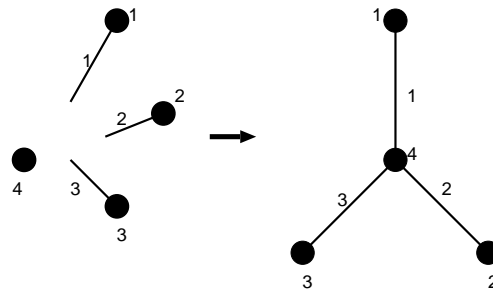
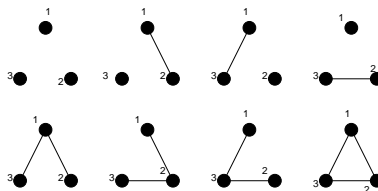


図 2.31: 点 1, 2, 3 に接続されている辺の本数がそれぞれ 1 本ずつであることから, まず左図までわかる. ついで, 接続行列の第 4 行の要素和が 3 であることから, 右図が最終的な答えとなる.

**例題 2.7** (2003 年度情報工学演習 II(B) #1)

ラベル付き単純グラフについて以下の問題 (1) ~ (3) に答えよ.

(1) 3 点のラベル付きグラフは以下の図のように描かれ, その総数は 8 である.



これを踏まえて, 4 点のラベル付きグラフを列挙して描き, その総数を求めよ.

(2) 一般に  $n$  点のラベル付きグラフの総数  $\mathcal{N}(n)$  は

$$\mathcal{N}(n) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{2.46}$$

であることを示せ. ただし, 必要であれば公式:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^k b^{n-k} \tag{2.47}$$

を用いること.

(3)  $n$  点のラベル付きグラフの中でちょうど  $m$  本の辺を持つグラフの総数を求めよ.

(解答例)

(1) 省略.

(2)  $n$  点のラベル付き単純グラフにおいて可能な辺の本数は,  $n$  点の中から任意の 2 点を選ぶ方法の数であるから

$${}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2} \tag{2.48}$$

である. 従って,  $n$  点のラベル付き単純グラフの総数  $\mathcal{N}(n)$  は, 総数  $n(n-1)/2$  本の辺の中から, 1 本,

2 本, ...,  $n(n-1)/2$  本の辺を選んでグラフを作る場合の数であるから

$$\mathcal{N}(n) = \frac{n(n-1)}{2}C_0 + \frac{n(n-1)}{2}C_1 + \frac{n(n-1)}{2}C_2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}C_{\frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n-1)}{2}C_k \quad (2.49)$$

ところで, 2 項定理 :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^k b^{n-k} \quad (2.50)$$

で  $a=b=1$  とおけば

$$2^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \quad (2.51)$$

が得られるが, (2.49) は上式で  $n \rightarrow n(n-1)/2$  としたものに他ならないので

$$\sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n-1)}{2}C_k = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (2.52)$$

であり, これが  $n$  点からなる単純グラフの総数である.

(3)  $n(n-1)/2$  の全ての辺の可能な中で,  $m$  本のみを選ぶ場合の数なので

$$\frac{n(n-1)}{2}C_m = \frac{\left\{ \frac{n(n-1)}{2} \right\}!}{m! \left\{ \frac{n(n-1)}{2} - m \right\}!} \quad (2.53)$$

となる.

**例題 2.7** (2007 年度 演習問題 2)

次の問い (1)(2) に答えよ.

- (1)  $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$  はグラフ的か? 理由とともに示せ. また, このグラフの隣接行列, 接続行列を書け.
- (2) 完全 2 部グラフ  $K_{3,3}, K_{4,4}$  を異なる 2 通りに描き, その両者が同型であることを例題 2.2 の 1. に従って示せ.

(解答例)

- (1) 次数列  $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$  を持つグラフは次図 2.32 に与えるピーターソン・グラフである. 一般的にグラフが与えられた場合に, その次数列を求めることは簡単であるが, 逆に次数列が与えられた際に, それがグラフ的であるか, いかにグラフを描くのか, は難しい課題である. グラフ的であることの系統的な判定方法の考察に関しては今後の演習問題で扱うことにする.
- (2)  $K_{3,3}$  に関しては既に述べたので, ここでは,  $K_{4,4}$  を次図 2.33 のような 2 通りの描き方をした場合の同型性を議論することにしよう. このとき, グラフ  $G_1, G_2$  間の同型写像  $\theta, \phi$  が

$$\theta(1) = a, \theta(2) = c, \theta(3) = e, \theta(4) = g, \theta(5) = h, \theta(6) = b, \theta(7) = d, \theta(8) = f \quad (2.54)$$

$$\phi(\overline{15}) = \overline{ah}, \phi(\overline{16}) = \overline{ab}, \phi(\overline{17}) = \overline{ad}, \phi(\overline{18}) = \overline{af} \quad (2.55)$$

$$\phi(\overline{25}) = \overline{ch}, \phi(\overline{26}) = \overline{cb}, \phi(\overline{27}) = \overline{cd}, \phi(\overline{28}) = \overline{cf} \quad (2.56)$$

$$\phi(\overline{35}) = \overline{eh}, \phi(\overline{36}) = \overline{eb}, \phi(\overline{37}) = \overline{ed}, \phi(\overline{38}) = \overline{ef} \quad (2.57)$$

$$\phi(\overline{45}) = \overline{gh}, \phi(\overline{46}) = \overline{gb}, \phi(\overline{47}) = \overline{gd}, \phi(\overline{48}) = \overline{gf} \quad (2.58)$$

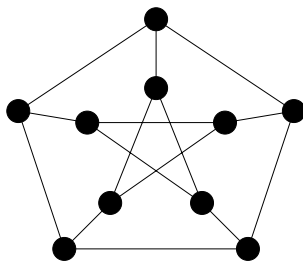


図 2.32: ピーターズン・グラフ.

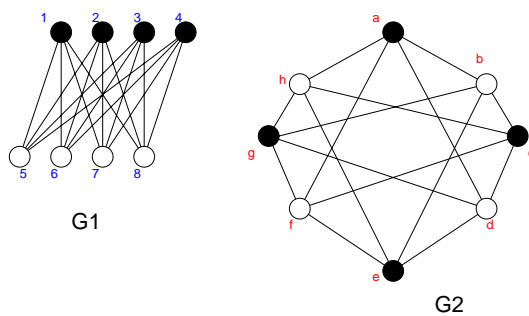


図 2.33:  $K_{4,4}$  の 2 通りの描き方.

と選べることに注意すれば, 確かにこの写像に対し,  $G_1, G_2$  の接続関数を  $\psi_{G_1}, \psi_{G_2}$  とすると

$$\psi_{G_1}(\overline{15}) = 15 \iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{15})) = \psi_{G_2}(\overline{ah}) = ah = \theta(1)\theta(5) \tag{2.59}$$

等が成立するので, 確かにグラフ  $G_1, G_2$  は同型である.

## 第3回講義

### 3.1 様々なグラフの例

この節では一般的にはグラフ  $G$  を論じるのではなく、様々な (特殊な) グラフを例をとって説明し、個々のグラフの特徴を見てゆくことにしよう。ここでは、後のこの講義で頻出するグラフとその性質を簡単に述べるが、具体的な応用例、及び、詳しい性質に関しては追々見て行くことになる。しかし、ここで出てくる各グラフの名前と大まかな性質を押さえておくと、後の学習がスムーズに進むであろう。

#### 3.1.1 空グラフ

空グラフ (null graph) : 辺集合が空であるグラフ (「点のみからなるグラフ」あるいは「辺のないグラフ」), 数式で表現するならば、 $n$  点からなる空グラフは  $N_n$  となる。図 3.34 に  $N_4$  の例を載せる。

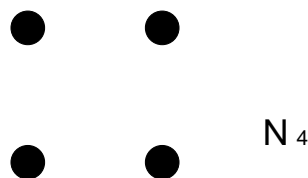


図 3.34: 空グラフ  $N_4$ .

#### 3.1.2 完全グラフ

完全グラフ (complete graph) : 相異なる 2 つの点全てが隣接している単純グラフ (ループや多重辺を含まないグラフ). ( 難しく言うと  $\Rightarrow \forall v, v' \in V(G), v \neq v'$  に対し、 $v, v'$  を両端とする辺が唯一 1 個存在するグラフ.) 式では  $n$  個の点からなる完全グラフは  $K_n$  と表現される。

$n$  個の点からなる完全グラフ  $K_n$  の辺の総数は、 $1, 2, \dots, n$  個の点の中から任意に 2 点選んで結ぶ場合の数、すなわち、 ${}_nC_2 = n(n-1)/2$  個である。図の例で言うと、 $n=4$  の場合には 6 本、 $n=5$  の場合には 10 本であり、これは図 3.35 より直ちに確認できる (今年度の 例題 1.4 (2) もあわせて参照のこと)。

#### 3.1.3 正則グラフ

$r$ -正則グラフ (regular graph) : 全ての  $v \in V(G)$  に対して、 $\text{dev}(v) = r$  であるグラフ。平たく言うと、どの点の次数も全て共通に  $r$  であるグラフ。( 注: 正則グラフという観点からは、 $N_n$  は 0-正則グラフ、 $C_n$  は 2-正則グラフ、 $K_n$  は  $(n-1)$ -正則グラフということになる。)

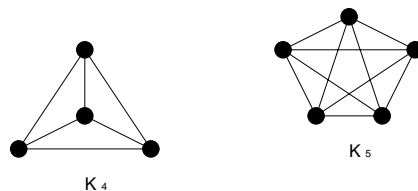


図 3.35: 完全グラフ  $K_4$  及び  $K_5$ .

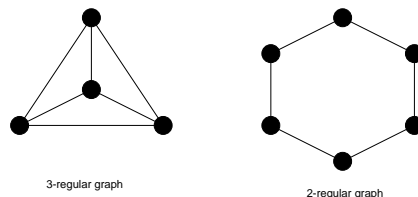


図 3.36: 次数 3 の正則グラフ (左), 及び, 次数 2 の正則グラフ (右) の例.

### 3.1.4 閉路グラフ

閉路グラフ (cycle graph) : 次数 2 の正則連結グラフ. 式では  $C_n$  のように表記される.

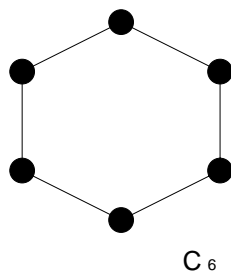


図 3.37: 閉路グラフ  $C_6$ .

### 3.1.5 道グラフ

道グラフ (path graph) : 閉路グラフ  $C_n$  から一つの辺を除いて得られるグラフ. 式で表現すると  $P_n$  となる.

### 3.1.6 車輪

車輪 (wheel) :  $C_{n-1}$  に新しい点  $v$  を一つ加え,  $v$  と他の全ての点とを辺 (「スポーク」と呼ばれる) で結んでできるグラフ. 式で表記すると  $W_n$  となる.

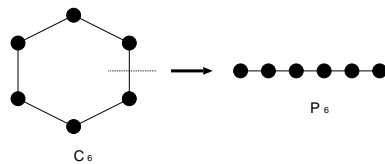


図 3.38: 閉路グラフ  $C_6$  から次数 6 の道グラフ  $P_6$  を作成する過程.

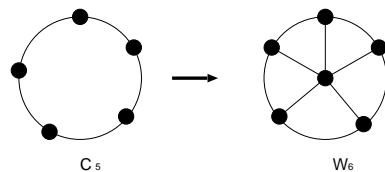


図 3.39: 閉路グラフ  $C_5$  から次数 6 の車輪  $W_6$  を作成する過程.

### 3.1.7 ピーターソン・グラフ

ピーターソン・グラフ (Petersen graph) は図のような特殊な形状を持つグラフであるが, 例題 2.7(1)でも見たように, 今後の演習問題等でしばしば現れることになる<sup>6</sup>.

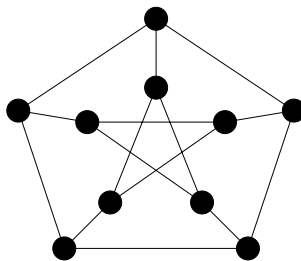


図 3.40: ピーターソン・グラフ.

### 3.1.8 二部グラフ

二部グラフ (bipartite graph) : グラフ  $G$  の点集合を 2 つの素な集合  $A, B$  に分割し,  $G$  の全ての辺は  $A$  の点と  $B$  の点を結ぶようにできたとする. このとき, グラフ  $G$  は二部グラフであるという.

### 3.1.9 完全二部グラフ

完全二部グラフ (complete bipartite graph) :  $A$  の各点が  $B$  の各点とちょうど 1 本の辺で結ばれている二部グラフ.

図のように点を黒丸と白丸で 2 つの集合に分けたとき, 黒の点  $r$  個, 白の点  $s$  個からなる完全二部グラフは  $K_{r,s}$  と表記される. 当然であるが,  $K_{r,s}$  には  $(r + s)$  個の点と  $rs$  本の辺がある.

<sup>6</sup> Petersen graph は教科書では「ピーターソン・グラフ」と発音, 日本語表記されているが, 他の専門書では「ペテルセン・グラフ」と発音, 日本語表記されているものが多い(むしろ, こちらの方が多数派である)

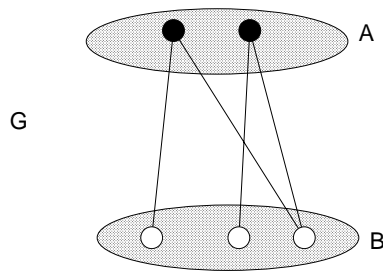


図 3.41: 二部グラフ G の例. 全ての辺の端点は黒丸と白丸のペアでなくてはならない.

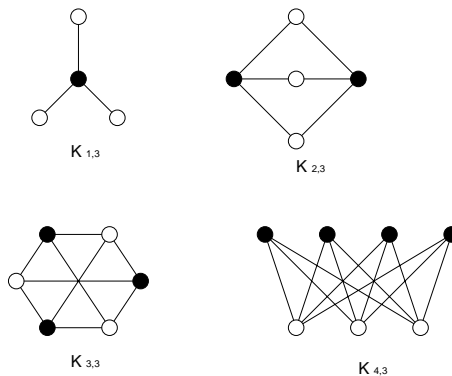


図 3.42: 完全二部グラフ  $K_{1,3}$ ,  $K_{2,3}$ ,  $K_{3,3}$ ,  $K_{4,3}$ .

### 3.1.10 $k$ -立方体

$k$ -立方体 ( $k$ -cube) :  $a_i = 0$  or  $1$  であるような  $1$  つの列 (ベクトル)  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  に一つの点を対応させ, 一つだけ異なる成分  $a_i$  を持つ二つのベクトルに対応する二つの点が辺で結ばれるような正則二部グラフ. 式で表記すると  $Q_k$  となる.

$\Rightarrow Q_k$  は  $2^k$  個の点と,  $k2^{k-1}$  本の辺を持つ<sup>7</sup>.

### 3.1.11 単純グラフの補グラフ

単純グラフの補グラフ (complement) : 単純グラフ  $G$  の補グラフ  $\overline{G}$  とは, 点集合  $V(G)$  を持ち,  $\overline{G}$  の  $2$  点が隣接するのは  $G$  におけるそれらの  $2$  点が隣接していないとき, かつ, そのときに限るような単純グラフを言う.

- 完全グラフの補グラフは空グラフである. (ただし, 逆は言えない).
- 完全二部グラフの補グラフは  $2$  つの完全グラフの和である.

## 3.2 グラフにまつわるいくつかのパズル

ここでは, グラフを用いて効率的に解くことができる  $2$  つのパズルを紹介しよう.

<sup>7</sup>  $(0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots$  の各ベクトルの  $k$  成分のうちどの成分が食い違うかという場合  $k$  通り, 残りの  $k-1$  成分の並び替え  $2^{k-1}$  通りの積で  $k2^{k-1}$  本の辺の数となる.

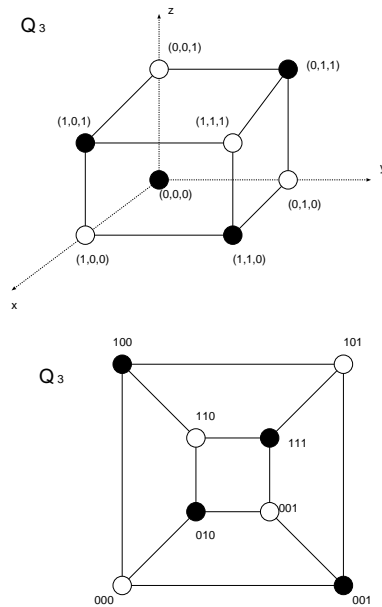


図 3.43: 3-立方体. 図の  $G_1$  及び  $G_2$  は同形である.

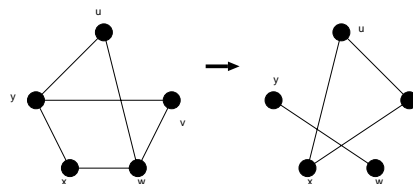


図 3.44: 単純グラフから, その補グラフを作成する過程.

### 3.2.1 8つの円の配置問題

図 3.46 のような 8 つの円の中に A, B, C, D, E, F, G, H の 8 つの文字を入れることを考える. ただし, アルファベット順で隣にくる文字は互いに隣接しないように置く. このとき, このとき, 適切な配置の仕方を答えよ. ちなみに, 可能な配置の総数は  $8! = 46320$  通りであるから, 全ての場合をしらみつぶしに試してみる戦略は適切ではないことに注意しよう. (着眼点):

- A と H の配置の仕方は易しい (片側にしか相手がいないから).
- 図の #1, #2 の円への配置が最も難しい (次数が最大だから).

(解答):

1. 最も次数が多く難しい, #1, #2 にそれぞれ A, B を配置する.
2. アルファベット順で A, H の隣にくる B 及び G をそれぞれ #8, #7 にそれぞれ配置する.
3. 残りの文字をそれぞれがアルファベットで隣り合わないよう配置する. 例えば, #3 = C, #4 = E, #5 = D, #6 = F のように配置すればよい.

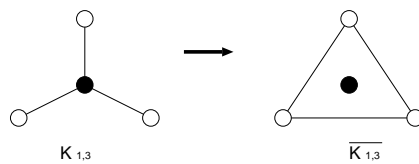


図 3.45: 完全二部グラフ  $K_{1,3}$  とその補グラフ.

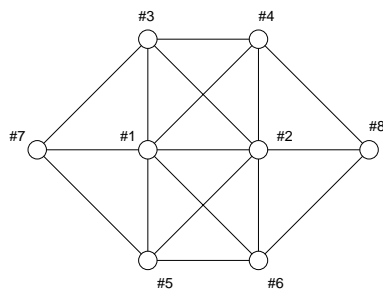
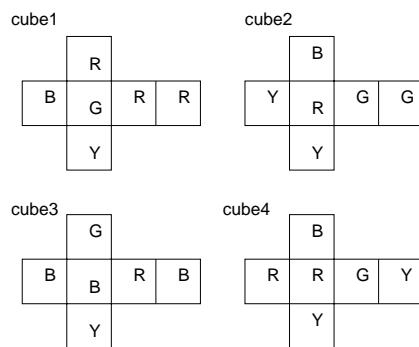


図 3.46: 8 つの円の配置問題の図.

### 3.2.2 4 つの立方体パズル

(問題)

図のような立方体の展開図 : cube1, cube2, cube3, cube4



から立方体を作り, それらを積み上げて, 四角柱を作り, 四角柱の 4 つの側面それぞれに 4 色全てが表れるような四角柱の積み上げ方を見つけたい.

以下の問い (1) ~ (3) に答え, このような配置を求めよ.

- (1) 各立方体を 4 点からなるグラフで表し, R, B, G, Y の各点は各色に対応させ, 平行な面に塗られた色に対応する点は辺で結ぶ. このようにして出来上がるグラフを cube1, cube2, cube3, cube4 に対して描け.
- (2) (1) で求めたグラフを重ね合わせたグラフ G を描け.
- (3) G の部分グラフ  $H_1, H_2$  を見つけ出し, 立方体 : cube1, cube2, cube3, cube4 を積み上げて, 四角柱を作り, 四角柱を作ったとき, その四角柱の 4 つの長方形の側面にそれぞれ 4 色全部が現れるような積み上げ方を示せ.

(解答)

(1) まず, cube1, cube2, cube3, cube4 に相当するグラフはそれぞれ図 3.47 のようになる.

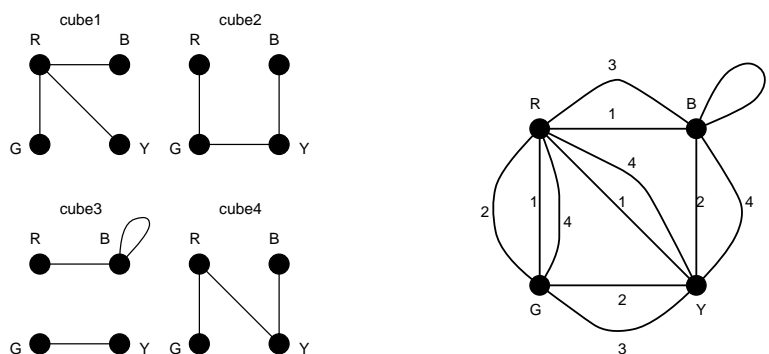


図 3.47: cube1, cube2, cube3, cube4 にそれぞれ相当するグラフ (左), 及び, それぞれのグラフを重ね合わせるにより得られるグラフ G(右).

(2) (1) で得られたグラフを重ね合わせると, 図 3.47(右) の G が得られる.

(3) 各 cube の辺をちょうど 1 本ずつ含み, 共通な辺が無く, 次数 2 の正則グラフとしてのグラフ G の部分グラフ  $H_1, H_2$  を選ぶと, 図 3.48 のようになる. これらの部分グラフ  $H_1 (FB), H_2 (LR)$  を用いて, cube1,

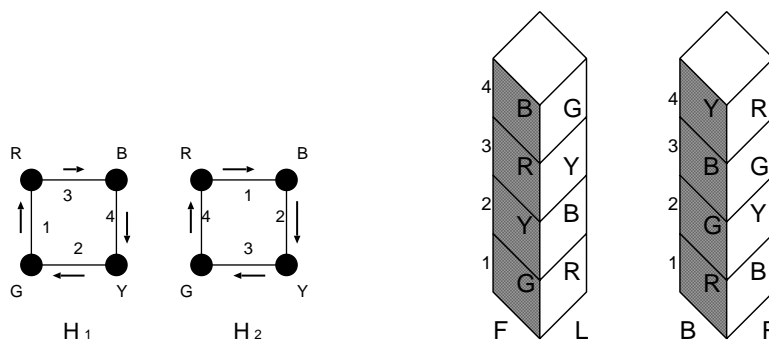
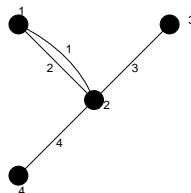


図 3.48: 求める G の部分グラフ  $H_1, H_2$  (左), 及び, 求める立方体の積み上げ方 (右).

cube2, cube3, cube4 を積み上げると図 3.48(右) のようになる. これが答えである.

例題 3.1 (2004 年度 演習問題 3)

図に載せるグラフ G に関して以下の問いに答えよ.



- (1) グラフ G の接続行列を求めよ.
- (2) 接続行列の各列の要素の和は何を意味しているか?
- (3) 接続行列の各行の要素の和は何を意味しているか?
- (4)  $\epsilon(G)$  をグラフ G の辺数とすると

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\epsilon(G)$$

が成り立つことを示せ.

(解答例)

- (1) 定義に従って, 問題に与えられたグラフの接続行列  $M$  を書き下すと

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のようになる.

- (2) 例えば, 上記の接続行列の第 1 行目を見てみると, 第 1, 2 列に 1 が立っている. これは点 1, 2 が辺 1 で結ばれていることを表している. 接続行列の定義から, 各列は辺の番号を表し, 各列に 1 が立っている行が該当する辺に接続する点を表しており, 1 つの辺に接続できる点の数は常に 2 つであるから, 接続行列の各列の成分の和は常に 2 であるといえることができる.
- (3) 接続行列の定義から, 各行の成分の和は各点の次数の和を表す.
- (4) (2)(3) の考察より, 次数の和  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  接続行列の各行の成分和を全ての行に対して計算したものに等しく, これは接続行列の全ての成分を足したものである. 一方, 接続行列の各列の要素の和は常に 2 であり, 従って, 接続行列の全ての成分の総和は, 辺の数の 2 倍すなわち  $2\epsilon(G)$  であり, 結局

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\epsilon(G)$$

が成り立つ.

**例題 3.2** (2004 年度 **演習問題 3**)

図 2.14 に載せた完全グラフ  $K_5$  について以下の問いに答えよ.

- (1) 図 2.14 の完全グラフ  $K_5$  の 5 つの頂点に, 時計回りに番号  $1, \dots, 5$  を割り当てる. このとき, この完全グラフの隣接行列  $A$  を求めよ.
- (2) 点 1 と点 3 を結ぶ長さ 2 の歩道の数, は  $A^2$  の第  $(1, 3)$ -成分に等しいことを示せ.
- (3) 点 1 と点 3 を結ぶ長さ 3 の歩道の数, は  $A^3$  の第  $(1, 3)$ -成分に等しいことを示せ.
- (4) 一般に, 隣接行列  $A$  を持つ単純グラフ  $G$  の 2 点  $i, j$  を結ぶ長さ  $K$  の歩道の数, は  $A^K$  の第  $(i, j)$ -成分に等しいことを示せ.

(解答例)

(1) 完全グラフ  $K_5$  の隣接行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように対角成分がゼロであり, 非対角成分に 1 が並んだ行列となる.

(2) まず, 図の完全グラフ  $K_5$  から考察してみると, 点 1 と 3 を結ぶ長さ 2 の歩道は

- [1]  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
- [2]  $1 \rightarrow 5 \rightarrow 3$
- [3]  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

の 3 つである.

一方, 隣接行列の自乗を計算してみると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

となり, これから直ちに  $A^2$  の第  $(1, 3)$ -成分は 3 であることがわかる. 従って, 題意が示せた.

(3) (2) と同様に, 少々面倒であるが, まずは問題の完全グラフから点 1, 3 を結ぶ長さ 3 の歩道を数え上げてみると

- [1]  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- [2]  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- [3]  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- [4]  $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- [5]  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3$
- [6]  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

- [7] 1 → 3 → 2 → 3
- [8] 1 → 3 → 4 → 3
- [9] 1 → 3 → 5 → 3
- [10] 1 → 4 → 2 → 3
- [11] 1 → 4 → 5 → 3
- [12] 1 → 5 → 2 → 3
- [13] 1 → 5 → 4 → 3

のようになり、計 13 通り存在する。  
一方、 $A^3$  を計算すると

$$A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 12 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

となり、この第 (1, 3)-成分は 13 となり、題意が示された。

(4) 一般に  $n$  点からなる単純グラフの隣接行列の  $K$  乗、つまり、 $A^K$  の第  $(i, j)$ -成分は

$$[A^K]_{ij} = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_K=1}^n a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 k_3} \cdots a_{k_{K-1} k_K} a_{k_K j}$$

であり、 $a_{ik_1}$  は点  $i$  と  $k_1$  を結ぶ道の数であることから、上記の  $[A^K]_{ij}$  は点  $i, j$  を結ぶ道の数に等しいことがわかる。

**例題 3.3** (2004 年度 演習問題 3)

完全三部グラフ  $K_{r,s,t}$  はそれぞれに属する点の個数が  $r, s, t$  である 3 つの点集合からなり、異なる集合に属する点は全て辺で結ばれているグラフである。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $K_{2,2,2}$  及び  $K_{3,3,2}$  を描け。
- (2)  $K_{r,s,t}$  には全部で何本の辺があるか答えよ。

(解答例)

- (1) 完全三部グラフ  $K_{2,2,2}$  を描くと図 3.49 のようになる ( $K_{3,3,2}$  も同様にして作図できるが、ここでは省略.)。
- (2)  $K_{r,s,t}$  の辺の本数は  $rs + rt + st$  本である。

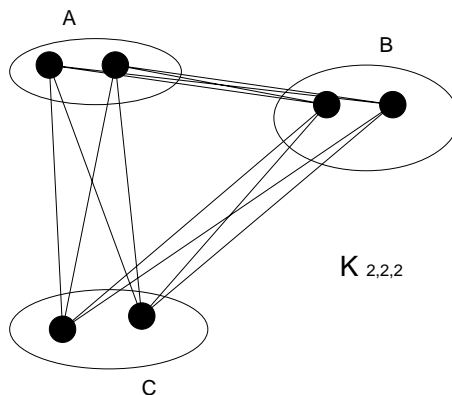


図 3.49: 完全 3 部グラフ  $K_{2,2,2}$  の作図例.  $K_{3,3,2}$  も同様にして作図できるが, ここでは省略.

**例題 3.4** (2005 年度 演習問題 3)

1. 次の (i) ~ (v) のグラフがある場合にはそれを 1 つ挙げて描け (無い場合には「無し」と書く).
  - (i) 次数 5 の正則グラフであるような二部グラフ.
  - (ii) 二部グラフであるプラトン・グラフ.
  - (iii) 車輪である完全グラフ.
  - (iv) 11 個の点をもつ 3 次グラフ.
  - (v) 次数 4 の正則グラフで  $K_5, K_{4,4}, Q_4$  以外のグラフ.
  
2. それ自身の補グラフと同形な単純グラフは自己補対 (self-complementary) であるという. このとき
  - (1) 4 個, または 5 個の点をもつ自己補対グラフを全て描け.
  - (2) 8 個の点からなる自己補対グラフを見つけよ.

(解答例)

- 1.(i) 次数 5 の正則グラフである二部グラフは図 3.50 のような完全二部グラフ  $K_{5,5}$  が挙げられる.

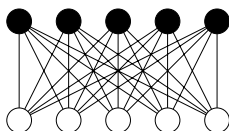


図 3.50: 次数 5 の正則グラフである二部グラフの例.

- (ii) 二部グラフであるプラトングラフとしては, 図 3.51 のような立方体が挙げられる.
- (iii) 車輪である完全グラフは図 3.52 である.
- (iv) まずは, 図 3.53 に点数が  $n = 4, 6, 8, 10, 12$  の場合の 3 次の正則グラフの例を載せる. ここで問われている問題は自然数列  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (3, 3, \dots, 3)$  がグラフ的であるかどうか, を  $n = 11$  の場合に確かめ, グラフ的である場合には具体的にその図を描け, と言い直すことができる. この場合, 握

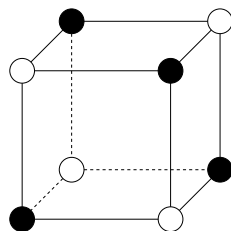


図 3.51: 二部グラフであるプラトングラフの一例.

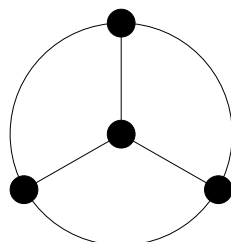


図 3.52: 車輪である完全グラフ.

手捕題から, 点数  $n$ , 次数 3 のグラフの辺数  $m$  は

$$m = \frac{3n}{2} \tag{3.60}$$

である. ここで, これを図で確認してみると, 確かに成立していることがわかる. 辺の数は必ず整数でなければならないので, この式が成り立つためには  $n$  は偶数でなければならない. 従って,  $n = 11$  の場合には全ての点の次数が 3 であるような正則グラフは描けないことが結論つけられる.

(v) 次数 4 の正則グラフで  $K_5, K_{4,4}, Q_4$  以外のグラフとしては図 3.54 のような正 8 面体が挙げられる.

2.

(1) まず, その補グラフが自己補対であることから, そのグラフおよび対応する補グラフの和 (グラフを 2 つ重ね合わせたもの) が完全グラフとなることに着目する. すると, 点数が  $n$  である完全グラフの辺数  $m$  が  $m = n(n-1)/2$  であるから, 求めるグラフの辺数はこの半分, すなわち,  $n(n-1)/4$  であることが必要である. 従って, 辺数は整数でなければならないので, 求めるグラフの点数  $n$  は  $k$  を整数として,  $n = 4k$  あるいは  $n - 1 = 4k$  でなければならない, すなわち, 求めるグラフが自己補対であるためには, 点の数  $n$  が  $n = 4k$  か  $n = 4k + 1$  であることが必要である.  $k = 1$  とした場合,  $n = 4$  または  $n = 5$  となるが, このときの自己補対グラフを具体的に求めよ, というのがここでの問題である. そこで, まず  $n = 4$  の場合について考えてみると, 各点の次数は孤立点が生じてはならないわけであるから, 1, 2 に限られることに注意する. 次数 1 の点の個数を  $L$ , 次数 2 の点の個数を  $M$  とすれば, 正の整数  $L, M$  は次の等式を見たさなければならない.

$$L + 2M = 6 \tag{3.61}$$

$$L + M = 4 \tag{3.62}$$

これを満たす組み合わせとしては  $(L, M) = (2, 2)$  であり, 求める自己補対であるグラフの次数列は  $(1, 1, 2, 2)$  のみであることがわかる. これを満たすグラフとしては図 3.55 の左図実線が挙げられる (これのみ).

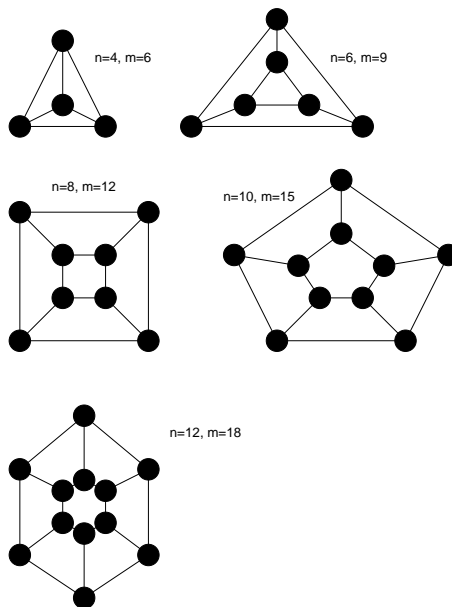


図 3.53: 点の数が  $n = 4, 6, 8, 10, 12$  の場合の正則グラフ. ちなみに,  $n = 10$  の場合には前に見た「ピーターソン・グラフ」も当てはまる. この辺数は  $m = 15$  である.

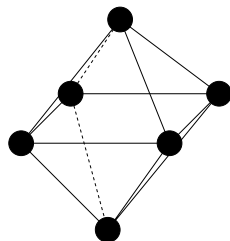


図 3.54: 次数 4 の正則グラフである正 8 面体.

同様にして,  $n = 5$  の場合に対し, 各点の次数は 1, 2 または 3 であるから, このそれぞれの次数を持つ点の数を  $L, M$  及び  $N$  とすれば, 次の等式:

$$L + 2M + 3N = 10 \tag{3.63}$$

$$L + M + N = 5 \tag{3.64}$$

が成り立つ. これを満たす解は  $(M, L, N) = (1, 3, 1), (2, 1, 2)$  の 2 つであるので, 可能な自己補対グラフの次数列としては  $(3, 2, 2, 2, 1)$  あるいは  $(3, 3, 2, 1, 1)$  であるが, 前者では自己補対グラフは実際には描けず, 後者に関しては図 3.55 の右図実線 (これのみ) が対応する.

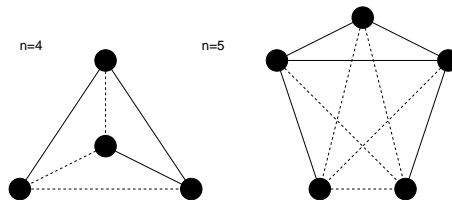


図 3.55: 点の数が 4, または 5 であるような自己補対グラフ. 点線で描かれたグラフがそれぞれの補グラフを表す.

補足コメント:

$n = 5$  の場合に自己補対グラフを求める問題で、次数 1, 2, 3 の点の個数を  $L, M, N$  としたとき

$$L + 2M + 3N = 10 \tag{3.65}$$

$$L + M + N = 5 \tag{3.66}$$

として、可能な次数列を  $L, M, N \geq 1$  の範囲内で探しましたが、 $L, M, N$  はゼロも取りうるので、この範囲内で探せば、 $M = 5, L = N = 0$  も上記方程式を満たします。このときの次数列は  $(2, 2, 2, 2, 2)$  となり、可能な自己補対グラフとして図 3.56 のようなものも存在することになります。

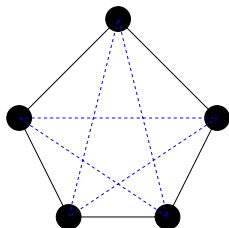


図 3.56:  $n = 5$  の場合の自己補対グラフのもう一つの可能性. 図の実線と破線がそれぞれ互いに同形となっている.

(2) 前に得た必要条件の式で  $k = 2$  と置くと  $n = 8$  が得られるので、8 点からなる自己補対グラフを一つ見つけよう. この際、次のようなアルゴリズム (I)-(IV) を用いて所望のグラフを見つめることにしよう.

(I) 図 3.57 のように 8 個の点,  $1, \dots, 8$  を時計回りに並べる.

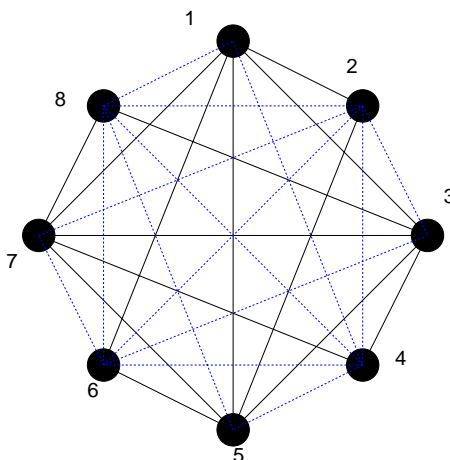


図 3.57: ここで得られる自己補対グラフ (実線) とその同形グラフ (破線). 自己補対の定義より、実線と破線を足したものが 8 次の完全グラフ  $K_8$  となることに注意.

- (II) 8 個の点の中で奇数番目の点  $(1, 3, 5, 7)$  に関して完全グラフを作る (自分以外の点全てと各々 1 本の辺で結ばれる).
- (III) 奇数番目の点のそれぞれと、その点に 1 を加えた偶数番目の点 (例えば、点 1 ならば点 2, 点 3 ならば点 4) を結ぶ. この時点で辺の数は 10 であり、8 個の点全てがつながった連結グラフが出来上がる. 従って、自己補対グラフを作るためにはあと  $14 - 10 = 4$  本の辺を付け足せばよい.
- (IV) 最後のステップとして、偶数番目の各点と、その点の番号プラス 3 に相当する番号の点を結ぶ (点 2 と点 5 を、点 8 は  $8 + 3 = 11$  であるが、 $11 - 8 = 3$  であるから、点 8 と点 5 を結ぶことと約束する). この操作 (I)-(IV) で計 14 本の辺からなるグラフができるが、その作り方から明らかに、これ (図 3.57 の実線) と奇数番目の点の持つ役割と偶数番目の点の持つ役割を交換してでき上がるグラ

フ (図 3.57 の破線図) は互いに同形なので (お互いを足すと完全グラフができる), これらのグラフ (図 3.57 の実線, 破線) が互いに自己補対となることは明らかである.

**例題 3.5** (2006 年度 **演習問題 3**)

図 3.58 のような展開図を持つ 4 つの立方体の問題には解が無いことを示せ.

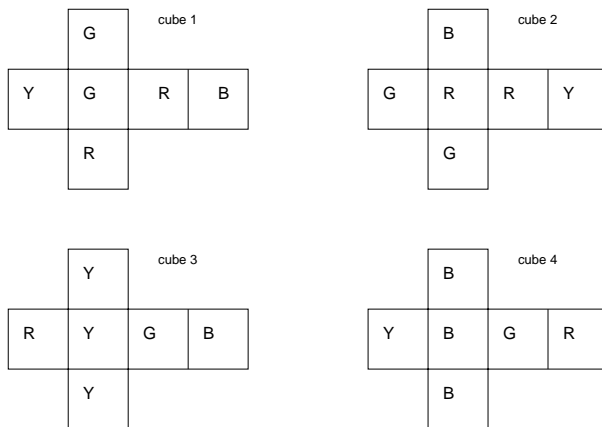


図 3.58: ここで問題にする 4 つの立方体の展開図.

(解答例)

まず, 各立方体の展開図において, それを組み立てたときに向かい合う面どおしを辺で結んでできるグラフはそれぞれ次の図 3.59 (左) のようになる. 従って, これらのグラフを一つのグラフにまとめると図 3.59

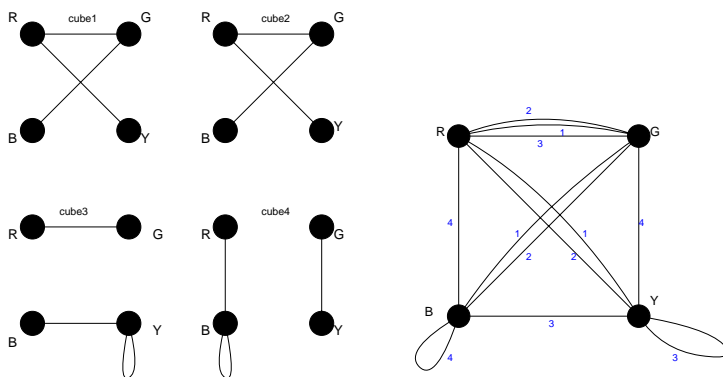


図 3.59: 各展開図からできるグラフ (左) と 4 つのグラフを一つにまとめてできるグラフ (右).

(右) のようになる. このグラフで辺  $\overline{RB}$ ,  $\overline{GY}$  は全て cube4 からの辺であるから, 共通する辺が無い次数 2 の正則グラフは選べないことになる. よって, 与えられた 4 つの立方体を題意のように積み上げることはできない.

**例題 3.6** (2005 年度情報工学演習 II(B) #1)

単純グラフ  $G$  の線グラフ  $L(G)$  (line graph) とは  $G$  の各辺に一対一対応する点を持ち,  $G$  で隣接している 2 本の辺に対応する  $L(G)$  の 2 個の点を必ず結んで得られるグラフのことである. このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $K_3$  と  $K_{1,3}$  の線グラフをそれぞれ描き, 両者は同一のグラフとなることを示せ.
- (2) 正四面体グラフの線グラフは正八面体グラフであることを示せ.
- (3)  $G$  が次数  $k$  の正則グラフであるとき,  $L(G)$  は次数  $2k - 2$  の正則グラフであることを示せ.
- (4)  $G$  の点数でもって,  $L(G)$  の辺数を表す公式を作れ.
- (5)  $L(K_5)$  はピーターソン・グラフの捕グラフであることを示せ.

(解答例)

- (1) 図 3.60 より,  $K_3$  と  $K_{1,3}$  の線グラフは同一である.

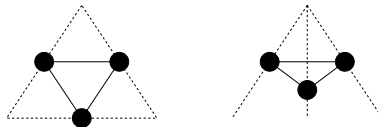


図 3.60:  $K_3$  の線グラフ (左の実線) と  $K_{1,3}$  の線グラフ.

- (2) 図 3.61 参照. 出来上がるグラフは正八面体グラフである.

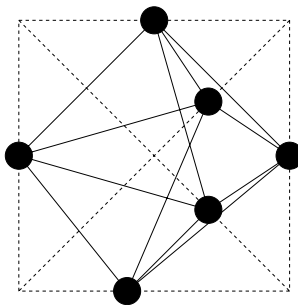


図 3.61: 正四面体グラフ ( $K_4$ ) の線グラフ (実線).

- (3) 次数  $k$  の正則グラフの各辺に点  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) ( $m$  は辺数) を打つ. 各辺に隣接する辺数は  $(k-1)$  であり, 各点  $v_i$  と結ぶことのできる他点  $v_j$  ( $j \neq i$ ) の数は  $2(k-1)$  であり, これが全ての点  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) に対して当てはまるので, 次数  $k$  の正則グラフの線グラフは次数  $2k - 2$  の正則グラフであることがわかる.
- (4) 辺数を  $m$  で表すと (3) の結果と握手捕題より,  $2(k-1) \times n = 2m$ , 従って

$$m = n(k-1) \tag{3.67}$$

となる.

(5) (3)(4) の結果から,  $L(K_5)$  の点数  $n$ , 辺数  $m$ , 次数  $d$ (正則グラフであることに注意) は

$$n(L(K_5)) = m(K_5) = 10, \quad m(L(K_5)) = n(k-1) = 5 \times 3 = 15, \quad d(L(K_5)) = 2k-2 = 6 \quad (3.68)$$

である. 一方, 10 個の点からなる完全グラフ  $K_{10}$  は

$$n(K_{10}) = 10, \quad m(K_{10}) = 45, \quad d(K_{10}) = 9 \quad (3.69)$$

である. 題意が正しいのであれば, つまり, 「 $L(K_5)$  はピーターソン・グラフの捕グラフである」ならば, 捕グラフの定義より,  $L(K_5) + \text{ピーターソン・グラフ} = K_{10}$  となるべきであるが, 上の考察より,  $m(K_{10}) - m(L(K_5)) = 45 - 15 = 30 = m(\text{ピーターソン・グラフ})$ ,  $d(K_{10}) - d(L(K_5)) = 9 - 6 = 3 = d(\text{ピーターソン・グラフ})$  であり, 確かにピーターソン・グラフである条件 (点数 10, 辺数 30, 次数 3 の正則グラフ) を満たしている. 従って,  $L(K_5)$  はピーターソン・グラフの捕グラフである.

**例題 3.7** (2003 年度情報工学演習 II(B) #2)

グラフ  $G$  は  $2k$  個の点を持つ単純グラフで, 三角形は無いとする.  $G$  の辺の数  $m(2k)$  は  $k^2$  以下であること, つまり

$$m(2k) \leq k^2 \quad (3.70)$$

を  $k$  に関する帰納法で示せ. また, この辺の数についての上限  $k^2$  を実現するグラフを一つ作れ.

(解答例)

三角形を含まない連結グラフで辺の数が最大のものは完全二部グラフである.

特に  $K_{k,k}$  は辺の数  $k^2$ , 点数  $2k$  であるから, この  $K_{k,k}$  に対して

$$m(2k) \leq k^2 \quad (3.71)$$

を仮定し,  $K_{k,k}$  に点を 2 つ ( $v, w$ ) を足して,  $2k+2$  個の点から成る三角形を持たないようなグラフが出来上がるように  $v, w$  を  $K_{k,k}$  を結ぶときの辺数の最大値が  $(k+1)^2$  となることを示せば良い (数学的帰納法). これは, 完全二部グラフ  $K_{k,k}$  の黒丸と  $v$ (白丸) を結んでできる  $k$  本と,  $K_{k,k}$  の白丸と  $w$ (黒丸) を結んで

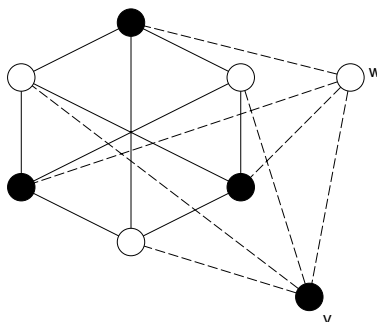


図 3.62:  $K_{3,3}$  に関する例.  $K_{3,3}$  に点  $v, w$  を加える.

きる  $k$  本, そして,  $v$  と  $w$  を結んでできる 1 本, さらに,  $K_{k,k}$  に元々あった  $k^2$  本の本数の辺から成る完全二部グラフ  $K_{k+1,k+1}$  の場合に辺数最大であり (図 3.62 参照), このときの辺数は  $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$  と

なる. 従って

$$m(2(k+1)) \leq (k+1)^2 \tag{3.72}$$

となり, 数学的帰納法より,  $G$  の辺数  $m(2k)$  は  $k^2$  以下であることが示せた.

**例題 3.8** (2007 年度 演習問題 3)

例題 3.2 で見たように, 隣接行列の  $k$  乗, すなわち,  $A^k$  の第  $(i, j)$  成分は, 点  $i, j$  を結ぶ長さ  $k$  の歩道の本数に等しい. これをふまえて, 任意のスカラー変数  $x$  に対し, 次の行列:

$$I + xA + x^2A^2 + \cdots + x^kA^k + \cdots \tag{3.73}$$

を考えよう ( $I$  は単位行列). 明らかに, この行列 (3.73) の第  $(i, j)$  成分を  $x$  の冪関数とみなしたとき,  $x^k$  の係数は点  $i, j$  を結ぶ長さ  $k$  の歩道の本数を表す. そこで, スカラー  $a$  に対して次のテーラー展開:

$$(1 - a)^{-1} = 1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^k + \cdots \tag{3.74}$$

が成り立ったことを思い出せば, 行列  $A$  に対しても同様に

$$(I - xA)^{-1} = I + xA + x^2A^2 + \cdots + x^kA^k + \cdots \tag{3.75}$$

の成立が期待できる. このとき, 行列  $(I - xA)^{-1}$  を「歩道生成行列」と名づけることにしよう. つまり, (3.75) 式の成立より, 行列  $(I - xA)^{-1}$  の第  $(i, j)$  成分を  $x$  の冪関数で表したとき,  $x^k$  の係数を見さえすれば, 点  $i, j$  を結ぶ長さ  $k$  の歩道の本数を知ることができる. このとき, 図 3.63 に与える 2 つのグラフに対し, 具体的に歩道生成行列  $(I - xA)^{-1}$  を求め, 実際上記の事実を確かめよ.

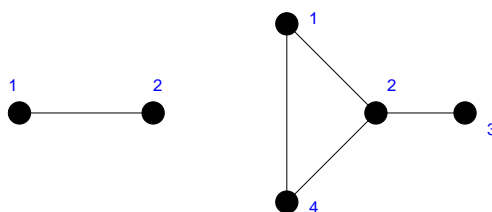


図 3.63: ここで具体的に歩道生成行列を求める 2 つの単純グラフ.

(解答例)

- (1) まずは, 問題に与えられた左側のグラフで簡単に題意を確かめてみよう. 定義より, このグラフの隣接行列は次の  $2 \times 2$  の対称行列で与えられる.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.76}$$

よって

$$I - xA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{pmatrix} \tag{3.77}$$

となるから、問題の歩道生成行列は、この逆行列であり

$$(I - xA)^{-1} = \frac{1}{1 - x^2} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x^2} & \frac{x}{1-x^2} \\ \frac{x}{1-x^2} & \frac{1}{1-x^2} \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

である。そこで、この行列の各成分を  $x$  の冪で書き直してみると

$$[(I - xA)^{-1}]_{1,1} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots = [(I - xA)^{-1}]_{2,2} \quad (3.79)$$

$$[(I - xA)^{-1}]_{1,2} = x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n+1} + \dots = [(I - xA)^{-1}]_{2,1} \quad (3.80)$$

である。ここで、(1,1) 成分は点 1 から出発して、点 1 へと戻る歩道であるから、そのような歩道の長さ  $k$  は必ず偶数でなければならず、各  $k$  に対して各々 1 つの歩道が存在する。これが、(3.79) 式の  $x$  の冪に偶数次のみが現れ、その係数が全て 1 であることに反映している。

一方の (1,2) 成分は点 1 から点 2 へ至る歩道であるから、そのような歩道の長さ  $k$  は必ず奇数でなければならず、各  $k$  に対して各々 1 つの歩道が存在する。これが、(3.80) 式の  $x$  の冪に奇数次のみが現れ、その係数が全て 1 であることに反映している。以上の考察より、確かにこのグラフに対し、歩道生成の行列要素は題意を満たしていることがわかる。

(2) (1) と同様に隣接行列を求めてみると、次の  $4 \times 4$  の対称行列:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

となる。よって

$$I - xA = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & -x \\ -x & 1 & -x & -x \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ -x & -x & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

である。そこで、この逆行列である歩道生成行列を求めよう。

まずは行列式を求めたい。第 4 列目で余因子展開すると、次の行列式:

$$\begin{aligned} \det(I - xA) &= x \begin{vmatrix} -x & 1 & -x \\ 0 & -x & 1 \\ -x & -x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ -x & -x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ -x & 1 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{vmatrix} \\ &= x \left\{ \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix} \right\} - x \left\{ \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix} \right\} \\ &\quad + \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix} \right\} \\ &= x(-x^2 - x + x^3) - x(x + x^2) + 1 - 2x^2 = 1 - 4x^2 - 2x^3 + x^4 \end{aligned} \quad (3.83)$$

が得られる。従って、逆行列の成分が  $\tilde{a}_{ij}$  を行列  $I - xA$  の第  $(i, j)$  余因子行列として

$$[(I - xA)^{-1}]_{ij} = \{\det(I - xA)\}^{-1} (-1)^{i+j} \tilde{a}_{ij} \quad (3.84)$$

と書けることに注意すると、各余因子行列  $\tilde{a}_{ij}$  が具体的に

$$\tilde{a}_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & -x & -x \\ -x & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2x^2$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_{1,2} &= \begin{vmatrix} -x & -x & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -x & -x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x - x^2 = \tilde{a}_{2,1} \\
 \tilde{a}_{1,3} &= \begin{vmatrix} -x & 1 & -x \\ 0 & -x & 0 \\ -x & -x & 1 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 0 \end{vmatrix} = x^3 + x^2 = \tilde{a}_{3,1} \\
 \tilde{a}_{1,4} &= \begin{vmatrix} -x & 1 & -x \\ 0 & -x & 1 \\ -x & -x & 0 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 - x = \tilde{a}_{4,1} \\
 \tilde{a}_{2,2} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 0 & -x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - x^2 \\
 \tilde{a}_{2,3} &= \begin{vmatrix} 1 & -x & -x \\ 0 & -x & 0 \\ -x & -x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 0 \end{vmatrix} = x^3 - x = \tilde{a}_{3,2} \\
 \tilde{a}_{2,4} &= \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ -x & -x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = x^2 + x = \tilde{a}_{4,2} \\
 \tilde{a}_{3,3} &= \begin{vmatrix} 1 & -x & -x \\ -x & 1 & -x \\ -x & -x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -x & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -x & -x \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 1 - 3x^2 - 2x^3 \\
 \tilde{a}_{3,4} &= \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ -x & 1 & -x \\ -x & -x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 0 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -x & -x \\ -x & 0 \end{vmatrix} = -x^3 - x^2 = \tilde{a}_{4,3} \\
 \tilde{a}_{4,4} &= \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ -x & 1 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2x^2
 \end{aligned}$$

で与えられるので、求める逆行列は対称行列であり、(3.84) 式より  $\tilde{a}_{i,j}$  に  $(-1)^{i+j}$  のファクタが付くことに注意して ((1,1) 成分ならば、 $(-1)^{1+1} = 1$ , (1,2) 成分であれば、 $(-1)^{1+2} = -1$  のようにファクタがかかる)

$$(\mathbf{I} - x\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-2x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x+x^2-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-3x^2-2x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x+x^2-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-2x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

が得られる。ここで、問題とするグラフの対称性より、(1,2) 成分と (2,4) 成分、(1,1) 成分と (4,4) 成分などが等しくなることに注意しよう。

さて、ここで各成分を  $x$  の幂で展開してみても、実際に題意が満たされることを確認してみよう。まずは、歩道生成行列の (1,1) 成分について変数  $x$  で展開すると

$$\begin{aligned}
 [(\mathbf{I} - x\mathbf{A})^{-1}]_{1,1} &\simeq (1 - 2x^2)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\
 &= 1 + (4x^2 - 2x^2) + 2x^3 + (-8x^4 - x^4 + 16x^4) + \mathcal{O}(x^5) \\
 &= x^0 + 2x^2 + 2x^3 + 7x^4 + \mathcal{O}(x^5)
 \end{aligned} \quad (3.86)$$

が得られる. ここで,  $\mathcal{O}(x^\alpha)$  は  $x^\alpha$  以上の冪を表すものと定義する. 従って, 点 1 から点 1 へ戻ってくる長さ 2 の歩道数は 2, 長さ 3 の歩道数も 2 であり, 図 3.64 のように確かにそれだけの場合の数があることが確かめられる. 長さ 4 の歩道数は歩道生成行列の方法からは 7 と見積もられるが, 実際にグラフ

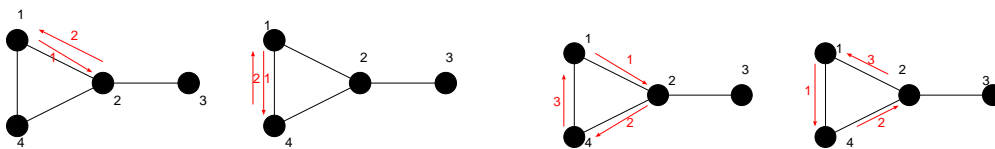


図 3.64: 与えられたグラフの点 1 から点 1 へと戻る長さ 2 の歩道 (左) と長さ 3 の歩道 (右).

から見つけ出してみると

$$\begin{aligned}
 &1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1, & 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\
 &1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, & 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \\
 &1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1
 \end{aligned}$$

の 7 本が存在することがわかる ( このような表記では矢印の本数が歩道の本数になることに注意). 従って, 確かに題意を満たしている.

次に, (1, 2) 成分を考えてみよう. 歩道生成行列のこの成分は変数  $x$  で展開して

$$\begin{aligned}
 [(I - xA)^{-1}]_{1,2} &\simeq (x^2 + x)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\
 &= x + x^2 + 4x^3 + (4x^4 + 2x^4) + \mathcal{O}(x^5) \\
 &= x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 + \mathcal{O}(x^5)
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

となる. 点 1 から点 2 へ至る長さ 1 の歩道は明らかに 1 本. 長さ 2 の歩道は  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$  のみであり, これも 1 本. 長さ 3 の歩道は図 3.65 に示した 4 本であり, 確かにこの本数は歩道生成行列の与える本数と一致している. また, 長さ 4 の歩道をグラフから探してみると

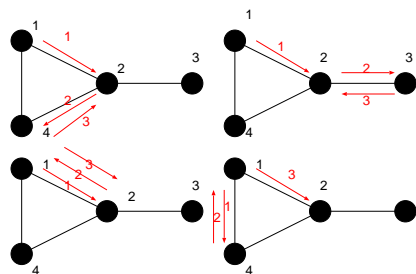


図 3.65: 与えられたグラフの点 1 から点 2 へと戻る長さ 3 の歩道.

$$\begin{aligned}
 &1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \\
 &1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2
 \end{aligned}$$

となり, これも確かに歩道生成行列の第 (1, 2) 成分の  $x^4$  の展開係数と一致している. 従って, この場合も題意を満たしている.

次に (1, 3) 成分を考える. 歩道生成行列のこの成分は変数  $x$  で展開することにより

$$\begin{aligned} [(I - xA)^{-1}]_{1,3} &\simeq (x^3 + x^2)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\ &= x^2 + x^3 + 4x^4 + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned} \tag{3.88}$$

となる. グラフより, 点 1 と点 3 を結ぶ長さ 2 の歩道は  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  の 1 本. 長さ 3 の歩道も  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  の 1 本のみ. さらに, 長さ 4 の歩道をグラフから探してみると

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3, \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

4 本が存在する. 従って, この場合も, 歩道の数と歩道生成行列の各項の係数間の関係は成立している. 次に (1, 4) 成分は変数  $x$  で展開して

$$\begin{aligned} [(I - xA)^{-1}]_{1,4} &\simeq (x + x^2 - x^3)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\ &= x + x^2 + (-x^3 + 4x^3) + (4x^4 + 2x^4) + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x + x^2 + 3x^3 + 6x^4 + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned} \tag{3.89}$$

となる. 点 1 と点 4 を結ぶ長さ 1 の歩道は明らかに 1 本. 長さ 2 の歩道は  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$  の 1 本. 長さ 3 の歩道は  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ ,  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ ,  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$  の 3 本ある. 長さ 4 の歩道は

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4, \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 4, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \end{aligned}$$

の 6 本であり, こららはいずれも歩道生成行列の各項の係数と一致する.

最後に歩道生成行列の (2, 2) 成分を確かめておこう. この成分を変数  $x$  の 4 次まで書き出してみると

$$\begin{aligned} [(I - xA)^{-1}]_{2,2} &\simeq (1 - x^2)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\ &= 1 + (4x^2 - x^2) + 2x^3 + (-4x^4 - x^4 + 16x^4) + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x^0 + 3x^2 + 2x^3 + 11x^4 + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned} \tag{3.90}$$

が得られる. 従って, 点 2 から点 2 へと戻る長さ 2 の歩道は  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  の 3 本, 長さ 3 の歩道は  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$  の 2 通り. 長さ 4 の歩道は少々多いがグラフから見つけて書き出してみると

$$\begin{aligned} 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \end{aligned}$$

の 11 通りある. 従って, この成分の場合も歩道数と展開係数との間の関係は成立しており, 題意を満たしている.

参考のため, 各成分を  $x$  の 4 次の項まで書き下して歩道生成行列を書き直したものを載せておこう.

$$\begin{aligned} & (I - xA)^{-1}_{x \text{ の 4 次まで}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 + 2x^3 + 7x^4 & x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 & x^2 + x^3 + 4x^4 & x + x^2 + 3x^3 + 6x^4 \\ x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 & 1 + 3x^2 + 2x^3 + 11x^4 & x + 3x^3 + 2x^4 & x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 \\ x^2 + x^3 + 4x^4 & x + 3x^3 + 2x^4 & 1 + x^2 + 3x^4 & x^2 + x^3 + 4x^4 \\ x + x^2 + 3x^3 + 6x^4 & x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 & x^2 + x^3 + 4x^4 & 1 + 2x^2 + 2x^3 + 7x^4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.91}$$

この演習問題で見たように、歩道の長さが長くなればなるほど、グラフに存在する歩道の計数に対し、歩道生成行列の方法が威力を発揮するようになる。

注意: 数学的にみると、前回の配布資料 (24) 式が対称である隣接行列に対して一般に成立することがわかった段階で、それが個別の単純グラフに対しても成り立つのは明らかである。しかし、実際に歩道を数え上げる場合には、この演習でみたように歩道生成行列の各成分を個別のグラフに対して具体的に計算しなければならない。特に道のりが長い歩道を数え上げる場合には変数  $x$  についての高次の展開係数が必要になるが、ここでみたように、その係数を求めることはグラフ上で実際に可能な道を数え上げていくより容易な作業である。



## 第4回講義

### 4.1 道と閉路

ここでは、「道」及び「閉路」に関し、その概念・諸定理、及び、応用例を具体例をあげて説明する。

#### 4.1.1 連結性

連結：グラフの各2点の間に道がある。

歩道： $v_i (i = 1, \dots, m) \in G$  に対し、辺列  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$  を歩道 (walk) という。

⇒ 別の表現： $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$  ( $v_0$  : 始点,  $v_m$  : 終点)

小道：全ての辺  $v_0v_1, \dots, v_{m-1}v_m$  が異なる歩道

道：点  $v_0, v_1, \dots, v_m$  が全て異なる歩道 ( $v_0 = v_m$  であっても良いとする)

閉路：少なくとも1本辺を持つ閉じた道

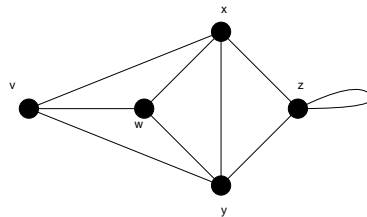


図 4.66: このグラフにおいて、閉路は  $x \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x$

#### 例題 4.1 (2003 年度 レポート課題 #3 問題 1)

連結単純グラフ  $G$  の点集合は  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  であり、 $m$  本の辺および  $t$  個の三角形があるとする。以下の (1) ~ (3) に答えよ。

- (1)  $G$  の隣接行列を  $A$  とすると、行列  $A^2$  の  $ij$  要素は  $v_i$  と  $v_j$  間の長さ 2 の歩道の個数に等しいことを示せ。
- (2) 行列  $A^2$  の対角要素の総和は  $2m$  であることを示せ。
- (3) 行列  $A^3$  の対角要素の総和は  $6t$  であることを示せ。

(解答例)

(1) これは前回の例題 3.8 の復習でもある. 連結グラフ  $G$  に関する  $n \times n$  の隣接行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.92}$$

と置くと隣接行列の自乗  $A^2$  は

$$A^2 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \equiv B \tag{4.93}$$

と書け,  $A^2$  の  $ij$  要素である  $b_{ij}$  は

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} \tag{4.94}$$

である. ところで, 隣接行列の定義から  $a_{ik}$  は点  $v_i$  と点  $v_k$  を結ぶ辺の本数,  $a_{kj}$  は点  $v_k$  と点  $v_j$  を結ぶ辺の本数であるから, 積  $a_{ik}a_{kj}$  は点  $v_i$  から点  $v_k$  を経由して点  $v_j$  に至る長さ 2 の歩道の数に相当する (図 4.67 参照). 経由点  $v_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) の選び方の可能性 ( $i = k, j = k$  の場合には「ループ」がある

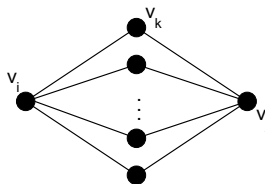


図 4.67: 点  $v_k$  は点  $v_i$  から点  $v_j$  へ至る経由点.

と考える) に関し, この積  $a_{ik}a_{kj}$  を足し上げた

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} = b_{ij} \tag{4.95}$$

は  $v_i$  から  $v_j$  へ至る長さ 2 の歩道の数である. すなわち,  $A^2$  の  $ij$  要素  $b_{ij}$  は  $v_i$  から  $v_j$  へ至る長さ 2 の歩道の数に等しい.

(2) (1) の結果を考慮すると, 行列  $B = A^2$  の対角成分

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} \tag{4.96}$$

は点  $v_i$  から点  $v_k$  を経由して  $v_i$  へ戻る長さ 2 の歩道の数であるから, これは  $v_i$  と  $v_k$  を結ぶ辺の数の 2 倍になっている (図 4.68 参照). 従って, 行列  $A^2$  の対角和

$$\sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} \tag{4.97}$$

は連結グラフ  $G$  に含まれる辺の本数の 2 倍, すなわち  $2m$  である.

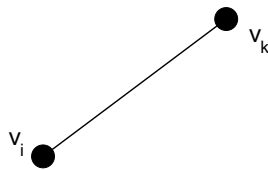


図 4.68: 中継点  $v_k$  を経て,  $v_i$  へ戻る経路.

(3)  $A^3$  を計算すると

$$A^3 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{1k} a_{kl} a_{l1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{1k} a_{kl} a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{nk} a_{kl} a_{l1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{nk} a_{kl} a_{ln} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = C \quad (4.98)$$

であるから,  $A^3$  の  $ij$  成分は

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{lj} \quad (4.99)$$

と書ける.

ところで, 隣接行列の定義から  $a_{ik}$  は点  $v_i$  と点  $v_k$  間の辺の本数,  $a_{kl}$  は点  $v_k$  と点  $v_l$  間の辺の本数,  $a_{lj}$  は点  $v_l$  と点  $v_j$  間の辺の本数であるから, これらの積  $a_{ik} a_{kl} a_{lj}$  は点  $v_i$  から点  $v_k$  及び点  $v_l$  を経由して点  $v_j$  へ至る歩道の数である. 従って, 経由点  $\{v_k, v_l\}$  の可能性について足し合わせた

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{lj} = c_{ij} \quad (4.100)$$

つまり, 行列  $A^3$  の  $ij$  要素は点  $v_i$  から点  $v_j$  へ至る長さ 3 の歩道の数に等しい (図 4.69 参照). また,

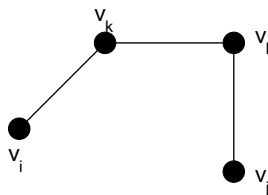


図 4.69: 点  $v_i$  から経由点  $\{v_k, v_l\}$  を経て  $v_j$  へと至る経路.

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{li} \quad (4.101)$$

は点  $v_i$  から点  $v_k$  及び点  $v_l$  を経由して  $v_i$  へ至る長さ 3 の閉路の数であるから. これは点  $v_i, v_k$  及び点  $v_l$  を結ぶ三角形の数である. 従って, これを経由点  $\{v_k, v_l\}$  の可能性について足し上げた

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{li} \quad (4.102)$$

は連結グラフ  $G$  に含まれる三角形の個数の 6 倍 ( $i, k, l$  の並べ方  $3! = 6$  通りに縮退) に等しい (図 4.70 参照). すなわち

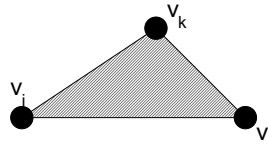


図 4.70: 点  $v_i$  を出発し, 点  $\{v_k, v_l\}$  を経て点  $v_i$  へと戻る閉路は三角形を形成する.

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = 6t \tag{4.103}$$

に等しい.

**定理 5.2**

グラフ  $G$  は  $n$  個の点を持つ単純グラフであるとする.  $G$  には  $k$  個の成分があるとき,  $G$  の辺の本数  $m$  は次式を満たす.

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \tag{4.104}$$

(証明)

まず, (4.104) における下界を表す不等式:  $m \geq n - k$  について示す. 空グラフ  $m = 0$  のときは自明であり,  $n = k$  より,  $0 \leq 0 - 0 = 0$  で成立する. 従って, 以下ではこの場合を除外して考える. 方針としては, 辺数が  $m_0 - 1$  のときに不等式の成立を仮定し,  $m_0$  のときの成立を示すという数学的帰納法により証明することにしよう.

このために, 単純グラフ  $G$  から任意の辺を 1 本削除した場合, 成分数, 点数, 辺数はどのように変化するかを考察すると

$$\begin{aligned} \text{成分数} : k &\rightarrow k + 1 \\ \text{点数} : n &\rightarrow n \\ \text{辺数} : m_0 &\rightarrow m_0 - 1 \end{aligned}$$

となるから, 上の矢印の右側のそれぞれの量  $(k + 1, n, m_0 - 1)$  に関して不等式を作ると

$$m_0 - 1 \geq n - (k - 1)$$

が成立する. 従って, この辺数  $m_0 - 1$  に関する不等式の成立を仮定し, これから辺数  $m_0$  についての不等式の成立を導けばよいわけであるが, これは上不等式を書き直せば直ちに

$$m_0 \geq n - k$$

が得られるので, 帰納法により, 全ての  $m$  に対して不等式:  $m \geq n - k$  の成立が示された.

次に, (4.104) の上界を示す不等式:  $m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$  についての成立を示す. 辺の数の上界を考えるわけであるから, グラフ  $G$  を成分数が  $k$  のグラフで, 辺の数が一番多いものとすれば, このグラフ  $G$  の各成分は完全グラフであるとしてよい. そこで, この成分の中で任意の 2 成分  $C_i, C_j$  を選び,  $C_i$  には  $n_i$  個,  $C_j$  には  $n_j$  個の点があったとする ( $n_i \geq n_j$ ). つまり,  $C_i + C_j$  の辺の総数  $\mathcal{N}_{ij}$  はそれぞれが完全グラフであることを考慮すると (図 4.71 を参照).

$$\mathcal{N}_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j - 1) \tag{4.105}$$

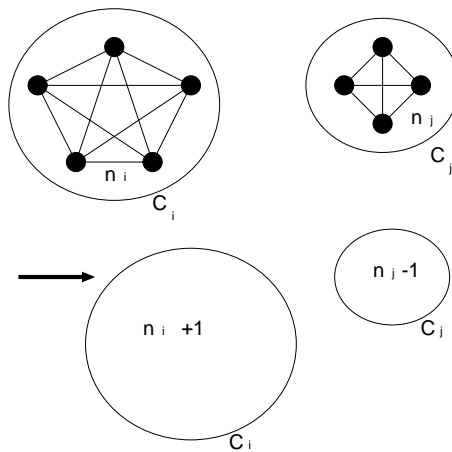


図 4.71: 完全グラフ  $C_i$  に点を一つ足して完全グラフを作り, 完全グラフ  $C_j$  から点を一つ引き, 完全グラフを作る.

となる. さて, ここで次の操作を考える.

(操作)

$C_i \Rightarrow n_i + 1$  個の点を持つ完全グラフ

$C_j \Rightarrow n_j - 1$  個の点を持つ完全グラフ

この置き換えにより,  $C_i + C_j$  の点数は不変であるが, 辺数  $\mathcal{N}'_{ij}$  は

$$\mathcal{N}'_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i + 1) + \frac{1}{2}(n_j - 1)(n_j - 2) \tag{4.106}$$

のように変化する. 従って, この (操作) により, 辺の数は

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{N}_{ij} &= \mathcal{N}'_{ij} - \mathcal{N}_{ij} \\ &= \frac{1}{2}n_i(n_i + 1) + \frac{1}{2}(n_j - 1)(n_j - 2) - \left\{ \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j + 1) \right\} = n_i - n_j + 1 \end{aligned} \tag{4.107}$$

だけ増加する.

この議論を進めると, 結局, 成分数が  $k$  であるグラフで最も辺数が多いグラフ  $G$  は点の数が  $n - (k - 1) = n - k + 1$  個の完全グラフと  $k - 1$  個の孤立点 (空グラフ) からなるグラフであると結論付けられるので, 辺数  $m$  の上限は不等式:

$$m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \tag{4.108}$$

を満たすことがわかる (証明終わり).

例題 4.2 (2003 年度 情報工学演習 II(B) #2)

連結グラフにおいて、点  $v$  から  $w$  への距離  $d(v, w)$  は  $v$  から  $w$  への最短路の長さである。このとき、以下の問い (1)(2) に答えよ。

(1)  $d(v, w) \geq 2$  ならば

$$d(v, z) + d(z, w) = d(v, w) \tag{4.109}$$

なる点  $z$  が存在することを示せ。

(2) ピーターソン・グラフにおいて、任意の異なる 2 点  $v$  と  $w$  に対して  $d(v, w) = 1$  または  $d(v, w) = 2$  であることを示せ。

(解答例)

(1) 図 4.72 のような状況を考える。点  $v$  から  $w$  への最短路を  $C$  とする。  $C$  の全長は  $d(v, w)$  である。この

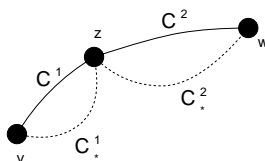


図 4.72:  $v \rightarrow z \rightarrow w$  の経路  $C = C^1 + C^2$  は  $v$  から  $w$  への最短路であり、その長さは  $d(v, w)$  で与えられる。

経路  $C$  上に任意の点  $z$  をとり、この点  $z$  を中継点として経路  $C$  を 2 つの部分に分けて、部分路  $v \rightarrow z$  を  $C^1$ 、部分路  $z \rightarrow w$  を  $C^2$  とする。

この点  $z$  に対し、 $C^1$  は  $v$  と  $z$  を結ぶ全ての経路のうちで最短路である。なぜならば、もし  $v$  と  $z$  を結ぶ別の経路の中で  $C^1$  よりも短いものが存在するとすれば、その経路  $C^1_*$  と  $C^2$  を合わせた新しい経路  $C^1_* + C^2$  が  $v$  と  $w$  を結ぶ全ての経路の中で最短となり、仮定に反する。従って、経路  $C^1$  が点  $v$  と  $z$  を結ぶ全ての経路の中で最短であり、 $C^1$  の全長が  $d(v, z)$  である。

次に、 $z$  と  $w$  を結ぶ経路の中で最短のものであるが、これが  $C^2$  であることは明らかである。なぜならば、この経路と別な経路  $C^2_*$  が存在するとすれば、 $C^1$  と  $C^2_*$  を足し合わせた経路  $C^1 + C^2_*$  が  $v$  と  $w$  を結ぶ全経路の中で最短となり、仮定に反する。従って、 $C^2$  が  $z$  と  $w$  を結ぶ全経路のうちで最短であり、その全長は  $d(z, w)$  である。従って、考えるグラフは連結であるから、経路  $C$  上に中継点  $z$  をいつでも任意にとることができ、この点  $z$  に対して

$$d(v, z) + d(z, w) = d(v, w) \tag{4.110}$$

が成り立つ。

(2) 図 4.73 のように、ピーターソン・グラフの各点に番号を付ける。ピーターソン・グラフの対称性から、点 1, 6 をスタート地点に選んだ場合の各他点への最短路を考えれば十分である (括弧内は長さ  $d$  を与える経路)。

$$\begin{aligned} d(1, 2) &= 1 (1 \rightarrow 2), & d(1, 3) &= 2 (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3), & d(1, 4) &= 2 (1 \rightarrow 5 \rightarrow 4) \\ d(1, 5) &= 1 (1 \rightarrow 5), & d(1, 6) &= 1 (1 \rightarrow 6), & d(1, 7) &= 2 (1 \rightarrow 2 \rightarrow 7), \\ d(1, 8) &= 2 (1 \rightarrow 6 \rightarrow 8), & d(1, 9) &= 2 (1 \rightarrow 6 \rightarrow 9), & d(1, 10) &= 2 (1 \rightarrow 5 \rightarrow 10) \end{aligned}$$

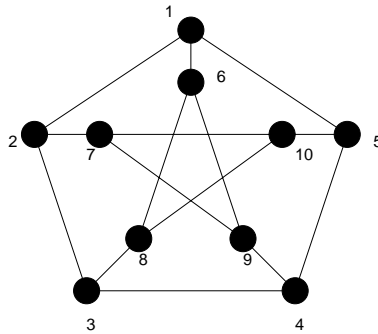


図 4.73: ピーターソン・グラフ

$$\begin{aligned}
 d(6,1) &= 1 (6 \rightarrow 1), & d(6,2) &= 2 (6 \rightarrow 1 \rightarrow 2), & d(6,3) &= 2 (6 \rightarrow 8 \rightarrow 3) \\
 d(6,4) &= 2 (6 \rightarrow 9 \rightarrow 4), & d(6,5) &= 2 (6 \rightarrow 1 \rightarrow 5), & d(6,7) &= 2 (6 \rightarrow 9 \rightarrow 7) \\
 d(6,8) &= 1 (6 \rightarrow 8), & d(6,9) &= 1 (6 \rightarrow 9), & d(6,10) &= 2 (6 \rightarrow 8 \rightarrow 10)
 \end{aligned}$$

以上より、ピーターソン・グラフの任意の 2 点  $v, w$  に対して  $d(v, w) = 1$  または  $d(v, w) = 2$  であることが示せた。

#### 4.1.2 非連結化集合と分離集合

ある連結グラフを「どの程度つながったグラフであるか」という観点から調べる際、「そのグラフから何本の辺を取り去ったら非連結グラフになるか?」「そのグラフから何個の点を取り去ったら非連結グラフになるか?」という指標を用いることが多い。前者を非連結化集合 (disconnecting set), 後者を分離集合 (separating set) と呼ぶ。ここではそれぞれを例を取りあえて見てゆくことにしよう。

##### 非連結化集合

非連結化集合：それを除去するとグラフが非連結となる辺の集合。

カットセット：そのどのような真部分集合も非連結化集合でない、非連結化集合<sup>8</sup>。図 4.74 の非連結化集合  $\{e_1, e_6, e_7, e_8\}$  はカットセットでもある。

辺連結度 (edge-connectivity)  $\lambda(G)$ ：連結グラフ  $G$  の最小なカットセットの大きさ。図のグラフでは  $\lambda(G) = 2$  である。

$\lambda(G) \geq k$  のとき、グラフ  $G$  は  $k$ -辺連結であるという。

##### 分離集合

分離集合：それを除去するとグラフが非連結となる点の集合 (辺を除去するときにはその接続辺も除去することに注意)。

カット点：1 個の点だけからなる分離集合。

<sup>8</sup> 「それを除去するとグラフの成分数が増える辺の集合」として定義し直せば、「非連結化集合」、「カットセット」はそれぞれ非連結グラフにも適用できる概念であることに注意しよう。

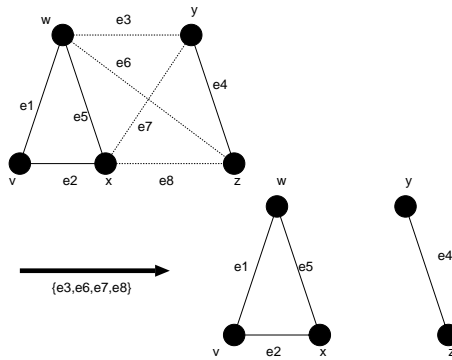


図 4.74: カットセット  $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$  を選ぶと図のような非連結グラフが得られる.

連結度  $\kappa(G)$ <sup>9</sup> : グラフ  $G$  の最小な分離集合の大きさ.

$\kappa(G) \geq k$  のとき, グラフ  $G$  は  $k$ -連結であるという.

(注)

連結度  $\kappa(G)$  とは通信系のネットワーク (インターネットを思い出して頂ければよいと思います) を構築する際に便利な量である. つまり, グラフの各点を「交換局」あるいは「サーバ」とすれば, そのグラフ (ネットワーク)  $G$  の連結度が  $\kappa(G)$  であるということは,  $\kappa(G)$  未満の交換局 (サーバ) が故障しても, 残りの交換局 (サーバ) の連結性が保障されていることになる.

⇒ 連結度  $\kappa(G)$  はネットワークの信頼度を反映し,  $\kappa(G)$  が大きなネットワークほど, その信頼性が高い.

一方, 前出の「辺連結度」 $\lambda(G)$  をこのネットワークに当てはめて考えれば,  $\lambda(G)$  未満の伝送路が故障しても, 交換局 (サーバ) の連結性が保障されていることになるので,  $\lambda(G)$  も一つのネットワークの信頼度の尺度として用いることができる.

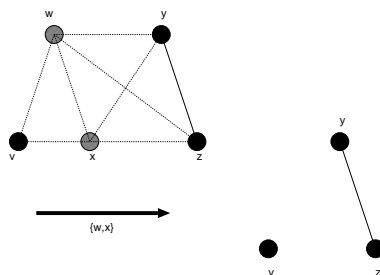
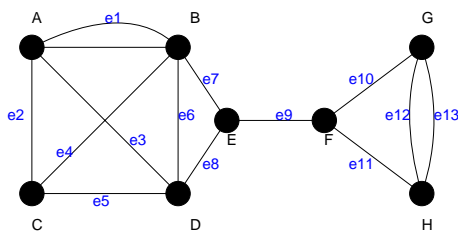


図 4.75: 分離集合  $\{w, x\}$  によってできる非連結グラフ.

<sup>9</sup> この連結度は, 前出の辺連結度と区別するために「点連結度」と呼ばれることもある.

例題 4.3 (2003 年度 情報工学演習 II(B) #2)

図に与えられたグラフ  $G$  について以下の問い (1) ~ (5) に答えよ.



- (1)  $G$  の非連結化集合を一つ挙げよ.
- (2)  $G$  のカットセットを一つ挙げよ.
- (3)  $G$  の橋を挙げよ.
- (4)  $G$  の分離集合を一つ挙げよ.
- (5)  $G$  のカット点を一つ挙げよ.

(解答例)

- (1) グラフ  $G$  の非連結化集合は例えば,  $\{e_7, e_8\}$ ,  $\{e_{10}, e_{11}\}$ ,  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  などである.
- (2) グラフ  $G$  のカットセットは例えば,  $\{e_7, e_8\}$ ,  $\{e_{10}, e_{11}\}$ ,  $\{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$  などである.  
(カットセット)  $\subseteq$  (非連結化集合) であることに注意.
- (3) グラフ  $G$  の橋は  $e_9$  である.
- (4) グラフ  $G$  の分離集合は  $\{B, D, E\}$  などである.
- (5) グラフ  $G$  のカット点は  $E, F$  である.

例題 4.4 (2004 年度 演習問題 4)

前回の講義では隣接行列, 接続行列と呼ばれる行列を用いてグラフを表現する方法を学んだが, これら 2 つの行列の他にもグラフを表現するための行列は存在し, それらを用いることにより, より有効にグラフについての考察を進めることができる. ここでは, そのような行列であるタイセット行列, 及び, カットセット行列についての演習問題を解くことにより, これら行列に関する理解を深めることにしよう.

無向グラフ  $G$  のタイセット行列 (tie-set matrix)  $B$  とは, 各行が  $G$  の閉路  $L_i$  に, 各列  $j$  が枝  $j \in E(G)$  に対応し, 行列要素  $b_{ij}$  が

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (L_i \text{ が枝 } j \text{ を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (4.111)$$

と表される行列である.

一方, グラフ  $G$  のカットセット行列 (cut-set matrix)  $C$  とは, 各行  $i$  が  $G$  のカットセット  $C_i$  に, 各列  $j$  が枝  $j \in E(G)$  に対応し, 各行列要素がそれぞれ

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (C_i \text{ が枝 } j \text{ を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (4.112)$$

で与えられる. 例えば, 図 4.76 のグラフ  $G$  においては, タイセット行列, カットセット行列はそれぞれ

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

となる. これを踏まえて以下の問いに答えよ.

- (1) 図 4.77 のグラフ  $G$  の閉路を全て求めよ (それぞれに  $L_1, L_2, \dots$  のようなラベルを付けよ).
- (2) グラフ  $G$  のカットセットを全て求めよ (それぞれに  $C_1, C_2, \dots$  のようなラベルを付けよ).
- (3) グラフ  $G$  のタイセット行列  $B$  を求めよ.
- (4) グラフ  $G$  のカットセット行列  $C$  を求めよ.
- (3) タイセット行列  $B$  とカットセット行列  $C$  の間に次の関係式が成り立つことを示せ.

$$BC^T \equiv \mathbf{0} \pmod{2} \quad (4.114)$$

ただし,  $C^T$  は行列  $C$  の転置行列を表し,  $\mathbf{0}$  は全ての成分がゼロである行列として定義される.

(解答例)

- (1) (2) 図 4.78 を参照のこと.
- (3) 閉路行列の列の増える方向に  $L_1, L_2, L_3$ , 行の増える方向に辺の番号  $1, 2, \dots, 5$  のようにラベル付けす

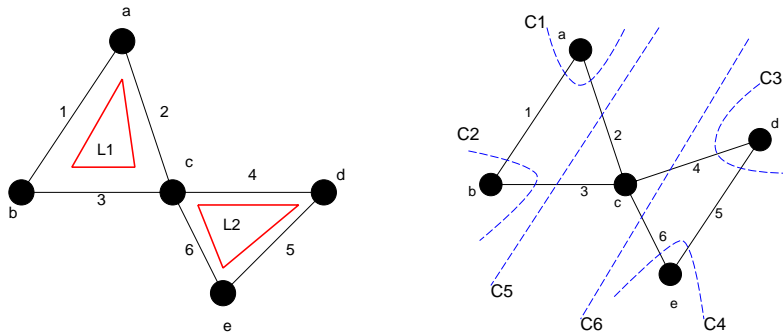


図 4.76: グラフ G の閉路 (左) とカットセット (右).

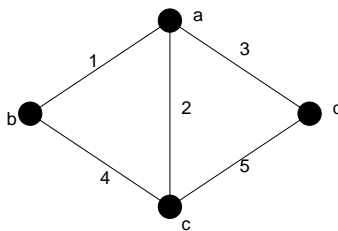


図 4.77: 問題のグラフ G.

るように決めると行列  $B$  は

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.115}$$

となる.

- (4) カットセット行列の列の増える方向にカットセットの番号  $C_1, C_2, \dots, C_6$ , 行の増える方向に辺の番号  $1, 2, \dots, 6$  を割り振ることに決めれば, 行列  $C$  は

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.116}$$

となる.

- (5) 両行列の積  $BC^T$  を作ると

$$BC^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

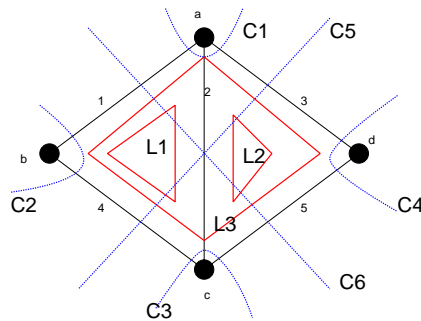


図 4.78: 問題のグラフ及び, 閉路  $L_1, L_2, L_3$ , そして, カットセット  $C_1, C_2, \dots, C_6$ .

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 & 1+1 & 0 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 0 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod{2}$$

となり, 題意が満たされる.

**例題 4.5** (2005 年度 演習問題 4)

1. 完全グラフ  $K_3$  に関し, その各点がサーバに対応し,  $K_3$  のつながり方をした「ネットワーク」をなしているものとする. このネットワークの各辺が確率  $q$  で断線する場合, グラフが依然として連結グラフである場合に限り, このネットワークは正常に機能することがわかっている. このとき, このネットワークが正常である確率 (ネットワークの信頼度)  $R$  を  $q$  の関数として求め, 図示せよ.
2. 今回の講義で学んだ「閉路」「カットセット」に関して以下の問いに答えよ.
  - (1) グラフの中に辺  $e$  を含む閉路が 2 つある場合,  $e$  を含まない閉路があることを例を挙げて示せ.
  - (2) グラフの中に辺  $e$  を含むカットセットが 2 つある場合,  $e$  を含まないカットセットがあることを例を挙げて示せ.

(解答例)

1. 完全グラフ及び, 辺が 1 本断線したグラフ (3 種類), 辺が 2 本断線したグラフ (3 種類), 辺が全て断線したグラフ (1 種類) のそれぞれのグラフを図 4.79 に示す. ここで注意すべきなのは, 各点はネットワークのサーバに対応するので, このような問題においては, グラフはラベル付きのものを考えるべきである. 従って, この図からネットワークが正常に動作するのは完全グラフの場合, 及び, 辺が 1 本だけ断線する場合に限り, それぞれの確率は  $(1 - q)^3, 3q(1 - q)^2$  で与えられるので, ネットワークの信頼度  $R$  はこれら両者の和で与えられる. 従って,  $q$  の関数としての  $R$  は

$$R(q) = (1 - q)^3 + 3q(1 - q)^2 \tag{4.117}$$

となる. これを図 4.80 に描く.

2. (1)(2) に該当するケースをそれぞれ図 4.81, 及び, 図 4.82 に描く. 図 4.81 に示したように, 辺  $e$  を含む閉路として  $L_1, L_2$  を選ぶと,  $e$  を含まない閉路として, いつでも  $L_1, L_2$  の和から  $e$  を削除したものを第 3 の閉路  $L_3$  としてとることができる.

図 4.82 のように辺  $e_1, e_2$  が三角形をなしている場合には, カットセット  $\{e, e_1\}$  によって, グラフ  $G$  は部分グラフ  $G_1$ , 及び,  $G_2 + G_3$  に分離し, カットセット  $\{e, e_2\}$  によって部分グラフ  $G_1 + G_2$ , 及び,  $G_3$

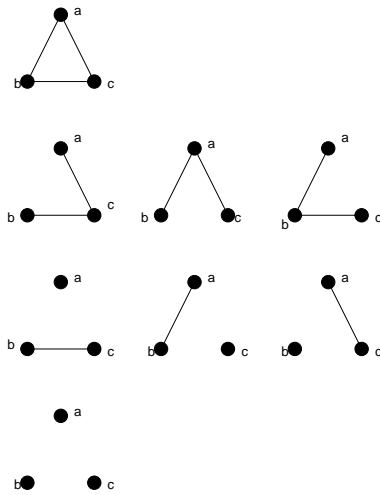


図 4.79: ここで考えられるネットワークの状態. 上から, 断線ゼロ, 1 本断線, 2 本断線, 全部断線のグラフ. ネットワークとして正常であるのは, 断線ゼロ, 及び, 1 本断線の場合のみ.

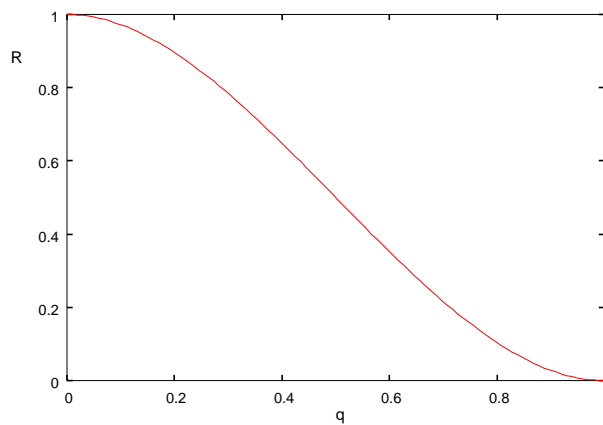


図 4.80: ネットワークの信頼度  $R$  の各辺の断線確率  $q$  依存性.

に分離するが,  $e$  を含まないカットセットとして  $\{e_1, e_2\}$  をいつでもとることができて, この場合にはグラフ  $G$  が部分グラフ  $G_1 + G_3$ , 及び,  $G_2$  に分離する.

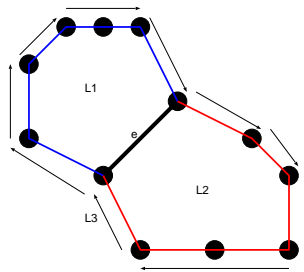


図 4.81: 辺  $e$  を含む閉路としては,  $L_1, L_2$  があるが,  $e$  を含まない閉路として, いつでも  $L_1, L_2$  の和から  $e$  を削除したものを第 3 の閉路  $L_3$  としてとることができる.

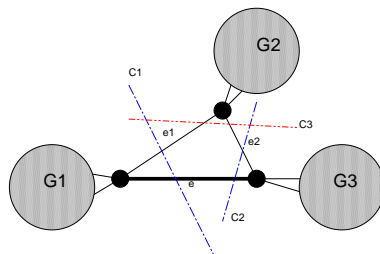
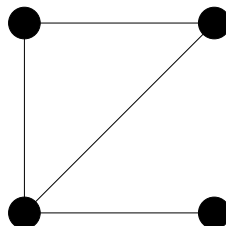


図 4.82: 図のように辺  $e$ , 及び, 辺  $e_1, e_2$  が三角形をなしている場合には, カットセット  $\{e, e_1\}, \{e, e_2\}$  以外に必ず,  $\{e_1, e_2\}$  を選ぶことができる.

**例題 4.6** (2004 年度 情報工学演習 II(B)#1)

図のグラフ  $G$  の各点はネットワーク  $G$  内のサーバを表すとして.



各サーバは確率  $p$  で故障する. 故障したサーバは他のサーバと情報のやりとりができないので, ネットワークから除去する.  $k$  個のサーバが故障したとき, ネットワーク内に残るサーバからなる部分ネットワークが正常である (連結である) 確率  $p_k$  を求めよ. ただし, 1つのサーバだけからなる「ネットワーク」は正常であるとは言わないことにする. また, システムの信頼度:

$$R(G) = \sum_k p_k$$

を計算し,  $p$  の関数として図示せよ.

(解答例)

故障したサーバ数が  $k = 0, 1, 2$ , のときに生き残るサーバからなる正常なネットワークを描くと図 4.83 のようになる ( $k = 3, 4$  の場合は問題外なことは明らか). 従って, 求める確率  $p_k$  は

$$p_0 = (1 - p)^4 \tag{4.118}$$

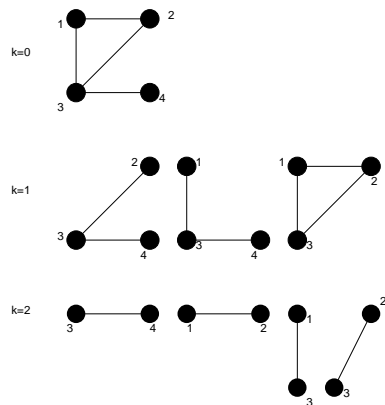


図 4.83: 正常なネットワーク.

$$p_1 = 3p(1-p)^3 \tag{4.119}$$

$$p_2 = 4p^2(1-p)^2 \tag{4.120}$$

$$p_3 = 0, p_4 = 0 \tag{4.121}$$

であり, この結果からシステムの信頼度  $R(G)$  は

$$R(G) = \sum_{k=0}^4 p_k = (1-p)^4 + 3p(1-p)^3 + 4p^2(1-p)^2 \tag{4.122}$$

となる. これを  $p$  の関数としてプロットしたものを図 4.84 に載せる.

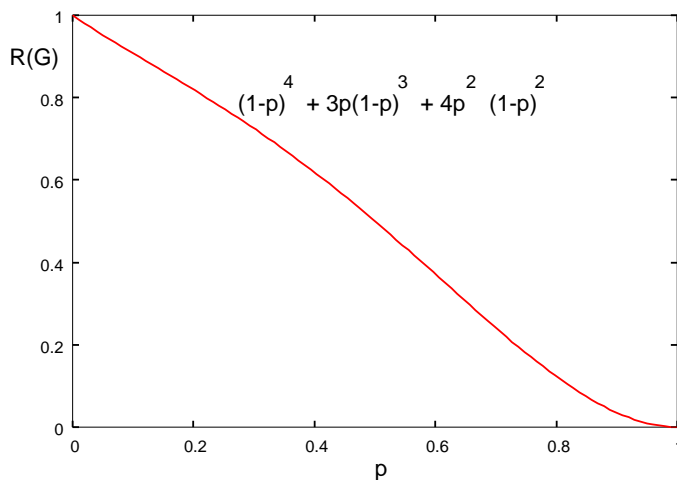


図 4.84: 信頼度 :  $R(G) = (1-p)^4 + 3p(1-p)^3 + 4p^2(1-p)^2$

例題 4.7 (2006 年度 演習問題 4)

グラフ  $G_1$  と  $G_2$  の結び:  $G = G_1 + G_2$  とは点集合:  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ , および, 辺集合:  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ かつ } v \in V(G_2)\}$  を持つグラフのことである. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 完全グラフ  $K_2$  と  $K_3$  の結びを図示せよ.
- (2) 点集合が  $n$  個の部分集合  $V_i (i = 1, \dots, n)$  に分割され,  $G$  のどの辺もその端点を異なる部分集合内にあるようにできるものを  $n$  部グラフと呼ぶが, この  $n$  部グラフが特に, 分割の任意の部分集合内にある各点が, その他の部分集合内にある全ての点と結びつけられるとき, そのグラフを完全  $n$  部グラフと呼び,  $K_{p_1, p_2, \dots, p_n} (p_i = |V_i|)$  と書く. このとき,

$$K_{p_1, p_2, \dots, p_n} = \bar{K}_{p_1} + \bar{K}_{p_2} + \dots + \bar{K}_{p_n} \tag{4.123}$$

が成り立つことを示せ. ただし,  $\bar{G}$  はグラフ  $G$  の補グラフを表すものとする. ( わかりにくければ, 実際に  $K_{2,2,2}$  の場合を図示してみよ.)

(解答例)

- (1)  $K_2, K_3$  はそれぞれ点数が 2,3 の完全グラフであり, 「線分」と「三角形」がこれに相当する. ここで問題となっているこの両者の「結び」 $K_2 + K_3$  は, 問題文に定義されているように  $K_2, K_3$  の辺はそのまま残され, かつ,  $K_2$  内の点は  $K_3$  内の点と結ぶことによってできる辺から成るグラフであるから, 図 4.85 のようなグラフが問題の結びである.

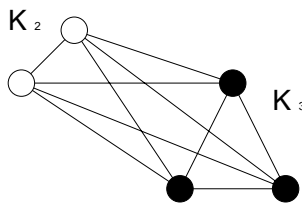


図 4.85:  $K_2$  と  $K_3$  の結び.

- (2) はじめに, 完全三部グラフ  $K_{2,2,2}$  に対して関係式は

$$K_{2,2,2} = \bar{K}_2 + \bar{K}_2 + \bar{K}_2 \tag{4.124}$$

と書けるが, この両辺の意味するグラフを具体的に描き, 両者が同形であるか否かを確認してみよう. はじめに左辺は完全三部グラフの定義より, 図 4.86(左) のように A,B,C グループにそれぞれ 2 点ずつ属する点のそれぞれを自分のグループ以外に属する点の全てと結びつけることによりできる. 一方の右辺の 3 つの  $\bar{K}_2$  は, 完全グラフが全ての点どうしを結んでできるグラフであったことを考えると, これは 2 個の孤立点からなる「空グラフ」ということになる. 従って, この 3 つのグラフの各々に対して, 辺は存在しないので, この 3 つの空グラフを A,B,C のように名づけ, 各々の空グラフの点を  $u_A$  等と呼ぶことに約束すると (つまり,  $u_A \in V(A)$  等), (4.124) 式の右辺は辺集合:

$$\begin{aligned} E(\bar{K}_2 + \bar{K}_2 + \bar{K}_2) &= \{u_A u_B | u_A \in V(A) \text{ かつ } u_B \in V(B)\} \\ &\cup \{u_B u_C | u_B \in V(B) \text{ かつ } u_C \in V(C)\} \\ &\cup \{u_C u_A | u_C \in V(C) \text{ かつ } u_A \in V(A)\} \end{aligned} \tag{4.125}$$

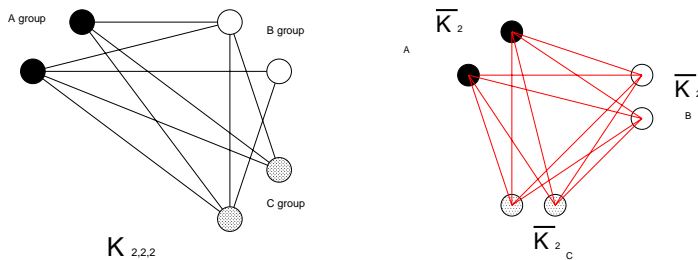
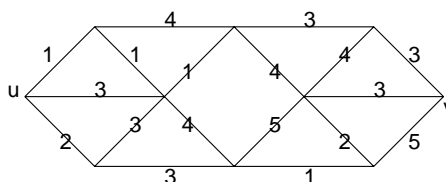


図 4.86:  $K_{2,2,2}$ (左) と  $\bar{K}_2 + \bar{K}_2 + \bar{K}_2$ (右).

となり, これを図示すると図 4.86(右) のように,  $K_{2,2,2}$  と同形なグラフが出来上がる.  
 以上の議論は直ちに一般の完全  $n$  部グラフに拡張することができる.  $K_{p_i}$  の補グラフ  $\bar{K}_{p_i}$  は  $p_i$  個の孤立点からなる空グラフであり, この点集合を  $V(i)$  とすれば, 結び:  $\bar{K}_{p_1} + \dots + \bar{K}_{p_n}$  は  $n$  個のグループの中から任意の異なる 2 グループ  $V(i), V(j)$  に属する点どうしを結んでできる全ての辺集合であるから, これはまさに完全  $n$  部グラフ  $K_{p_1, \dots, p_n}$  の描き方そのものである. 従って, 題意の関係式は成立する.

**例題 4.8** (2004 年度情報工学演習 II(B) #1)

図に与えたグラフの始点  $u$  から終点  $v$  へ至る全ての経路の中で最短のものを求めよ.



なお, グラフの各辺に記された数字はその区間の距離であるものとする. なお, 同じ最短距離を与える経路が複数存在する場合には, それら全てを答えること.

(解答例)

図 4.87 のように各点に  $A \sim H$  の名前を付ける. 各点  $x$  までの最短路を  $l(x)$  と書くことにすれば, これらは

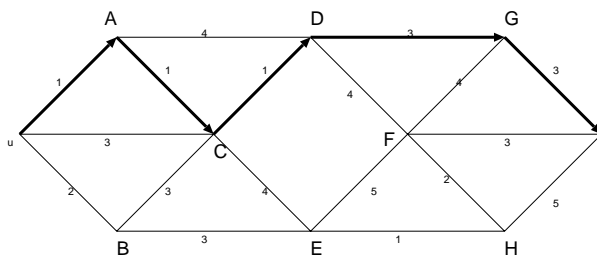


図 4.87: 図のように各点に名前を付ける. 太線矢印が求める最短路である.

順次に求めることができ

$$\begin{aligned}
 l(u) &= 0 \\
 l(A) &= l(u) + 1 = 1 \\
 l(B) &= l(u) + 2 = 2 \\
 l(C) &= \min\{l(u) + 3, l(A) + 1, l(B) + 3\} = \min\{3, 2, 5\} = 2 \\
 l(D) &= \min\{l(A) + 4, l(C) + 1\} = \min\{5, 3\} = 3 \\
 l(E) &= \min\{l(C) + 4, l(B) + 3\} = \min\{6, 5\} = 5 \\
 l(F) &= \min\{l(D) + 4, l(F) + 5\} = \min\{7, 10\} = 7 \\
 l(G) &= \min\{l(D) + 3, l(F) + 4\} = \min\{6, 11\} = 6 \\
 l(H) &= \min\{l(F) + 2, l(E) + 1\} = \min\{9, 6\} = 6 \\
 l(v) &= \min\{l(G) + 3, l(H) + 5, l(F) + 3\} = \min\{9, 11, 10\} = 9
 \end{aligned}$$

のようになる. 従って, 最短路は  $u \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow v$  であり, そのときの最短路長は 9 である.

計算機を用いた最短路長の計算例とプログラムは例題 11.6 を参照のこと.

**例題 4.9** (2005 年度情報工学演習 II(B) #1)

グラフ  $G$  は  $n = 2k$  個の点を持つ単純グラフで三角形は持たないものとする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $k = 3$  のとき  $G$  の辺数  $m$  の上界  $m^+ (\geq m)$  を求め, その上界  $m^+$  を与えるグラフ  $G$  の例を一つ描け.
- (2)  $G$  の辺数は  $k^2$  以下である ( $m \leq m^+ = k^2$ ) ことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

注: 数学的帰納法を用いないやり方でも証明できるという場合にはそれを解答としても良い.

(解答例)

- (1)  $k = 3$  であるから, 点数は  $n = 2 \times 3 = 6$  である. このとき, グラフ  $G$  が三角形を持たないように描くと図 4.88(左) のようになり, このときの辺数は  $m^+ = 9 = 3^2 = k^2$  となり, この図 4.88 に 1 本でも辺を加えると三角形ができてしまうので, これが辺の上限を与える.

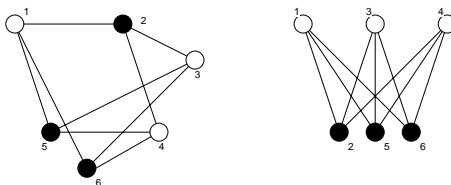


図 4.88:  $k = 3, n = 2k = 6$  の場合の三角形を持たない最大の辺を与えるグラフの例 (左). このグラフは完全二部グラフ  $K_{3,3}$  と同型である (右).

- (2) 数学的帰納法で示す.

$k = 1$  のとき,  $n = 2 \times 1 = 2, k^2 = 1 = m^+$  の成立は明らか (グラフ  $G$  は 2 点からなる「木」である).  
 そこで,  $k$  のときに題意の成立を仮定する. つまり,  $n = 2k$  のとき,  $m \leq m^+ = k^2 \equiv m^+(k)$  とする.

このとき, (1) の結果より, 三角形を持たない辺数最大のグラフは完全二部グラフと同型であり,  $K_{s,t}$  の点数が  $s+t$ , 辺数が  $s \times t$  で与えられることを考えると,  $s = t = k$  の場合には点数は  $n = 2k$ , 辺数は  $k^2$  であり, 題意を満たしていることに注目する (図 4.88(右) 参照). この完全二部グラフ  $K_{k,k}$  に点を 2 つ加え (A,B とする), A と二部グラフの白丸を結び (辺が新たに  $m$  本できる), B と二部グラフの黒丸を結び (辺が新たに  $m$  本できる). そして最後に A,B どうしを結び (辺が新たに 1 本できる) と点数は  $2k + 2 = 2(k + 1)$  であり, このときの辺数は

$$m^+(k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \tag{4.126}$$

となり, 上記のようにしてでき上がるグラフに任意の 1 辺を加えると三角形ができてしまうのは明らかなので, これが上限であり,  $k + 1$  のときに題意の成立が言える. 以上により,  $G$  の辺数は  $k^2$  以下であることが示せた.

**例題 4.10** (2006 年度情報工学演習 II(B) #1)

$n$  をグラフの点数,  $m$  を辺数とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 関係式:

$$m > {}_{n-1}C_2$$

を満たす単純グラフは連結であることを示せ.

(2)  $n > 1$  に対して

$$m = {}_{n-1}C_2$$

である非連結グラフの例を一つ挙げよ.

(解答例)

(1)  $n$  が一定である場合, グラフの成分数  $k$  が多くなればその分の辺数が少なくなることは明らか. 従って, ここでは点数  $n$  からなる非連結グラフのうち最小の成分を持つもの, すなわち,  $k = 2$  の場合を考える. このとき, 辺数を最大化するグラフは  $n - 1$  個の点からなる完全グラフ  $K_{n-1}$  と孤立点 1 点からなるグラフであるから, その辺数は  ${}_{n-1}C_2$  である. この孤立点と  $K_{n-1}$  の任意の 1 点を結びと単純連結グラフが得られることになるので, これが単純連結グラフの辺数  $m$  の下限を与えることになる. つまり

$$m \geq {}_{n-1}C_2 + 1 \tag{4.127}$$

である. これは辺数  $m$  は整数であることを考えると次のように書き換えることができる.

$$m > {}_{n-1}C_2 \tag{4.128}$$

以上より, 単純グラフの辺数は  $m > {}_{n-1}C_2$  を満たすという題意を示すことができた.

(2)  $n = 4$  とすると,  $K_3$ (三角形) と孤立点 1 点ができる. この辺数は  ${}_3C_2 = 3$  である.

**例題 4.11** (2007 年度 **演習問題 4**)

- (1) 任意のグラフ  $G$  において、次数が奇数である点の個数は必ず偶数個あることを関係式:

$$\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2\epsilon(G)$$

を用いて示せ.

- (2) 単純グラフ  $G$  の点の個数が 2 以上ならば、 $G$  には必ず同じ次数を持つ 2 つの点が存在することを示せ.

(解答例)

- (1) グラフ  $G$  に存在する全ての点集合  $V(G)$  を奇数次、偶数次の部分集合:  $V_{\text{odd}} = \{u \mid \deg(u) \text{ が奇数}\}$ ,  $V_{\text{even}} = \{u \mid \deg(u) \text{ が偶数}\}$  に分ける. このとき、与えられた関係式は

$$2\epsilon(G) = \sum_{u \in V_{\text{odd}}} \deg(u) + \sum_{u \in V_{\text{even}}} \deg(u) \quad (4.129)$$

と書けるが、明らかに、上式のうちの  $2\epsilon(G)$  と  $\sum_{u \in V_{\text{even}}} \deg(u)$  は偶数である. 従って、上関係式の両辺の偶奇を合わせるために  $\sum_{u \in V_{\text{odd}}} \deg(u)$  は偶数でなければならないが、この和の中の各要素  $\deg(u)$  が奇数であることを考えれば、この和に現れる各要素の総数は偶、すなわち、次数が奇数である点は偶数個なければならない. 従って、『任意のグラフ  $G$  において、次数が奇数である点の個数は必ず偶数個ある』ことが示された.

- (2) グラフ  $G$  の点の数を  $n$  とする. このとき、 $G$  が単純グラフであれば、明らかに  $G$  の可能な最大次数は  $n-1$  である. 従って、もし、 $n$  点すべての次数が異なると仮定すると、それらの次数は  $0, 1, 2, \dots, n-1$  となるが、明らかに次数 0 の点と可能な最大次数  $n-1$  の点がグラフ  $G$  中に共存することはできない. 従って、『単純グラフ  $G$  の点の個数が 2 以上ならば、 $G$  には必ず同じ次数を持つ 2 つの点が存在する』ことが示された.

## 第5回講義

### 5.1 オイラー・グラフとハミルトン・グラフ

ここでは情報工学的に応用される場面も多いオイラー・グラフとハミルトン・グラフについて学ぶ。

#### 5.1.1 オイラー・グラフ

オイラー・グラフ (Eulerian graph) : 全ての辺を含む閉じた小道がある連結グラフ。

半オイラー・グラフ (semi-Eulerian graph) : 全ての辺を含む小道がある連結グラフ (閉じていない)。

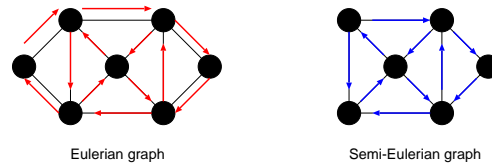


図 5.89: オイラー・グラフ (左) と半オイラー・グラフ (右) の一例.

#### 定理 6.2

連結グラフ  $G$  がオイラー・グラフとなる必要十分条件は  $G$  の点の次数が全て偶数であることである。

(証明)

⇒ (必要性)

$G$  のオイラー・小道  $P$  がある一点を通過する毎に 2 を加えていくと、全ての辺はちょうど 1 回ずつ含まれるので、各点でこの和はその点の次数に等しく、しかも、それは偶数である。

⇐ (十分性)

各点の次数は偶数であり、かつ、連結であるとする、教科書 p. 43 **補題 6.1** より、この連結グラフ  $G$  には閉路  $C$  がある。従って、このもとでオイラー・グラフとして  $G$  が構成できればよい。つまり、このもとで具体的なオイラー・グラフの構成法を提示すれば証明は終了である。

さて、自明であるが、閉路  $C$  に  $G$  の全ての点が含まれていれば、その閉路そのものがオイラー・グラフとなるので証明は終了する。従って、以下ではこれ以外のケースに対して、オイラー・グラフの構成法を提示する。

まず、図 5.90 のように  $G$  から閉路  $C$  の辺を除去してできるグラフ (一般には非連結であるが、オイラー・小道がある) を  $H$  とする。  $G$  の連結性より、グラフ  $H$  の各成分は  $C$  と少なくとも 1 点を共有していることに注意しよう。従って、このような状況下で、 $C$  上の任意の一点からスタートし、 $C$  の辺をたどる。そして、 $H$  の孤立点でない点に出くわすたびに、その点を含む  $H$  の成分のオイラー・小道 ( $C$  自身はオイラー・グラ

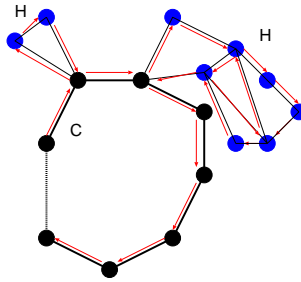


図 5.90: 考える連結グラフ  $G$  は閉路  $C$  とそれぞれオイラー小道を含む成分  $H$  からなる.  $C$  自身はオイラー・グラフであるから, 奇数次の点を含まない. 従って,  $H$  も奇数次の点を含まない.

フであるから, 奇数次の点を含まず, 従って, 各成分である  $H$  も奇数次の点を含まない) をたどり, その点に戻り, また  $C$  の辺をたどって行く ... という操作を繰り返し,  $C$  上の出発点に戻るという作業を行うことにより, オイラー小道が得られ, たどって来た道をつなげることにより, 求めるべきオイラー・グラフを描くことができる (証明終わり).

次にオイラー・グラフに関する例題を一つ見ておこう.

**例題 5.1**

オイラー・グラフに関して以下の問いに答えよ.

- (1) どんな  $n$  に対して完全グラフ  $K_n$  はオイラー・グラフになるか?
- (2) 完全二部グラフ  $K_{s,t}$  のどのような場合がオイラー・グラフとなるか?
- (3) どのような  $n$  に対して車輪  $W_n$  はオイラー・グラフとなるか?

(解答例)

- (1) 完全グラフ  $K_n$  の任意の 1 点の次数は  $n - 1$  であるから,  $n - 1 =$  偶数の場合に限り,  $K_n$  はオイラー・グラフとなる. 従って, 例えば,  $K_5$  はオイラー・グラフであるが,  $K_4$  はオイラー・グラフではない.
- (2) 図 5.91 のように,  $s \geq 2$ , 及び,  $t$  が偶数であれば,  $a \rightarrow 1 \rightarrow b \rightarrow 2 \rightarrow a \rightarrow 3 \rightarrow b \rightarrow 4 \rightarrow a \rightarrow 5 \rightarrow b$  のような経路で,  $a, b$  を交互に経由したオイラー小道を作るとは常に可能である (図の例では  $t$  が奇数なので, できるグラフは半オイラーであり, オイラーではない.  $t = 6$  の場合にはオイラーとなることを各自が確認してみる). 従って,  $s \geq 2$  のとき, 完全二部グラフ  $K_{s,t}$  はオイラー・グラフとなる.

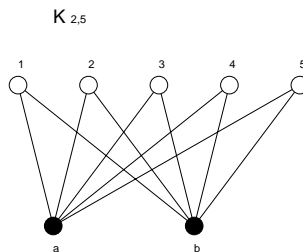


図 5.91: 完全二部グラフ  $K_{2,5}$ . オイラー小道が存在し, オイラー・グラフである.

- (3) 車輪は全ての  $n$  に対して,  $C_{n-1}$  と 1 点との結合部の次数は  $3$ (奇数) であるから, オイラー・グラフと

はならない.

さて, **定理 6.2** により, 我々は与えられたグラフの各点の次数を調べることで, そのグラフがオイラー・グラフか否かを調べることができるようになった. 従って, 以下のような問題に対し, 我々は直ちに答えることができる.

**問題**

7つの催し会場 a,b,c,d,e,f,g の主催者がその順路を決める際に, 一筆書きに基づく道順を採用しようとしている. 各会場から出ている道の本数は以下の表の通りである.

会場	a	b	c	d	e	f	g
道数	4	4	4	4	4	4	2

この場合, 主催者の望む「一筆書き順路」は作成可能であるか?

この問題の答えはもちろん, 「可能」である (全ての点の次数が偶数であるから).

しかし, 実際にこのグラフの中からオイラー小道を探すと, グラフに含まれる点の数が多くなるに従って難しくなることはわかるであろう. どのようにすれば系統的にオイラー小道を作ることができるだろうか?

この問いに対する答えとして, Fleury (フラーリー) のアルゴリズムが知られている. この証明は教科書 p. 45 を読んで頂くことにして, ここでは, アルゴリズムを挙げておくので, 各自, 上の催し会場の順路作成に用いてみることに (⇒ 例題 6.3).

**Fleury のアルゴリズム**

任意の点から出発し, 次の規則に従う限り自由に辺をたどればオイラー小道が得られる.

- (1) たどった辺は除去し, 孤立点が生じた場合にはそれも除去する.
- (2) どの段階でも, 他にたどる辺がない場合以外には橋をたどるな.

**5.1.2 ハミルトン・グラフ**

ハミルトン・グラフ (Hamiltonian graph) : ハミルトン閉路によりなるグラフ.

ハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle) : グラフ G の各点をちょうど一度だけ通る閉じた小道.

半ハミルトン・グラフ (semi-Hamiltonian graph) : 全ての点を通る道があるグラフ (閉じてはいない).

与えられたグラフがハミルトン・グラフであるかどうかに関する判定には次の Ore (オーレ) の定理が役立つ場合が多い.

**定理 7.1 (Ore (オーレ) の定理)**  
 単純グラフ  $G$  には  $n(\geq 3)$  個の点があるとする. 隣接していない任意の 2 点  $v, w$  に関して

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n \tag{5.130}$$

が成立するとき  $G$  はハミルトン・グラフである.

(証明)

背理法で示す.

「グラフ  $G$  はハミルトニアン・グラフではないが (5.130) を満たす」と仮定し, この矛盾を導く.

$G$  は (ぎりぎり) ハミルトン・グラフではないとすると,  $G$  には全ての点を含む道:

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$$

がある. しかし, ここで,  $v_1$  と  $v_n$  が隣接しているとしてしまうと, グラフ  $G$  がハミルトン・グラフになってしまうので,  $v_1$  と  $v_n$  は隣接していないものとする.

従って,  $v_1, v_n$  に関する不等式 (5.130) が成立し (背理法の仮定),

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$$

が成り立つ. よって,  $v_1, v_n$  の次数は 2 以上なので ( $n = 3$  の場合,  $\deg(v_1) = 2, \deg(v_n) = 1$  はどうなのか, と思う人がいるかもしれないが, このときの 3 点の配列を考えると, これはあたらないことがわかるであろう),  $v_i$  は  $v_1$  に隣接し,  $v_{i-1}$  は  $v_n$  に隣接するような 2 点  $v_i, v_{i-1}$  が存在する (図 5.92 参照). このとき, 単

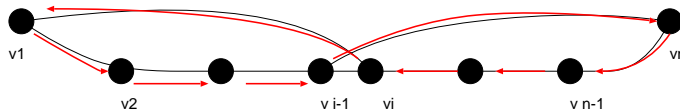


図 5.92: Ore の定理の十分性の証明で用いるグラフ.

純グラフ  $G$  には

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_n \rightarrow v_i \rightarrow v_1$$

なる閉路が存在することになり, 矛盾. (証明終わり)<sup>10</sup>.

最後に Ore の定理に関する次の例題を見ておくことにしよう.

**例題 5.2** (2003 年度レポート課題 #4 問題 1)

グラフ  $G$  には  $n$  個の点があり,  $(n - 1)(n - 2)/2 + 2$  本の辺があるとする. このとき, Ore の定理を用いて, このグラフ  $G$  はハミルトン・グラフであることを示せ.

(解答例)

辺の数が  $n - 1$  本の完全グラフ  $K_{n-1}$  の辺の本数は  $(n - 1)(n - 2)/2$  本であり, ハミルトン・グラフが多重辺等を含まない単純グラフであることを考慮すると,  $G$  は  $K_{n-1}$  と 1 点  $v$  の合計  $n$  点からなり,  $v$  は  $K_{n-1}$  を構成する任意の 2 点  $w, x$  と図 5.93 のように結びついていると考えてよい. 従って, この場合の辺の数は

<sup>10</sup> この定理はハミルトン・グラフであるための十分条件を与えていることに注意. 従って, 条件式 (5.130) を満たさないようなハミルトン・グラフも存在する ⇒ 例題 5.3 の 3 を参照のこと.

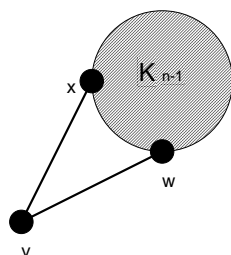


図 5.93: 完全グラフ  $K_{n-1}$  と点  $v$  が 2 点  $w, x$  で繋がっているグラフ  $G$ . 点の個数は  $n$ , 辺の本数は  $(n-1)(n-2)/2 + 2$  である.

$(n-1)(n-2)/2 + 2$  本であり, 問題文に条件として与えられた辺の本数となる.

さて,  $K_n$  を構成する任意の 2 点は必ず隣接するので, 考えられる可能性としては, 任意の隣接しない 2 点が  $K_{n-1}$  を構成する任意の 1 点  $u_1 (\neq w, x)$  と点  $v$  の場合であるが, このときには

$$\deg(u_1) + \deg(v) = n - 2 + 2 = n \tag{5.131}$$

となり, Ore の定理を等式ぎりぎりですることがわかる.

また, 上記以外にも例えば  $K_{n-1}$  を構成する任意の一边を削除し, この辺で点  $v$  と  $K_{n-1}$  の任意の一点を結ぶ場合もありうるが, この場合には  $\deg(v) = 3$ , 辺を削除した点  $z$  の次数  $\deg(z) = n - 3$  であるから, 結局  $\deg(v) + \deg(z) = n$  となり, やはり Ore の定理を満たす. このような変換を繰り返しても, Ore の定理が破れることがないことは明らかなので結局, 題意, 即ち「 $n$  個の点および  $(n-1)(n-2)/2 + 2$  本の辺からなるグラフ  $G$  はハミルトン・グラフである」ことが示された.

**例題 5.3** (2004 年度 演習問題 5)

1. 本講義ノート中に挙げた「催し会場の順路問題」において
  - (1) 各会場間の関係を表すグラフを描け.
  - (2) (1) で求めたオイラー・グラフにおいて, Fleury のアルゴリズムを用いることにより, オイラー小道を求めよ.
2. オイラー・グラフで, ある点  $v$  から出発する限りは, 同じ辺を 2 度と通らないようにして勝手な方向に辺をたどればオイラー小道が得られるとき, そのグラフは点  $v$  から任意周回可能であるという.
  - (1) 図 5.94(左) に与えたグラフは任意周回可能であることを示せ.
  - (2) オイラー・グラフではあるが, 任意周回可能ではないグラフの例を一つ挙げよ.
  - (3) 任意周回可能なグラフが展示会場の設計に向いている理由を述べよ.
3. 図 5.94(右) の Groetzsch グラフはハミルトンであることを示せ.

(解答例)

1. 会場配置を連結グラフで表し, Fleury のアルゴリズムを用いることにより, 実際にオイラー小道を求めてみよう.
  - (1) 問題に与えられた表に従って  $a \sim g$  の会場を配置すると図 5.95(左) のようになる.
  - (2) Fleury のアルゴリズムを用いることにより, 望むべき巡回路が得られる. 図 5.95(右) に描いた経路がオイラー小道を与える.
- 2(1) 図 5.96 において, 点  $v = 4$  から出発したとして, 第一歩で  $v \rightarrow 1, v \rightarrow 3, v \rightarrow 5, v \rightarrow 7, v \rightarrow 8, v \rightarrow 9$  の異なる 6 通りのいずれを選ぶか …… 等々により, ことなる経路が得られる. 少々面倒であるが, 全ての可能な経路を書き下してみると (例えば, 一番目の下線が引かれた番号に対応する経路を図示す

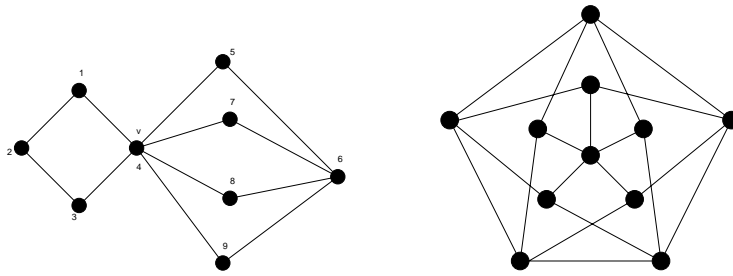


図 5.94: ここで任意巡回可能であることを示すグラフ (左). 右図は Groetzsch グラフ.

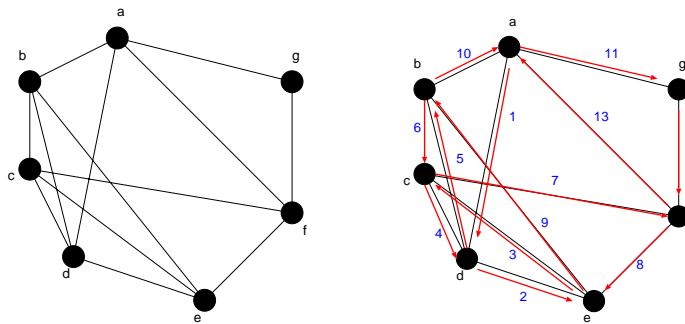


図 5.95: 各会場間の関係を表すグラフ (左) と求めるオイラー小道 (右).

ると図 5.97 のようになる)

- 4123456748694 , 4123456749684, 4123456847694, 4123456849674
- 4123456947684 , 4123456948674, 4123476548694, 4123476549684
- 4123476845694 , 4123476849654, 4123476945684, 4123476948654
- 4123486547694 , 4123486549674, 4123486745694, 4123486749654
- 4123486945674 , 4123486947654, 4123496547684, 4123496548674
- 4123496745684 , 4123496748674, 4123496845674, 4123496847654
  
- 4321456748694 , 4123456749684, 4321456847694, 4123456849674
- 4321456947684 , 4123456948674, 4321476548694, 4123476549684
- 4321476845694 , 4123476849654, 4321476945684, 4123476948654
- 4321486547694 , 4123486549674, 4321486745694, 4123486749654
- 4321486945674 , 4123486947654, 4321496547684, 4123496548674
- 4321496745684 , 4123496748674, 4321496845674, 4123496847654
  
- 4567486941234 , 4567486943214, 4567496841234, 4567496843124
- 4567412348694 , 4567412349684, 4567432148694, 4567432149684
- 4568476941234 , 4987476943214, 4568496741234, 4568496743214
- 4568412347694 , 4568412349674, 4568432147694, 4568432149674

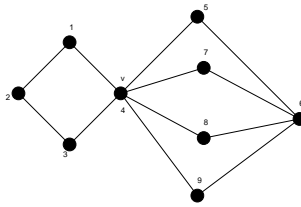


図 5.96: ここで任意巡回可能性について考察するグラフ.

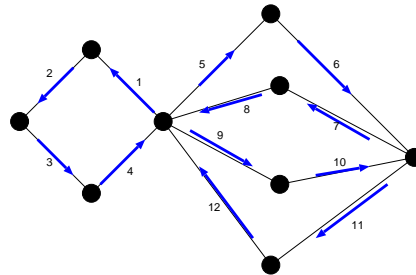


図 5.97: 下線が引かれた番号に対する具体的な経路.

4569476841234 , 4569476841234, 4569486741234, 4569486743214  
 4569412347684 , 4569412348674, 4569432147684, 4569432148674

4765486941234 , 4765486943214, 4765496841234, 4765496843124  
 4765412348694 , 4765412349684, 4765432148694, 4765432149684  
 4768456941234 , 4768456943214, 4768496541234, 4768496543214  
 4768412345694 , 4768412349654, 4768432145694, 4768432149654  
 4769456841234 , 4769456841234, 4769486541234, 4769486543214  
 4769412345684 , 4769412348654, 4769432145684, 4769432148654

4865476941234 , 4865476943214, 4865496741234, 4865496743124  
 4865412347694 , 4865412349674, 4865432147694, 4865432149674  
 4867456941234 , 4867456943214, 4867496541234, 4867496543214  
 4867412345694 , 4867412349654, 4867432145694, 4867432149654  
 4869456741234 , 4869456741234, 4869476541234, 4869476543214  
 4869412345674 , 4869412347654, 4869432145674, 4869432147654

4965476841234 , 4965476843214, 4965486741234, 4965486743124  
 4965412347684 , 4965412348674, 4965432147684, 4965432148674  
 4967456841234 , 4967456843214, 4967486541234, 4967486543214  
 4967412345684 , 4967412348654, 4967432145684, 4967432148654  
 4968456741234 , 4968456741234, 4968476541234, 4968476543214  
 4968412345674 , 4968412347654, 4968432145674, 4968432147654

以上、全部で 144 通りの経路 (オイラー小道) が可能であり、従って、このグラフは任意周回可能なグラフである。

(2) 図 5.98 にその一例を与える。図 5.98 のグラフは各点の次数が偶数であり、定理 6.2 より、このグラ

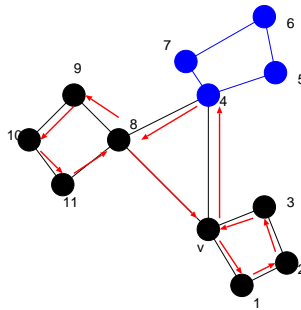


図 5.98: 任意周回が不可能であるグラフの一例.

フはオイラー・グラフであり、確かにオイラー小道、例えば、 $v \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow v \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 8 \rightarrow v$ .

しかし、例えば図 5.98 の矢印に示した通りの進路を選ぶと、図の点 8, 9, 10, 11 からなる「孤立した」成分が現れてしまう。従って、点 8 での進路の選択によっては、オイラー小道ができなくなる。この意味で、図 5.98 に与えたグラフは任意周回不可能なグラフであると言える。

さて、それでは、任意のオイラー・グラフが与えられたとして、そのグラフが任意周回可能か、あるいは、不可能であるか、という判定は一般にグラフのどのような特徴によって決まるのであろうか？ 図 5.99 に図 5.98 とは異なる任意周回不可能なグラフを 2 点挙げた。これらのグラフを考察すると、

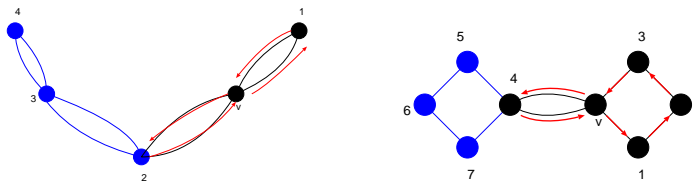


図 5.99: 上にあげたいずれのグラフも任意周回が不可能である。

いずれも次数が 4 以上の点が 2 点以上含まれることがわかる。もし、次数 4 以上の点が 2 点以上含まれるのであれば、図 5.99 の 2(左図) や 4 のように、この点において、孤立した成分を生成させてしまうような経路の取り方は常に可能である。従って、任意周回を可能にするためには、次数 4 以上の点を二つ以上含まないようなオイラー・グラフを用いることが肝要である。

(3) 展示場では、客が各展示場から任意に次の展示場を選び、しかも、各展示場を一回ずつまわって、最初の展示場に戻ってこれることが望ましい。従って、この性質を満たす任意周回可能グラフの各頂点に展示場を設置することが、適切な展示場の設計である。

3. 図 5.100 に答えを載せる。この図 5.100 は Ore の定理によるハミルトンであるための十分性は満たしてはいないが (例えば  $\deg(7) + \deg(10) = 3 + 4 = 7 < 11$  で満たさない)、図 5.100 にハミルトン閉路を示したように確かにハミルトンである。

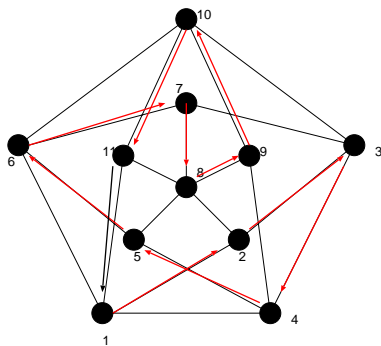
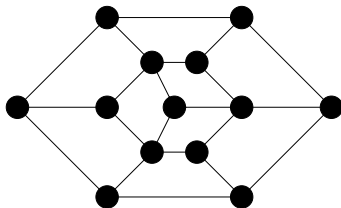


図 5.100: 求めるべきハミルトン閉路.

**例題 5.4** (2005 年度 演習問題 5)

1. 二部グラフ  $G$  に奇数個の点がある場合,  $G$  はハミルトン・グラフでないことを示せ.
2. 図にあげたグラフはハミルトン・グラフでないことを示せ.



(解答例)

1. まずは点数  $n = 4$  の場合の二部グラフの例を図 5.101(左) に載せるが, これは明らかにハミルトン閉路を含むのでハミルトン・グラフである. 次に  $n = 6$  の場合の二部グラフの一例とその同形なグラフを

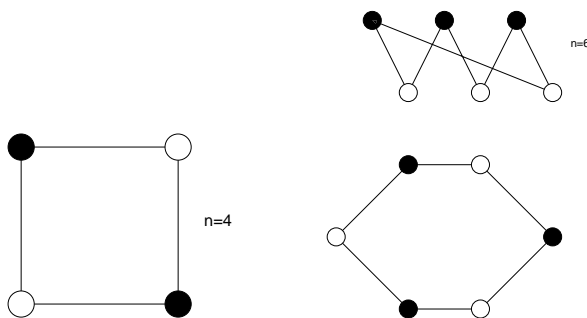


図 5.101:  $n = 4$  の場合の二部グラフの例 (左). 右図は  $n = 6$  の場合の二部グラフの一例 (上) とそれと同形なグラフ (下). 閉路が存在する.

図 5.101(右) に載せるが, これも明らかにハミルトン閉路を含むのでハミルトン・グラフである. これら 2 つの例からわかるように, 二部グラフを白点と黒点が交互に来るように閉路グラフとして描ける場合には必ずハミルトン・グラフになる.

一方,  $n$  が奇数の場合には図 5.102 に  $n = 7$  の例で示すように, このような白, 黒点の配置は不可能であり, 必ず閉路上には黒黒, あるいは白白が並んでしまう. 従って, 二部グラフはその点数が奇数の場

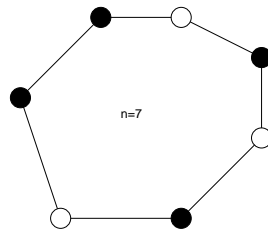


図 5.102:  $n = 7$  の場合には二部グラフを閉路で表現することができない.

合にはハミルトン・グラフにはならない.

- まず, 問題に与えられたグラフの中央の点を除去したグラフを考えると, これにはハミルトン閉路が存在する (図 5.103 参照). 以下の議論ではこれを基準として考える. また, 話の見通しを良くするため, この閉路と同形なグラフを考えることにしよう (図 5.103 の下図). 問題のグラフはこのグラフに 1 点

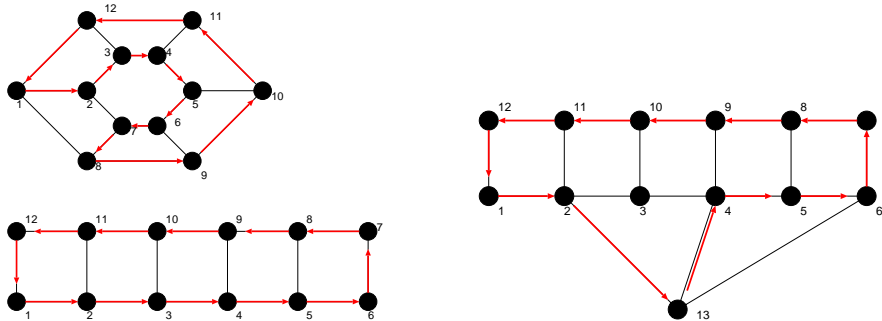


図 5.103: 問題に与えられたグラフの中央の点を除去すると, それはハミルトン・グラフでハミルトン閉路が存在する (左). 問題に与えられたグラフと同形なグラフ (右). このグラフにハミルトン閉路があるか否かを考察すればよい.

を加えて, その点 (13 としよう) と図 5.103(左) の点 2,4,6 とを結んでできるので, それを具体的に描くと図 5.103(右) のようになる. そこで, このグラフでは点 13 は点 2,4,6 と点 3,5 に「1 つ飛ばし」で結ばれていることから, 点 2 を出発して, 点 3,4,5, 及び, 点 13 を経由して点 6 に至るためには, 必ず, 点 3 か点 5 にはとまらずに通過しなければならないことに注目しよう. また, 点 2 から  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  と進んで, 点 9 に移った場合には,  $9 \rightarrow 8$  と進むと, それ以後部分グラフ  $\{10, 11, 12\}$  には進めなくなり, 逆に,  $9 \rightarrow 8$  へと移った場合には部分グラフ  $\{6, 7, 8\}$  へは進めなくなる.

このことから直ちに全ての点を 1 回ずつ通って元に戻る閉路は存在しないことがわかるので, このグラフはハミルトン・グラフではないことになる. もちろん, ここで考えた経路以外にも点  $1 \rightarrow$  点  $12 \rightarrow \dots$  のように回る経路も存在するが, 結局, ここで考えた, 点  $\{2, 3, 4, 5, 6, 13\}$  を含んだ「部分グラフ」にぶつかれば上記の問題が生じ, 決してハミルトン閉路を描くことはできないことになる.

補足説明

Ore の定理はハミルトン・グラフであるための十分条件であるため, Ore の定理を満たしていれば, つまり, 完全グラフのように十分な辺数があれば, ハミルトン閉路があることが示せるが, Ore の定理を満たさない場合, 一般的に言ってハミルトン・グラフが否かを証明することはとても難しくなる. この手の「判定問題」では重宝になる必要条件もいくつかあるようだが, それは十分条件と比べて数が少なく, 実用的なものもさほど無さそうである. 必要十分条件についてはまだ何も見つかっていない.

従って、ハミルトン・グラフか否かの証明はグラフの特性に応じてケース・バイ・ケースで取り組まなければならないが、おおまかに言えば、まずあってみる価値のある方法は2つあり、一つは上の例題で紹介した「グラフを二部グラフで表し、その点数が奇数であることで非ハミルトン性を示す」やり方(方法1)。もう一つは辺数に関して背理法で矛盾を導くという方法(方法2)である。

ここでは簡単に方法2を説明しておきたい。まず、例として図5.104のような点数11、辺数15のグラフに対し、「ハミルトン閉路  $C$  が存在する」と仮定する。その閉路  $C$  上では各点には必ず2本の辺が接続し

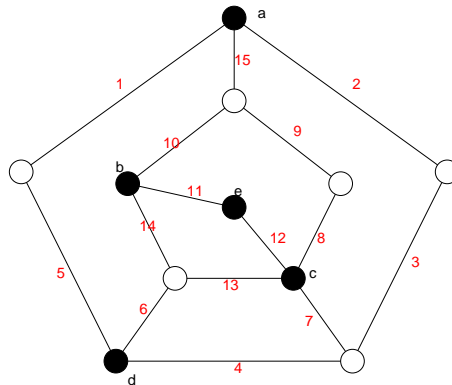


図 5.104: 背理法を用いて非ハミルトングラフであることを示すのに例として用いるグラフ。

ていなければならないことに注目すると、互いに隣接していない  $a, b, c, d,$  及び、 $e$  の5点のそれぞれの次数は  $3, 3, 4, 3, 3$  であるので、 $C$  上に無い辺数は少なくとも  $(3-2) + (3-2) + (4-2) + (3-2) + (3-2) = 5$  (本) であり、従って、閉路  $C$  には高々  $15 - 5 = 10$  (本) しか辺が無いことがわかる。しかし、点数11でハミルトン閉路を作る場合にはその閉路の辺数は11となるので、辺数10ではこれは不可能ということになり、我々が用いた「ハミルトン閉路が存在する」という仮定に矛盾が生じたので図5.104のグラフにはハミルトン閉路が無い、と結論付けることができる。

**例題 5.5** (2006年度 演習問題 5)

$G$  はハミルトン・グラフであるとし、 $S$  は  $G$  の  $k$  個の点からなる任意の集合であるとする。このとき、グラフ  $G - S$  ( $G$  から  $S$  の点とそれらに接続している辺を全て除去して得られるグラフ) の成分は  $k$  個以下であることを具体的なハミルトン・グラフに対して一つ例示せよ。

(解答例)

ハミルトングラフはハミルトン閉路を含み、その閉路  $C$  は を互い違いに並べてできる輪であるから、完全二部グラフ  $K_{s,s}$  で表すことができる ( $s = 2, 3, \dots$ )。従って、 $G$  はこの閉路を構成する辺と他の接続辺からなる図5.105のようなグラフであると考えてよい。ここで、 $G$  の中から任意の  $k$  個の点を取り出して構成される集合  $S$  を  $G$  から引いてできるグラフの成分数は、 $k$  個の点が全て隣接する場合には明らかに1であり、これが  $G - S$  の成分数の最小値を与える(図5.106参照)。しかし、ここで問題とするのは  $G - S$  の成分数の最大値である。この最大値を与えるような集合  $S$  の選び方は明らかに  $S$  を構成する  $k$  個の点が全て隣接しない場合であるから、その場合の  $G - S$  の成分数を評価すればよい。このために、閉路  $C$  上の  $k$  個の点を2つずつ組んでペアにし(こうしたペアの総数は  $l = k/2$ )、 $C$  上にこのペアが一つできるごとに  $G - S$  の成分がどのように変化していくのかを調べる。すると図5.107(左)を参考にした考察より、ペア数が1の場合には成分数は2、ペア数が2の場合には成分数が4、.....、ペア数が  $l$  の場合には成分数が  $2l$  となり、この  $2l$

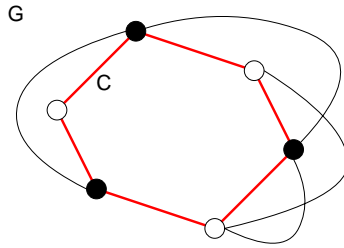


図 5.105: ここで考えるハミルトングラフ. 閉路 C がここでハミルトン閉路.

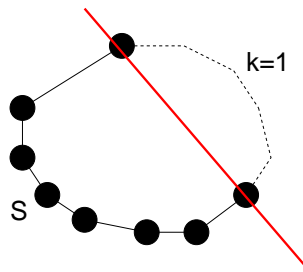


図 5.106: S の要素が全て隣接する場合の例. 実線の部分でグラフ G を切断することになり, 得られる  $G - S$  の成分数は明らかに 1 である.

は S の点の総数  $k$  であったから, 結局

$$G - S \text{ の成分数} \leq k$$

となり, 題意を満たすことになる. ところで上記の議論では G 中の閉路 C に関して考え, この閉路を構成する辺以外の接続辺をひとまずは考えなかったわけだが, 図 5.107(右) のような接続辺が加わったとしても,  $G - S$  の成分数は減りこそはするが, 決して増えることはない. よって, この場合にも題意は満たされることになる.

**例題 5.6** (2005 年度情報工学演習 II(B) #1)

$K_3, K_5, K_7$ , および  $K_9$  にはハミルトン閉路があることを Ore の定理により示し, それぞれのグラフにおいて, 互いに共通な辺を持たない — 辺素な — ハミルトン閉路がいくつあるかを調べよ. ついで, この結果を一般化し,  $K_{2k+1}$  ( $k \geq 1$ ) の辺素なハミルトン閉路数を求める公式を作れ (類推によって公式を求めた場合にはその正当性を証明すること).

(解答例)

まず, 完全グラフにハミルトン閉路が存在することは, 一般の  $K_n$  に対して示せる.  $K_n$  の全ての点の次数は  $n - 1$  なので,  $n - 1 + n - 1 = 2n - 2 \geq n$  ( $n \geq 3$ ) なので, Ore の定理を満たすことは明らか … となりそうであるが, 実は Ore の定理の条件式:  $\deg(v) + \deg(u) \geq n$  の点  $u, v$  は「互いに隣接しない点」であるので, 完全グラフは全ての点が隣接しているわけであるから, これをそのまま適用することはできない.

そこで, Ore の定理を書き換えよう. 「グラフに含まれる任意の点  $v$  の次数が  $f(n)$  以上である」つまり,  $\deg(v) \geq f(n)$  と仮定する. ここで,  $f(n)$  は  $n$  の関数である. このとき, 点  $u$  についてもこれが成り立つべきなので,  $\deg(u) \geq f(n)$ . この 2 つの不等式の辺々を足すと  $\deg(v) + \deg(u) \geq 2f(n)$  であるが, これと

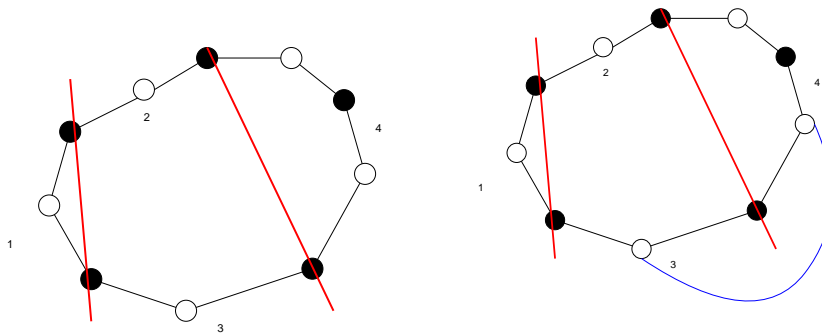


図 5.107:  $S$  の成分が全て隣接しない場合で,  $|S| = 4$  の場合. 得られる  $G - S$  の成分数は 4 である. また, ハミルトン閉路を構成する辺以外に接続辺ができたとしても, この成分数は減りこそはするが, 決して増えない (右図).

Ore の定理の条件式を比較すると,  $2f(n) = n$ , つまり,  $f(n) = n/2$  であることがわかる. 従って, Ore の定理は次のように言い直すことができる.

グラフに含まれる全ての点に対し

$$\deg(v) \geq \frac{n}{2} \tag{5.132}$$

が成立するならば, そのグラフはハミルトン・グラフである. これを Dirac (ディラック) の定理と呼んでいる. 今の場合全ての点の次数は  $n - 1$  であるから,  $n \geq 3$  であればこの条件を満たす. 従って, ハミルトン閉路は存在する.

後半の部分は具体的に互いに辺素なハミルトン閉路を見つけるアルゴリズムを与えてしまおう. まず, 完全グラフの描き方として  $n$  (奇数) 個の点を閉路グラフとなるように配置する. そして, 各点を自分以外の点と結んでいくようにして完全グラフ  $K_n$  を描くことにする (図 5.108 参照). このとき, 出発する点  $v$  を適当に選ぶと, 1 個目のハミルトン閉路は  $v$  から閉路グラフの外周をたどり,  $v$  に戻ることにより得られる. 2 個目は  $v$  から 1 つ飛びに順次点をたどっていき,  $v$  に戻ることにより得られる. 3 個目は  $v$  から 2 つとびに順次回り  $v$  に戻ることにより, 4 個目は  $v$  から 3 つとびに順次回り … というようにして得られるハミルトン閉路は全て互いに辺素なものとなることは明らかである. このような点  $v$  から引き続く点の選択の余地としては  $(n - 1)/2$  通りだけ存在する (点  $v$  の次数の半分. なぜ半分になるか, は残りの半分は全ての閉路を逆向きにたどることに相当するので, 「無向きハミルトン閉路」としては同一視する) ので,  $n = 2k + 1$  の場合には  $(2k + 1 - 1)/2 = k$  通りとなり, 従って, 完全グラフ  $K_{2k+1}$  の互いに辺素なハミルトン閉路の個数は  $k$  であることがわかった. 図 5.108 に  $K_3, K_5$ , および,  $K_7$  の場合の互いに辺素なハミルトン閉路を図示する.

しかし, ここで注意しなければならないのは,  $2k + 1$  が 1 と自分自身以外の約数を持つ場合, その「約数个飛び」で閉路を描いていくと, 全ての点を巡る前に閉じたグラフができてしまう (図 5.109 参照). 従って, この場合には互いに辺素なグラフの個数は  $k$  から  $2k + 1$  の約数の個数  $k'$  を引いたものになる. 従って, 互いに辺素なハミルトン閉路の個数を  $M(K_{2k+1})$  とすると

$$M(K_{2k+1}) = \begin{cases} k & (2k + 1 \text{ が素数のとき}) \\ k - k' & (2k + 1 \text{ が素数でなく, } 1 \text{ と自分自身以外に } k' \text{ 個の約数を持つとき}) \end{cases} \tag{5.133}$$

とまとめることができる.

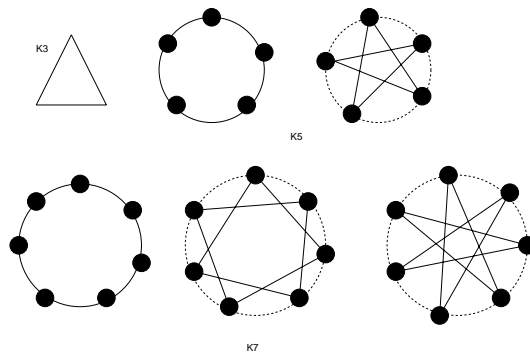


図 5.108:  $K_3, K_5, K_6$  の互いに辺素なハミルトン閉路.

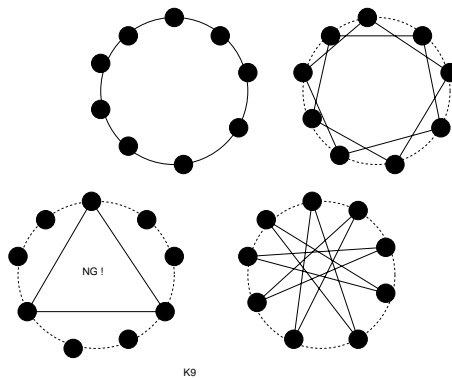


図 5.109:  $K_9$  の互いに辺素なハミルトン閉路. 9 の約数 3 飛びで各点を結んでいくと、ハミルトン閉路ができる前に閉じたグラフが出来上がってしまう.

**例題 5.7** (2005 年度情報工学演習 II(B) #1)

ピーターソン・グラフが ハミルトン・グラフでない ことを証明せよ.

(解答例)

図 5.110 のようにピーターソン・グラフの各点に名前をつける. まず着目するのは,  $u_1, u_2, \dots, u_5$  の 5 点からなる内部の部分グラフ ( $g_1$  と名づける) は「星型の一筆書き」としてハミルトン閉路が存在することである. 従って, 外周 (部分グラフ  $g_2$  と名づける) の 1 点 ( $v_1$  として一般性を失わない) から出発し, 星型部分グラフ  $g_1$  の一部を経由し, 点  $v_1$  に戻るといふ,  $g_1$  と  $g_2$  が 2 つの辺で結ばれる場合 (ケース A と呼ぼう) と,  $v_1$  から出発し,  $g_1$  の一部を経由,  $g_2$  に至り, さらに  $g_1$  の一部を経由して  $v_1$  に戻るといふ,  $g_1$  と  $g_2$  が 4 本の辺で結合される場合 (ケース B と呼ぶ) のいずれかである. 従って, 以下ではこの各々のケースに対し, ハミルトン閉路が存在しないことを示していく.

• (ケース A)

$g_1$  と  $g_2$  を結ぶ辺を  $\overline{v_1 u_1}$  と任意の  $e$  とする. このとき,  $\overline{v_1 u_1}, e$  を含む道としては次の 2 つが考えられる.

- (1)  $e = \overline{u_4 v_4}$  のとき, その道は  $\overline{v_1 u_1 u_3 u_5 u_2 u_4 v_4}$ . このとき, 残る点は  $v_2, v_3, v_5$ .
- (2)  $e = \overline{u_3 v_3}$  のとき, その道は  $\overline{v_1 u_1 u_4 u_2 u_5 u_3 v_3}$ . このとき, 残る点は  $v_2, v_4, v_5$ .

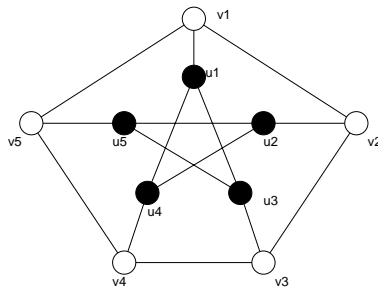


図 5.110: ピータースン・グラフの各点に名前をつける.

である. 以上 (1)(2) のいずれの場合も残る 3 つの点を通して  $v_1$  に戻れないことは明らか. よって, (ケース A) でハミルトン閉路が存在することはない.

• (ケース B)

$g_1$  と  $g_2$  とを結ぶ 4 つの辺を  $\{\overline{v_1u_1}, \overline{v_2u_2}, \overline{v_3u_3}, \overline{v_4u_4}\}$  としても一般性を失わない. このとき,  $\overline{v_5u_5}$  は含まれないことになる. そこで, この場合にハミルトン閉路  $C$  が存在したと仮定しよう. すると, ピータースン・グラフの各点は必ず 2 つの辺と接続していなければならないことになるので, これを考慮に入れると,  $C$  には  $\overline{v_1v_5}, \overline{v_5v_4}$  が含まれることになる. 従って, このときに点  $u_4$  に着目すると,  $\overline{u_4u_1}$  という辺は  $C$  には含まれないことになる. なぜならば,  $\overline{u_4u_1}$  が存在するとなると, 点  $u_1$  では (既に  $v_1$  と結ばれているので) さらに辺を結ぶことはできず, ハミルトン閉路を作ることはできない. 従って,  $v_4$  は  $u_2$  と結ばれるべきであるが,  $u_2$  は  $v_2$  と既に結ばれているので,  $\overline{u_2u_5}$  は  $C$  に含まれないことになる. しかし, こうなると点  $u_5$  には 1 辺  $\overline{u_5u_3}$  のみが接続されることになり, これでは明らかに  $C$  が存在することと矛盾する. 従って, (ケース B) の場合にもハミルトン閉路が存在することはできない.

以上の考察により, ピータースン・グラフにはハミルトン閉路が無い, つまり, ピータースン・グラフはハミルトン・グラフではないと結論付けられる.

**例題 5.8** (2006 年度情報工学演習 II(B) #1)

点数  $n$  が偶数, 辺数  $m$  が奇数のオイラー・グラフは存在するか否か. 理由とともに述べよ.

(解答例)

いずれも全ての点の次数が偶数 (= 2) である点数 3(三角形) と 4(四角形) のグラフを図 5.111 のように 1 点 (以後, 共有点と呼ぶ) で接続させると, 点数は  $3 + 4 - 1$  (共有点分を差し引く) = 6, 辺数  $3 + 4 = 7$  となるので, 辺数が奇数, 点数が偶数となり題意を満たす. このグラフは共有点の次数が 4, それ以外が 2 なので全て偶数である. 従って, オイラーの定理より, このグラフはオイラー・グラフである. よって, 辺数が奇数, 点数が偶数であるようなオイラー・グラフは存在する.

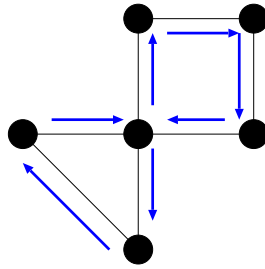


図 5.111: ここで考えるグラフ. これはオイラー・グラフである.

**例題 5.9** (2007 年度 **演習問題 5**)

1. 数列:  $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ ,  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  が与えられた際, この数列  $D$  がグラフ的であるか否かの判定条件として次が知られている. すなわち

『数列  $D$  がグラフ的であるのは, この数列の総和:  $\sum_{i=1}^n d_i$  が偶数であり,  $k = 1, 2, \dots, n$  に対し

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(k, d_i) \tag{5.134}$$

が成立するとき, かつ, このときに限る.』

ここで, 記号:  $\min(a, b)$  は  $a, b$  のうちで小さい方を意味するものとする.

この判定条件を用いて次の数列:

- $D_1 = (3, 2, 2, 1)$
- $D_2 = (4, 3, 3, 3, 3)$
- $D_3 = (7, 6, 6, 6, 5, 5, 2, 1)$

のそれぞれがグラフ的か否かを判定せよ.

( 上記判定条件の証明は余裕のある者は考えてみると良い. レポートに書いてくれた場合には, その分加点する. 証明例は次回 (5/28) 配布の講義ノートで解説する.)

2. 完全グラフ  $K_m$  の点と  $K_{n-2m}$  の点を全て結び,  $K_m$  の点と  $\overline{K_m}$  の点を全て結ぶことによってできるグラフを  $C_{m,n}$  と名づけよう. ( $n > 2m$  であり,  $\overline{K_m}$  は  $K_m$  の補グラフである.)

このとき

- $C_{m,n}$  の辺数  $\varepsilon(C_{m,n})$  を  $m, n$  で表せ.
- $\varepsilon(C_{m,n})$  を最小とする  $m$  の値を  $n$  を用いて表し, その最小値を  $n$  の関数として求めよ.

(解答例)

1. 既に見た例題 2.7 では与えられた数列がグラフ  $G$  の次数列となるような状況, つまり「グラフ的」か否かを調べてもらった. 一般的に与えられたグラフの次数列を書き出すことは易しいが, 逆に具体的な数列が与えられた場合, それがグラフ的であるかどうかを判定することは難しい. そこで, 今回の演習問題では  $G$  が単純グラフである場合に対する判定条件を具体的にいくつかの数列に対して調べてもらった.

まずは点数の少ない簡単な  $D_1 = (3, 2, 2, 1)$  に対して条件式の成立を確かめてみる.  $d_1 = 3, d_2 =$

$2, d_3 = 2, d_4 = 1$  であるから,  $\sum_{i=1}^4 d_i = 8$  であり偶数. また,  $k = 1$  の場合には  $i = 2, 3, 4$  に対して  $\min\{1, d_i\} = 1$  であるから

$$\sum_{i=1}^1 d_i = 3 \leq 1 \cdot (1 - 1) + 1 + 1 + 1 = 3$$

となり, 成立.  $k = 2, 3, 4$  の場合も同様にして

$$\sum_{i=1}^2 d_i = 5 \leq 2 \cdot (2 - 1) + 2 + 1 = 5$$

$$\sum_{i=1}^3 d_i = 7 \leq 3 \cdot (3 - 1) + 1 = 7$$

$$\sum_{i=1}^4 d_i = 8 \leq 4 \cdot (4 - 1) = 12$$

となり, 問題に与えられた不等式が全ての  $k$  について成立する. 従って, 数列  $D_1 = (3, 2, 2, 1)$  はグラフ的である. 実際にグラフを描いてみると図 5.112 のようになる.

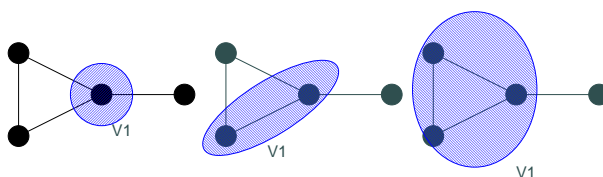


図 5.112: 次数列が  $D_1 = (3, 2, 2, 1)$  で与えられるグラフ. 題意に与えられた不等式の証明を行うため, グラフを  $|V_1| = k, |V_2| = n - k$  の部分に分ける. 左から右へ,  $|V_1| = 1, 2, 3$  の場合.

この例を具体的にみたことで, ある程度は感じをつかんだので証明を試みよう. まずは図 5.112 のように考えるグラフを  $|V_1| = k, |V_2| = n - k$  の 2 つの点集合に分ける. つまり, 証明すべき不等式の左辺に現れる和  $\sum_{i=1}^k d_i$  を構成する点集合を  $V_1$ , 残りを  $V_2$  とするわけである. すると例えば, 図 5.112 のグラフからも解るように,  $V_1$  からなる部分グラフの次数  $\sum_{i=1}^k d_i$  は  $V_1$  に属する辺を接続辺からの寄与によるものと,  $V_1$  の各点へ  $V_2$  の各点から向かう接続辺からの寄与によるものに分けることができる. 前者の辺数を  $\varepsilon_1$ , 後者の辺数を  $\varepsilon_2$  と名づけよう. このとき  $V_1$  の次数と  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  の間には,  $\varepsilon_1$  に関しては「握手補題」が成り立つことを考慮すれば

$$\sum_{i=1}^k d_i = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{5.135}$$

なる関係が成り立つことがわかる. ここで  $V_1$  中の辺数の上限は明らかに部分グラフ  $V_1$  が「完全グラフ」となる場合であり,  $\varepsilon_1 \leq {}_k C_2 = k(k - 1)/2$  である. よって, (5.135) 式は

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k - 1) + \varepsilon_2 \tag{5.136}$$

と書き換えることができる. あとは辺数  $\varepsilon_2$  が評価できればよいが,  $V_2$  から  $V_1$  への接続辺は  $V_2$  中の 1 点 (これを点  $i$  としよう) から  $V_1$  の全ての点へと接続辺が伸びる場合には  $k$  本,  $V_1$  中の部分集合のみに接続辺を伸ばす場合には点  $i$  の次数  $d_i$  本だけ存在することになるので, この 2 つの場合をまとめて書けば, 点  $i$  の接続辺は  $\min\{k, d_i\}$  となる. 従って, ここで問題とする辺数  $\varepsilon_2$  は  $i$  に関して  $\min\{k, d_i\}$

を  $i = k + 1$  から  $n$  まで足し上げた  $\sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$  に等しい. 従って (5.136) 式は結局

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\} \tag{5.137}$$

と書き直せ, これと握手補題から任意のグラフ  $G$  に対して成り立つべき条件:  $\sum_{i=1}^n d_i = 2\varepsilon(G) =$  偶数  
をあわせて題意に与えられた条件式が示された. ここに示したグラフ的であるために数列に課せられる条件<sup>11</sup> は Erdős-Gallai の定理として知られている.

この定理を使って数列  $D_2, D_3$  がグラフ的かどうかを判定しよう.  $D_2 = (4, 3, 3, 3, 3)$  に関しては,  $d_1 = 4, d_2 = 3, d_3 = 3, d_4 = 3, d_5 = 3$  であり,  $\sum_{i=1}^5 d_i = 16$  で偶数.  $k = 1$  から逐次不等式の成立をチェックしていくと

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^1 d_i = 4 &\leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\ \sum_{i=1}^2 d_i = 7 &\leq 2 \cdot (2 - 1) + 2 + 2 + 2 = 7 \\ \sum_{i=1}^3 d_i = 10 &\leq 3 \cdot (3 - 1) + 3 + 3 = 12 \\ \sum_{i=1}^4 d_i = 13 &\leq 4 \cdot (4 - 1) + 3 = 15 \\ \sum_{i=1}^5 d_i = 16 &\leq 5 \cdot (5 - 1) = 20 \end{aligned}$$

となり, 全ての  $k$  に対して成立する. 従って数列  $D_2$  はグラフ的である. 実際にグラフを描くと図 5.113 のようになる.

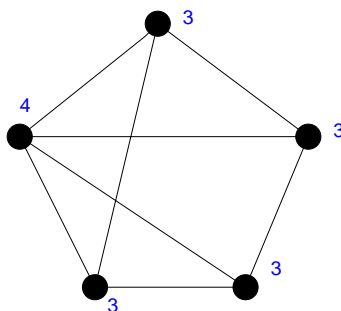


図 5.113: 次数列  $D_2 = (4, 3, 3, 3, 3)$  を持つグラフ.

最後に数列  $D_3 = (7, 6, 6, 6, 5, 5, 2, 1)$  を判定する.  $d_1 = 7, d_2 = 6, d_3 = 6, d_4 = 6, d_5 = 5, d_6 = 5, d_7 = 2, d_8 = 1$  であるから,  $\sum_{i=1}^8 d_i = 38$  となって偶数. また, 条件式の成立を  $k = 1$  から逐次確かめていくと

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^1 d_i = 7 &\leq 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 \\ \sum_{i=1}^2 d_i = 13 &\leq 2 \cdot (2 - 1) + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 13 \end{aligned}$$

<sup>11</sup> この条件は必要十分である. 十分性のチェックをここでは省略する.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 d_i = 19 &\leq 3 \cdot (3 - 1) + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 18 \\ \sum_{i=1}^4 d_i = 25 &\leq 4 \cdot (4 - 1) + 4 + 4 + 2 + 1 = 23 \\ \sum_{i=1}^5 d_i = 30 &\leq 5 \cdot (5 - 1) + 5 + 2 + 1 = 28 \\ \sum_{i=1}^6 d_i = 35 &\leq 6 \cdot (6 - 1) + 2 + 1 = 33 \\ \sum_{i=1}^7 d_i = 37 &\leq 7 \cdot (7 - 1) + 1 = 43 \\ \sum_{i=1}^8 d_i = 38 &\leq 8 \cdot (8 - 7) = 56 \end{aligned}$$

となり,  $k = 3, 4, 5, 6$  に対して不等式は満たされない. 従って  $D_3$  はグラフ的ではない<sup>12</sup>.

2. 簡単なので手短かに書こう. 問題の  $C_{m,n}$  の辺の数は完全グラフの辺数がどのように与えられたのかを思い出して

$$\begin{aligned} \varepsilon(C_{m,n}) &= m^2 + \frac{m(m-1)}{2} + m(n-2m) + \frac{(n-2m)(n-2m-1)}{2} \\ &= \frac{3}{2} \left\{ m + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} - n \right) \right\}^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} - n \right)^2 + \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned} \tag{5.138}$$

従って,  $\varepsilon(C_{m,n})$  を最小にする  $m$  の値は

$$m = \frac{n}{3} - \frac{1}{6} \tag{5.139}$$

であり, そのときの最小値は  $n(n-1)/3 - 1/24$  となる. ただし,  $m, n$  は整数であるべきなので,  $n$  が与えられた場合の最小値を与える  $m$  は (5.139) に最も近い整数値となる.

<sup>12</sup> 「G は単純グラフ」であるという条件を緩めると, この数列  $D_3$  はグラフ的である (実際に多重辺を使って描いてみると良い). しかし, この定理はその証明から (辺数  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  の評価の仕方を再度見よ), 単純グラフについての条件なので, 数列  $D_3$  は単純グラフを作ることはできない.



## 第6回講義

### 6.1 木とその数え上げ

今回と次回の2回の講義では系統図や分子構造, あるいはコンピュータのファイルシステム等, 多くの現象/対象を表現することのできる, 簡単な構造ではあるが重要なグラフである「木」, 及び, その数え上げ法 (Cayley (ケイリー) の定理とその系) について学習する.

#### 6.1.1 木の基本的な性質

ここでいう「木」とは次のようにグラフ「林」の特別な場合として定義される.

林 (forest) : 閉路を含まないグラフ.

木 (tree) : 連結な林.

例えば, 図 6.114 に載せたグラフが林であり, 3つある成分のうちの各々が木である.

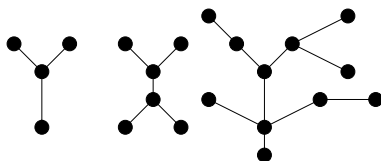


図 6.114: 林の例. 3つある成分の各々が木に相当する.

これらの木の基本的な性質は次の定理によりまとめられている. 証明は教科書 p.61 を読んでもらうことにして, 講義では説明しない. 各命題を例に挙げた木に当てはめて確認されたい.

#### 定理 9.1

点  $n$  個からなるグラフ  $T$  を考えるとき, 次の各命題は同値である.

- (i)  $T$  は木である.
- (ii)  $T$  には閉路は無く, 辺が  $n - 1$  本ある.
- (iii)  $T$  は連結であり, 辺が  $n - 1$  本ある.
- (iv)  $T$  は連結であり, 全ての辺は「橋」である.
- (v)  $T$  の任意の2点を結ぶ道はちょうど1本である.
- (vi)  $T$  に閉路は無いが, 新しい辺をどのように付け加えても閉路ができ, しかも, 1個の閉路である.

ここで, 上の定理の命題 (ii)(iii) より, 林  $G$  の辺の数に関して次の系が得られる.

**系 9.2**  
 林  $G$  には  $n$  個の点と  $k$  個の成分があるとする. このとき, 林  $G$  には  $n - k$  本の辺がある.

(証明)

閉路が無く連結だとすると,  $n - 1$  本の辺がある. これから辺を 1 本ずつ切断する操作を進めると

- 1 本辺を切断すると  $\Rightarrow$  成分数 2,  $n - 2$  本の辺
- 2 本辺を切断すると  $\Rightarrow$  成分数 3,  $n - 3$  本の辺
- 3 本辺を切断すると  $\Rightarrow$  成分数 4,  $n - 4$  本の辺
- ...
- ...
- ...
- $k - 1$  本辺を切断すると  $\Rightarrow$  成分数  $k$ ,  $n - k$  本の辺

となる. (証明終わり).

さらに, 定理 9.1 の (ii) より木の端点数に関して次の系が得られる.

**系 9.3**  
 単点でない木は, 少なくとも 2 点の端点を含む.

(証明)

木  $T$ :  $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ,  $p \geq 2$ ,  $E(T) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$  とすると, 定理 9.1(ii) より

$$q = p - 1$$

であり, 辺の総数の 2 倍はグラフの次数に等しい (握手補題):

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$$

から直ちに

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2(p - 1)$$

が得られる. 従って, 木の端点が 0, 1 だとすると, 上式右辺が負またはゼロとなり, 点の数が 2 以上のグラフに対する次数の定義に反する. (証明終わり).

### 6.1.2 全域木

全域木 (spanning tree): 連結グラフ  $G$  に対し, 閉路が無くなるまで辺を除去して残るグラフ (図 6.115 参照).

これを一般化すると

全域林 (spanning forest):  $n$  個の点と  $m$  本の辺,  $k$  個の成分があるとして,  $G$  の各成分に対して, 閉路が無くなるまで辺を除去する操作を繰り返して得られるグラフ.

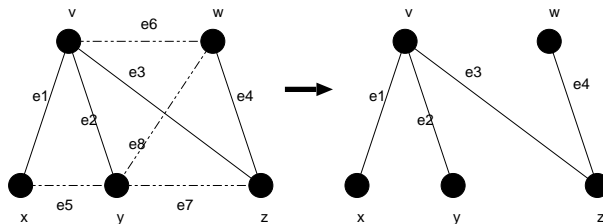


図 6.115: 連結グラフから生成された全域木の一例.

閉路階数 (cycle rank)  $\gamma(G)$ : 全域林を得るまでに切断しなければならない辺の本数.

$$\begin{aligned} \gamma(G) &= (G \text{ の辺数}) - (n \text{ 個の点, } k \text{ 成分からなる林 } G \text{ の辺数}) \\ &= m - (n - k) \text{ (系 9.2 より)} = m - n + k \end{aligned}$$

カットセット階数 (cutset rank)  $\xi(G)$ : 全域木の辺数

$$\xi(G) = n - k$$

当然,  $\gamma(G)$  と  $\xi(G)$  の間には  $\gamma(G) + \xi(G) = m$  の関係がある.

### 6.1.3 基本閉路集合と基本カットセット集合

木  $T$  に関連した基本閉路集合:  $T$  に含まれない  $G$  の任意の辺を一つ  $T$  に付加すると, 閉路が一つできる. この操作によりできる閉路の集合を基本閉路集合と呼ぶ (その一例として図 6.116(左) 参照).

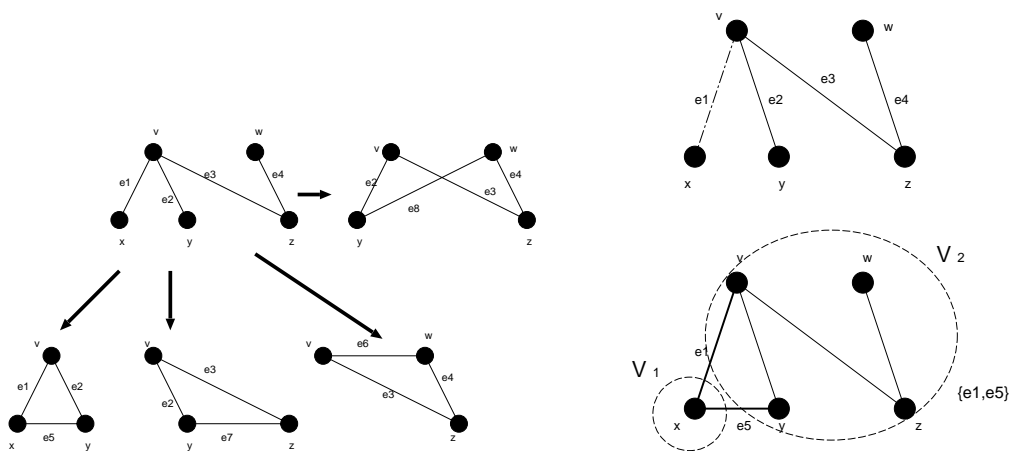


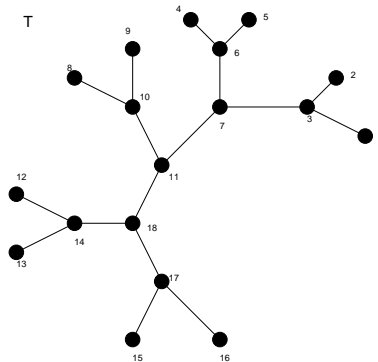
図 6.116: 基本閉路集合の一例 (左) と基本カットセット集合の一例 (右).

木  $T$  に関連した基本カットセット集合:  $T$  の各辺を除去して得られるカットセット集合 (その一例を図

6.116(右) に載せる).

**例題 6.1** (2004 年度 演習問題 6)

$G$  が連結グラフであるとき,  $G$  の中心 (centre) とは次のような点  $v$  のことである:  $v$  と  $G$  の他点の間の距離の最大値ができるだけ小さい. このとき, 以下の問いに答えよ.



- (1) 端点を除去する操作を続けて行くことにより, 図の木  $T$  の中心を求めよ.
- (2) どんな木でも中心は 1 つか 2 つであることを示せ.
- (3) 木の中心が 2 つある場合, それらの 2 点は隣接していることを示せ.
- (4) 7 点からなる木で, 中心が 1 つの木と, 2 つの木をそれぞれ一つずつ例示せよ.

(解答例)

- (1) 問題文中に与えられた木  $T$  に対し, 「端点を除去する操作」<sup>13</sup> を行うと, 1 回目に削除される端点グループは  $\{1, 2, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 15, 16\}$  であり, 2 回目に削除される端点グループは  $\{3, 6, 10, 14, 17\}$ . そして, 最後に削除される端点グループは  $\{7, 18\}$  である. 従って, これら一連の操作により最後まで生き残る木  $T$  の中心は 11 である.
- (2) 仮に木の中心が 3 つあるとする. このとき, 定理 9.1 (iv) から, 木の全ての辺は橋になっていることから, 端点を除去していく操作により, 残る木としては図 6.117 の場合しかない. この場合に対して, さ

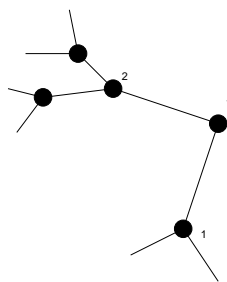


図 6.117: 端点を削除することによってできるグラフの一例.

らに次の 2 通りの可能性があり得る.

- (I) 点 1 と点 2 に結合している成分の大きさが等しい場合

<sup>13</sup> ここで言う「端点を除去する操作」とはもう少し正確に言うと, この解答に示したように「端点のグループを除去する操作」のことです.

(II) 点 1 と点 2 に結合している成分の大きさが異なる場合

(I) の場合について考えると、点 1 と点 2 と  $v$  に接続する 2 つの辺を除去することにより、唯一の中心  $v$  が得られる。

(II) の場合に関して、点 2 に結合している成分の方が大きいとすると、点 1 と点  $v$  を結ぶ辺を除去することにより、 $(v, 2)$  という 2 つの中心が得られる。

従って、(I)(II) のいずれの場合にしても、木の中心が 3 つあるという可能性はあり得ず、必ず、引き続き除去のプロセスにより、1 つまたは 2 つの中心に行き着くことになる。

- (3) もしも仮に、木の中心が 2 つあり、それらが隣接していないとすると、その場合には定理 9.1 (iv) により、木の全ての辺は橋であり、中心である点 1, 2 は次数が 2 の点  $v$  を介して結合しているはずである (図 6.118 参照)。従って、点 1, 2 とこの  $v$  との接続辺を除去すると中心が 1 つとなってしまう、中心が 2 つ

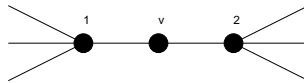


図 6.118: 木では全ての辺が橋である。

あるという仮定に反する。よって、木の中心が 2 つある場合には、それらは必ず隣接していると結論付けられる。

- (4) 点が 7 つで、中心が 1 つまたは 2 つのグラフの一例をそれぞれ図 6.119 に載せる。

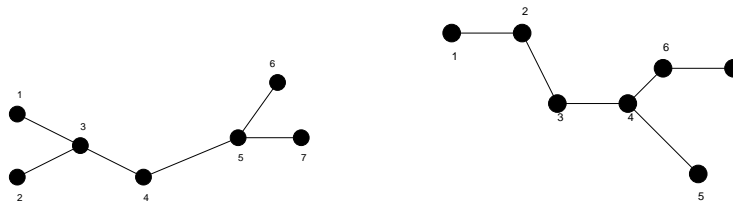
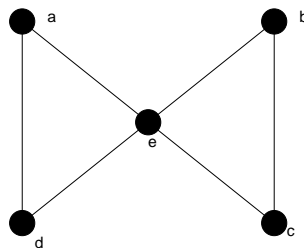


図 6.119: 7 点からなる木で中心が 1 つのもの (左) と中心が 2 つのもの (右) の一例。

**例題 6.2** (2005 年度 **演習問題 6**)

- (1) 図に示したグラフの全域木を全て描け。



- (2) グラフ  $G$  の辺のある集合を  $C^*$  とする。どの全域林にも  $C^*$  と共通な辺があるならば、 $C^*$  にはカットセットが含まれることを例を挙げて示せ。

(解答例)

- (1) 図 6.120 のように問題のグラフの各辺に番号をふると、辺集合 I : {1, 2, 3}, 辺集合 II : {4, 5, 6} のそれ

それから、要素を1つずつ取り出し、その辺を削除すれば全域木が得られる。従って、考えうる全域木

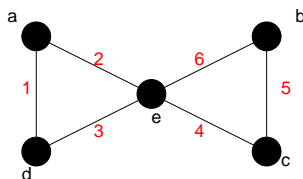


図 6.120: 問題のグラフの各辺に番号をふる.

の数は  $3 \times 3 = 9$  通りである. それぞれの全域木と削除する辺の組み合わせは A : (1,4), B : (1,5), C : (1,6), D : (2,4), E : (2,5), F : (2,6), G : (3,4), H : (3,5), I : (3,6) であり, それぞれを描くと図 6.121 のようになる.

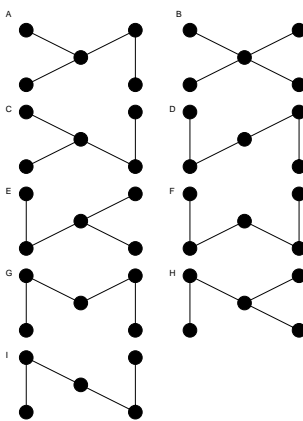


図 6.121: 可能な全域木.

(2) 例として図 6.122(左) のようなグラフを考える. このとき, 辺 e はカットセットになっており (この場合

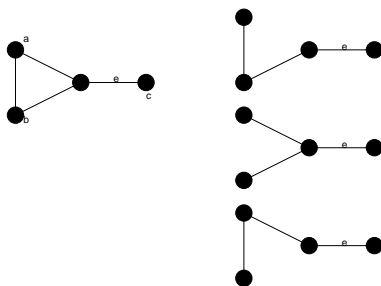


図 6.122: ここで考える連結グラフ G(左) とその全域木 (右).

は「橋」とも言える), この辺を削除すると, 連結グラフは点と三角形に分離する. そこで, このグラフの全域木を作るためには, 三角形の各辺を 1 辺だけ削除すればよいので, 可能な全域木は図 6.122(右) のようになり, 辺 e は全ての全域木に共通に含まれることになる. 従って, このグラフに関しては題意が満たされていることになる.

例題 6.3 (2006 年度 演習問題 6)

$T_1, T_2$  は連結グラフ  $G$  の全域木であるとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $e$  が  $T_1$  の任意の辺であるとき、 $T_1$  の辺  $e$  を辺  $f$  で置き換えたグラフ  $(T_1 - \{e\}) \cup \{f\}$  も全域木になるような、 $T_2$  の辺  $f$  が存在することを例を挙げて示せ。
- (2) (1) での操作を繰り返すことにより、 $T_1$  は  $T_2$  に「変換」できることを例を挙げて示せ。ただし、 $T_1$  の辺の一つを  $T_2$  の辺で置き換える各段階において、全域木になっているものとする。

(解答例)

(1) 図 6.123 に載せたグラフ  $G$  とその 2 つの全域木  $T_1, T_2$  を考えよう。ここで、問題文に与えられている

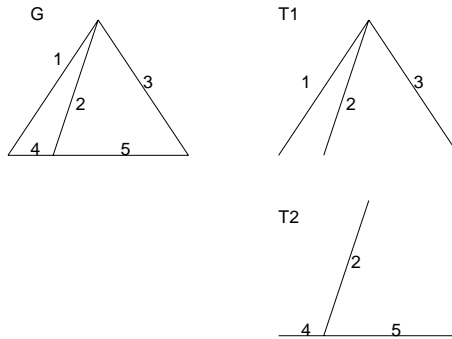


図 6.123: ここで考えるグラフ  $G$  とその全域木  $T_1, T_2$ .

全域木  $T_1$  の辺  $e$  を 3 に、全域木  $T_2$  の辺  $f$  を 5 とすると (今後このような対応づけを  $e = 3, f = 5$  と書くことにする), 全域木  $T_1$  から  $e$  を削除し、代わりに全域木  $T_2$  の辺  $f$  を加えたもの : (以下では一連のこの作業を「操作」と呼ぶ) はグラフ  $G$  の全域木となっている。従って

$$T_1 - \{e\} \cup \{f\} \simeq \text{グラフ } G \text{ の全域木}$$

が成立していることがわかる (この操作で得られる具体的な全域木は図 6.124 の  $t_1$ )。全域木の定義より、 $T_1, T_2$  とともに辺  $g$  を一つ加えるごとに閉路ができるが (このようにできるグラフ  $G$  の辺 2, 3, 5 からなる閉路を便宜上  $C = 235$  と呼ぶことにする。また、辺  $g$  はこの全域木を作る際に削除された辺であることに注意),  $T_1$  において削除された辺  $f = 3$  が属するこの閉路  $C = 235$  には辺  $f$  とは異なる辺 2, 5 ( $= g$ ) があるため、全域木  $T_2$  においてこの  $g = 5$  が存在すれば  $f$  が削除された木に  $T_2$  からこの  $g = 5$  を  $e$  として付け加えることによって再びグラフ  $G$  の全域木ができる。全域木の作り方から明らかに、どのように  $T_2$  を選ぼうが、その木には 2, 3, 5 のうちのいずれか 2 つの辺が存在するわけだから、常にこのような辺  $e$  を選ぶことができる。これはここで調べたグラフ  $G$  に限らず、任意のグラフ  $G$  およびその全域木に対して成立するのは明らか。

- (2) 図 6.123 に与えられたグラフの全域木  $T_1, T_2$  に対して問題に与えられた操作を辺  $e = 3, f = 2$  について行った全域木を  $t_1 = T_1 - \{e\} \cup \{f\}$  とし、この木  $t_2$  に対して操作を辺  $e = 3, f = 5$  について行った木を考えると

$$t_2 = t_1 - \{e\} \cup \{f\} \simeq T_2$$

となり、 $T_2$  が得られる。これらの 2 回の操作過程を図示すると図 6.124 のようになる。また、明らかにこの移行 :  $T_1 \rightarrow T_2$  の過程で得られる木  $t_1$  はグラフ  $G$  の全域木である。

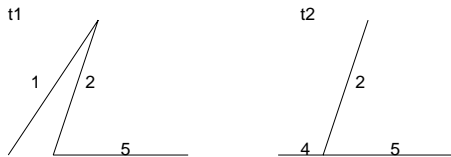


図 6.124: 全域木  $T_1$  から  $e = 3, f = 5$  の操作でできる木  $t_1$  と  $t_1$  から  $e = 1, f = 4$  の操作によってできる  $t_2$ . 明らかに  $t_2$  は  $T_2$  と同形である. また,  $t_1, t_2$  ともにグラフ  $G$  の全域木である.

**例題 6.4** (2005 年度情報工学演習 II(B) #1)

次の各グラフの閉路階数  $\gamma(G)$ , カットセット階数  $\xi(G)$  を求めよ.

- (1)  $K_5$  (2)  $K_{3,3}$  (3)  $W_5$  (4)  $N_5$  (5) ピーターソン・グラフ

(解答例)

答えのみ書く. (1)  $\gamma(K_5) = 6, \xi(K_5) = 4$  (2)  $\gamma(K_{3,3}) = 5, \xi(K_{3,3}) = 4$  (3)  $\gamma(W_5) = 5, \xi(W_5) = 5$ , (4)  $\gamma(N_5) = 0, \xi(N_5) = 0$  (5)  $\gamma(\text{ピーターソン}) = 6, \xi(\text{ピーターソン}) = 9$ .

**例題 6.5** (2007 年度 **演習問題 6**)

- (1) ピーターソン・グラフの全域木を一つ描け.
- (2) グラフ  $G$  は  $\varepsilon$  の辺数と  $|G|$  個の点を含むとする. このとき,  $G$  の任意の全域木に対し,  $\varepsilon - |G| + 1$  個の基本閉路が存在することを (1) の  $G \equiv$  ピーターソン・グラフ に関して示し, 次いで, 任意のグラフ  $G$  に対して示せ.

(解答例)

- (1) ピーターソン・グラフは図の実線 + 破線からなるグラフで点数  $|G| = 10$ , 辺数  $\varepsilon = 15$  からなる. これから図の破線:  $\overline{23}, \overline{68}, \overline{710}, \overline{49}, \overline{810}, \overline{27}$  の 6 本の辺を除去すると図の実線のような全域木ができる.

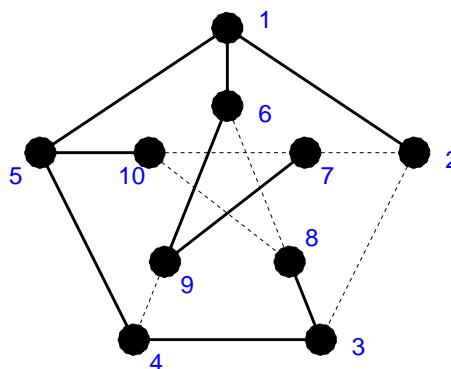


図 6.125: ピーターソン・グラフの全域木 (実線).

- (2) (1) で得られたピーターソン・グラフの全域木において, 除去した辺  $\overline{23}$  を加えると閉路  $\overline{123451}$  が得られ,  $\overline{68}$  を加えると閉路  $\overline{1683451}$  が得られ, 辺  $\overline{710}$  を加えると閉路  $\overline{71051697}$  が得られ, 辺  $\overline{49}$  を加えると閉路  $\overline{945169}$  が得られ, 辺  $\overline{810}$  を加えると閉路  $\overline{8345108}$  が得られ, 辺  $\overline{27}$  を加えると閉路  $\overline{279612}$  が得られる. 従って, (1) で除去した辺を一つ加えるごとに閉路が一つずつ得られ, これが基本閉路となる. よって, 基本閉路の個数は全域木ができるまで除去した辺の本数に等しい. 例えば, (1) のピーターソン・グラフの場合には, 6 本であり, これは確かに  $\varepsilon - |G| + 1 = 15 - 10 + 1 = 6$  と等しい.
- 点数  $|G|$ , 辺数  $\varepsilon$  を持つ一般のグラフにおいては, できあがる全域木の辺数が「 $|G|$  個の点からなる木の辺数は  $|G| - 1$  本である」ことを思い出せば, やはり,  $|G| - 1$  本であるから, 全域木ができるまでに除去しなければならない辺数は  $\varepsilon - (|G| - 1) = \varepsilon - |G| + 1$  本であり, この辺を一つずつ加えると基本閉路が一つずつできるので, 結局, 基本閉路の個数は  $\varepsilon - |G| + 1$  となる.



## 第7回講義

### 6.1.4 木の数え上げ

点にラベルを付けた木を「ラベル付き木」と言うが、このように各点にラベルを付けて木を区別した場合、その総数はいくつあるか、ということが問題になる。その答えは Cayley (ケイリー) の定理としてまとめられており、「 $n$  個の点からなるラベル付き木の総数は  $n^{n-2}$  個である」というように、とても簡単な形で表される。ここではこの定理 (公式) の証明を詳しく追い、関連する系、及び、いくつかの例題をとりあげ、その理解を深めて行くことにしよう。

**定理 10.1 (Cayley の定理)**

$n$  点の異なるラベル付の木は  $n^{n-2}$  個ある。

(証明)

まずは準備として

- $\deg(v) = k - 1$  の点  $v$  を含むラベル付きの木を A
- $\deg(v) = k$  の点  $v$  を含むラベル付きの木を B

と定義しておく。

ここで述べる証明のポイントは「『ラベル付き木 A からラベル付き木 B を作る連鎖 (linkage) の総数』と『逆にラベル付き木 B からラベル付き木 A を作る連鎖の総数』が等しい」という条件 (関係式) から可能なラベル付き木の総数を求める、という点である。

それでは以下で連鎖 :  $A \rightarrow B$ , 及び, 連鎖 :  $B \rightarrow A$  なる操作をそれぞれ見て行くことにしよう。この際、 $n$  個の点からなるラベル付き木のある点  $v$  の次数が  $k$  であるものの総数を  $T(n, k)$  で表しておくことにする。

連鎖 :  $A \rightarrow B$

図 6.126 のように A を点  $v$  に接続していない辺で分離し (図 6.126 の (a)  $\rightarrow$  (b)), 点  $v$  と点  $z$  とを結びと (図 6.126 の (b)  $\rightarrow$  (c)),  $\deg(v) = k$  であるラベル付き木 B が得られる。さて、ラベル付き木 A の選び方は

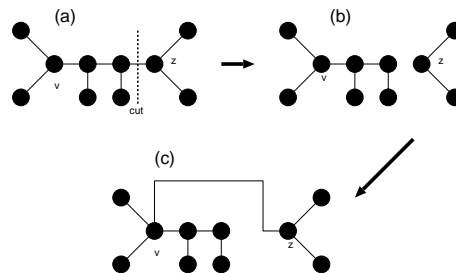


図 6.126: 連鎖 :  $A \rightarrow B$ .

$T(n, k - 1)$  通りあり, 1 つの  $A$  に対して, 切断する辺の選び方は

$$\begin{aligned} (\text{点 } v \text{ に接続していない辺の選び方}) &= (\text{木 } A \text{ の辺の本数}) - (\text{点 } v \text{ の次数}) \\ &= (n - 1) - (k - 1) = n - k \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

だけあるから, 連鎖 :  $A \rightarrow B$  の総数は

$$(\text{連鎖 : } A \rightarrow B \text{ の総数}) = T(n, k - 1)(n - k)$$

となる. 次に連鎖 :  $B \rightarrow A$  を考える.

連鎖 :  $B \rightarrow A$

図 6.127 のように, ラベル付き木  $B$  から点  $v$ , 及び, その接続辺を除去して得られる, 木  $B$  の成分である一連の部分木を  $(T_1, T_2, \dots, T_k)$  とする (図 6.127 の (a)). ここで各部分木に含まれる点の総数は  $n_i$  であり, 当然のことながら

$$n - 1 \text{ (} v \text{ 以外の点の数)} = \sum_{i=1}^k n_i$$

を満たしている. このとき, ラベル付き木  $B$  から点  $v$ , 及び, その接続辺の 1 本を除去し (この際にできる成

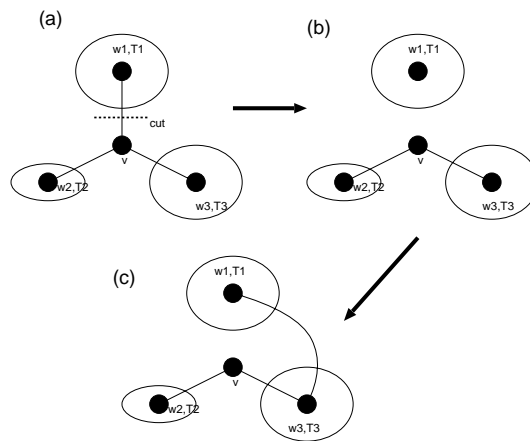


図 6.127: 連鎖 :  $B \rightarrow A$ .

分である部分木を  $T_i$  と名付ける)(図 6.127 の (a)  $\rightarrow$  (b)),  $T_i$  以外の部分木  $T_j$  の任意の点  $u$  と部分木  $T_i$  内の任意の点  $w_i$  を辺で結ぶ (図 6.127 の (b)  $\rightarrow$  (c)) と  $\deg(v) = k - 1$  のラベル付き木  $A$  が得られる.

ここでラベル付き木  $B$  の選び方は  $T(n, k)$  通りであり, 点  $w_i$  と  $T_i$  以外の部分木  $T_j$  の任意の点を結ぶ方法は

$$(\text{点 } v \text{ を除く点の総数}) - (\text{部分木 } T_i \text{ に属する点の総数}) = (n - 1) - n_i \quad (\text{通り})$$

だけあるから, 連鎖 :  $B \rightarrow A$  の総数は

$$\begin{aligned} T(n, k) \sum_{i=1}^k (n - 1 - n_i) &= T(n, k) \{ (n - 1 - n_1) + (n - 1 - n_2) + \dots + (n - 1 - n_k) \} \\ &= T(n, k) \{ (n - 1)k - (n_1 + n_2 + \dots + n_k) \} = T(n, k)(n - 1)(k - 1) \end{aligned}$$

となる.

連鎖:  $A \rightarrow B, B \rightarrow A$  の総数を等しいと置くことにより, 関係式:

$$(n-k)T(n, k-1) = (n-1)(k-1)T(n, k)$$

が得られる.

ところで,  $T(n, n-1) = 1$  に注意して, 上関係式で  $k = n-1, n-2, n-3, \dots$  と書き出して行ってみると

$k = n-1$  のとき

$$T(n, n-2) = (n-1)(n-2)T(n, n-1) = (n-1)(n-2)$$

$k = n-2$  のとき

$$2T(n, n-3) = (n-1)(n-3)T(n, n-2) = (n-1)^2(n-2)(n-3)$$

つまり

$$T(n, n-3) = \frac{1}{2}(n-1)^2(n-2)(n-3)$$

$k = n-3$  のとき

$$3T(n, n-4) = (n-1)(n-4)T(n, n-3) = \frac{1}{2}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

つまり

$$T(n, n-4) = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

が得られる. これを一般化すると, 二項定理より  $k = k+1$  のとき

$$T(n, k) = \frac{(n-1)^{n-k+1}(n-2)}{(k-1)(k-2)\dots} = {}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

という結果が得られる. 従って, 求めるラベル付き木の総数  $T(n)$  は上記の  $T(n, k)$  に関し,  $k = 1$  から  $k = n-1$  まで和をとることにより

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=1}^{n-1} T(n, k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{k-1}1^{k-1}(n-1)^{(n-2)-(k-1)} = \{(n-1) + 1\}^{n-2} = n^{n-2} \end{aligned}$$

となり, Cayley の定理が証明された. (証明終わり).

この定理に関する例題を一つ見ておく.

例題 7.1 (2003 年度 レポート課題 #5 問題 1)

$n$  点のラベル付き木の個数を  $T(n)$  とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1)  $k$  点のラベル付き木と  $n - k$  点のラベル付き木の結び方の総数を計算することで次の関係式を示せ.

$$2(n - 1)T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k k(n - k)T(k)T(n - k)$$

(2) 次の関係式を示せ.

$$\sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k k^{k-1}(n - k)^{n-k-1} = 2(n - 1)n^{n-2}$$

(解答例)

(1)  $n$  点からなる木の辺を一辺だけ切って, 2 つのグラフ A, B を作る方法は

$$2 \times (n - 1) \times T(n) = 2(n - 1)T(n) \tag{6.140}$$

通り存在する. ここで,  $T(n)$  は  $n$  点からなる木の総数であり, 係数  $(n - 1)$  はどの辺を切るかという自由度を, また, 係数 2 はグラフ A, B の交換による自由度を表している.

ところで,  $k$  点のラベル付き木 A と  $(n - k)$  点のラベル付き木 B の結び方の総数は,  $k$  点のラベル付き木の中から一点を選ぶ方法の  $kT(k)$  通りと  $n - k$  点のラベル付き木の中から一点を選ぶ方法の  $(n - k)T(n - k)$  通りを掛け合わせ, これに  $n$  個の点から  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ) 個の点を選んで A, B を作る場合の数を掛け合わせただけの個数だけ存在するから

$$\sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k kT(k)(n - k)T(n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k k(n - k)T(k)T(n - k) \tag{6.141}$$

となる. (6.140)(6.141) は等しいので

$$2(n - 1)T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k k(n - k)T(k)T(n - k) \tag{6.142}$$

が得られる.

(2) (6.142) 式において, Cayley の定理 :  $T(n) = n^{n-2}$  等を用いると

$$2(n - 1)n^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k k(n - k)k^{k-2}(n - k)^{n-k-2} = \sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k k^{k-1}(n - k)^{n-k-1} \tag{6.143}$$

が得られる.

この節の最後に Cayley の定理から導かれる系を一つあげておこう.

**系 10.2**  
完全グラフ  $K_n$  の全域木の総数は  $n^{n-2}$  個である.

(証明)

完全グラフ  $K_n$  から、各点に接続している辺を適切に除去することにより、 $n$  点のラベル付き木 (全域木) が得られ、逆に、 $n$  点のラベル付き木の各点に、各点の次数が  $n - 1$  になるよう、適切に辺を加えることにより完全グラフ  $K_n$  が得られる (例えば、図 6.128 に  $K_5$  の場合を載せた)。従って、 $n$  点のラベル付き木は完全グラフ  $K_n$  の全域木に一意に対応し、よって、完全グラフ  $K_n$  の全域木の総数は  $n^{n-2}$  である。(証明終わり)。

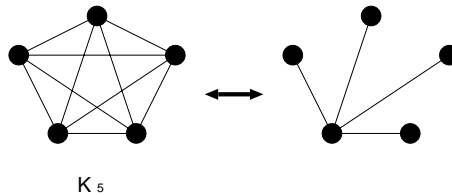


図 6.128: 完全グラフ  $K_5$  とその全域木.

### 6.1.5 点行列と行列木定理

ここで学ぶ 行列木定理 (matrix-tree theorem) は、与えられたグラフ  $G$  のラベル付き全域木の個数を与える実用的な定理である。

具体的に定理とその応用例を見る前に、グラフ  $G$  の点行列 (vertex matrix)  $D$  を次のように定義する<sup>14</sup>。

グラフ  $G$  の点行列  $D$  とは、その要素  $D_{ij}$  が

$$D_{ij} = \begin{cases} \text{点 } v_i \text{ の次数} & (i = j \text{ のとき}) \\ -(\text{点 } v_i \text{ と点 } v_j \text{ を結ぶ辺の本数}) & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる行列である。

このとき、グラフ  $G$  の全域木の本数  $\tau(G)$  は行列  $D$  の任意の余因子で与えられる。つまり、行列  $D$  の第  $i$  行、第  $j$  列を削除して得られる行列を  $D(\bar{i}, \bar{j})$  とすると

$$\tau(G) = (-1)^{i+j} |D(\bar{i}, \bar{j})|$$

が全域木の本数を与える。ここで、 $|X|$  は行列  $X$  の行列式を意味する。

なお、実用的には行列  $D$  のサイズが  $N \times N$  ならば、 $i = j = N$  と選ぶのが扱いやすく、このとき

$$\tau(G) = |D(\bar{N}, \bar{N})|$$

が全域木の総数となる。以上の内容を行列木定理と呼ぶ。

この定理の使い方を具体的に見るために、次のような例題を考えてみよう。

<sup>14</sup> この講義では個々のグラフのデータ構造を表現するための行列を既にいくつか取りあげてきたが、この点行列は 5 番目の行列である。各自、これまでに学んだ「隣接行列」「接続行列」「タイセット行列」「カットセット行列」を復習しておくこと。

例題 7.2

隣接行列  $A$  が

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフ  $G$  の全域木の総数  $\tau(G)$  を求めよ。また、その全域木を全て図示せよ。

(解答例)

隣接行列  $A$  を持つグラフ  $G$  を図示してみると図 6.129(左) となる。このグラフ  $G$  の点行列  $D$  は、その定

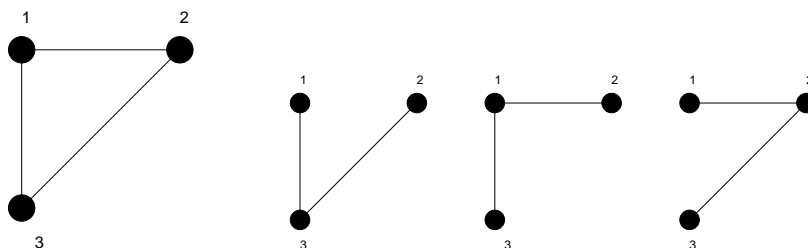


図 6.129: 隣接行列 で与えられるグラフ  $G$ (左) とその 3 つの全域木 (右).

義から

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

であり、その  $i = j = 3$  での余因子が、このグラフ  $G$  の全域木の総数  $\tau(G)$  を与え

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \text{ (個)}$$

となる。この 3 つの全域木を描くと図 6.129(右) のようになる。

例題 7.3 (2004 年度 演習問題 7)

1. 今回の講義で学んだ Cayley の定理の証明を参考にして, 下記の問いに答えよ.
  - (1)  $n$  個の点からなる木で, 与えられた点  $v$  が端点になっているものは何個あるか?
  - (2)  $n$  個の点からなる木の与えられた点  $v$  が端点となっている確率  $P(n)$  を求めよ. また, 点の数  $n$  が無限大のときの  $P(n)$  の極限值が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \frac{1}{e}$$

で与えられることを示せ. ただし,  $e$  は自然対数の底である.

2. 隣接行列  $A$  が

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフ  $G$  に関する行列木定理について以下の問いに答えよ.

- (1) グラフ  $G$  の点行列  $D$  を求めよ.
- (2) 行列木定理により, グラフ  $G$  の全域木の総数  $\tau(G)$  を求めよ.
- (3) (2) で得られた個数だけ存在する全域木を具体的に全て図示せよ.

(解答例)

- 1(1) 今回の講義で学習した Cayley の定理の証明の過程で得られた関係式:

$$T(n, k) = {}_{n-2}C_{k-1} (n-1)^{n-k-1} \tag{6.144}$$

に注目する. これは,  $n$  点からなる木における, ある点  $v$  の次数が  $k$  であるものの個数を与えるわけであるから, 問題となっている「与えられた点  $v$  が端点である木の個数」は上関係式で  $k = 1$  と置いたものに等しい. 従って, 求める木の個数は

$$T(n, 1) = {}_{n-2}C_0 (n-1)^{n-2} = (n-1)^{n-2} \tag{6.145}$$

である.

- (2) 求める確率  $P(n)$  は  $n$  個の点からなるラベル付き木の個数  $n^{n-2}$  で上の結果である  $T(n, 1)$  を割ったものに相当するので

$$P(n) = \frac{T(n, 1)}{n^{n-2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} \tag{6.146}$$

が求める答えである.

- (3) 自然対数  $e$  の定義から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \tag{6.147}$$

となり, 題意が示された.

(参考)

$P(n)$  の極限值 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \tag{6.148}$$

の示し方として, 例えば  $P(n)$  の対数をとったものの極限值 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{6.149}$$

を考えることによって「間接的」に (6.148) を示すこともできます. (6.149) の極限值はこのままでは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0 \tag{6.150}$$

なので,  $\infty \times 0$  を評価することになって厄介だが,  $\log(1 - 1/n)$  を  $(1/n)$  で展開すれば

$$\log \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{6.151}$$

となるので,

$$n \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{6.152}$$

であり, 極限值 (6.149) は簡単に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = -1 \tag{6.153}$$

のように求めることができる. 従って,  $n \rightarrow \infty$  のときに上式の  $\log$  の中身が  $1/e$  に近づくべきことは明らかであり, これで極限值 (6.148) が示せたことになる.

2(1) 隣接行列  $A$  により与えられるグラフ  $G$  は図 6.130 のようになる. 従って, 求める点行列  $D$  は

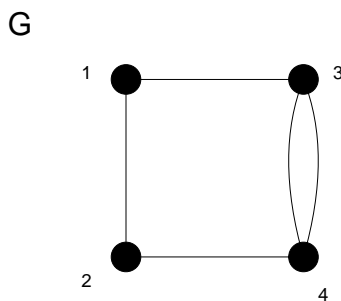


図 6.130: 隣接行列  $A$  によって定義されるグラフ  $G$ .

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{6.154}$$

である.

(2)  $i = j = 4$  で余因子展開することにより、グラフ  $G$  の全域木の個数  $\tau(G)$  は

$$\tau(G) = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 \cdot 3 = 7 \text{ (個)}$$

(6.155)

となる。

(3) グラフ  $G$  の 7 通りの全域木を図示すると図 6.131 になる。

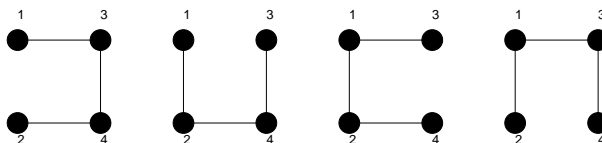


図 6.131: 隣接行列  $A$  によって定義されるグラフ  $G$  の全域木. ただし、辺  $3 \rightarrow 4$  を削除するか、辺  $4 \rightarrow 3$  を削除するかにより、これら 4 つのグラフの中で辺  $34$  があるグラフにはそれぞれ 1 つずつ異なるグラフが存在するので、計 7 つの全域木が得られる。

(注 1)

隣接行列  $A$  と点行列  $D$  の間には、次に定義する行列  $\delta$  を介して一般的な関係が存在する。

行列  $\delta$  はその要素  $\delta_{ij}$  が

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.156}$$

で定義される行列であり、この行列と、隣接行列  $A$ 、点行列  $D$  の間には

$$D = \delta - A \tag{6.157}$$

なる関係がある。各自がこの演習問題で扱ったグラフ  $G$  において、この関係式が成り立っていることを確認しておくこと。

(注 2)

ここで取り上げた点行列の行列式を計算することにより、ラベル付き全域木の数を数上げる方法を点行列式法と名付けるとすれば、この全域木の個数を勘定する方法としては、もう一つ、閉路行列式法と呼ばれる方法がある。ここでは、この方法に関していくつかコメントしておこう。

まず、行列要素  $R_{ij}$  が次のように与えられる閉路行列  $R$  を導入する<sup>15</sup>。

$$R_{ij} = \begin{cases} \text{閉路 } c_i \text{ を構成する辺の数} & (i = j) \\ \pm (\text{閉路 } c_i \text{ と } c_j \text{ に共通な辺の本数}) & (i \neq j) \end{cases} \tag{6.158}$$

ここで非対角成分の符号は  $c_i$  と  $c_j$  の共通な辺上で、これら 2 つの閉路の向きが同じであればプラスを、逆であればマイナスを選ぶことに約束する。

すると、この閉路行列  $R$  を有するグラフ  $G$  に関する全域木の総数  $\tau(G)$  は

$$\tau(G) = |R| \tag{6.159}$$

つまり、行列  $R$  の行列式で与えられる。この方法の有効性を確認するために、例題 7.2 2 の隣接行列で与えられたグラフ (図 6.130 のグラフ  $G$ ) に対して、この方法を適用してみよう。

<sup>15</sup> この講義に出てきたものとしては 6 番目のグラフ行列。

まず、このグラフ  $G$  には閉路  $c_1, c_2$  が存在し、それぞれは点の順序でその向きを指定すれば、 $c_1 = 12431, c_2 = 343$  となる。従って、このグラフ  $G$  の閉路行列  $R$  は

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6.160}$$

である。よって、このグラフ  $G$  に対する全域木の総数  $\tau(G)$  は

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \tag{6.161}$$

となり、点行列式法による結果、つまり、例題 7.2 2.(2) の答えと一致する。

ところで、あるグラフ  $G$  が与えられたとき、その全域木の総数を勘定する必要が生じた際、上述の点行列式法と閉路行列式法のどちらを使ったらよいのであろうか？ この疑問に対する一般的な答えはグラフ  $G$  に含まれる点の数が閉路の数よりも少ない場合には点行列式法を用い、その逆の場合には閉路行列式法を用いるのがよいということである。

上記指針の正しさを確認するため、閉路行列式法の点行列法に対する「優位性」が際立ってわかるような例を取りあげ、そのグラフに両方法を適用してみることにしよう。

図 6.132 に示したグラフ  $G$  に対して、まずは閉路行列式を適用してみると、この平面グラフの閉路はいずれも三角形であり、 $c_1 = 1451, c_2 = 3453, c_3 = 1231$  である。従って、このグラフの閉路行列  $R$

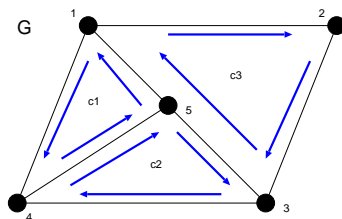


図 6.132: ここで点行列式法と閉路行列式法との計算手数を比較するために用いるグラフ  $G$ 。

は

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{6.162}$$

となる。この行列式は直ちに計算できて、グラフ  $G$  の全域木の個数は

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 8 = 24 \tag{6.163}$$

と求まる。

一方で点行列式法を使うとなると、点行列を求めなければならないが、このグラフは 5 点からなるグラフなので、点行列  $D$  のサイズは  $5 \times 5$  であり、具体的に次のように与えられる。

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{6.164}$$

従って、この行列  $D$  の 5 行 5 列における余因子によってグラフ  $G$  の全域木の本数が与えられて

$$\tau(G) = (-1)^{5+5} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \tag{6.165}$$

となる。しかし、計算の手数から言うと、ここから所望の個数を求めるためには余因子展開法等を使って行列式を計算しなければならない。ここでは実際に展開を実行し、行列式のサイズを段階的に落としていってみると

$$\begin{aligned} \tau(G) &= 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \left\{ 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right\} + \left\{ (-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right\} \\ &+ \left\{ (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right\} = 3\{2 \times 8 - 3\} + \{-8 - 1\} + \{-1 - 5\} = 24 \end{aligned} \tag{6.166}$$

となり、確かに閉路行列式法による結果と一致する。しかし、計算の手間は閉路行列式法の方が少ないことがわかるであろう。

**例題 7.4** (2005 年度 **演習問題 7**)

行列木定理を用いて Cayley の定理を証明せよ。

(解答例)

この行列木定理を用いた証明では、後に述べるように完全グラフ  $K_n$  の点行列の行列式を求めることが必要となるので、まずは準備として次のような  $m \times m$  の対称行列の行列式を求める公式を作っておくことにする。

$$b_m \equiv \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+1)b_{m-1} + (a+1)c_{m-1} \tag{6.167}$$

ただし、下付きの添え字はその行列式のサイズを表し、 $c_{m-1}$  は次のような漸化式で定義される行列式である。

$$c_{m-1} \equiv \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (1+a)c_{m-2} \tag{6.168}$$

従って、 $b_m$  を求めるためには  $b_m, c_{m-1}$  に関する次の連立漸化式を解けばよい。

$$\begin{cases} b_m &= (a+1)b_{m-1} + (a+1)c_{m-1} \\ c_{m-1} &= (a+1)c_{m-2} \end{cases} \tag{6.169}$$

$c_{m-1}$  に関する漸化式は直ちに解けて,  $c_{m-1} = (a+1)^{m-2}c_1$  が得られるので, これを  $b_m$  に関する漸化式に代入すれば, 求めるべき  $b_m$  は簡単に

$$b_m = (a+1)^{m-1}b_1 + (m-1)(a+1)^{m-1}c_1 \tag{6.170}$$

のように定まる. 完全グラフの全域木の総数はこの公式 (6.170) で求めることができる. 例として完全グラフ  $K_5, K_6$  の点行列はそれぞれ

$$D_{K_5} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D_{K_6} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \tag{6.171}$$

と書くことができる. 従って, 一般に完全グラフ  $K_n$  の全域木の総数は, 前に求めた公式 (6.170) で

$$m = n - 1, a = n - 1, b_1 = a, c_1 = -1 \tag{6.172}$$

と置けばよいので, これらの値を代入すれば直ちに

$$\tau(K_n) = b_{n-1} = n^{n-2} \tag{6.173}$$

が求める全域木の総数であることがわかる. 完全グラフ  $K_n$  の全域木と  $n$  点からなるラベル付き木は 1 対 1 に対応するので, 以上により, ケイリーの定理を行列木定理を用いて証明することができた.

**例題 7.5** (2006 年度 演習問題 7)

完全グラフ  $K_n$  から任意の 1 辺  $e$  を削除することで得られるグラフ  $K_n - e$  の全域木の総数  $\tau(K_n - e)$  は

$$\tau(K_n - e) = (n - 2)n^{n-3}$$

で与えられることを示せ.

[ヒント] 完全グラフから任意の 1 辺を除去したグラフの点行列を求めて行列木定理を用いる. このとき求める行列式は例題 7.4 の  $b_m, c_m$  を用いて書けることに注意する.

(解答例)

例えば, 図 6.133 に与えたように完全グラフ  $K_5$  の辺が 1 本削除されたグラフの全域木の総数を求めたい.

例えば, 図 6.133 のグラフの場合の点行列は

$$D_{K_5 - e} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \tag{6.174}$$

となる ( この場合には辺  $\overline{12}$  を除去したが, どの 1 辺を選ぼうが, 完全グラフの対称性より結果は同じになることに注意). 従って, これを一般の完全グラフに拡張すれば

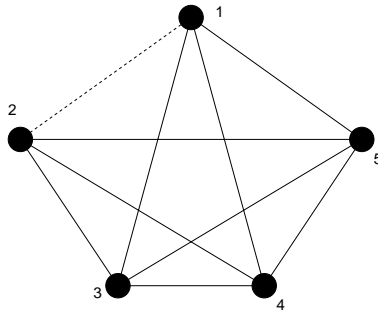


図 6.133:  $K_5 - e$  の一例. 破線が削除した辺  $e$  に該当する.

$$D_{K_n - e} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \tag{6.175}$$

と書ける. 従って, この点行列の行列式を求めることができれば, それが求める全域木の総数になっている. 前回の例題 7.4 で見た余因子展開と同様の手続きを行うと

$$\begin{aligned} \tau(K_n - e) &= (-1)^{N+N} |D_{K_n - e}(N-1, N-1)| \\ &= \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{m \times m} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -(a-1) & a-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{m \times m} \\ &= (a-1) \begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{(m-1) \times (m-1)} \\ &+ (a-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{(m-1) \times (m-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a-1) \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{(m-1) \times (m-1)} \\
 &+ (a-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{(m-1) \times (m-1)} \\
 &= (a-1)\{ab_{m-2} + (a+1)c_{m-2}\} + (a-1)\{b_{m-2} + (a+1)c_{m-2}\} \\
 &= (a-1)(a+1)(b_{m-2} + 2c_{m-2}) \tag{6.176}
 \end{aligned}$$

が得られる. ここで, 行列式  $b_m, c_m$  は例題 7.4 で用いた行列式であり, 次の連立漸化式を満たし

$$\begin{cases} b_m &= (a+1)b_{m-1} + (a+1)c_{m-1} \\ c_{m-1} &= (a+1)c_{m-2} \end{cases} \tag{6.177}$$

これらの解は次式で与えられたことを思い出そう.

$$\begin{cases} c_{m-1} &= (a+1)^{m-2}c_1 \\ b_m &= (a+1)^{m-1}b_1 + (m-1)(a+1)^{m-1}c_1 \end{cases} \tag{6.178}$$

初期条件 :

$$m = n - 1, a = n - 1, b_1 = a, c_1 = -1 \tag{6.179}$$

に注意して,  $b_{m-2}, c_{m-2}$  を (6.176) 式に代入すれば直ちに

$$\begin{aligned}
 \tau(K_n - e) &= n(n-2)\{(a+1)^{m-3}b_1 + (m-3)(a+1)^{m-3}c_1 + 2(a+1)^{m-3}c_1\} \\
 &= n(n-2)(a+1)^{m-3}\{b_1 + c_1(m-1)\} = n(n-2)n^{n-4} = (n-2)n^{n-3} \tag{6.180}
 \end{aligned}$$

が求める全域木の総数であることがわかる. 従って題意が示された.

例題 7.6 (2006 年度情報工学演習 II(B) #1)

- (1) グラフ  $H$  はその全ての隣接する 2 点が  $k$  個の辺で結ばれているものとする.  $H$  に含まれる全てのループを取り除き, 全ての多重辺を 1 つの辺になるまで削除してできるグラフ — 底単純グラフ — を  $G$  とする.  $G$  の点数, 辺数をそれぞれ  $n, m$  とするとき, グラフ  $G, H$  の全域木の総数  $\tau(G), \tau(H)$  に関して

$$\tau(H) = k^{n-1}\tau(G)$$

が成り立つことを示せ.

- (2)  $F$  をグラフ  $G$  の各辺を全て長さ  $k$  の道で置き換えてできるグラフとする. このとき

$$\tau(F) = k^{m-n+1}\tau(G)$$

を示せ.

- (3) (2) の結果を用いて完全二部グラフ  $K_{2,n}$  の全域木の総数は

$$\tau(K_{2,n}) = n \cdot 2^{n-1}$$

で与えられることを示せ.

(解答例)

- (1) グラフ  $H$  では任意の隣接する 2 点間で  $G$  での辺の他に  $k-1$  本の辺が存在するので,  $k$  本の中から 1 本を選び出す操作を考えると,  $G$  の全域木の辺数が  $n-1$  であるから, その組み合わせは  $k^{n-1}$  通りである. これがこの操作を繰り返してできる  $G$  の全域木全てに当てはまるので,  $H$  の全域木の総数は

$$\tau(H) = k^{n-1}\tau(G) \tag{6.181}$$

で与えられる.

- (2)  $G$  の辺の中で  $G$  の全域木の辺として選ばれた辺に該当する  $F$  での辺は長さ  $k$  の道で置き換わっているが, この辺を長さが 1 の道, つまり,  $G$  の全域木の辺となるまで縮約する操作を考えると, この操作の前後で  $F$  の全域木と  $G$  の全域木の総数は変化しないことに着目する. すると, これらの総数に変化を与える要因は  $G$  の辺の中で全域木の辺に選ばれなかった辺に該当する  $F$  での辺の効果である. つまり,  $F$  での各辺に存在する  $k-1$  個の点のうち, どの点で  $G$  での点への縮約をとるかという場合の数は  $k$  通りであり,  $G$  の辺の中で全域木の辺に選ばれなかった辺数は  $m - (n-1)$  であるから, 結局

$$\tau(F) = k^{m-n+1}\tau(G) \tag{6.182}$$

となる.

- (3) 2 つの点を  $n$  本の辺で結んだグラフを  $G$  としよう. この各辺を全て長さが 2 の道で置き換える. このグラフを  $F$  とする. この変換:  $G \rightarrow F$  で増加する  $n$  個の点は全て元の 2 点と隣接し, 互いに隣接しないので完全二部グラフ  $K_{2,n}$  となる (図 6.134 参照). 従って, (2) での結果を用いると今の場合  $\tau(G) = n$  であることに注意して

$$\tau(K_{2,n}) = \tau(F) = 2^{n-2+1}\tau(G) = 2^{n-1} \cdot n \tag{6.183}$$

が得られる.

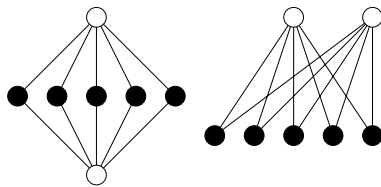


図 6.134: ここで考えるグラフ  $F$  (左) とその同型グラフである完全二部グラフ  $K_{2,n}$  (右).

**例題 7.7** (2006 年度情報工学演習 II(B) #1)

$n$  本のスポークを持つ車輪グラフの全域木の総数を  $w_n$  とすると

$$w_n - 4w_{n-1} + 4w_{n-2} - w_{n-3} = 0$$

が成り立つことを示し,  $w_n$  を求めよ.

(解答例)

まずは  $n$  本のスポークを持つ車輪の点行列  $D$  は

$$D = \begin{pmatrix} n & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix}_{n \times n} \tag{6.184}$$

である. 余因子展開法を用いて,  $w_n = |D(1,1)|$  を計算すると

$$w_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \tag{6.185}$$

が得られる. ここに,  $a_n$  は次で定義され, ここでもまた余因子展開を行うと次式のような漸化式に従う.

$$a_n = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}_{n \times n} = 3a_{n-1} - a_{n-2} \tag{6.186}$$

$b_n$  もまた次のように定義され, ここでもまた余因子展開を用いると次の漸化式に従う.

$$b_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}_{n \times n} = -a_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-2} \tag{6.187}$$

この漸化式は次のように書き直すことができ、 $b_n + a_{n-1}$  は初項が  $b_3 + a_2$ 、公比 1 の等比数列なので

$$b_n + a_{n-1} = b_3 + a_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad (6.188)$$

が成り立つ。従って、あとは連立漸化式 (6.185)(6.186)(6.188) を  $w_n$  に関して解き、実際に問題で与えられた関係式が成立することを示せばよい。実際に解くと、 $\alpha = (3 + \sqrt{5})/2, \beta = (3 - \sqrt{5})/2$  として

$$\begin{aligned} w_n &= \alpha^n + \beta^n - 2 = 3(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} - 2) - (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2} - 2) + 2 \\ &= 3w_{n-1} - w_{n-2} + 2 \end{aligned} \quad (6.189)$$

となるが、これとこの式で  $n \rightarrow n + 1$  としたものを辺々引くと

$$w_n - 4w_{n-1} + 4w_{n-2} - w_{n-3} = 0 \quad (6.190)$$

が得られる。これはここで示すべき漸化式である。

**例題 7.8** (2004 年度情報工学演習 II(B) #1)

図 6.135 のグラフ  $G$  に対し、以下の問いに答えよ。

- (1) グラフ  $G$  から全域木  $T$  を作ったとしよう。このとき、 $T$  の辺数を求めよ。
- (2) (1) で全域木を作るまでに削除しなければならない辺数  $\overline{m}$  を求めよ。
- (3)  $T$  に (2) で求めた辺を 1 つずつ付加すると必ず閉路が 1 つだけできる。このようにして作られる閉路を基本閉路と呼ぶが、この基本閉路を  $\overline{m}$  個全て描け。
- (4) (3) で求めた閉路  $C_1, C_2, \dots, C_{\overline{m}}$  に対し、閉路行列法を用いることにより、全域木の総数  $\tau(G)$  を求めよ。

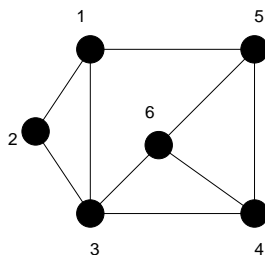


図 6.135: ここで全域木を考えるグラフ  $G$ .

(解答例)

- (1) 5 本
- (2)  $\overline{m} = 4$
- (3) 基本閉路 4 つ  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を描くと図 6.136 のようになる。

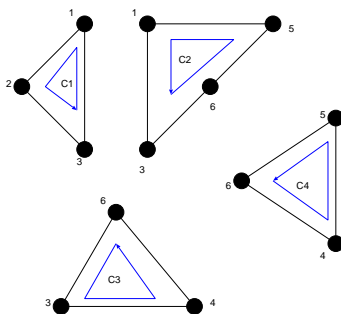


図 6.136: 求める基本閉路. 閉路行列式法を用いるために, 各閉路には図のように向き付けをしておく.

(4) グラフ  $G$  の閉路行列  $R$  は (3) で求めた基本閉路に注意して

$$R = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{6.191}$$

と書けるので, 全域木の総数  $\tau(G)$  は

$$\begin{aligned} \tau(G) = |\mathbf{G}| &= 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \left\{ 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right\} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 64 \text{ (個)} \end{aligned} \tag{6.192}$$

である.

例題 7.9 (2004 年度情報工学演習 II(B) #1)

図 6.137 のように 1 点から  $k$  本の枝を出し, その  $k$  本の枝からさらに  $k$  本の枝を出すという操作を  $n$  回繰り返してできる木を  $T_k(n)$  と名付けよう. 図 6.137 の例は  $T_3(2)$  である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $T_3(n)$  に含まれる点の総数  $S_3(n)$  を求めよ. また,  $T_3(n)$  の端点の総数を  $Q_3(n)$  を求め, 比  $P_3(n) = Q_3(n)/S_3(n)$  に対し, 極限值 :

$$p_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_3(n)$$

を計算せよ.

- (2) (1) を参考にして, 任意の自然数  $K$  に対して  $P_K(n)$  を計算し,  $n$  に関する極限值 :

$$p_K = \lim_{n \rightarrow \infty} P_K(n)$$

を求め, さらに  $K$  に関する極限值 :

$$p_\infty = \lim_{K \rightarrow \infty} p_K$$

を計算し, 木  $T_K(n)$  の構造と極限值  $p_\infty$  からわかることを簡潔に述べよ.

(注) :  $n$  と言うと普通はグラフの点の数を示しますが, ここでは「操作」の回数であることに注意.

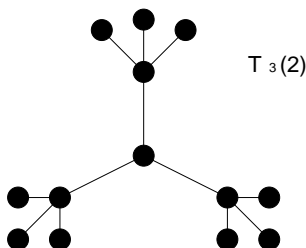


図 6.137: ここで述べた「操作」によって作られた木  $T_3(2)$ .

(解答例)

- (1) 明らかに,  $S_3(n)$  は初項 1, 公比 3 の等比数列の第  $n$  項までの和であるから

$$S_3(n) = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{3} \tag{6.193}$$

である. 一方,  $T_3(n)$  の端点の総数  $Q_3(n)$  は  $T_3(n)$  の作り方から明らかに  $Q_3(n) = 3^n$  であるので, これらの比  $P_3(n) = Q_3(n)/S_3(n)$  は

$$P_3(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{3^{n+1} - 1} \tag{6.194}$$

であり, 問題の極限值は

$$p_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_3(n) = \frac{2}{3} \tag{6.195}$$

と求まる.

(2)  $k = K$  の場合には

$$S_K(n) = \frac{K^{n+1} - 1}{K - 1} \tag{6.196}$$

$$Q_K(n) = K^n \tag{6.197}$$

$$P_K(n) = \frac{(K - 1)K^n}{K^{n+1} - 1} \tag{6.198}$$

となるので,  $P_K(n)$  に関して  $n \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$p_K = \lim_{n \rightarrow \infty} P_K(n) = \frac{K - 1}{K} \tag{6.199}$$

が得られる ( $K = 3$  と置けば (1) の結果と一致することに注意). さらに, この確率で  $K \rightarrow \infty$  の極限をとれば  $p_{K \rightarrow \infty} = 1$  が得られるが, この結果はほとんど全ての点が木の末端に分布しており, 中心からその末端に至るまでの間に存在する点の数は末端の点数と比べて無視できるほど少ないことを意味している. 末端が密に詰まっているのに対して, 中心から末端にいたるまでの間がスカスカの状態なわけである. ちなみに, このような作り方で出来上がる木のことをケーリーの木 (Caley's tree) と呼んでいる.

**例題 7.10** (2005 年度情報工学演習 II(B) #2)

行列木定理を用いて完全二部グラフ  $K_{m,n}$  の全域木の総数が

$$\tau(K_{m,n}) = m^{n-1}n^{m-1}$$

で与えられることを証明せよ.

(解答例)

完全二部グラフ  $K_{m,n}$  の点行列  $D$  は次のサイズ  $(m + n) \times (m + n)$  の正方行列である.

$$D = \left( \begin{array}{cccc|cccc} n & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & n & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & n & & & & \\ \hline & & & & m & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & m & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & \cdots & \cdots & n \end{array} \right) \tag{6.200}$$

従って、以下ではやや煩雑ではあるが、この点行列の第 (1, 1) 成分での余因子:

$$|D(\bar{1}, \bar{1})| = \begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & n \\ \hline & & & -1 \\ & & & m & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & m & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix} \quad (6.201)$$

を丁寧に計算していくことになる。ここに、左上と右下の部分行列:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & m \end{pmatrix} \quad (6.202)$$

のサイズはそれぞれ、 $(m-1) \times (m-1)$ ,  $n \times n$  であることに注意しよう。

そこで、次のような行列の基本変形を行う。すなわち、第  $m$  列から第  $(m+n-2)$  列までの  $(n-1)$  個の列ベクトルを第  $(m+n-1)$  列に加算し、次いで、第  $(m+n-1)$  列に  $1/m$  を乗じたベクトルを第 1 列から第  $(m-1)$  列まで加算する。この操作により

$$|D(\bar{1}, \bar{1})| = m^n \begin{vmatrix} n \frac{m-1}{m} & & & -n \frac{1}{m} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -n \frac{1}{m} & & & n \frac{m-1}{m} \end{vmatrix} \quad (6.203)$$

が得られる。これ以降はこの行列式を上三角行列にするように基本変形を繰り返す。

まずは、この第 1 行に  $1/(m-1)$  を乗じた行ベクトルを第 2 行から第  $(m-1)$  行まで加算すると

$$|D(\bar{1}, \bar{1})| = m^n \begin{vmatrix} n \frac{m-1}{m} & * & * & * \\ 0 & n \frac{m-2}{m-1} & & -n \frac{1}{m-1} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & -n \frac{1}{m-1} & & n \frac{m-2}{m-1} \end{vmatrix} \quad (6.204)$$

が得られるが、これ以降、第  $i$  行に  $1/(m-i)$  を乗じた行ベクトルを第  $(i+1)$  行以降に加算するという操作を  $i=2$  から  $i=m-2$  まで順次繰り返すことで所望の行列式  $|D(\bar{1}, \bar{1})|$  が

$$|D(\bar{1}, \bar{1})| = m^n \begin{vmatrix} n \frac{m-1}{m} & * & * & * \\ 0 & n \frac{m-2}{m-1} & & -n \frac{1}{m-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & n \frac{1}{2} \end{vmatrix} = m^n \cdot n^{m-1} \cdot \frac{1}{m} = m^{n-1} n^{m-1} \quad (6.205)$$

と計算される。

従って、行列木定理より完全二部グラフの全域木の総数が  $m^{n-1} n^{m-1}$  であることが証明された。

完全二部グラフの対称性を考えると、もう少しスマートな数え上げ方ができるかもしれないが、現時点で思いつく複雑ではあるが地道な数え上げ方は上に示した点行列の余因子計算である。

例題 7.11 (2007 年度 演習問題 7)

葉 (末端) の数が  $n$  である 2 分木 (一つの枝から 2 つの枝が伸びる木) の総数を  $p_n$  としよう. すると明らかに  $p_0 = 0, p_1 = p_2 = 1$  である. このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $p_3 = 2$  である. この 2 つの 2 分木を描け.
- (2)  $p_4$  を求め, その全ての 2 分木を描け.
- (3) 葉数  $n_1$  の 2 分木と葉数  $n_2$  の 2 分木の互いの根 (2 分木の開始点) を 1 つの新しい根を介してつなげる操作で葉数  $n_1 + n_2$  の 2 分木が  $p_{n_1}p_{n_2}$  通りできる.  $n_1 = 3, n_2 = 4$  の場合に対し, この操作でできる 2 分木を全て描け.
- (4)  $x$  を任意の実数とする.  $x$  の  $n$  次の冪係数が葉数  $n$  の 2 分木の総数  $p_n$  になるようにして作られる次の多項式:

$$P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n + \cdots$$

を「2 分木生成多項式」と名づけることにしよう. すると, 前問 (3) で与えた操作でできる 2 分木の総数  $p_{n_1}p_{n_2}$  は 2 分木生成多項式の 2 乗, つまり,  $\{P(x)\}^2$  における  $x^{n_1+n_2}$  の係数の一部分として現れる (同じ  $n_1 + n_2$  を与える  $n_1$  と  $n_2$  の組み合わせは複数あるので「一部分」である). この事実をふまえた考察により

$$P(x) = x + \{P(x)\}^2 \tag{6.206}$$

が成り立つことを示せ.

- (5) (4) で示した関係式 (6.206) から  $p_n$  を  $n$  の関数として求めよ.

(解答例)

ここでの最終的な目標は葉数  $n$  の 2 分木の総数  $p_n$  を求めることにある ( $n$  は「葉数」であり, 「点数」でないことに注意). 次の手順に従って考察を進め, この総数を求めてみることにしよう.

- (1) 葉数 3 の 2 分木の総数は  $p_3 = 2$  であるが, これを実際に描いてみると図 6.138 のようになる.

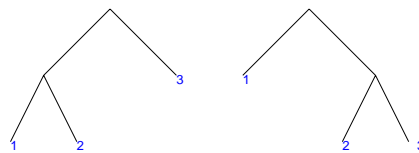


図 6.138: 葉数 3 の 2 分木.

- (4) 葉数 4 の 2 分木の総数を数えることにする. 実際に描き出してみると, 図 6.139 のような 5 つの 2 分木が得られる. 従って,  $p_4 = 5$  である.
- (3) (1)(2) の結果から, 葉数 3,4 の 2 分木の総数がそれぞれ  $p_3 = 2, p_4 = 5$  であることがわかったので, 問題に与えられた操作によって得られる 2 分木の総数は  $p_3 \times p_4 = 10$  個あるはずである. 実際に, この 2 分木の葉数は  $3 + 4 = 7$  であることに注意して描きだしてみると図 6.140 のようになる.
- (4) (3) で出来上がる 2 分木は葉数 7 のグラフであるが, 前問 (3) で考えた操作の「逆操作」つまり, 葉数 7 の 2 分木をその根から葉数 3,4 の 2 つの 2 分木に分解する操作を考えると, 葉数 7 の 2 分木の総数のうち, 葉数 3,4 へと分解されるものはその一部分であることがわかる. 実際, この逆操作における分

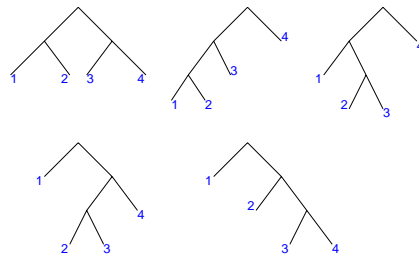


図 6.139: 葉数 5 の 2 分木.

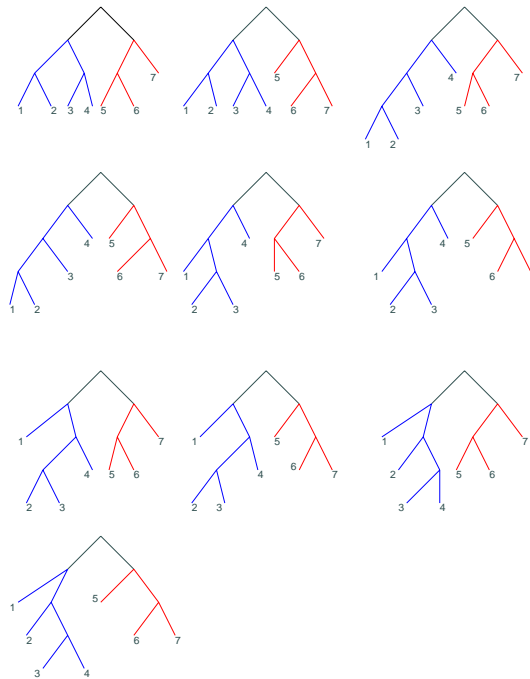


図 6.140: ここで考える操作によってできる葉数 7 の 2 分木. 根に接続する左側の 2 分木が葉数 4 からのものであり, 右側が葉数 3 からのもの.

解の仕方としては他に  $(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (0, 7), (7, 0)$  があるからである. 従って, 問題に与えた「2 分木生成多項式」 $P(x)$  の  $x$  に関する  $n$  次の冪係数に「葉数  $n$  の 2 分木の総数」という意味合いを持たせると, この多項式の 2 乗  $\{P(x)\}^2$  の中に現れる  $x^7$  の係数には上に挙げた分解の仕方に対応した  $p_1p_6, p_6p_1, p_2p_5, p_5p_2, p_0p_7, p_7p_0, p_3p_4, p_4p_3$  が現れることになる.

ところで, ここで考えた操作「新しい根を介して 2 つの 2 分木をつなげて, サイズのより大きな 2 分木を作る」ことによって, 全ての葉数を持つ 2 分木が再生産できないかどうかを考えてみると, 明らかに葉数 1 の 2 分木を作ることはできない. これは葉数 1 の 2 分木からの逆操作で 2 つの 2 分木を作ることができないことを考えると明らかである. 従って,  $\{P(x)\}^2$  は  $P(x)$  の全ての冪 (2 分木) を再現できず,  $\{P(x)\}^2$  に  $x$  を足すことで  $P(x)$  が再現される (任意の葉数の 2 分木を作ることができる). よって, 次の関係式:

$$P(x) = x + \{P(x)\}^2 \tag{6.207}$$

が成り立つことになる.

(5) (4) で示された関係式に具体的に  $P(x)$  の  $x$  に関する多項式を代入してみると

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n + \cdots = x + \{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n + \cdots\}^2 \quad (6.208)$$

が得られるが、この等式が成り立つためには全ての  $x$  の冪係数が一致することが必要である。この条件を  $x^0, x, x^2, x^3, x^4$  の冪係数に対して書き下してみると

$$p_0 = p_0^2 \quad (6.209)$$

$$p_1 = 1 + 2p_1p_0 \quad (6.210)$$

$$p_2 = 2p_0p_2 + p_1^2 \quad (6.211)$$

$$p_3 = 2p_0p_3 + 2p_1p_2 \quad (6.212)$$

$$p_4 = 2p_0p_4 + 2p_1p_3 + p_2^2 \quad (6.213)$$

となるが、自明な事実  $p_0 = 0$  (「根」のみが存在し、「葉」が一つも無い場合。つまり、孤立点一個の場合) に注意すると、逐次、この方程式を解くことにより、 $p_1 = p_2 = 1, p_3 = 2, p_4 = 5$  が求められる。これは 2 分木を実際に描いた場合の考察結果と一致する。

そこで、(6.208) 式が任意の  $x$  に対して成り立つことを考えて、形式的に (6.208) 式を  $P(x)$  について解いてみると

$$P(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2} \quad (6.214)$$

が得られるが、 $P(x)$  が  $x$  に関する冪級数で与えられたことを思い出し、 $x \ll 1$  の下で  $\sqrt{1 - 4x}$  をテーラー展開してみると

$$\sqrt{1 - 4x} = 1 - 2x - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^i (2k - 3)}{i! 2^i} (4x)^i \quad (6.215)$$

となるので、展開係数 (つまり、2 分木の数) は全て正の値をとることに注意すれば、(6.214) の 2 つの解のうち  $P(x) = (1 - \sqrt{1 - 4x})/2$  のみが採用され

$$P(x) = x + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^i (2k - 3)}{i! 2^i} (4x)^i \quad (6.216)$$

が得られる。これを少し整理すれば

$$P(x) = x + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2^{i-1} \sum_{k=2}^i (2k - 3)}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1} (2i - 3)!!}{i!} x^i \quad (6.217)$$

となる。ただし、ここでは  $(2i - 3)!! = (2i - 3)(2i - 5) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$ ,  $(-1)!! = 1$  と定義したことに注意されたい。従って  $n$  個の葉からなる 2 分木の総数は、上式右辺の和における  $i = n$  の項の係数であり

$$p_n = \frac{2^{n-1} (2n - 3)!!}{n!} \quad (6.218)$$

となる。

そこで早速、具体的にはじめの数項を確かめてみると、 $p_1 = 2^{1-1}(-1)!!/1! = 1, p_2 = 2^{2-1}(1)!!/2! = 1, p_3 = 2^{3-1}3!!/3! = 2, p_4 = 2^{4-1}5!!/4! = 5$  となり、確かに前に求めた結果に一致する。

それでは  $n = 7$  の場合はどうであろうか? 具体的に上で求めた公式 (6.218) に  $n = 7$  を代入してみると

$$p_7 = \frac{2^{7-1}11!!}{7!} = \frac{2^6 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 12 \cdot 11 = 132 \quad (6.219)$$

が得られる。前に  $n = 3$  の 2 分木と  $n = 4$  の 2 分木を新しい根を介してつなげる操作で  $p_3p_4 = 10$  個の 2 分木ができることを見たが、葉数が 7 である 2 分木の総数は 132 であることから、確かにこの操作で作られる 2 分木は葉数 7 の 2 分木全体の「一部分」、つまり、 $10/132$  だけの割合となっている。せっかくなので、ここで得られた結果 (6.218) を公式化しておこう。

葉数  $n$  の 2 分木の総数は

$$\frac{2^{n-1}(2n-3)!!}{n!}$$

で与えられる。ただし、 $(2n-3)!! = (2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1$ ,  $(-1)!! = 1$  である。

既に見た 例題 3.8 では「歩道生成行列」を導入し、任意のグラフの歩道の個数を隣接行列の冪乗の係数と歩道数を対応付けて計算したが、ここでも「2 分木生成多項式」を導入し、その冪展開係数に 2 分木の個数を対応付けさせて葉数が与えられた場合の 2 分木の総数を計算した。この手の方法は明らかにグラフを描いて数を数え上げるよりも効率が良い。



## 第8回講義

### 8.1 平面性

ここではグラフの平面性, つまり, 一般のグラフが平面内にどの辺も交差することなく描くことのできる条件について学ぶ. また, そのようにして描けるグラフ — 平面グラフ — の性質, 及び, 与えられたグラフの「平面への描きやすさ」を測る指標である「交差数」「厚さ」についても詳しく見て行くことにする.

#### 8.1.1 平面グラフとオイラーの公式

平面グラフ (planar graph): どの2つの辺も, それが接続する点以外では幾何学的に交差しないように描かれたグラフ (図 8.141 参照).

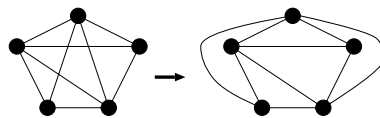


図 8.141: 平面グラフの例. 両者は位相同形であるが, 右のような描画において平面グラフとわかる.

面 (face): 辺によって分割される領域

図 8.142 において, 非有界な面  $f_4$  は無限面 (infinite face) と呼ばれる.

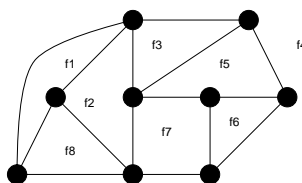


図 8.142: 8つの領域に分割された平面グラフ. これら領域の中で,  $f_4$  は無限面である.

与えられたグラフ  $G$  を点数  $n$ , 辺数  $m$ , 面数  $f$  で特徴付けることにすると, これらの量の間にいかなる関係があるとき, グラフ  $G$  は平面へ埋め込み可能であり, 平面グラフとなりうるであろうか? この答えはオイラーによって次の定理 (公式) としてまとめられている.

定理 13.1 (オイラーの公式)  
 グラフ  $G$  を連結な平面グラフとすると、次の公式が成り立つ。

$$n - m + f = 2 \quad (8.220)$$

(証明)

辺数  $m$  に関する数学的帰納法で証明する。

$m = 0$  のとき、点数が 1 つだけの素グラフであるから  $n = 1$  であり、面は無限面が 1 つ、つまり、 $f = 1$  である。従って

$$n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$$

となり、関係式が成立する。

従って、以下では  $m \neq 0$  のときを考える。このとき帰納法の仮定として

「 $m - 1$  本以下の辺を持つ全てのグラフ  $G$  について (8.220) が成り立つ」

としてみよう。この仮定のもとで、辺数  $m$  のグラフに対しても関係式 (8.220) の成立が示せれば証明は終了である。

グラフ  $G$  が木の場合には、 $m$  本の辺を持つとすると、当然のことながら  $m = n - 1$ ,  $f = 1$ (無限面) であるから、関係式 (8.220) は

$$n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$$

となり、辺数  $m$  に対して成立する。

一方、グラフ  $G$  が木ではない場合、グラフ  $G$  の任意の辺を削除した場合、辺数、点数、面数はそれぞれ

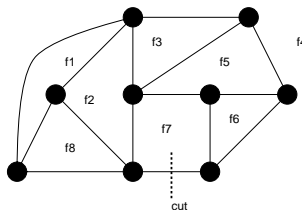


図 8.143: グラフの任意の辺を削除した場合の辺、点、面の数の変化量を考える。このグラフに関して言えば、削除前:  $n = 9, m = 15, f = 8$  であり、 $9 - 15 + 8 = 2$  としてオイラーの公式を満たし、削除後:  $n = 9, m = 14, f = 7$  であり、 $9 - 14 + 7 = 2$  としてオイラーの公式は満たされる。

のように変わるか、調べると (例えば、図 8.143 を参照)

$$\begin{cases} n & \Rightarrow & n \\ m & \Rightarrow & m - 1 \\ f & \Rightarrow & f - 1 \end{cases}$$

のように変化するから、 $m - 1$  本の辺に対して (8.220) が成立、すなわち、上の矢印の右側の量に対して (8.220) が成り立つわけであるから

$$n - (m - 1) + f - 1 = 2$$

が成立すべきであり、この式を変形すると

$$n - m + f = 2$$

となり、変数  $m$  のときの関係式が導かれ、この成立が言えたことになる。(証明終わり).

まずはこの公式に慣れるため、次に挙げる例題を考えてみよう.

**例題 8.1**

オイラーの公式を用いて、次のグラフが平面的かどうか判別せよ.

- (1) 完全グラフ  $K_4$
- (2) 完全グラフ  $K_5$
- (3) 完全二部グラフ  $K_{3,3}$

(解答例)

このオイラーの公式をダイレクトに用いずに、使いやすいように書き換えることから始めよう.

オイラーの公式の中には面数  $f$  が入ってくるが、この  $f$  は考えるグラフ  $G$  に同形であるグラフの中で、どのグラフを採用するかによって曖昧性がある。つまり、面の数は同形写像により変化する。一方、点、辺の数は不変である。従って、できることならば、この面数を他の量で置き換えて評価したい。この目的のために、まず、グラフ  $G$  に関していくつかの定義をしておく.

内周  $\kappa$ : グラフ  $G$  の最短の閉路長.

$d(F)$ : グラフ  $G$  における面  $F$  に含まれる点の次数和.

これらの定義のもとで、グラフ  $G$  の任意面  $F$  に対して、次の不等式が成り立つ.

$$\kappa \leq d(F) \tag{8.221}$$

例えば、完全グラフ  $K_4$  の描画としては図 8.144 に載せた 2 通りのどちらも正しいが (もちろん、平面的なのは右側)、内周  $\kappa$  はどちらも  $\kappa = 3$  である。従って、直ちに

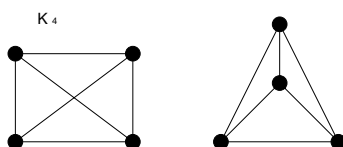


図 8.144: 完全グラフ  $K_4$  の二つの描画法.

$$\kappa f \leq \sum_{F \in \mathcal{F}(G)} d(F) = 2m \tag{8.222}$$

が成立する。ここで、 $\mathcal{F}(G)$  はグラフ  $G$  に含まれる面の集合であり、上の関係式の最後の等式では前出の握手補題を用いた。この式とオイラーの公式から面数  $f$  を消去すると

$$\kappa(2 - n + m) \leq 2m \tag{8.223}$$

つまり、グラフ  $G$  が平面的となるためには、辺数  $m$  が上から押さえられて (辺数が多くなると、辺と辺が交差する可能性も大きくなるので、平面グラフの辺数に上限があるのは自然である)

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} \tag{8.224}$$

なる不等式を満たさなければならない。以下ではこの不等式をもって、与えられたグラフに関する平面性の判別式としよう。

(1) 完全グラフ  $K_4$  :

このグラフにおいて、 $n = 4, m = {}_4C_2 = 6, \kappa = 3$  であるから、判別式 (8.223) は

$$6 \leq \frac{3 \cdot (4-2)}{3-2} = 6 \tag{8.225}$$

となり成立する。従って、完全グラフ  $K_4$  は平面的である。

(2) 完全グラフ  $K_5$  :

このグラフにおいては、 $n = 5, m = {}_5C_2 = 10, \kappa = 3$  であるから、判別式 (8.223) は

$$10 \leq \frac{3 \cdot (5-2)}{3-2} = 9 \tag{8.226}$$

となり、不成立。従って、完全グラフ  $K_5$  は平面的ではない。

(3) 完全二部グラフ  $K_{3,3}$  :

このグラフに関しては、 $n = 6, m = 3^2 = 9, \kappa = 4$  であるから、判別式 (8.223) は

$$9 \leq \frac{4 \cdot (6-2)}{4-2} = 8 \tag{8.227}$$

となり、不成立。従って、完全二部グラフ  $K_{3,3}$  は平面的ではない。

以上はグラフ  $G$  が連結グラフである場合の議論であった。しかし、グラフ  $G$  が非連結であり、 $k$  個の成分を持つ場合、オイラーの公式がどのように修正されるのかを見ることは実用的にも意義深い。

**系 13.3**

平面グラフ  $G$  には、 $n$  個の点、 $m$  本の辺、 $f$  個の面、 $k$  個の成分があるとき

$$n - m + f = k + 1 \tag{8.228}$$

である。

(証明)

グラフ  $G$  に  $k$  個の成分がある場合には、無限面を  $k - 1$  回だけ余分に勘定するので、面数は  $f - (k - 1)$  であり、これについてオイラーの公式を書き出してみると

$$n - m + \{f - (k - 1)\} = 2 \tag{8.229}$$

となり、これを整理すると

$$n - m + f = k + 1 \tag{8.230}$$

となり、所望の関係式が得られる。(証明終わり).

**系 13.4**

(1) 連結単純平面グラフ  $G$  が,  $n(\geq 3)$  個の点と  $m$  本の辺を持つとき

$$m \leq 3n - 6 \tag{8.231}$$

が成り立つ.

(2) さらに,  $G$  に三角形が無ければ

$$m \leq 2n - 4 \tag{8.232}$$

が成立する.

(証明)

(1) グラフ  $G$  に含まれる最小な面は, 3 点からなる閉路, すなわち, 三角形であるから

$$3 \leq d(F) \tag{8.233}$$

が成り立つ. 従って, 握手補題により直ちに

$$3f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \tag{8.234}$$

となり, これとオイラーの公式:  $f = 2 - n + m$  より, 面数  $f$  を消去すると所望の不等式:

$$m \leq 3n - 6 \tag{8.235}$$

が得られる.

(2) 明らかに三角形が無い場合には,  $G$  に含まれる最小の面は 4 点からなる閉路であり, 不等式

$$4 \leq d(F) \tag{8.236}$$

が成り立つ. 従って, 握手補題から直ちに

$$4f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \tag{8.237}$$

が得られ, これとオイラーの公式から面数  $f$  を消去することにより, 所望の不等式

$$m \leq 2n - 4 \tag{8.238}$$

が得られる.

(証明終わり).

**系 13.6**

全ての単純平面グラフには次数 5 以下の点がある.

(証明)

グラフ  $G$  の任意の頂点  $v$  に対して

$$\delta \leq \deg(v) \tag{8.239}$$

とすると、握手補題と系 13.4(1) より

$$\delta n \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \leq 2(3n - 6) = 6n - 12 \tag{8.240}$$

すなわち

$$\delta \leq 6 - \frac{12}{n} \tag{8.241}$$

が成り立ち、従って、次数  $\delta$  に対して

$$\delta \leq 5 \tag{8.242}$$

が成立する。(証明終わり)<sup>16</sup> .

### 8.1.2 交差数と厚さ

グラフを 2 次元平面内に埋め込む場合、そのグラフがオイラーの公式より埋め込み不可能であるとわかったとしても、どの程度、埋め込むことが困難であるのか、を定量的に測る指標が必要となる。そこで、ここでは交差数と厚さという 2 つの指標について説明する。

交差数 (crossing number)  $cr(G)$  : グラフ  $G$  を平面描写した際に生じる、辺の最小交差の数.

厚さ (thickness)  $t(G)$  : いくつかの平面グラフを重ね合わせてグラフ  $G$  を作る時に必要な平面グラフの数.

#### 例題 8.2 (2003 年度 情報工学演習 II(B) #2)

$r$  と  $s$  が偶数のとき

$$cr(K_{r,s}) \leq \frac{1}{16} rs(r-2)(s-2)$$

を示せ.

(解答例)

図 8.145 (左) のように黒、白丸を配置し、黒丸と白丸を結んでできる線分の交差点を勘定すればよい。このような配置の仕方による交差数は明らかに図 8.145(右) のような場合よりも少ない。

さて、対称性より、図 8.145(左) の第 3 象限だけを考えればよい。Y 軸上の点を原点から近い順に  $v_1, v_2, \dots, v_{s/2}$  とし、X 軸上の点を原点から近い順に  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  と名前を付けることにする。すると、 $v_{s/2}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分と、 $v_{s/2-1}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分の交点の数  $q_1$  は

$$q_1 = \left(\frac{r}{2} - 1\right) + \left(\frac{r}{2} - 2\right) + \dots + \left(\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right)\right) + 1 \tag{8.243}$$

<sup>16</sup> この系での結論は後に学ぶ「グラフの彩色」の節の定理 17.2 の証明で用いることになります。

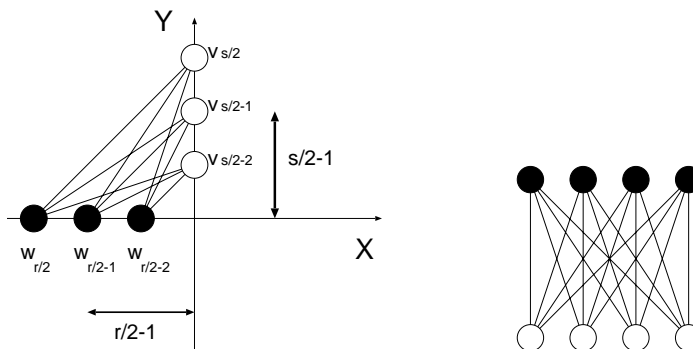


図 8.145: 線分の交点の個数を数える (左). 右図は  $r = s = 4$  の場合の配置の一例.

である. 同様にして  $v_{s/2}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分及び  $v_{s/2-1}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分と  $v_{s/2-2}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  とを結ぶ線分の交点の数  $q_2$  は

$$q_2 = 2 \binom{r}{2} - 1 + 2 \binom{r}{2} - 2 + \dots + 2 \left( \binom{r}{2} - \left( \binom{r}{2} - 2 \right) \right) + 2 \quad (8.244)$$

となる. 同様の定義で  $q_3$  は

$$q_3 = 3 \binom{r}{2} - 1 + 3 \binom{r}{2} - 2 + \dots + 3 \left( \binom{r}{2} - \left( \binom{r}{2} - 2 \right) \right) + 3 \quad (8.245)$$

となり,  $v_1$  と全ての線分の交点の個数  $q_{s/2-1}$  は

$$q_{s/2-1} = \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \binom{r}{2} - 1 + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \binom{r}{2} - 2 + \dots + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \binom{r}{2} - \left( \binom{r}{2} - 2 \right) \right) + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \quad (8.246)$$

である.

従って, 第 3 象限内に現れる交点の個数  $Q$  は

$$\begin{aligned} Q &= q_1 + q_2 + \dots + q_{s/2-1} \\ &= \left( \binom{r}{2} - 1 \right) + \left( \binom{r}{2} - 2 \right) + \dots + \left( \binom{r}{2} - \left( \binom{r}{2} - 2 \right) \right) + 1 \\ &+ 2 \left( \binom{r}{2} - 1 \right) + 2 \left( \binom{r}{2} - 2 \right) + \dots + 2 \left( \binom{r}{2} - \left( \binom{r}{2} - 2 \right) \right) + 2 \\ &+ 3 \left( \binom{r}{2} - 1 \right) + 3 \left( \binom{r}{2} - 2 \right) + \dots + 3 \left( \binom{r}{2} - \left( \binom{r}{2} - 2 \right) \right) + 3 \\ &+ \dots \\ &+ \dots \\ &+ \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \binom{r}{2} - 1 + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \binom{r}{2} - 2 + \dots + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \binom{r}{2} - \left( \binom{r}{2} - 2 \right) \right) + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \\ &\equiv p_1 + p_2 + \dots + p_{s/2-1} \end{aligned} \quad (8.247)$$

となる.

ここで

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv \left( \binom{r}{2} - 1 \right) + 2 \left( \binom{r}{2} - 1 \right) + \dots + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \binom{r}{2} - 1 \right) \\ &= \left( \binom{r}{2} - 1 \right) \sum_{k=1}^{s/2-1} k = \left( \binom{r}{2} - 1 \right) \frac{1}{2} \frac{s}{2} \left( \frac{s}{2} - 1 \right) = \frac{s}{4} \left( \binom{r}{2} - 1 \right) \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (8.248)$$

$$p_2 \equiv \binom{r}{2} - 2 + 2 \binom{r}{2} - 2 + \cdots + \binom{s}{2} - 1 \binom{r}{2} - 2 = \binom{r}{2} - 2 \sum_{k=1}^{s/2-1} k = \frac{s}{4} \binom{r}{2} \binom{s}{2} - 1 \quad (8.249)$$

そして

$$p_{s/2-1} = \sum_{k=1}^{s/2-1} k = \frac{s}{4} \binom{s}{2} - 1 \quad (8.250)$$

である. 従って  $Q$  は

$$\begin{aligned} Q &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{s/2-1} \\ &= \frac{s}{4} \binom{s}{2} - 1 \binom{r}{2} - 1 + \frac{s}{4} \binom{s}{2} - 1 \binom{r}{2} - 2 + \cdots + \frac{s}{4} \binom{s}{2} - 1 \left\{ \frac{r}{2} - \binom{r}{2} - 2 \right\} + \frac{s}{4} \binom{s}{2} - 1 \\ &= \frac{s}{4} \binom{s}{2} - 1 \sum_{k=1}^{r/2-1} \left( \frac{r}{2} - k \right) \\ &= \frac{s}{4} \binom{s}{2} - 1 \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{r/2-1} 1 - \frac{s}{4} \binom{s}{2} - 1 \sum_{k=1}^{r/2-1} k \\ &= \frac{s}{4} \binom{s}{2} - 1 \frac{r}{2} \left( \frac{r}{2} - 1 \right) - \frac{s}{4} \binom{s}{2} - 1 \frac{r}{2} \left( \frac{r}{2} - 1 \right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{sr}{8} \binom{s}{2} - 1 \binom{r}{2} - 1 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \right\} = \frac{sr}{16} \binom{s}{2} - 1 \binom{r}{2} - 1 = \frac{sr}{16 \cdot 4} (s-2)(r-2) \end{aligned} \quad (8.251)$$

よって, 結局, 第 1 ~ 第 4 象限に現れる交点の総数  $Q_{\text{total}}$  は

$$Q_{\text{total}} = 4 \times Q = \frac{sr}{16} (s-2)(r-2) \quad (8.252)$$

となる. これから交差数  $K_{r,s}$  の上限が

$$\text{cr}(K_{r,s}) \leq \frac{1}{16} rs(r-2)(s-2) \quad (8.253)$$

で与えられる. つまり,  $K_{r,s}$  を平面に描いたときの交差数の最小値は  $rs(r-2)(s-2)/16$  を超えることはない.

### 例題 8.3

単純グラフ  $G$  に  $n (\geq 3)$  個の点, 及び,  $m$  本の辺があるとき,  $G$  の厚さ  $t(G)$  は不等式:

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \quad (8.254)$$

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil \quad (8.255)$$

を満たすことを示せ<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>  $[x]$  は  $x$  以上の最小の整数.  $\lceil x \rceil$  は  $x$  以下の最大の整数を表す.

(解答例)

厚さは整数でなければならないことと, 系 13.4 (1) より

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{\text{辺の総数}}{\text{平面グラフとなるための辺の上限}} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \quad (8.256)$$

が成り立つ.

一方, この結果と正の整数  $a, b$  に対して成り立つ関係式 :

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \quad (8.257)$$

を用いることにより,  $a = m, b = 3n - 6$  として直ちに (8.255) の成立が言える.

参考 :  $\lceil a/b \rceil = \lfloor (a+b-1)/b \rfloor$  の証明に関して

正の定数  $a, b$  に関する等式 :

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \quad (8.258)$$

の証明.

$(a/b)$  が整数の場合とそうでない場合に分けて証明する.

(i)  $(a/b)$  が整数のとき

$a/b = M$  であるとき

$$(\text{与式の左辺}) = \frac{a}{b} = M \quad (8.259)$$

である. また,

$$(\text{与式の右辺}) = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor M - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = M \quad (8.260)$$

であるから, (i) のとき関係式は成立.

(ii)  $(a/b)$  が整数でないとき

$a/b$  の整数部分を  $C$ , 少数部分を  $D$  とすれば

$$(\text{与式の左辺}) = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = C + 1 \quad (8.261)$$

である. また

$$(\text{与式の右辺}) = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor C + D - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 \quad (8.262)$$

であるが,  $D$  は  $a/b$  の少数部分であるから

$$D = \frac{a - bC}{b} \quad (8.263)$$

であり,  $a, b, C$  は整数なので,  $a - bC$  も整数であり,  $a > bC$  より

$$a - bC \leq 1 \quad (8.264)$$

である. 従って

$$D > \frac{1}{b} \quad (8.265)$$

なので,  $D - (1/b) = \varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon < 1$ ) とおくと

$$(\text{与式の右辺}) = \lfloor C + \varepsilon \rfloor + 1 = C + 1 \quad (8.266)$$

となり, (ii) の場合も関係式が成り立つ. 従って

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \quad (8.267)$$

が示せた. (証明終わり)

**例題 8.4** (2003 年度 レポート課題 #6 問題 1)

(1) 完全グラフ  $K_n$  の厚さ  $t(K_n)$  は次不等式を満たすことを示せ.

$$t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{1}{6}(n+7) \right\rfloor \quad (8.268)$$

(2) 完全二部グラフ  $K_{r,s}$  の厚さ  $t(K_{r,s})$  が次不等式を満たすことを示せ.

$$t(K_{r,s}) \geq \left\lfloor \frac{rs}{2(r+s)-4} \right\rfloor \quad (8.269)$$

(解答例)

(1) 完全グラフ  $K_n$  の辺の数は  $n(n-1)/2$  であるから, 不等式:

$$t(G) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor \quad (8.270)$$

に代入して

$$t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 3n - 7}{3n - 6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2 + 5n - 14}{2(3n - 6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor \quad (8.271)$$

となり, 題意の不等式は満たされることがわかる.

(2)  $K_{r,s}$  においては, A グループの点が  $r$  個, B グループの点が  $s$  個で, A グループのそれぞれの点が B グループのそれぞれの点と結ばれるので, 辺の数  $m$  及び点の数  $n$  は

$$m = rs \quad (8.272)$$

$$n = r + s \quad (8.273)$$

で与えられる. また,  $K_{r,s}$  には三角形が含まれないので,  $K_{r,s}$  の辺の数の上限は

$$m \leq 2n - 4 \equiv m_0 \quad (8.274)$$

で与えられる. 従って, 完全二部グラフ  $K_{r,s}$  の厚さ  $t(K_{r,s})$  は

$$t(K_{r,s}) \geq \left\lfloor \frac{m}{m_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{2n-4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{rs}{2(r+s)-4} \right\rfloor \quad (8.275)$$

となり, 確かに題意の不等式を満たしている.

例題 8.5 (2004 年度 演習問題 8)

1. 閉路行列式法を用いて完全グラフ  $K_4$  の全域木の総数  $\tau(K_4)$  を求めよ.
2. オイラーの公式を用いてピーターソン・グラフは平面描写可能かどうかを判定せよ.
3. 講義中に見た系 13.4 を参考にして以下の問いに答えよ.
  - (1) 連結グラフ  $G$  に三角形, 四角形, 及び, 五角形が無い場合, グラフ  $G$  が平面的となるために辺数  $m$  が満たすべき不等式を求めよ.
  - (2) (1) の議論を一般化し, グラフ  $G$  に  $K$  角形まで無い場合, グラフ  $G$  が平面的となるために辺数  $m$  が満たすべき不等式を求めよ.
  - (3) (2) の結果で  $K \rightarrow \infty$  の極限をとった場合に辺数  $m$  の満たすべき不等式を求め, この結果が何を意味するのかを簡単に説明せよ.

(解答例)

1. 図 8.146(左) のように 3 つの閉路を  $c_1 = 1231, c_2 = 1241, c_3 = 1341$  と定める. すると, 閉路行列  $R$  は

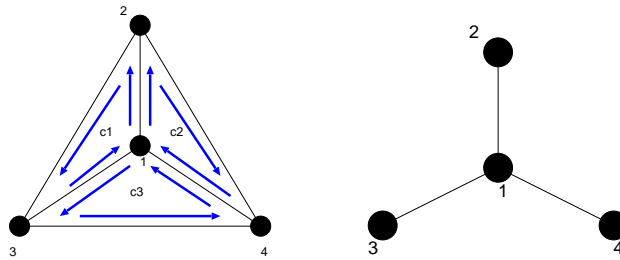


図 8.146: 完全グラフ  $K_4$  とその基本閉路  $c_1, c_2, c_3$  (左). 右図は完全グラフ  $K_4$  の全域木.

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{8.276}$$

として与えられる.

ところで, 図のように閉路を選んだとき, 一番外側の 234 なる三角形を 4 番目の閉路として選んではいけないのか, あるいは, 閉路の選び方に任意性がある場合にはどうするのか, が問題になるのだが, その際は基本閉路を選ぶことにする. 基本閉路とは例えば図 8.146(右) のような完全グラフ  $K_4$  の全域木に対し, これに 1 つずつ辺を付加してできる閉路のことである. 図 8.146(右) の全域木に辺 23 を付加すると閉路が一つでき, それが  $c_1$  である. また, 辺 24 を付加すれば閉路  $c_2$  が, 辺 34 を付加すれば閉路  $c_3$  ができることになり, これらは全て基本閉路である. 閉路行列法を用いるときには基本閉路を選べば十分である. その際, 上述のように一番外側の三角形を 4 番目の閉路としてカウントしてもよいが, 結果として得られる全域木の総数は同じになる (各自が実際に余因子展開を用いて確かめてみる). さて, このようにして定義される基本閉路に対し, 閉路行列 (8.276) を作れば, 完全グラフ  $K_4$  の全域木の総数  $\tau(K_4)$  は

$$\tau(K_4) = |R| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 16 \tag{8.277}$$

となり、計 16 個の全域木が存在することがわかる。

2. ピーターソン・グラフの場合には、点数  $n$ 、辺数  $m$ 、及び内周の長さ  $\kappa$  はそれぞれ  $n = 10, m = 15, \kappa = 5$  であるから、これらを判別式：

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} \quad (8.278)$$

に代入し、

$$15 \leq \frac{5 \cdot (10-2)}{5-2} = \frac{40}{3} = 13.3\dots \quad (8.279)$$

となるので不成立。従って、ピーターソン・グラフは平面的ではないと結論つけられる。

- 3.

- (1) 三角形、四角形、及び五角形が無いならば  $d(F)$  は

$$6 \leq d(F) \quad (8.280)$$

を満たす。従って、この不等式は握手補題により

$$6f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (8.281)$$

と書き直すことができるから、これとオイラーの公式： $f = 2 - n + m$  より、面数  $f$  を消去し、辺数  $m$  についての不等式：

$$m \leq \frac{3}{2}(n-2) \quad (8.282)$$

が成り立つ。

- (2) 一般に  $K$  角形まで無い場合、 $d(F)$  は

$$K+1 \leq d(F) \quad (8.283)$$

を満たす。従って、握手補題から

$$(K+1)f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (8.284)$$

と書き直せるので、これとオイラーの公式  $f = 2 - n + m$  から  $f$  を消去し、 $m$  に関する不等式：

$$m \leq \left( \frac{K+1}{K-1} \right) (n-2) \quad (8.285)$$

が成り立つ。

- (3) (2) の結果で、 $K \rightarrow \infty$  の極限をとる。しかし、必ず  $K \leq n$  であるから、この場合には  $K = n$  という条件下で  $n, K \rightarrow \infty$  の極限を考えなければならない点に注意する。すると次の不等式が得られる。

$$m \leq \left( \frac{n+1}{n-1} \right) (n-2) = n-2 + 2 \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} \right\} = n \quad (n \rightarrow \infty) \quad (8.286)$$

つまり、 $K(\infty)$  角形まで無いということは、グラフ  $G$  は  $n$  角形 (ただし  $n$  も無限大なので、いわば「無限角形」) 1 個からなるグラフである。

ちなみに、 $n$  が有限のまま (8.285) の右辺で  $K \rightarrow \infty$  の極限をとってしまうと  $m \leq n - 2$  なる不等式が得られるが、閉路が全く無い「木」の場合の辺数が  $n - 1$  であることを考えると (ある意味で「無限角形」まで無い状況だと言える)、 $n - 1 \leq n - 2$  となり (もちろん矛盾)、この場合、「一つだけ成分を持つ  $n$  点からなるグラフ」としては描きようがなくなってしまう。従って、極限をとる際には  $K = n$  の条件の下で  $n$  を無限大に飛ばす必要があるわけである。

注:  $K = n$  において  $n \rightarrow \infty$  の極限をとらずに、 $n$  が有限のまま  $K \rightarrow \infty$  を考えてもうまくいかない。もちろん、これは必ず満たさしていなければならない条件  $K \leq n$  を満たしていないのですが、この場合に得られる  $m \leq n - 2$  とオイラーの公式を組んで面数  $f$  に関する不等式を作れば  $f \leq 0$  が得られる。面数の最小値はグラフが木である場合の  $f = 1$  なので、これは不適切である。正しい不等式  $m \leq n$  とオイラーの公式を組んで  $f$  に関する不等式を作れば  $f \leq 2$  が得られる。これは  $f = 2$  ( $K(\infty)$  角形の内部の面と外部の無限面)、 $f = 1$  (木) の場合にそれぞれが対応していることになる (図 8.147 参照)。

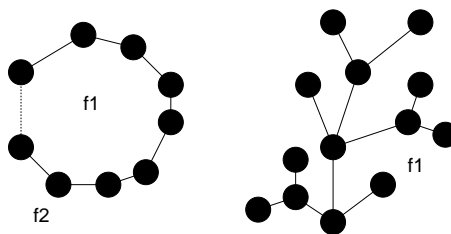


図 8.147:  $f \leq 2$  が意味する内容は、 $K(\infty)$  角形の内部 (f1) と外部 (f2) の計  $f = 2$  面 (左図)、木の無限面 (f1) の計  $f = 1$  面 (右図)。

**例題 8.6** (2005 年度 演習問題 8)

「平面グラフ (地図) においては隣り合う 5 つ以下の隣接面 (隣接国) しかもたない面 (国) が存在する (\*)」 という命題を証明することを考えよう。

(1) 考えるグラフの点数を  $n$ 、辺数を  $m$  とすると

$$n \leq \frac{2}{3}m$$

が成り立つことを示せ。

(2) (\*) の逆: 「どの面 (国) も少なくとも 6 つの隣接面 (国) に囲まれている (\*\*)」 という仮定の下では、考えるグラフの面数を  $f$  とすると

$$f \leq \frac{1}{3}m$$

でなければならないことを示せ。

(3) (1)(2) とオイラーの公式より、仮定 (\*\*) の矛盾を引き出し、命題 (\*) の成立を示せ。

(解答例)

(1) 図 8.148 のように、地図では任意の点  $v$  に接続する辺は 3 つ以上である。従って、グラフ  $G$  には点が  $n$

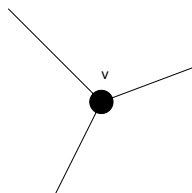


図 8.148: 地図では任意の点に接続する辺は 3 以上である。

個あるので、辺数は  $m \geq 3n$  となりそうであるが、しかし、辺の両端には必ず点が 2 つあるので、これでは数えすぎであり、正しくは  $m \geq 3n/2$ 、つまり

$$n \leq \frac{2m}{3} \tag{8.287}$$

が成り立つ。

(2) 仮定より、一つの面  $F$  は少なくとも 6 本の境界線で囲まれているので (図 8.149 参照)、グラフ  $G$  の中

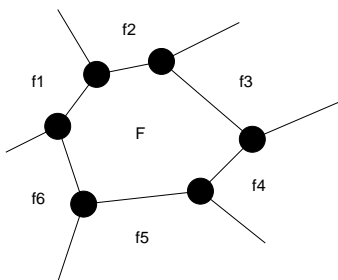


図 8.149: 一つの面  $F$  は少なくとも 6 本の境界線で囲まれている。

に面が  $f$  面あれば、 $m \geq 6f$ 。しかし、これは数えすぎであり、任意の境界線の両側には必ず 2 つの面があるので、 $m \geq 6f/2 = 3f$ 、すなわち

$$f \leq \frac{m}{3} \tag{8.288}$$

が成り立つ。

(3) (1)(2) の結果とオイラーの公式から

$$2 = n - m + f \leq \frac{2m}{3} - m + \frac{m}{3} = 0 \tag{8.289}$$

従って、 $2 \leq 0$  となってしまうので、明らかに矛盾。よって、仮定は間違っており、「平面グラフにおいては隣り合う 5 つ以下の隣接面しか持たない面が存在する」ことが示された。

**例題 8.7** (2006 年度 演習問題 8)

全ての点の次数が 4 である単純平面グラフ  $G$  には必ず三角形が 8 個以上含まれることを示せ。

(解答例)

まず, 全ての点の次数が 4 であるから

$$4n = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \quad (8.290)$$

が成り立つべきである. ここで最後の等式は握手補題を用いたことに注意しよう. この式 (8.290) と考えるグラフが平面グラフであることからオイラーの公式:  $n = 2 + m - f$  を用いて点数  $n$  を消去すると

$$2m + 8 = 4f \quad (8.291)$$

が得られる.

ところで, 題意では「三角形の個数」に関する条件を問題にしているわけであるから, 一般に  $k$  角形の個数を  $\varphi_k$  とし, この  $\varphi_k$  を用いて等式 (8.291) はどのように書き直すことができるかに着目する. このとき, (8.291) 式を書き直すためには  $m, f$  を  $\varphi_k$  を用いて書き直す必要があるが, これらの間には

$$f = \sum_{k=3} \varphi_k \quad (8.292)$$

$$2m = \sum_{k=3} k\varphi_k \quad (8.293)$$

なる関係がある ((8.293) 左辺が  $2m$  となる理由は, 各辺の両側には必ず面が 2 つあるためである.  $m$  ではなく,  $2m$  となることに注意!). そこで, これら (8.292)(8.293) 式を (8.291) 式に代入して, はじめの数項を実際に書き出してみれば

$$3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + 6\varphi_6 + 7\varphi_7 + \cdots + 8 = 4\varphi_3 + 4\varphi_4 + 4\varphi_5 + 4\varphi_6 + 4\varphi_7 + \cdots \quad (8.294)$$

が成り立ち,

$$\varphi_3 - (\varphi_5 + 2\varphi_6 + 3\varphi_7 + \cdots) = 8 \quad (8.295)$$

つまり

$$\varphi_3 - (\varphi_5 + 2\varphi_6 + 3\varphi_7 + \cdots) - 8 = 0 \leq \varphi_3 - 8 \quad (8.296)$$

であるから三角形の個数  $\varphi_3$  は  $\varphi_3 \geq 8$  を満たすことになり, 「全ての点の次数が 4 である平面グラフには三角形が 8 個以上存在する」という題意が証明された.

例題 8.8 (2004 年度情報工学演習 II(B) #1)

グラフ  $G$  (点の数:  $n \geq 4$ ) を三角形のみを含む平面グラフであるとする.  $G$  に含まれる次数  $k$  の点の個数を  $n_k$  とするとき

(1)  $G$  の辺数  $m$  が

$$m = 3n - 6$$

で与えられることを示せ.

(2) 次の関係式:

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \dots = 12$$

が成り立つことを示せ.

(3)  $G$  は次数 5 以下の点を 4 つ以上含むことを示せ.

今度はグラフ  $G$  は全ての点の次数が 3 である平面グラフであり,  $\varphi_k$  個の  $k$  角形を含むとしよう. このとき

(4)  $G$  の辺数  $m$ , 面数  $f$  の間には

$$m + 6 = 3f$$

なる関係が成立することを示せ.

(5) 次の関係式:

$$3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \dots = 12$$

が成り立つことを示せ.

(6)  $G$  には 5 角形以下の面が 4 つ以上含まれることを示せ.

(解答例)

(1) 全ての辺は 3 本の辺で囲まれており, 全ての辺は 2 つの面の境界となっているので, 面数  $f$ , 辺数  $m$  の間には

$$3f = 2m \tag{8.297}$$

が成り立つ. これとオイラーの公式:  $n - m + f = 2$  から面数  $f$  を消去すれば

$$m = 3n - 6 \tag{8.298}$$

が得られる.

(2) (8.298) を 2 倍したものに

$$n = \sum_{k=3} n_k \tag{8.299}$$

$$2m = \sum_{k=3} kn_k \tag{8.300}$$

を代入すれば

$$\sum_{k=3} kn_k = 6 \sum_{k=3} n_k - 12 \tag{8.301}$$

が得られるが、和の中のはじめの数項を書き出してみると

$$3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 + 7n_7 + 8n_8 + \dots = 6(n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + \dots) - 12 \tag{8.302}$$

すなわち

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \dots = 12 \tag{8.303}$$

が成り立つ。

(3) (2) で得られた関係式から

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \dots - 12 = 0 \leq 3n_3 + 2n_4 + n_5 - 12 \tag{8.304}$$

であるから

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 \tag{8.305}$$

である。また、明らかに  $(3n_3 + 3n_4 + 3n_5) \geq 3n_3 + 2n_4 + n_5$  であるから、これらの不等式から直ちに

$$n_3 + n_4 + n_5 \geq \frac{1}{3}(3n_3 + 2n_4 + n_5) \geq \frac{1}{3} \times 12 = 4 \tag{8.306}$$

従って、グラフ G には次数が 5 以下の点が 4 つ以上含まれることが示せた。

(4) 握手補題から  $3n = 2m$  が成り立つが、これとオイラーの公式から  $n$  を消去して

$$6 + m = 3f \tag{8.307}$$

が成り立つ。

(5) (8.307) 式を 2 倍したものに

$$f = \sum_{k=3} \varphi_k \tag{8.308}$$

$$2m = \sum_{k=3} k\varphi_k \tag{8.309}$$

を代入し、和の中のはじめの数項を書き出してみると

$$3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \dots = 12 \tag{8.310}$$

が成り立つことがわかる。

(6) (3) と同様にして

$$\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 \geq \frac{1}{3}(3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5) \geq \frac{1}{3} \times 12 = 4 \tag{8.311}$$

すなわち、グラフ G には 5 角形以下の面が 4 つ以上含まれることがわかる。

## 例題 8.9 (2007 年度 演習問題 8)

次数  $k$  の点の個数を  $n_k$  とする. 次数 1, または 2 の点を含まない平面グラフに対し

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \cdots$$

が成り立つことを示せ.

(解答例)

次数  $k$  の点の個数を  $n_k$  とすれば, 考えている平面グラフの中には総数  $n$  の点があるのだから

$$\sum_{k=3} n_k = n \quad (8.312)$$

が成り立つ. ここで, この平面グラフには「次数 1 と 2 の点が無い」わけであるから, 上式左辺の和は  $k = 3$  から始まっていることに注意しよう. また, この平面グラフの次数和は  $n_k$  の定義から  $\sum_{k=3} kn_k$  と書けるが, 握手補題が成り立つことに注意すれば

$$\sum_{k=3} kn_k = 2m \quad (8.313)$$

なる関係式も成り立つ. ところで, 平面グラフの面のうち, 最小の辺を持つものは「三角形」であり, 各辺の両側に面がくことに注意すれば, この平面グラフの辺数  $m$  と面数  $f$  の間には  $m \geq 3f/2$ , つまり

$$3f \leq 2m \quad (8.314)$$

が成り立つ. この不等式の面数  $f$  をオイラーの公式:  $f = 2 - n + m$  により消去すると

$$3n - m \leq 6 \quad (8.315)$$

が得られるが, この  $n$  と  $m$  に (8.312)(8.313) 式をそれぞれ代入すれば

$$4 \sum_{k=3} n_k - \sum_{k=3} kn_k \geq 12 \quad (8.316)$$

となる. この和の中の初めの数項を書き出してみれば, 問題に与えられた不等式:

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \cdots \quad (8.317)$$

が成り立つことがわかる.

## 第9回講義

### 8.1.3 双対グラフ

ここでは次節の「彩色」を初めとし、様々な場面に応用されている重要な概念である「双対性」「双対グラフ」について学ぶ。

#### 幾何学的双対グラフの作り方とその性質

幾何学的双対グラフは、与えられた平面グラフから、あるルールに従って作られる。まず、この双対グラフの作り方を知らなければならない。そこで、ここではまず、幾何学的双対グラフの描き方を学び、具体的に与えられた平面グラフの幾何学的双対グラフを求めてみる。次いで、一般のグラフにおいて、そのグラフと双対グラフの間にどのような関係が成り立つのかを詳しく見て行く。

#### 幾何学的双対グラフの作り方

以下の作り方を図に載せたグラフ  $G$  を参考にしながら見て頂きたい。

- (1) グラフ  $G$  の各面  $f$  の内側の点  $v^*$  を選ぶ。⇒ こうして打たれる点が双対グラフ  $G^*$  の点となる。
- (2) グラフ  $G$  の各辺  $e$  に対応させて、 $e$  にできるだけ交差する線  $e^*$  を描いて、 $e$  に接する 2 つの面  $f$  の点  $v^*$  を結ぶようにする。⇒ こうしてできる辺が双対グラフ  $G^*$  の辺となる。

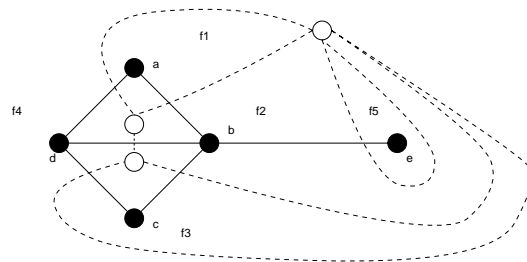


図 8.150: 考える平面グラフ  $G$  とその幾何学的双対 (図の白丸と破線からなるグラフ).

具体的に双対グラフの作り方を練習してみるために次の例題をやってみよう。

#### 例題 8.7

完全グラフ  $K_4$  の双対グラフは、やはり、完全グラフ  $K_4$  であることを示せ。

(解答例)

上に提示した「作り方」に従って、双対グラフを作ってみると、図 8.151 の右側のようになり、これは完全

グラフ  $K_4$  である. 上に提示した「作り方」によってグラフ  $G$  から作ることのできる双対グラフ  $G^*$  の点,

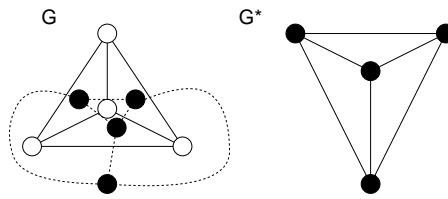


図 8.151: 完全グラフ  $K_4$  とその幾何学的双対グラフ (右).

辺, 面の数  $n^*, m^*$ , 及び,  $f^*$  はもとのグラフ  $G$  のそれぞれの数とどのように関係するのであろうか? これに関しては次の補題にまとめられている.

**補題 15.1**

平面連結グラフ  $G$  には  $n$  個の点,  $m$  本の辺,  $f$  個の面があるとする. このとき, その幾何学的双対グラフ  $G^*$  には  $n^*$  個の点,  $m^*$  本の辺,  $f^*$  個の面があるならば

$$n^* = f, \quad m^* = m, \quad f^* = n$$

が成り立つ.

(証明)

双対グラフの作り方から, 「グラフ  $G$  の各面に双対グラフの点を打ち込む」ことから  $n^* = f$  が, 「グラフ  $G$  の各辺  $e$  に交差するように双対グラフの辺  $e^*$  を描く」ということから  $m^* = m$  が直ちに言える.

一方, 双対グラフについてのオイラーの公式から

$$f = n^* = 2 + m^* - f^* \tag{8.318}$$

であるから, これをグラフ  $G$  に関するオイラーの公式

$$n - m + f = 2 \tag{8.319}$$

つまり,  $n - m^* + f = 2$  に代入して整理すると  $n - m^* + 2 + m^* - f^* = 2$ , すなわち

$$f^* = n \tag{8.320}$$

が得られる. (証明終わり).

**定理 15.2**

グラフ  $G$  が連結平面ならば,  $G^{**}$  はグラフ  $G$  と同形である.

この定理に関連する演習問題 ⇒ 例題 9.1 参照.

**定理 15.3**

平面グラフ  $G$  の幾何学的双対を  $G^*$  とする. このとき, グラフ  $G$  の各辺の, ある集合がグラフ  $G$  において閉路であるための必要十分条件は, それに対応する双対グラフ  $G^*$  の辺集合が, グラフ  $G^*$  においてカットセットになっていることである.

(証明)

平面グラフ  $G$  の任意の閉路  $C$  を選ぶと、 $C$  の中には面が一つ以上あるので、この面内に点を一つ置き、これを双対グラフ  $G^*$  の点  $v^*$  に対応させる。この点  $v^*$  と閉路  $C$  を構成する各辺を交差させるように新たな辺を引き、これを双対グラフの辺に対応させると、この手続きによって、交差されたグラフ  $G$  における辺集合  $\{\overline{c_1c_2}, \overline{c_2c_3}, \overline{c_3c_4}, \overline{c_4c_5}, \overline{c_5c_6}, \overline{c_6c_1}\}$  の元に対応する幾何学的双対グラフ  $G^*$  の辺集合  $\{\overline{v^*a}, \overline{v^*b}, \overline{v^*c}, \overline{v^*d}, \overline{v^*e}, \overline{v^*f}\}$  は、双対グラフ  $G^*$  においてはカットセットとなっている (図 8.152 参照)。つま

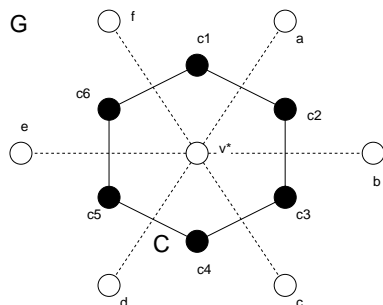


図 8.152: グラフ  $G$  に含まれる閉路  $C$  と、 $G$  の幾何学的双対グラフの一部 (白丸と破線)。

り、これらを除去すると、 $G^*$  は  $v^*$  とそれ以外の部分に分離する。

また、以上の手続きの逆をたどることにより題意は示される。(証明終わり)。

系 15.4

グラフ  $G$  の辺のある集合が  $G$  のカットセットであるための必要十分条件は、対応する幾何学的双対グラフ  $G^*$  の辺集合が  $G^*$  の閉路となることである。

証明を与える前に、図 8.153 に載せたグラフ  $G$  に対して、上記の事実を確かめておこう。グラフ  $G$  のある辺

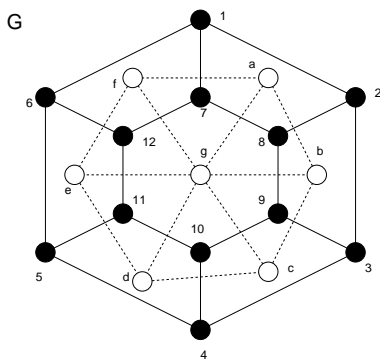


図 8.153: グラフ  $G$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ (白丸と破線)。

集合  $\{\overline{17}, \overline{28}, \overline{39}, \overline{410}, \overline{511}, \overline{612}\}$  がグラフ  $G$  のカットセットであるが、これに対応する幾何学的双対グラフ  $G^*$  の辺集合は  $\{\overline{fa}, \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}, \overline{ef}\}$  であり、これらは  $G^*$  において閉路となっている。2 つの集合の要素間には 1 対 1 の対応関係がある。

(証明)

定理 15.3 を  $G \rightarrow G^*$ ,  $G^* \rightarrow G^{**}$  として読みかえると, 定理 15.2 から, グラフ  $G$  が平面連結ならば,  $G^{**} \cong G$  であるから,

「平面グラフ  $G^*$  の幾何学的双対を  $G$  とすると,  $G^*$  のある集合が  $G^*$  において閉路であるための必要十分条件は, それに対応する  $G$  の辺集合が  $G$  においてカットセットであることである」

と言える. 従ってこの系を示すことができた. (証明終わり).

**例題 9.1** (2003 年度 レポート課題 #7 問題 1)

- (1) 車輪の双対は車輪であることを示せ.
- (2) 平面グラフ  $G$  が非連結ならば,  $G^{**}$  は  $G$  に同形でないことを例で示せ.
- (3)  $G$  が連結な平面グラフであるとき,  $G$  の全域木は  $G^*$  のある全域木の補グラフに対応することを例で示せ.

(解答例)

- (1) 「車輪  $W_n$  とは,  $n - 1$  個の点を持つ閉路  $C_{n-1}$  に一つの新しい点  $v$  を加え,  $v$  と他の全ての  $n - 1$  個の点をつないでできるグラフである」ことを思い出す. 補題 15.1 より  $n^* = f$ , つまり, 双対グラフの点の数は元々のグラフの面数に等しく,  $G \equiv C_{n-1}$  の無限面を除く面数は  $n - 1$  個であり, 従って,  $n - 1$  個のそれぞれの面に  $n - 1$  個の点を一つ一つ置き (これらが  $G^*$  の中の  $n - 1$  個の点になる), それらを結んで  $C_{n-1}^*$  を作り, 最後に無限面に一点  $v^*$  を置き (これで  $G^*$  の点の総数は  $n$ ), それと  $C_{n-1}^*$  の  $n - 1$  個の点とを相互に結べば (これらの線が  $G$  の各辺と一辺ずつ交差することは明らか) 出来上がるグラフは  $W_n^*$  であり, 従って, 「車輪の双対は車輪である」ことがわかる. 図 8.154 に  $W_7$  の場合の例を示そう.

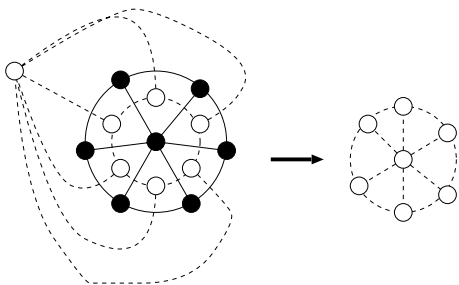


図 8.154:  $W_7$  (左図の黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ (左図の白丸と破線及び右図, これらは同形である).

- (2) まず, 例として図 8.155(左) の黒丸と実線で与えられる非連結グラフ  $G$  を考える. この非連結なグラフ  $G$  から幾何学的双対グラフ  $G^*$  を描くと, 図 8.155(左) の白丸と破線が得られる. これが  $G^*$  であり, さらにこの  $G^*$  の幾何学的双対グラフを描くと図 8.155(右) の黒丸と実線のグラフとなり, 明らかにこのグラフは  $G$  と同形ではないことがわかる ( $G^{**}$  は連結グラフとなっている).
- (3) まず, 平面連結グラフ  $G$  を図 8.156 の黒丸と実線のように選ぶ. これに対する幾何学的双対グラフ  $G^*$  は同図 8.156 の白丸と破線で与えられる.

一方, 平面連結グラフ  $G$  の全域木の一つは図 8.156 の右側で与えられる.  $G$  の幾何学的双対グラフ  $G^*$

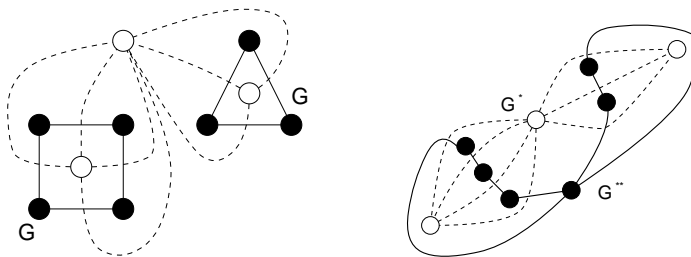


図 8.155: 左は非連結グラフ  $G$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ  $G^*$  (白丸と破線). 右は  $G^*$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ  $G^{**}$  (白丸と破線).

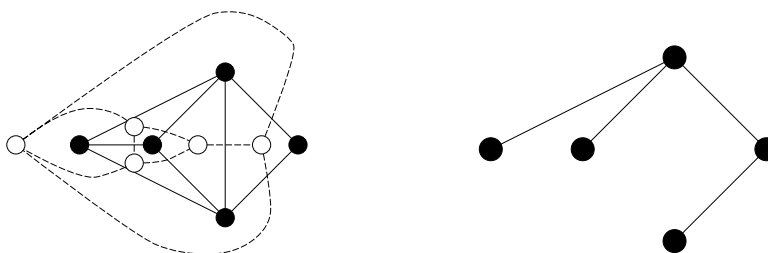


図 8.156: 連結平面グラフ  $G$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ  $G^*$  (白丸と破線). 右図は  $G$  の全域木

の全域木を図 8.157 の左側のように選ぶと, その補グラフは同 8.157 の右側のような木として得られるので, これはグラフ  $G$  の全域木と等しい. 従って, この例に関して題意が示せた.

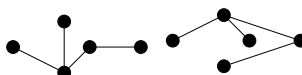


図 8.157: 幾何学的双対グラフ  $G^{**}$  の全域木 (左) とその補グラフ (右).

### 抽象的双対という概念

抽象的双対 (abstract dual) :  $G$  の辺集合と  $G^*$  の辺集合の間に 1 対 1 対応があり, しかも,  $G$  の辺のある集合が  $G$  において閉路になるのは, 対応する  $G^*$  の辺集合が  $G^*$  においてカットセットになるときであり, かつ, そのときに限る場合,  $G^*$  を  $G$  の抽象的双対と呼ぶ. (注) :  $G^*$  が平面グラフ  $G$  の幾何学的双対ならば,  $G^*$  は  $G$  の抽象的双対でもある.

## 8.2 グラフの彩色

ここからはグラフの彩色問題に入る.

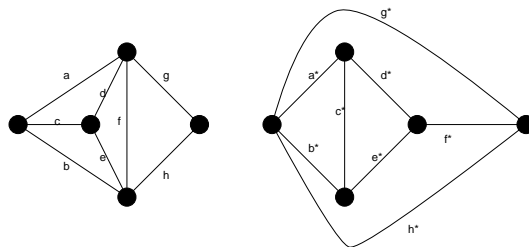


図 8.158: グラフ G とその抽象的対偶グラフ (右).

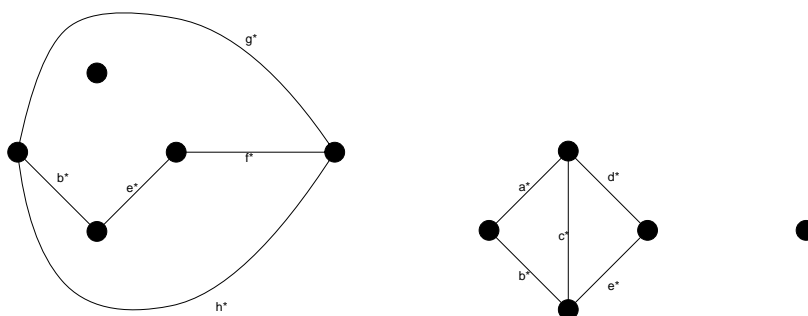


図 8.159: カットセット  $a^*, c^*, d^*$  によってできるグラフ (左側) とカットセット  $f^*, g^*, h^*$  によりできるグラフ (右側).

### 8.2.1 点彩色

$k$ -彩色可能 ( $k$ -colourable) :  $k$  個の色の一つを  $G$  の各点に割り当て、隣接するどの 2 つの点も同じ色にならないようにできるとき.

$k$ -色彩的 ( $k$ -chromatic) : グラフ  $G$  が  $k$  彩色可能であるが、 $(k - 1)$  彩色不可能であるとき.

⇒ グラフ  $G$  の彩色数 (chromatic number) は  $k$  である. そして

$$\chi(G) = k$$

のように表記する. 例えば、図に載せたグラフ  $G$  の彩色数は 4 である. 代表的グラフに関する、それぞれの

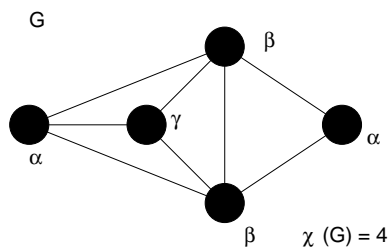


図 8.160: このグラフ  $G$  の彩色数は  $\chi(G) = 4$  である.

彩色数は

$$\begin{cases} \chi(K_n) &= n \\ \chi(N_n) &= 1 \\ \chi(K_{r,s}) &= 2 \end{cases}$$

のようになる.

そこで、点彩色に対して、幾つかの重要な定理を見てゆこう.

**定理 17.1**

単純グラフ  $G$  の最大次数が  $\Delta$  ならば、グラフ  $G$  は  $(\Delta + 1)$ -彩色可能である.

(証明)

図 8.161 のように、任意の点  $v$  及び、 $v$  に接続する辺を除去してできるグラフには  $n - 1$  個の点があり、その最大次数は  $\Delta$  以下. そこで、この  $n - 1$  個の点からなるグラフは  $(\Delta + 1)$ -彩色可能であると仮定する. こ

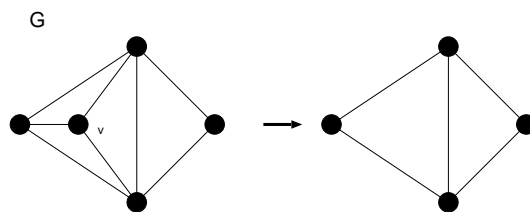


図 8.161: 任意の点  $v$  を切除してできるグラフの最大次数を考える.

のとき、 $v$  に隣接している  $\Delta$  個以下の点とは異なる色で  $v$  を彩色すれば、グラフ  $G$  の  $(\Delta + 1)$ -彩色が得られる. (証明終わり).

**定理 17.3**

全ての単純平面グラフは 6-彩色可能である.

(証明)

グラフ  $G$  は  $n (> 6)$  個の点を持つ単純平面グラフであるとする. そして、 $n - 1$  個の点を持つ全ての単純平面グラフは 6-彩色可能であるとする. 定理 13.6: 「全ての単純平面グラフには次数 5 以下の点がある」より、 $G$  には 5 次以下の点  $v$  がある. 図 8.162 のように、 $v$  と  $v$  に接続する辺を除去すると、残りのグラフに

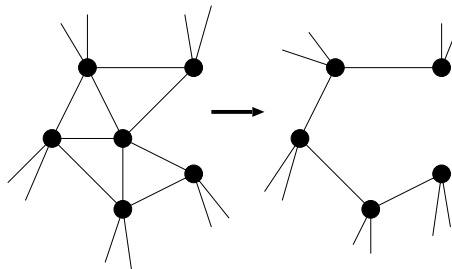


図 8.162: ここで考えるグラフ.

は  $n - 1$  個の点しかないので、仮定から 6-彩色可能である.  $v$  に隣接している 5 個以下の点とは異なる点で

$v$  を彩色すれば,  $G$  の 6-彩色が得られる. (証明終わり).

**定理 17.4**  
**全ての単純平面グラフは 5-彩色可能である.**

(証明)

$n > 5$  とする. 「 $n - 1$  個以下の点を持つ全ての単純平面グラフは 5-彩色可能である」とする. これが帰納法の仮定となる. 定理 13.6 より,  $G$  には次数 5 以下の点  $v$  がある.  $\deg(v) < 5$  ならば証明は終わり. 従って, 以下では  $\deg(v) = 5$  であるとする.

$v_1, \dots, v_5$  はこの順に  $v$  のまわりに配置されているとする (図 8.163 参照).  $v_1, \dots, v_5$  が全て隣接してい

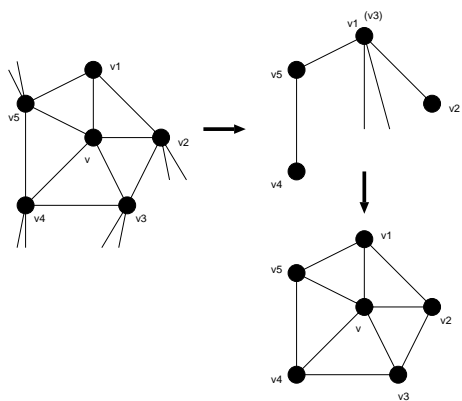


図 8.163: ここで考えるグラフ.

れば完全グラフ  $K_5$  になってしまうので, 全ては隣接していないとする. 2本の辺  $vv_1, vv_3$  を縮約すると, 平面グラフができて, それには高々  $n - 1$  個しか点がないので, 5-彩色可能. 次に2本の辺を元に戻し,  $v$  に当てられた色で  $v_1, v_3$  の両方を彩色する. 点  $v$  に割り当てられた色とは異なる色で  $v$  を彩色すれば  $G$  の 5-彩色が得られる. (証明終わり).

最後に彩色の応用問題を一題, 例題として見ておこう.

例題 9.2 (2003 年度 レポート課題 #8 **問題 1**)

講義の時間割を作りたい。複数の講義を受けたい学生も居るので、講義によっては同じ時間帯を避けなければならない。下表の星印 (\*) は同じ時間帯にあってはいけない講義を表している。

	a	b	c	d	e	f	g
a	—	*	*	*	—	—	*
b	*	—	*	*	*	—	*
c	*	*	—	*	—	*	—
d	*	*	*	—	—	*	—
e	—	*	—	—	—	—	—
f	—	—	*	*	—	—	*
g	*	*	—	—	—	*	—

このとき以下の問い (1)(2) に答えよ。

- (1) a, b, c, d, e, f, g の 7 つの講義を点で表し、同じ時間帯にあってはいけない講義に対応する 2 点が隣接するようなグラフを描け。
- (2) (1) で得られたグラフの各点をギリシャ文字  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  で彩色することにより、この 7 つの講義の時間割には何時間が必要となるかを答えよ。

(解答例)

- (1) 問題文に与えられた表に従って、星印のついた講義同士を隣接するようにグラフを描くと図 8.164 のようになる。

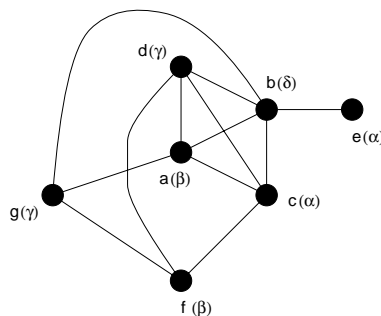


図 8.164: 講義間の関係を表すグラフ。同時帯に開講される講義は互いに隣接している。括弧内は開講すべき時間帯 (色)。

- (2) 実際に図 8.164 に見るように、このグラフを点彩色するために必要な色数は  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  の 4 色であるが、これは最も次数の大きな点が  $b$  であり、また、 $b$  に隣接している 4 点の中で  $b$  を除く他点とも隣接している点が 3 点 ( $a, c, d$ ) であることから、 $b$  は  $\delta$  で彩色せざるを得ず、この  $\delta$  までのギリシャ文字の数が必要であることから容易にわかる。以上より

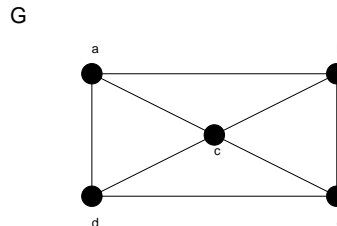
講義  $c, e$  は  $\alpha$  講時に開講

講義  $a, f$  は  $\beta$  講時に開講  
 講義  $d, g$  は  $\gamma$  講時に開講  
 講義  $b$  だけは  $\delta$  講時に開講

するように時間割を作れば良いことがわかる.

例題 9.3 (2004 年度 演習問題 9)

1. 図のグラフ  $G$  に関して以下の問いに答えよ.



- (1) グラフ  $G$  の幾何学的双対グラフ  $G^*$  を描け.
- (2) (1) で得られたグラフ  $G^*$  の幾何学的双対グラフ  $G^{**}$  を描き,  $G^{**}$  と  $G$  の間の同形写像を求めよ.  
 (注): 「同形」「同形写像」に関しては, 講義ノート #2 の 2.2 同形の部分を読み返して見る.

2. グラフ  $G$  の点彩色に関して以下の問いに答えよ.

- (1) グラフ  $G$  は三角形を含まないとする. オイラーの公式を用いて, このグラフ  $G$  には次数 3 以下の点が存在することを示せ.
- (2) グラフ  $G$  は 3 色で点彩色可能であることを示せ.
- (3) (1) の結果をグラフ  $G$  が  $K$  角形まで含まないという場合に拡張せよ.

(解答例)

- 1(1) グラフ  $G$  の幾何学的双対グラフ  $G^*$  を図 8.165 に示す.
- (2) (1) で得られたグラフ  $G^*$  の幾何学的双対グラフ  $G^{**}$  は図 8.165 のようになり, このグラフの各点にそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 と名前をつけることにする. このとき, 写像  $\{\theta, \phi\}$  を

$$\begin{aligned} \theta : V(G) &\rightarrow V(G^{**}) \\ \phi : E(G) &\rightarrow E(G^{**}) \end{aligned}$$

のように定義すると,  $\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4, \theta(e) = 5$ , 及び,  $\phi(\overline{ab}) = \overline{12}, \phi(\overline{be}) = \overline{25}, \phi(\overline{ed}) = \overline{54}, \phi(\overline{da}) = \overline{41}, \phi(\overline{ac}) = \overline{13}, \phi(\overline{ce}) = \overline{35}, \phi(\overline{bc}) = \overline{13}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}$  が成り立つ.

さて, これらを用いると, 関係式;

$$\begin{aligned} \Psi_G(\overline{ab}) = ab &\Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ab})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{12}) = 12 = \theta(a)\theta(b) \\ \Psi_G(\overline{be}) = be &\Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{be})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{25}) = 25 = \theta(b)\theta(e) \\ \Psi_G(\overline{ed}) = ed &\Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ed})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{54}) = 54 = \theta(e)\theta(d) \\ \Psi_G(\overline{da}) = da &\Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{da})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{41}) = 41 = \theta(d)\theta(a) \\ \Psi_G(\overline{ac}) = ac &\Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ac})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{13}) = 13 = \theta(a)\theta(c) \end{aligned}$$

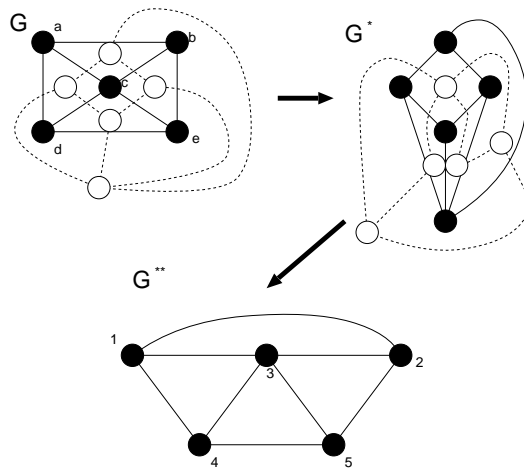


図 8.165: 平面グラフ G とその幾何学的双対グラフ G\*. そして, G\* の幾何学的双対グラフ G\*\*.

$$\Psi_G(\overline{ce}) = ce \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ce})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{35}) = 35 = \theta(c)\theta(e)$$

$$\Psi_G(\overline{bc}) = bc \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{bc})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{23}) = 23 = \theta(b)\theta(c)$$

$$\Psi_G(\overline{cd}) = cd \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{cd})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{34}) = 34 = \theta(c)\theta(d)$$

が成り立つ. 従って,  $\Psi_G, \Psi_{G^{**}}$  は同形写像となるので, グラフ G と G\*\* は同形である.

2.

(1) グラフ G に含まれる任意の点  $v$  に対して  $\delta \leq \deg(v)$  とすれば, 握手補題により

$$n\delta \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \tag{8.321}$$

が成り立つ. 一方, グラフ G に三角形が無いのであれば, グラフ G の内周は  $\kappa = 4$  であるから  $4 \leq \deg(F)$ , すなわち

$$4f \leq \sum_{f \in F(G)} \deg(f) = 2m \tag{8.322}$$

が成り立つが, オイラーの公式:  $f = 2 - n + m$  を代入し, 面数  $f$  を消去すれば

$$m \leq 2n - 4 \tag{8.323}$$

が得られる. (8.321)(8.323) から

$$n\delta \leq 2m \leq 2(2n - 4) \tag{8.324}$$

つまり

$$\delta \leq 4 - \frac{8}{n} \tag{8.325}$$

が成り立つ. 従って,  $\delta$  は自然数であるから,  $n \geq 8$  であるならば  $\delta \leq 3$  となり, 証明は終了する.

ところで, グラフ G には次数 3 以下の点があるならば任意の点  $v$  に対し,  $3 \leq \deg(v)$  が成り立つべきだが, 握手補題から直ちに

$$3n \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \tag{8.326}$$

つまり

$$m \geq \frac{3}{2}n \tag{8.327}$$

となるが、これと (8.323) が同時に成り立つべきだから、 $n$  は  $3n/2 \leq 2n - 4$  を満たすべきであり、これは  $n \geq 8$  である。従って、結局  $\delta \leq 3$  となり、グラフ  $G$  には次数 3 以下の点があることが言える。

(2) (1) の結果より、グラフ  $G$  には三角形は無く、次数 3 以下の点があることから、図 8.166 のような点  $v$  が存在することになる (このグラフ  $G$  の点の数は  $n$ )。従って、 $v$  の次数が  $\deg(v) < 3$  を満たすならば証明は終わってしまうので、以下では  $\deg(v) = 3$  として議論を進める。そして、図 8.166 のように点  $v$  のまわりに  $v_1, v_2, v_3$  が配置されているものとする。

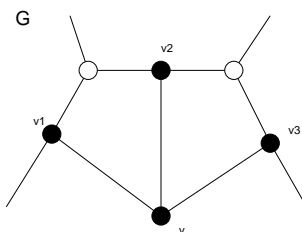


図 8.166: 平面グラフ  $G$ . 点  $v$  の回りに点  $v_1, v_2$ , 及び,  $v_3$  が配置されている。

さて、辺  $vv_3$  を縮約してできる  $(n-1)$  点からなるグラフは図 8.167 のようになっており、この  $(n-1)$  点から成るグラフは 3 彩色可能であると仮定する。このとき、 $v_1 \Rightarrow \alpha, v_2 \Rightarrow \alpha, v_3 \Rightarrow \beta$  とそれぞれ

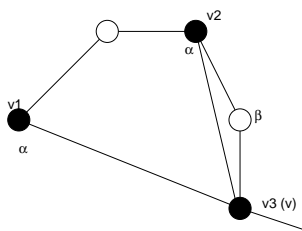


図 8.167: 平面グラフ  $G$  の点  $vv_3$  を縮約したグラフ。

彩色し、後に  $v$  を元に戻すことにする (図 8.168 参照. この時点で点の数  $n$ )。元に戻した  $v$  を  $\alpha, \beta$  と

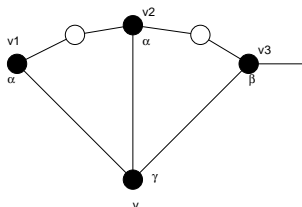


図 8.168: 図 8.167 で縮約した辺  $vv_3$  を元に戻す。

は異なる色  $\gamma$  で彩色すれば所望のグラフ  $G$  の 3 彩色が完成する。(証明終わり)。

(3)  $K$  角形が無いのであれば、握手補題より

$$(K+1)f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} \deg(F) = 2m$$

が成り立つが、オイラーの公式から面数  $f$  を消去して

$$m \leq \left(\frac{K+1}{K-1}\right)(n-2) \tag{8.328}$$

が得られる。これと  $n\delta \leq 2m$  を組んで

$$\delta \leq 2\left(\frac{K+1}{K-1}\right) - \frac{4}{n}\left(\frac{K+1}{K-1}\right) \tag{8.329}$$

が成り立つ。従って、グラフ  $G$  に  $K$  角形まで無く、 $n$  が不等式：

$$n \geq 4\left(\frac{K+1}{K-1}\right) \tag{8.330}$$

を満たすならば、グラフ  $G$  には次数が  $2(K+1/K-1) - 1$  以下の点が存在することになる。

ところで、不等式 (8.330) の成立条件の吟味であるが、グラフに次数  $2(K+1/K-1) - 1$  以下の点が存在するとすれば、ある点  $v$  に対し、 $2(K+1/K-1) - 1 \leq \deg(v)$  が成立し、これと握手補題から

$$m \leq \frac{n}{2} \left\{ \left(\frac{K+1}{K-1}\right) - 1 \right\} \tag{8.331}$$

が得られるが、これと (8.328) が同時に成立するためには

$$\frac{n}{2} \left\{ \left(\frac{K+1}{K-1}\right) - 1 \right\} \leq \left(\frac{K+1}{K-1}\right)(n-2) \tag{8.332}$$

つまり、

$$n \geq 4\left(\frac{K+1}{K-1}\right) \tag{8.333}$$

が成り立つことになり、これは上に述べたグラフに次数  $2(K+1/K-1) - 1$  以下の点が存在する条件に抵触しない。従って以上により、このグラフには次数  $2(K+1/K-1) - 1$  以下の点が存在すると結論付けられる。

**例題 9.4** (2005 年度 演習問題 9)

次のグラフの彩色数を求めよ。

- (1) 各プラトングラフ
- (2) 完全三部グラフ  $K_{r,s,t}$
- (3)  $k$ -立方体

(解答例)

- (1) プラトングラフは教科書 p. 24 図 3.5 にあるように平面描写可能である。これらのグラフのうち最初の 3 つをそれぞれ彩色すると 図 8.169 より、それぞれの彩色数は

$$\chi(\text{正四面体}) = 4 \tag{8.334}$$

$$\chi(\text{正八面体}) = 3 \tag{8.335}$$

$$\chi(\text{立方体}) = 2 \tag{8.336}$$

となる。同様にして、正 20 面体、及び、正 12 面体の平面描画はそれぞれ図 8.170 のようになり、求める

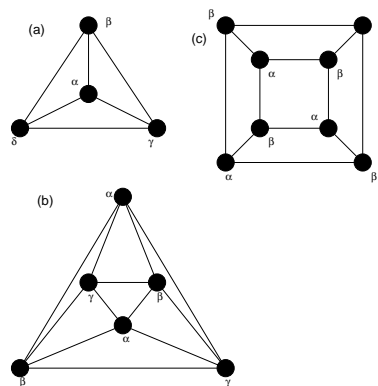


図 8.169: (A) 正四面体, (B) 正八面体, (C) 立方体の平面描画とその彩色.

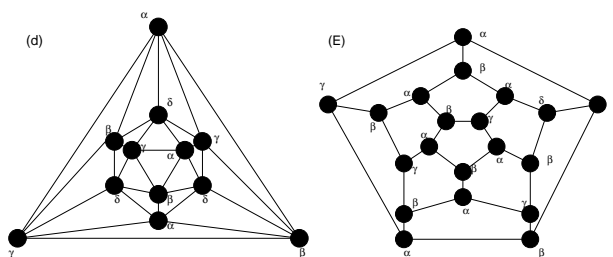


図 8.170: (D) 正 20 面体, 及び, (E) 正 12 面体の平面描画とその彩色.

彩色数は

$$\chi(\text{正 20 面体}) = 4, \quad \chi(\text{正 12 面体}) = 4 \tag{8.337}$$

となる.

(2) 完全三部グラフ  $K_{r,s,t}$  の彩色数はその定義から直ちに

$$\chi(K_{r,s,t}) = 3 \tag{8.338}$$

である.

(3)  $k$ -立方体  $Q_k$  は正則二部グラフであることを考えると, その彩色数は

$$\chi(Q_k) = 2 \tag{8.339}$$

である.

例題 9.5 (2006 年度 演習問題 9)

辺数が  $m$  であるグラフ  $G$  の彩色数  $\chi(G)$  は不等式 :

$$\chi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{8m + 1}}{2}$$

を満たすことを示せ.

(ヒント) グラフ  $G$  の全ての点を各々に割り当てられた色  $1, 2, \dots, \chi(G)$  でグループ分けした場合, 各グループ内の点どうしは辺で結ばれてはいけないことに着目する. このとき  $G$  にあるべき辺数  $m$  の満たすべき条件を考察すると良い.

(解答例)

グラフ  $G$  に含まれる点をその色でグループ分けする. 彩色数が  $\chi(G)$  ならば,  $\chi(G)$  個のグループができるはずであるが, 同じグループに属する点の間には辺が無いことに注意する. これは, もし, そのような 2 点の間に辺が存在してしまえば, その 2 点はもはや同じ色で彩色できないことになり, 同じグループに属していることに矛盾してしまうからである. 従って,  $G$  に辺が存在するとすれば, それは異なるグループに属する点の間にある辺でなければならず, その辺数  $m$  は任意の 2 つのグループから 1 点ずつ点を選んでその 2 点を辺で結ぶ場合の数よりも多くなくてはならない. つまり,  $m$  は  ${}_{\chi(G)}C_2$  以上となるはずである. よって

$$m \geq \frac{1}{2} \chi(G)(\chi(G) - 1) \tag{8.340}$$

が成り立つべきである. これを  $\chi(G)$  について解くと

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{8m + 1}) \tag{8.341}$$

となり, これは題意に与えられた不等式である.

例題 9.6 (2005 年度情報工学演習 II(B) #2)

$\chi(G) = k$  であるが, 任意の点を除去すると彩色数が小さくなる時, グラフ  $G$  は  $k$ -臨界的であるという. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 2-臨界的グラフ, 3-臨界的グラフを見つけよ.
- (2) 4-臨界的グラフの例を一つ挙げよ.
- (3)  $G$  が  $k$ -臨界的であるならば, 次の (a)(b) が成り立つことを示せ.
  - (a)  $G$  の点の次数は全て  $k$  以上である.
  - (b)  $G$  にカット点はない.

(解答例)

- (1) 2-臨界的グラフは 2 点を一本の辺で結んでできるグラフ, つまり, 完全グラフ  $K_2$  が挙げられる. また, 3-臨界的グラフは完全グラフ  $K_3$  がその例である.
- (2) 4-臨界的グラフの例として完全グラフ  $K_4$  が挙げられる.
- (3) 以下で順次 (a)(b) を証明していこう.
  - (a) ある  $k$ -臨界的のグラフがあり,  $c_1, \dots, c_k$  の計  $k$  色で彩色されているものとする. 今, グラフが  $k$ -臨界的であることから, ある一つの点を除くと  $c_1, \dots, c_{k-1}$  色で彩色することができる. すると, 今除いた点は  $c_k$  で塗らなければならない. なぜならば, そうしなければ  $(k - 1)$ -彩色になってしまうから

である. ここで点の彩色の仕方が 1 通りであるということは, その点が  $(k - 1)$  色の点と隣接しているということであるから, その点の次数は  $(k - 1)$  以上である.

- (b)  $k$ -臨界的グラフ  $G$  にカット点  $n$  が存在すると仮定する.  $n$  を除くと,  $G$  は  $A, B$  という 2 つの成分に分離するものとする. 今,  $A, B$  は独立しているので,  $A$  と  $n$  からなるグラフと  $B$  と  $n$  からなるグラフのうち, 少なくともどちらか一方は  $k$ -彩色である. (どちらも  $k$  色未満で彩色可能であるとすると,  $A, B$  と  $n$  をあわせた元のグラフも  $k$  色未満で彩色可能になってしまう.)  $A$  と  $n$  からなるグラフが  $k$ -彩色可能であるとすると,  $B$  のどの点を取り除いても依然としてグラフは  $k$ -彩色であり矛盾.  $B$  と  $n$  からなるグラフが  $k$  彩色であるときも同様である. 従って,  $k$ -臨界的グラフにカット点は存在しない.

**例題 9.7** (2007 年度 演習問題 9)

$\Delta(G)$  を単純グラフ  $G$  に属する最大次数とする. このとき, 任意の単純グラフ  $G$  に対して

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G) \tag{8.342}$$

が成り立つことを示せ.

(解答例)

$G$  が点数 1 の孤立点の場合,  $\chi(G) = 1, \Delta(G) = 0$  であるから, 問題の不等式は等号で成立する. 点数  $n - 1$  のときに問題の不等式の成立を仮定すると, 点数  $n$  のグラフ  $G$  の任意の点を  $v$  とし, この点を  $G$  から削除したグラフ  $G - v$  に存在する点数は  $n - 1$  となるから

$$\chi(G - v) \leq 1 + \Delta(G - v) \tag{8.343}$$

が成り立つ. つまり,  $G - v$  の  $1 + \Delta(G - v)$ -彩色が存在する. そのような  $G - v$  の  $1 + \Delta(G - v)$ -彩色を一つ与えたとき,  $G$  中の点  $v$  への接続辺は高々  $\Delta(G)$  個であるから,  $G - v$  の彩色には  $\Delta(G)$  以上の色を必要としない. 従って, もし,  $\Delta(G - v) = \Delta(G)$  であるならば ( $v$  が  $G$  の最大次数の点ではない場合),  $G - v$  の彩色で使われている色を用いて  $v$  を彩色することができる ( $\chi(G) = \chi(G - v) \leq 1 + \Delta(G - v) = 1 + \Delta(G)$ ). また,  $\Delta(G - v) < \Delta(G)$  であるならば ( $v$  が  $G$  の最大次数の点の場合),  $G - v$  の彩色で用いられた色でない 1 色を用いて  $v$  を彩色すればよい以上をまとめると, 点数  $n$  のグラフ  $G$  に対して

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G) \tag{8.344}$$

が成立する.

## 第10回講義

### 8.2.2 地図の彩色

この節では、ヨーロッパのように、多くの国が屹立しているような地域の地図において、隣り合う国を異なる色で区別するためには何色が必要か？ という素朴な質問から端を発した「地図の彩色」について、それに関わる定理及び適用例を見てゆくことにする。

$k$ -面彩色可能：地図の隣接する2つの面が同じ色にならないように  $k$  色で彩色できる場合. 図 8.171 に3-彩色可能なグラフの一例を載せる.

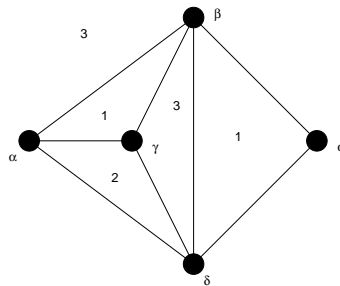


図 8.171: 3-面彩色可能なグラフの一例. 面に付された数字が色を表す.

#### 定理 19.1

地図  $G$  が 2 面彩色可能であるための必要十分条件は,  $G$  がオイラー・グラフであることである.

(証明)

必要性:

$G$  の各点  $v$  を含む面は偶数でなければならないので,  $v$  の次数は偶数である. 従って, 定理 6.2 「連結グラフがオイラー・グラフであるための必要十分条件は,  $G$  の点の次数が全て偶数である」ことから,  $G$  はオイラー・グラフである.

十分性:

任意の面  $F$  を選び, それを赤で彩色する.  $F$  中の任意の点  $x$  から, 他の面  $F'$  へ行く曲線を考える (図 8.172 参照).

$F'$  → 赤 (曲線が偶数本の辺を交わる場合)

$F'$  → 青 (曲線が奇数本の辺を交わる場合)

で色分けすると,  $x \rightarrow y \rightarrow x$  という任意の閉路は偶数回だけ辺を交差する ( $G$  の各点に接続する辺は偶数)

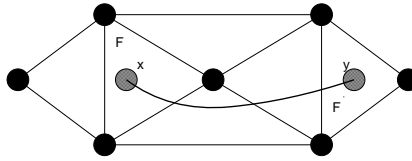


図 8.172: 2-面彩色可能なグラフ  $G$  においては,  $x \rightarrow y \rightarrow x$  という任意の閉路は偶数回  $G$  の辺と交差する.

なのでこの彩色で矛盾はない. (証明終わり).

**定理 19.2**

$G$  はループの無い平面グラフとし,  $G^*$  は  $G$  の幾何学的双対であるとする. このとき,  $G$  が  $k$ -点彩色可能であるための必要十分条件は,  $G^*$  が  $k$ -面彩色可能であることである.

例として図 8.173 を見よ.

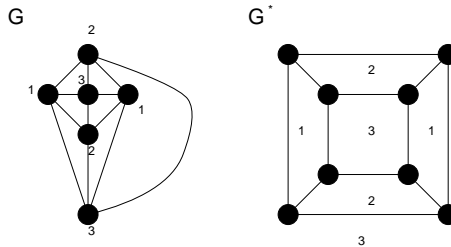


図 8.173: 3-点彩色可能なグラフ  $G$  (左) と, その幾何学的双対グラフ  $G^*$ . グラフ  $G^*$  は 3-面彩色可能である.

**定理 19.4**

$G$  は各点が 3 次の地図であるとする. このとき,  $G$  が 3-面彩色可能であるための必要十分条件は, 各面が偶数本の辺で囲まれていることである.

(証明)

必要性 :

図 8.174 のように,  $G$  の任意の面  $F$  に対し,  $F$  を取り囲む  $G$  の面は 2 色によって彩色可能である. 従って, そのような面は偶数個なければならぬので, 全ての面は偶数本の辺で囲まれている.

十分性 :

「 $G$  が単純連結グラフであり,  $G$  の各面が三角形であり,  $G$  の各点の次数が偶数 (オイラー・グラフ) ならば,  $G$  は 3-点彩色可能である」という双対な結果を示せばよい.

グラフ  $G$  はオイラー・グラフであるから, 定理 19.1 より, 図のように,  $G$  の面は 2 色, 赤と青によって彩色できる.

赤い面の 3 点を  $\alpha, \beta, \gamma$  が時計回りにくるように彩色する.  
 青い面の 3 点を  $\alpha, \beta, \gamma$  が反時計回りにくるように彩色する.

とすると, このような彩色はグラフ全体に拡張できる. (証明終わり).

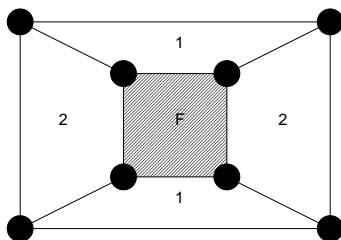


図 8.174: 面 F を取り囲むグラフ G の面は 2 色で彩色可能である.

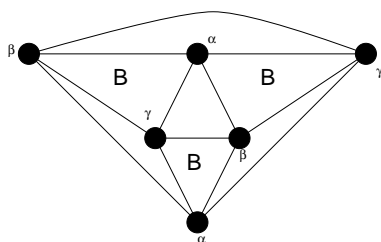


図 8.175: オイラー・グラフ G の面は赤と青 (B) で 2-面彩色可能である.

### 8.2.3 辺彩色

点彩色, 地図の彩色 (面彩色) とくれば, 次は辺彩色である.

$k$ -辺彩色可能 : グラフ G の隣接する辺は同じ色にならないように, G の辺を  $k$  色で彩色できるとき.

彩色指数 : G が  $k$ -辺彩色可能,  $k - 1$ -辺彩色不可能なとき, 彩色指数  $\chi'(G)$  を

$$\chi'(G) = k$$

で定義する. 図 8.176 に 4 辺彩色可能なグラフの一例を載せる.

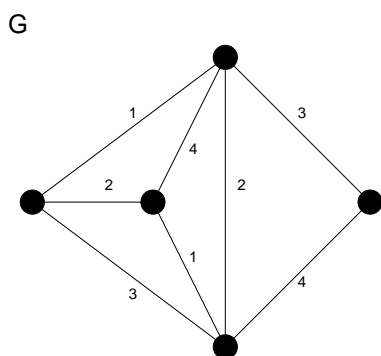


図 8.176: 4-辺彩色可能なグラフの一例. このグラフ G の彩色指数は  $\chi'(G) = 4$  である.

**定理 20.1**  
 $G$  は単純グラフであり、その最大次数が  $\Delta$  ならば、 $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$  である。

ここでは具体的な証明を追うことはせず、いくつかの代表的なグラフに対して、上記定理を確認することにとどめておく。

(例) :

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & (n : \text{偶数}) \\ 3 & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

$$\chi'(W_n) = n - 1 \quad (n \geq 4)$$

**定理 20.2**  
 $n (\neq 1)$  が奇数ならば、 $\chi'(K_n) = n$  であり、偶数ならば、 $\chi'(K_n) = n - 1$  である。

(証明)

$n \geq 3$  とし、以下では  $n$  が偶数の場合と奇数の場合に分けて考えることにする。

$n$  が奇数のとき :

完全グラフ  $K_n$  の点を正  $n$  角形の形状に配置し、その外周の辺を各辺に異なる色を用いて彩色し、次に残りの辺それぞれをそれと平行な外周の辺に用いられた色で彩色する (図 8.177 参照)。

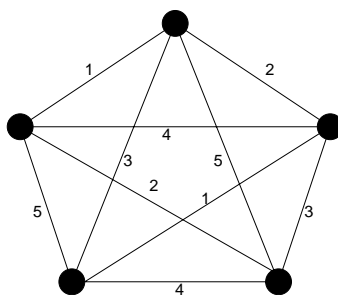


図 8.177: 完全グラフ  $K_5$  の辺彩色. 外側の 5 つの辺にそれぞれ色を割り振ると、各外辺に向かい合う辺に同色の色を割り当てれば、5-辺彩色が完成する。

このとき、同じ色で彩色できる辺の最大数は  $(n - 1)/2$  である。従って、彩色指数が  $n - 1$  とすると完全グラフ  $K_n$  の辺数は高々

$$\frac{1}{2}(n - 1)\chi'(K_n) = \frac{1}{2}(n - 1)^2 \neq {}_n C_2$$

となり、 $K_n$  の辺数  ${}_n C_2 = n(n - 1)/2$  に反する。従って、 $\chi'(K_n) = n$  であり、このとき、辺数は高々

$$\frac{1}{2}(n - 1)\chi'(K_n) = \frac{1}{2}n(n - 1) = {}_n C_2$$

となり、つじつまが合う。従って、 $n$  が奇数のときは  $\chi'(K_n) = n$  である。

$n$  が偶数のとき :

$K_n$  は完全グラフ  $K_{n-1}$  と 1 つの点の和とみなせる。 $K_{n-1}$  の辺は  $n$  が奇数の場合に述べた方法により、 $n - 1$

色で彩色することができる。従って、この方法で  $(n - 1)$ -彩色すると、完全グラフ  $K_{n-1}$  の各辺の次数は  $n - 2$  であるから、各点には全  $n$  色のうち、欠けている色が必ず 1 つ生じ、これらの欠色は全て異なる。よって、これらの欠色で残りの辺を彩色すれば、 $K_n$  の辺彩色が完成する (図 8.171 参照)。従って、 $n$  が奇数のと

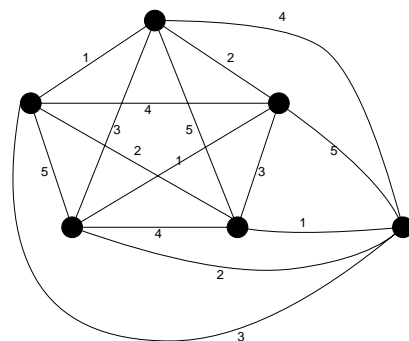


図 8.178: 完全グラフ  $K_5$  の外部に点  $v$  を配置し、この点と  $K_5$  の各点での欠色で点  $v$  を結べば、 $n$  が偶数 (この例では  $n = 6$ ) の場合の  $n$ -辺彩色が完成する。

き、 $\chi'(K_n) = n - 1$  である。(証明終わり)。

**例題 10.1** (2003 年度 レポート課題 #9 問題 1)

グラフの辺彩色に関して以下の問い (1) ~ (3) に答えよ。

- (1) 図 8.179 のグラフ (a)(b) の彩色指数をそれぞれ求めよ。
- (2) ピータースン・グラフの外側の 5-閉路の可能な 3-彩色を全て考えて、ピータースン・グラフの彩色指数は 4 であることを示せ。
- (3) 「グラフ  $G$  が 3 次ハミルトングラフならばその彩色指数は 3 である」ことが知られている。この事実と (2) の結果を用いて、ピータースン・グラフはハミルトングラフでないことを示せ。

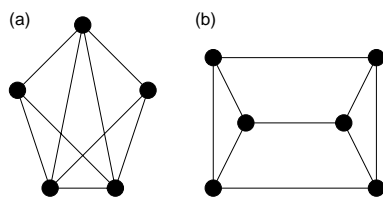


図 8.179: 彩色指数を求めるべきグラフ (a)(b)。

(解答例)

(1) 図 8.180 より、(a)(b) のそれぞれの彩色指数は

$$\chi'((a)) = 5 \tag{8.345}$$

$$\chi'((b)) = 3 \tag{8.346}$$

である。

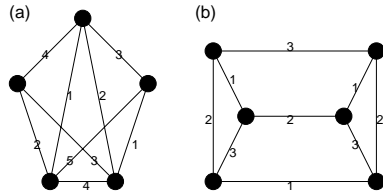


図 8.180: 辺に付された数字が各色を表す.

(2) ピータースン・グラフは図 8.181 のように彩色できるので, その彩色指数は 4 である.

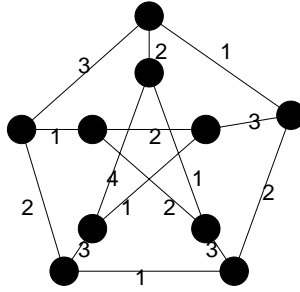


図 8.181: ピータースン・グラフの彩色. 辺に付された数字が各色を表す.

(3) ピータースン・グラフは 3 次グラフ, つまり, 各点の次数が 3 であるが, この 3 次のグラフ  $G$  がハミルトングラフであるならば  $\chi'(G) = 3$  であるはずなので, (1) の結果より, ピータースン・グラフはハミルトングラフではないことがわかる.

### 8.2.4 彩色多項式

彩色多項式  $P_G(k)$ :  $G$  は単純グラフであるとし,  $k$  色での点彩色の仕方が  $P_G(k)$  通りあるとする. このとき,  $P_G(k)$  を彩色多項式と呼ぶ.

(例):

$$P_G(k) = k(k-1)^2 \quad (\text{図 8.182(左上) のような 3 点からなる木 } G)$$

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2) \quad (\text{図 8.182(左下) のような三角形 } G)$$

$$P_G(k) = k(k-1)^{n-1} \quad (\text{図 8.182(右) のような } n \text{ 点からなる木 } G)$$

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \quad (\text{完全グラフ } K_n)$$

明らかに

$$k < \chi(G) \Rightarrow P_G(k) = 0$$

$$k \geq \chi(G) \Rightarrow P_G(k) > 0$$

である.

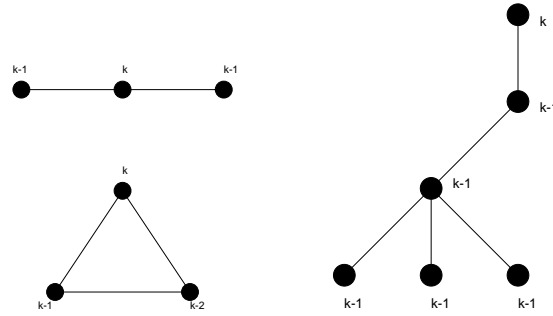


図 8.182: 左上から右へ  $P_G(k) = k(k-1)^2, k(k-1)(k-2), k(k-1)^n$  を彩色多項式として持つグラフ.

次の定理は具体的にグラフ  $G$  の彩色多項式を導出する際に極めて重要である.

**定理 21.1**

単純グラフ  $G$  から辺  $e$  を削除して得られるグラフを  $G - e$  とし, 縮約<sup>a</sup> して得られるグラフを  $G/e$  とする. このとき

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \tag{8.347}$$

が成立する.

<sup>a</sup> 再度確認するが, 「縮約」とは任意の 2 点  $u, v$  を結ぶ辺  $e$  を除去し, 点  $u, v$  を同一視する操作である.

証明の前に, この定理の「使い方」を具体的に次の例を見てみよう.

(例) : 図 8.183 の例で考えると, 関係式 (8.347) は

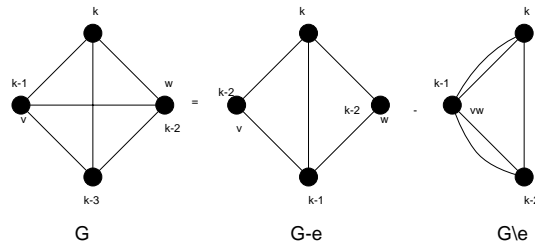


図 8.183: 関係式 (8.347) を示すグラフの一例.

$$k(k-1)(k-2)(k-3) = [k(k-1)(k-2)^2] - [k(k-1)(k-2)]$$

となる.

(証明) :

$e = vw$  とする.  $G - e$  は削除した辺  $e$  の両端が「異色」であるか「同色」であるかのどちらかの場合しかないことを考えると, その彩色多項式  $P_{G-e}(k)$  は  $v$  と  $w$  が異なる色になるような  $G - e$  の  $k$ -彩色の個数と  $v$  と  $w$  が同色になるような  $G - e$  の  $k$ -彩色の個数の和に等しくなければならない. そこで, 以下でこの考

えうる 2 つの場合について考察する.

まず, 前者, つまり,  $v$  と  $w$  が異なる色になるような  $G - e$  の  $k$ -彩色の個数は  $v$  と  $w$  を結び辺  $e$  を描いても変化しない (図 8.183 のグラフ  $G$ , 及び,  $G - e$  を参照). 従って,  $P_G(k)$  に等しい. 一方の後者, つまり,  $v$  と  $w$  が同じ色になるような  $G - e$  の  $k$ -彩色の個数は  $v$  と  $w$  を同一視しても変わらない (図 8.183 のグラフ  $G - e$  と  $G/e$  を参照). 従って,  $P_{G/e}(k)$  に等しい. 以上より

$$P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$$

が成り立つ. (証明終わり).

彩色多項式を求める際のポイントは, グラフ  $G$  の辺数を関係式 (8.347) を用いて段階的に削減して行き, 「木」まで到達した時点で,  $n$  点からなる木の彩色多項式が  $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$  である事実を用いて求める, あるいは, 簡単に彩色多項式が求まるグラフまで辺数を落として, その簡単なグラフに対して彩色多項式を求めることにある.

この方法に慣れるためにいくつかの例題を見ておこう.

**例題 10.2** (2003 年度 レポート課題 #9 問題 2)

4 つの点からなる単純連結グラフを全て挙げ, それら全てに対して彩色多項式を見つけ, これらの多項式は全て

$$k^4 - mk^3 + ak^2 - bk$$

なる形で書けることを示せ. ただし,  $m$  は辺数,  $a, b$  はともに正の定数である.

(解答例)

まず, 4 つの点からなる単純連結グラフを全て描いてみると, 図 8.184 の A~F の 6 つのグラフが得られる.

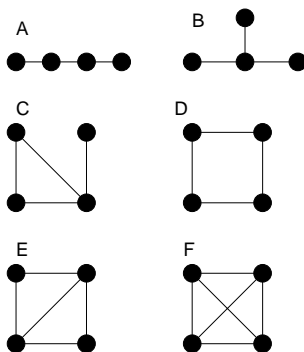


図 8.184: 4 つの点からなる単純連結グラフ A~F.

まず,  $n = 4$  の「木」である A, B の彩色多項式は図 8.185 より直ちにわかり

$$P_A(k) = P_B(k) = k(k-1)^3 = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \tag{8.348}$$

である.

次に, C は公式 :

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k) \tag{8.349}$$

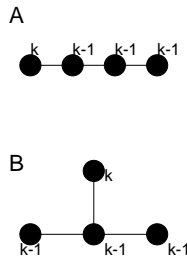


図 8.185: A, B は  $n = 4$  点からなる「木」であるから, その彩色多項式はどちらも  $k(k - 1)^3$ .

をグラフ C に適用すると, 図 8.186 より

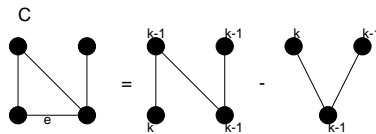


図 8.186: グラフ C は辺  $e$  に関して図のように分解できる.

$$P_C(k) = k(k - 1)^3 - k(k - 1)^2 = k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k \tag{8.350}$$

となる.

次にグラフ D は辺  $e$  に関して図 8.187 のように分解できるので

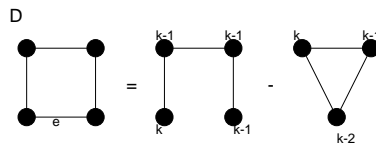


図 8.187: グラフ D は辺  $e$  に関して図のように分解できる.

$$P_D(k) = k(k - 1)^3 - k(k - 1)(k - 2) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \tag{8.351}$$

が得られる.

次いで E であるが, これは図 8.188 のようにグラフ D と  $n = 3$  の木に分解でき, グラフ D の彩色多項式  $P_D(k)$  は (8.351) で既に求めているので, これを用いて

$$\begin{aligned} P_E(k) &= P_D(k) - k(k - 1)^2 \\ &= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k - (k^3 - 2k^2 + k) = k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k \end{aligned} \tag{8.352}$$

が得られる.

最後にグラフ F であるが, これは図 8.189 のようにグラフ E と三角形に分解でき, グラフ E の彩色多項式は (8.352) で既に求めたので, これを用いて

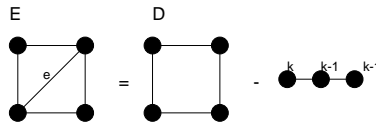


図 8.188: グラフ E は辺 e に関して図のように分解できる.

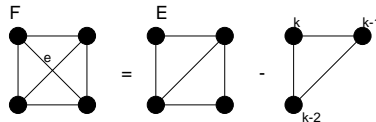


図 8.189: グラフ F は辺 e に関して図のように分解できる.

$$\begin{aligned}
 P_F(k) &= P_E - k(k-1)(k-2) \\
 &= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k - (k^3 - 3k^2 + 2k) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k \tag{8.353}
 \end{aligned}$$

が得られる.

以上をまとめると

$$P_A(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \tag{8.354}$$

$$P_B(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \tag{8.355}$$

$$P_C(k) = k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k \tag{8.356}$$

$$P_D(k) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \tag{8.357}$$

$$P_E(k) = k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k \tag{8.358}$$

$$P_F(k) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k \tag{8.359}$$

となり, いずれの場合も

$$P_G(k) = k^4 - mk^3 + ak^2 - bk \tag{8.360}$$

となり,  $m$  は辺数,  $a, b$  は正の定数となっていることがわかる.

**例題 10.3** (2004 年度 演習問題 10)

完全二部グラフ, 及び, 閉路グラフの彩色多項式に関して以下の問いに答えよ.

- (1) 完全二部グラフ  $K_{2,3}$  の彩色多項式  $P_{K_{2,3}}(k)$  を求めよ.
- (2) 完全二部グラフ  $K_{2,s}$  ( $s$ : 任意の自然数) の彩色多項式  $P_{K_{2,s}}(k)$  を求めよ.
- (3) 閉路グラフ  $C_4$ , 及び,  $C_5$  の彩色多項式  $P_{C_4}(k), P_{C_5}(k)$  を求めよ.
- (4) 数学的帰納法を用いて, 閉路グラフ  $C_n$  に対する彩色多項式  $P_{C_n}(k)$  が

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

で与えられることを証明せよ.

(解答例)

(1) 完全二部グラフ  $K_{2,3}$  は図 8.190(左) のとおりである。以下、点  $a$  と点  $b$  が同色の場合と異色の場合に

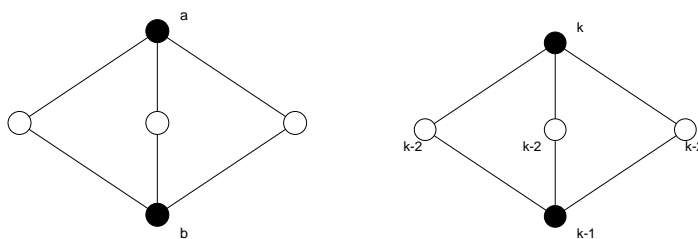


図 8.190: 完全二部グラフ  $K_{2,3}$ (左) とその彩色の仕方(右).

分けて考える.

- (i) 点  $a$  と点  $b$  が同色の場合, 彩色の方法は  $k(k-1)^3$  通りある.
- (ii) 点  $a$  と点  $b$  が異色の場合, 彩色の方法は  $k(k-1)(k-2)^3$  通りがある (図 8.190(右) 参照).

従って, 求める彩色多項式はこの両者の和として

$$P_{K_{2,3}}(k) = k(k-1)^3 + k(k-1)(k-2)^2$$

で与えられる.

(2) 完全二部グラフ  $K_{2,s}$  は図 2.22 のようなグラフである。この図 8.191 では「中間層」の点の個数が  $s$  で

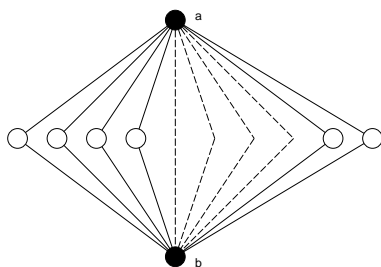


図 8.191: 完全二部グラフ  $K_{2,s}$ . 「中間層」は  $s$  個の白丸からなる.

あることに注意しよう。このとき、やはり、点  $a$  と点  $b$  が同色/異色の場合に分けて考える.

- (i) 点  $a$  と点  $b$  が同色の場合 :  $k(k-1)^s$  通り.
- (ii) 点  $a$  と点  $b$  が異色の場合 :  $k(k-1)(k-2)^{s-1}$  通り.

従って, 求める彩色多項式はこれら 2 つの場合の和として

$$P_{K_{2,s}}(k) = k(k-1)^s + k(k-1)(k-2)^{s-1}$$

で与えられる.

(3) 公式 :

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \tag{8.361}$$

を用いると,  $C_4$  は図 3.34 のように「分解」することができるので, 求める彩色多項式は

$$P_{C_4}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$$

となる. 一方,  $C_5$  は, 図 8.193 のように分解できるので, 求める彩色多項式  $P_{C_5}(k)$  は  $P_{C_4}(k)$  の結果を

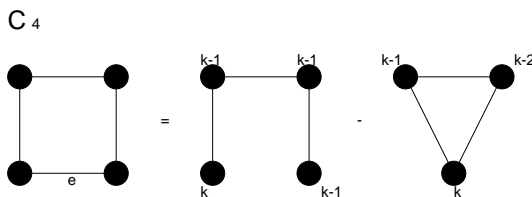


図 8.192: 閉路  $C_4$  はこの図のように木と三角形 ( $C_3$ ) へと分解できる.

用いて

$$\begin{aligned} P_{C_5}(k) &= k(k-1)^4 - P_{C_4}(k) \\ &= k(k-1)^4 - k(k-1)(k^2 - 3k + 3) = k(k-1)(k^3 - 4k + 6k - 4) \end{aligned}$$

と求まる.

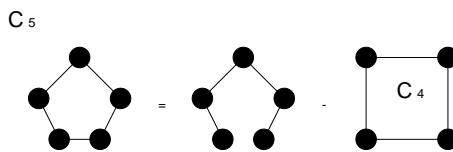


図 8.193: 閉路  $C_5$  はこの図のように木と  $C_4$  へと分解できる.

(4) 閉路であるから,  $n \geq 2$  として考える.  $n = 2$  のときには, 図 8.194 より,  $P_{C_2}(k) = k(k-1)$  となるが, これは証明すべき関係式で  $n = 2$  と置いたものに等しい. そこで, 点の数が  $n - 1$  のとき, 関係式 :

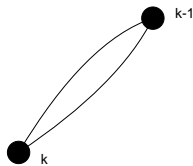


図 8.194: 閉路  $C_2$  とその彩色方法.

$$P_{C_{n-1}}(k) = (k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1) \tag{8.362}$$

が成立すると仮定する.

このとき、図 8.195 の辺  $e$  で、公式 (8.361) を用いると

$$\begin{aligned}
 P_{C_n}(k) &= k(k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) \\
 &= k(k-1)^{n-1} - \{(k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1)\} \\
 &= k(k-1)^{n-1} - (k-1)^{n-1} + (-1)^n(k-1) \\
 &= (k-1)^n + (-1)^n(k-1)
 \end{aligned}$$

となる。従って、数学的帰納法により、全ての  $n$  に対して

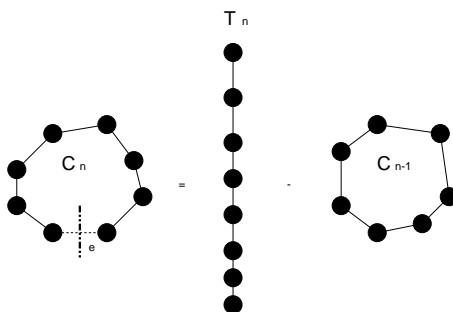


図 8.195: 閉路  $C_n$  を辺  $e$  において分解すると、 $n$  点からなる木  $T_n$  と閉路  $C_{n-1}$  へと分解される。

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

が成り立つ。(証明終わり).

**例題 10.4** (2005 年度 演習問題 10)

グラフ  $G$  が非連結な単純グラフならば、彩色多項式  $P_G(k)$  はその成分の彩色多項式の積で与えられることを示せ.

(解答例)

例えば、三角形を  $G_1$  とし、2 個の点からなる木を  $G_2$  とする。このとき、3 色を使うことのできる色数とすれば、 $P_{G_1}(3) = P_{G_2}(3) = 6$  である。具体的に三色を R,B,G として彩色を図示すると図 8.196 のようになる。これから明らかに、この  $G_1, G_2$  をグラフ  $G$  の 2 つの成分としたとき、この 2 つの成分は非連結であるから、 $G_1$  の彩色の仕方は  $G_2$  の彩色の仕方に影響を与えない。従って、非連結グラフ  $G$  を 3 色で色分けする場合、出来上がるグラフの個数は  $P_{G_1}(3) \times P_{G_2}(3) = 36$  通りある。この考察を押し進めてグラフの成分数が増えた場合を考えても、個々の彩色多項式の積で非連結グラフの彩色の仕方の数が決まるのは明らかなので、題意が言えることになる。

**例題 10.5** (2006 年度 演習問題 10)

点数  $n$  の一般グラフ:  $G$ , 木:  $T_n$ , 完全グラフ:  $K_n$  の彩色多項式間には次の不等式が成立することを示せ.

$$P_{K_n}(k) \leq P_G(k) \leq P_{T_n}(k)$$

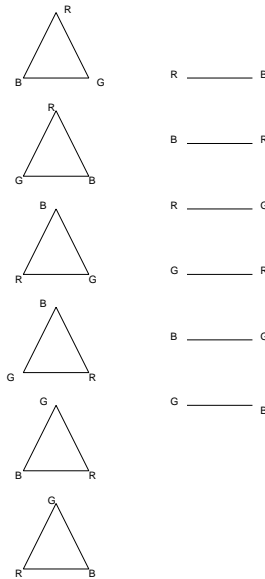


図 8.196:  $G_1, G_2$  の 3 色での彩色の仕方. それぞれ 6 通りある.

(解答例)

まず, 点数が 4 の完全グラフ  $K_4$  を考え, この完全グラフから辺を 1 本ずつ削減していった場合, 彩色多項式はどのように振舞うのかを調べてみよう. 図 8.197 に載せるように, 辺を削除していくことにより, 彩色

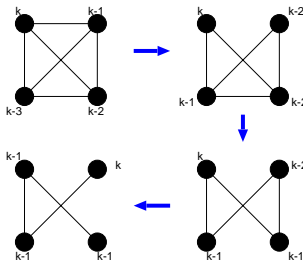


図 8.197: 完全グラフから辺を 1 本ずつ削除していくと最後には木が得られる.

多項式は  $k(k-1)(k-2)(k-3) \rightarrow k(k-1)(k-2)^2 \rightarrow k(k-1)^2(k-2) \rightarrow k(k-3)^3$  のように単調に増加し, 最終的に得られるグラフは点数 4 からなる木  $T_4$  である. また, 完全グラフは全ての点が互いにつながっているので, 点彩色においては全ての点の色を他のどの全ての点の色とも異なる色で彩色しなければならず, 従って, 明らかに与えられた色の数  $k$  に対し, 完全グラフの点彩色の仕方の数は連結グラフ中で最も少ない. また, 上記の操作を繰り返して最終的にできあがる連結グラフは木であり, この事実は点数  $n$  によらない. 従って

$$P_{K_n}(k) \leq P_G(k) \leq P_{T_n}(k) \tag{8.363}$$

すなわち

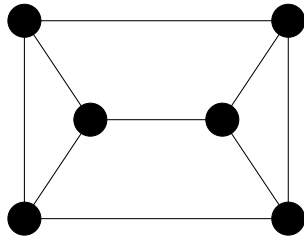
$$k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) \leq P_G(k) \leq k(k-1)^{n-1} \tag{8.364}$$

が成り立つ.

今までに見たことをもう少し複雑なグラフに対して試してみるために、次の例題をやってみよう。

**例題 10.6** (2007 年度 演習問題 10)

に与えられたグラフの彩色多項式を求めよ。



(解答例)

彩色多項式を求める際のポイントは講義中にも言及したように、関係式:

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \tag{8.365}$$

を用いてグラフを「木」あるいは「完全グラフ」、または簡単にその彩色多項式が求まる形まで簡略化することであった。この問題もその通りにすればよい。例えば、問題のグラフ  $G$  の図 8.198 の辺  $e$  を選び、この

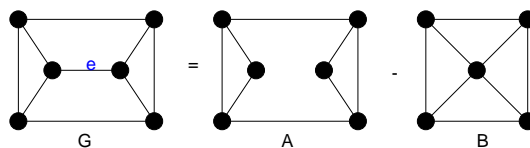


図 8.198: 問題のグラフ  $G$  の分解の第 1 ステップ。

辺に対して関係式 (8.365) を用いると、 $G$  は図 8.198 のように 2 種類のグラフ  $A, B$  の差で書けることになる。そこで、以下でははじめにグラフ  $A$ 、次にグラフ  $B$  という順番で、さらに分解公式 (8.365) を使うことにより、より単純なグラフに変形していくことにする。

まずはグラフ  $A$  に対して、図 8.199 の辺  $e$  で分解すると、グラフ  $A$  は図 8.199 右辺のようにグラフ  $G_1, G_2$  に分解される。そこで、さらにこのグラフ  $G_1, G_2$  をそれぞれ図 8.200 に与えた辺で分解すると、図 8.200 右

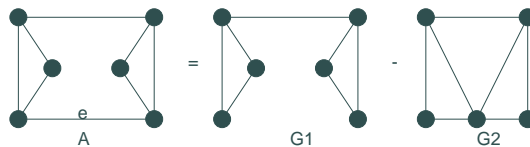


図 8.199: グラフ  $A$  の分解の第 1 ステップ。グラフ  $A$  はグラフ  $G_1, G_2$  に分解される。

辺のようになる。従って、グラフ  $G_1$  は 2 つの完全グラフ  $K_3$  とグラフ  $G_3$  へ、グラフ  $G_2$  はグラフ  $G_3$  と  $G_4$  へとそれぞれが分解されることになる。2 つの完全グラフの彩色多項式は既に見たように  $\{k(k-1)(k-2)\}^2$  であるからこれはそのまま残しておくことにしよう。よって、あとは  $G_3, G_4$  をさらに分解し、より簡単なグラフにしていくことが目標となる。

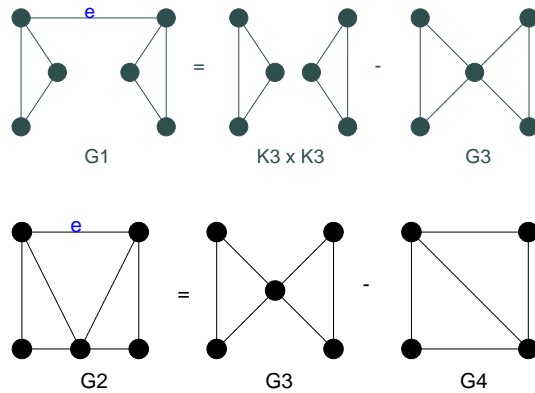


図 8.200: グラフ  $G_1, G_2$  の分解.

実際に図 8.201 に与えた辺  $e$  で  $G_3, G_4$  を分解すると図 8.201 の右辺のようになる. 従って, これらの図

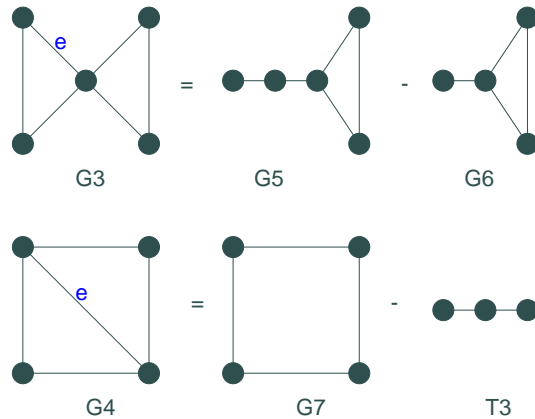


図 8.201: グラフ  $G_3, G_4$  の分解.

の右辺に現れた,  $G_5, G_6, G_7$  が, より簡単なグラフで書き換えることができれば, 図 8.199 のグラフ  $A$  の彩色多項式が得られることになる. もちろん, 図 8.201 の「右辺」の木  $T_3$  の彩色多項式は簡単で  $k(k-1)^2$  であることに注意しよう. 実際にグラフ  $G_5, G_6, G_7$  をそれぞれ該当する辺  $e$  で分解してみると図 8.202 の右辺ようになり, この段階では全てのグラフが「木」あるいは「完全グラフ」で書き直されていることに注意する. これらを式でまとめてみると, 図 8.199 のグラフ  $A$  の彩色多項式は

$$\begin{aligned}
 P_A(k) &= P_{G_1}(k) - P_{G_2}(k) \\
 &= P_{\{K_3\}^2}(k) - P_{G_3}(k) - \{P_{G_3}(k) - P_{G_4}(k)\} \\
 &= P_{\{K_3\}^2}(k) - 2P_{G_3}(k) + P_{G_4}(k) \\
 &= P_{\{K_3\}^2}(k) - 2\{P_{G_5}(k) - P_{G_6}(k)\} + \{P_{G_7}(k) - P_{T_3}(k)\} \\
 &= P_{\{K_3\}^2}(k) - 2\{P_{T_5}(k) - P_{T_4}(k)\} \\
 &+ 2\{P_{T_4}(k) - P_{T_3}(k)\} + P_{T_4}(k) - P_{K_3}(k) - P_{T_3}(k) \\
 &= P_{\{K_3\}^2}(k) - 2P_{T_5}(k) + 5P_{T_4}(k) - 3P_{T_3}(k) - P_{K_3}(k) \tag{8.366}
 \end{aligned}$$

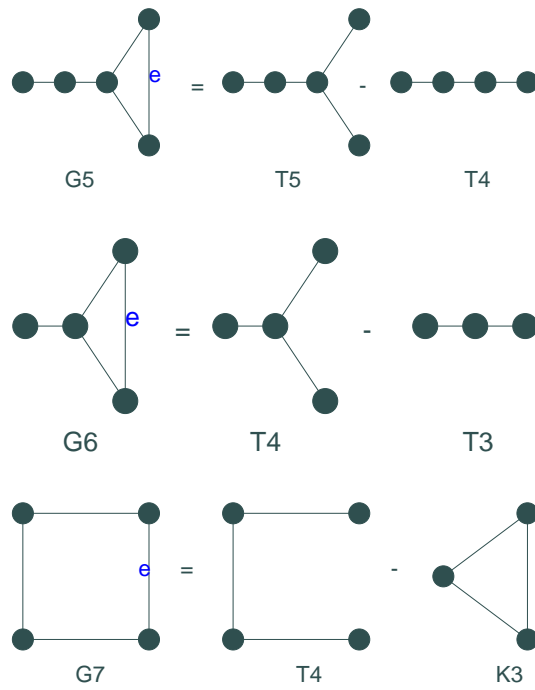


図 8.202: グラフ  $G_5, G_6, G_7$  の分解. 全てが木と完全グラフで表現できることに注意.

と書ける.  $n$  点からなる完全グラフ, 木の彩色多項式がそれぞれ

$$P_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \tag{8.367}$$

$$P_{T_n}(k) = k(k-1)^{n-1} \tag{8.368}$$

で与えられたことを思い出すと, グラフ  $A$  の彩色多項式は

$$\begin{aligned} P_A(k) &= \{k(k-1)(k-2)\}^2 - 2k(k-1)^4 + 5k(k-1)^3 - 3k(k-1)^2 - k(k-1)(k-2) \\ &= k^6 - 8k^5 + 29k^4 - 39k^3 + 31k^2 - 10k \end{aligned} \tag{8.369}$$

となる.

次にグラフ  $B$  について考えよう. グラフ  $B$  を図 8.203 に示した辺  $e$  で分解すると, 図 8.203 の右辺に示したようにグラフ  $G_8$  と完全グラフ  $K_4$  で書き直すことができる. この図 8.203 右辺のグラフ  $G_8$  はさらに

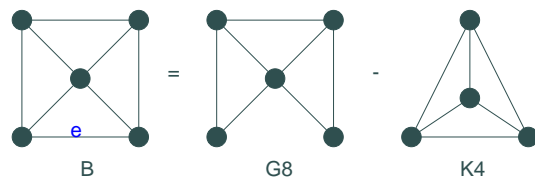


図 8.203: グラフ  $B$  の分解. グラフ  $G_8$  と完全グラフ  $K_4$  で書き直せる.

図 8.204 のように, 既に得られているグラフ  $G_3$  と新たに得られるグラフ  $G_9$  に分解できる. しかし, ここで新たに得られるグラフ  $G_9$  も更なる分解を施すことで図 8.204 のように既に得られている  $G_6$  と完全グラ

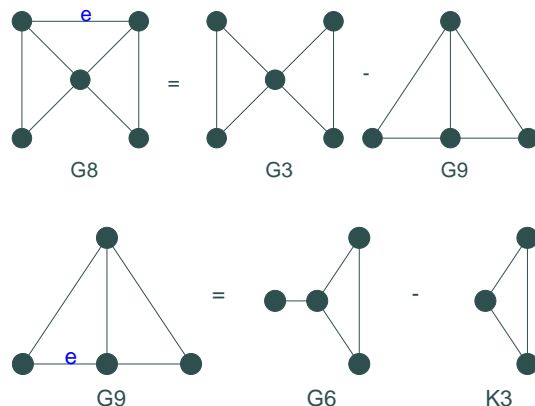


図 8.204: グラフ  $G_8$  の分解. 既に得られているグラフ  $G_3$  と新たに得られるグラフ  $G_9$  で書き直せる. しかし, このグラフ  $G_9$  も既に得られているグラフ  $G_6$  と完全グラフ  $K_3$  に分解できる.

グラフ  $K_3$  に分解することができるので, これらを彩色多項式で書くと

$$\begin{aligned}
 P_B(k) &= P_{G_8}(k) - P_{K_4}(k) \\
 &= \{P_{G_3}(k) - P_{G_9}(k)\} - P_{K_4}(k) \\
 &= P_{G_3}(k) - \{P_{G_6}(k) - P_{K_3}(k)\} - P_{K_4}(k) \\
 &= P_{G_5}(k) - 2P_{G_6}(k) + P_{K_3}(k) - P_{K_4}(k) \\
 &= P_{T_5}(k) - P_{T_4}(k) - 2\{P_{T_4}(k) - P_{T_3}(k)\} + P_{K_3}(k) - P_{K_4}(k) \\
 &= P_{T_5}(k) - 3P_{T_4}(k) + 2P_{T_3}(k) + P_{K_3}(k) - P_{K_4}(k)
 \end{aligned} \tag{8.370}$$

となり, ここでも完全グラフと木の彩色多項式のみで書けるところまで変形できた. そこで,  $P_{K_n}(k), P_{T_n}(k)$  を代入すると

$$\begin{aligned}
 P_B(k) &= k(k-1)^4 - 3k(k-1)^3 + 2k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3) \\
 &= k^5 - 8k^4 + 24k^3 - 31k^2 + 14k
 \end{aligned} \tag{8.371}$$

が得られる. よって, (8.369)(8.371) 式より, 求める彩色多項式は

$$\begin{aligned}
 P_G(k) &= P_A(k) - P_B(k) \\
 &= \{k^6 - 8k^5 + 29k^4 - 39k^3 + 31k^2 - 10k\} \\
 &\quad - \{k^5 - 8k^4 + 24k^3 - 31k^2 + 14k\} \\
 &= k^6 - 9k^5 + 37k^4 - 63k^3 + 62k^2 - 24k
 \end{aligned} \tag{8.372}$$

となる.

ちなみに, 分解公式を使う際, ここで示した辺とは異なる辺  $e$  に対して (8.365) 式を用いても最終的には (8.372) 式に辿り着くことに注意 (途中の経路が異なっても, グラフ  $G$  の彩色多項式は一意に求まらなければならない).

また, この結果をよく見てみると, このグラフ  $G$  の点数  $n$ , 辺数  $m$  はそれぞれ  $n = 6, m = 9$  であるが, 主要項は  $k^n$ , そして  $k^{n-1}$  の係数は  $-m$  となり, 各項の符号は正負が交互に現れている. これはこのグラフ  $G$  のみに対して成り立つ事実なのであろうか?

これを調べるために次のような例題をやってみよう.

**例題 10.7** (2007 年度 演習問題 12)

$G$  は点数  $n$ , 辺数  $m$  の単純グラフであるものとする. このとき, 彩色多項式:  $P_G(k)$  の

- (i) 主要項は  $k^n$  である.
- (ii)  $k^{n-1}$  の係数は  $-m$  である.
- (iii) 各係数の符号は正負が交互に表れる.

をそれぞれ辺数  $m$  に関する数学的帰納法によりそれぞれ証明せよ.

(解答例)

分解公式を用いた彩色多項式計算の簡単な復習.

一般的な場合について証明を始める前に, 特殊な具体的グラフを例にとり, 問題に与えられた彩色多項式に関する 3 つの性質が事実がどうかを確認してみることにしよう. 簡単のため, 具体的に点数 4 の完全グラフ  $K_4$  を例にとる. このとき, 彩色多項式は次のように書ける.

$$P_{K_4}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k \tag{8.373}$$

従って, (i) の最大冪を持つ主要項は  $k^4$  であり, 確かに  $k^n$  である. (ii) の  $k^{n-1}$  の係数は  $-6$  であるが, 完全グラフの辺数  $m$  が  $m = n(n-1)/2$  で与えられたことを思い出すと,  $n = 4$  である今の場合,  $m = 4 \times 3/2 = 6$  であるから, 確かに  $k^{n-1}$  の係数は  $-m$  となっている. また, 各項の符号も正負が交互に現れており, (iii) が成り立っている. 従って, 彩色多項式に関する 3 つの性質のいずれもが,  $K_4$  という特殊なグラフに対して成り立つことがわかった. よって, 以下ではこの事実を一般のグラフに対して示そう. この際, 例によって公式:

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \tag{8.374}$$

を用いる. ただし, ここでは辺数  $m$  についての帰納法を行うため, 辺数  $m$ , 点数  $n$  のグラフ  $G$  に対する彩色多項式を  $P_G^{(m,n)}(k)$  のように書くことにしよう. このとき, グラフ  $G-e$  の辺数は  $m-1$ , 点数が  $n$ , グラフ  $G/e$  の辺数  $m-1$ , 点数  $n-1$  であるから, この定義のもとで分解公式は

$$P_G^{(m,n)}(k) = P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) - P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) \tag{8.375}$$

と書ける. 以下でこの公式 (8.375) を用いて証明を試みる.

- (i)  $m = 1$  のとき, グラフ  $G$  は任意の 2 点が 1 本の辺で結ばれており, 残り  $n-2$  点は孤立点であるべきなので, この場合の彩色多項式は係数も含めて陽に求めることができ

$$P_G^{(1,n)}(k) = k(k-1) \times k^{n-2} = k^n - k^{n-1} \tag{8.376}$$

となる. 従って, 明らかに題意を満たしていることがわかる. 次に辺数  $m-1$  の場合に題意の成立を仮定しよう. つまり, 彩色多項式で書けば

$$P_{G'}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i k^{n-i} \tag{8.377}$$

を辺数  $m$ , 点数  $n$  の任意のグラフ  $G'$  に対して仮定する. 上の式で主要項が  $k^n$  となっていることに注意されたい. このとき, グラフ  $G$  から任意の辺  $e$  を削除したグラフ  $G-e$  の彩色多項式は, グラフ  $G-e$

が辺数  $m - 1$ , 点数  $n$  であることから, 上のグラフ  $G'$  のカテゴリーに入ることを考えて

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i k^{n-i} \tag{8.378}$$

となる. 一方,  $G$  の辺  $e$  を縮約することにより出来上がるグラフ  $G/e$  に関する彩色多項式は, 縮約操作によって点数が  $n - 1$  になっていることに注意して

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) = k^{n-1} + \sum_{i=2}^n \beta_i k^{n-i} \tag{8.379}$$

である. 従って, 分解公式 (8.375) から, 辺数  $m$ , 点数  $n$  のグラフ  $G$  の彩色多項式は

$$P_G^{(m,n)}(k) = k^n - (1 - \alpha_1)k^{n-1} + (k^{n-2} \text{ 以下の項}) \tag{8.380}$$

となる. 従って, 辺数  $m$  の場合にも題意が成立する. 従って, 任意の自然数  $m$  に対して題意が成立する.

(ii)  $m = 1$  のとき, 既に求めているように

$$P_G^{(1,n)}(k) = k^n - k^{n-1} \tag{8.381}$$

であるから題意の成立は明らかである ( $k^{n-1}$  の係数がここでの辺数にマイナス符号を付けたもの  $-1$  になっている). そこで辺数  $m - 1$  のときに題意の成立を仮定する. つまり, 辺数  $m - 1$ , 点数  $n$  のグラフ  $G'$  に対して

$$P_{G'}^{(m-1,n)}(k) = k^n - (m - 1)k^{n-1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i k^{n-i} \tag{8.382}$$

としよう. ここで,  $k^{n-1}$  の係数がここでの辺数  $m - 1$  にマイナス符号を付けたもの  $-(m - 1)$  になっていることに注意する. このとき (i) と同様の考察により

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) = k^n - (m - 1)k^{n-1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i k^{n-i} \tag{8.383}$$

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) = k^{n-1} + \sum_{i=2}^n \beta_i k^{n-i} \tag{8.384}$$

が得られる. 従って, 分解公式 (8.375) を用いると辺数  $m$ , 点数  $n$  のグラフ  $G$  の彩色多項式は

$$\begin{aligned} P_G^{(m,n)}(k) &= k^n - (m - 1)k^{n-1} - k^{n-1} + (k^{n-2} \text{ 以下の項}) \\ &= k^n - mk^{n-1} + (k^{n-2} \text{ 以下の項}) \end{aligned} \tag{8.385}$$

となり, 辺数  $m$  の場合にも題意が成立する ( $k^n$  の係数が辺数  $m$  にマイナス符号をつけたもの  $-m$  となった). 従って, 任意の自然数  $m$  に対して題意が成立する.

(iii)  $m = 1$  の場合には

$$P_G^{(1,n)}(k) = k^n - k^{n-1} \tag{8.386}$$

より題意は成立する. (この場合には2つの項のみであることに注意. しかし, いずれにしても, プラス符号とマイナス符号が交互に現れている.) そこで, 辺数  $m - 1$  の場合に題意の成立を仮定する. つまり, 彩色多項式で書けば

$$P_{G'}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha_i k^{n-i} \tag{8.387}$$

を辺数  $m$ , 点数  $n$  の任意のグラフ  $G'$  に対して仮定する. ただし, 項ごとの符号をファクタ:  $(-1)^i$  で導入した関係で, 全てのインデックス  $i$  に対して  $\alpha_i > 0$  であるとして以下の議論を進めなくてはならないことに注意しよう. また, このファクタ  $(-1)^i$  より, 辺数  $m - 1$  のとき交互にプラス・マイナスの符号が現れることに注意する. すると, (i)(ii) と同様の考察により

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha_i k^{n-i} \tag{8.388}$$

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) = k^{n-1} - \sum_{i=2}^n (-1)^i \beta_i k^{n-i} \tag{8.389}$$

が得られる.  $\alpha_i$  と同様の理由で, 全ての  $i$  に対して  $\beta_i > 0$  である. 従って, 分解公式 (8.375) を用いると辺数  $m$ , 点数  $n$  のグラフ  $G$  の彩色多項式は

$$\begin{aligned} P_G^{(m,n)}(k) &= k^n - k^{n-1} + (-1)\alpha_1 k^{n-1} + \sum_{i=2}^n (-1)^i (\alpha_i + \beta_i) k^{n-i} \\ &= k^n - m k^{n-1} + \sum_{i=2}^n (-1)^i (\alpha_i + \beta_i) k^{n-i} \end{aligned} \tag{8.390}$$

となる. ここで (ii) で示された事実:  $\alpha_1 = m - 1$  を用いた.  $\alpha_i + \beta_i > 0$  より,  $m$  のときの題意の成立 (プラス・マイナスの符号が交互に現れる) が示せたので, 任意の自然数  $m$  に対して題意が成立する.



# 第11回講義

## 9.1 有向グラフ

今まで扱ってきたグラフは各辺に向きは無く、例えば、オイラー小道などを考える際には、辺のどちら向きに進んで道を作っても構わなかった。これに対し、この節からは各辺がそれぞれ向きを持っている「有向グラフ」について、その性質を調べて行くことにする。

### 9.1.1 有向グラフの定義・概念とその性質

弧集合 (arc family)  $A(D)$  : 点集合  $V(D)$  の元の順序対からなる有限族。

有向グラフ (digraph)  $D$  :  $V(D)$  と  $A(D)$  からなるグラフ (図 9.205 参照)。

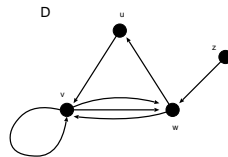


図 9.205: 有向グラフ  $D$  の一例.  $V(D) = \{u, v, w, z\}$ ,  $A(D) = \{uv, vv, vw, wv, ww, wz, zw\}$ .

$D$  の基礎グラフ (underlying graph) : 有向グラフ  $D$  の矢印を取り除いたグラフ (図 9.205 参照)。

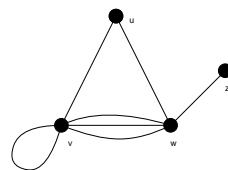


図 9.206: 図 9.205 の有向グラフに対する基礎グラフ。

単純有向グラフ (simple digraph) :  $D$  の弧が全て異なり、ループが無いグラフ。

(注) : 単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフではない (図 9.207 参照)。

有向グラフの同形 : 基本グラフの間に同形写像があり、各点の順序を保存する写像になっているとき。

例えば、図 9.208 のグラフ  $A$  と  $B$  は同形ではない。  $wz$  の向きが異なるからである。

有向グラフ  $D$  の隣接行列  $A = (a_{ij})$  : 要素  $a_{ij}$  が  $v_i$  から  $v_j$  への「弧」の本数を表す、サイズ  $n$  のグラフに対して  $n \times n$  の行列。

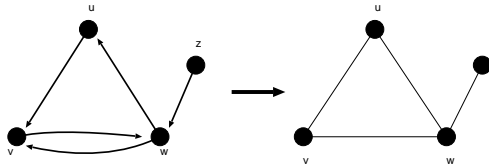


図 9.207: 図 2.17 の単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフではない。

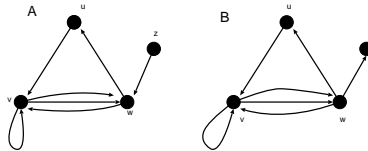


図 9.208: これら有向グラフ A と B は同形ではない。辺  $\overleftrightarrow{vw}$  の向きが異なるからである。

(注) : 無向グラフの場合と異なり, 行列  $A$  は非対称であることに注意されたい。

図 9.209 の有向グラフ D の隣接行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

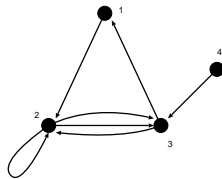


図 9.209: その隣接行列が で与えられる有向グラフ D.

強連結 (strongly connected) : 任意の 2 点  $v, w$  の間に  $v$  から  $w$  への道がある。

向き付け可能 (orientable) : グラフ  $G$  の全ての辺を方向付けて強連結有向グラフが得られるとき (例として図 9.210 参照)。

**定理 22.1**  
 連結グラフ  $G$  が向き付け可能であるための必要十分条件, グラフ  $G$  の各辺が少なくとも 1 つの閉路に含まれていることである。

(証明)

必要性は明らかなので十分性を示す。

まず, グラフ  $G$  の全てが閉路が含まれている場合には証明は終わる。従って, 以下ではこれ以外の場合を考える。

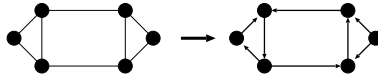


図 9.210: 向き付け可能なグラフの一例.

さて、閉路  $C$  には含まれないが、 $C$  の各辺に隣接している辺  $e$  を選ぶ (図 9.211 参照). 「グラフ  $G$  の各辺

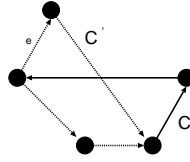


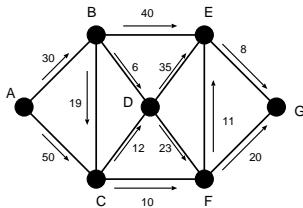
図 9.211: 閉路  $C$  と  $C'$ .

が少なくとも 1 つの閉路に含まれている」のであるから、 $e$  はある閉路  $C'$  に含まれている.  $C'$  の辺を  $C$  にも含まれている  $C'$  の辺の向きは変えないで向き付ける. この操作でできる有向グラフは強連結である.

従って、この操作を続けて、各ステップで少なくとも 1 つの辺を向き付ける. 各ステップで有向グラフは強連結なので、グラフ全体を向き付けた後にできるグラフは強連結である. (証明終わり).  
有向グラフの応用問題として、次の例題を見ておこう.

**例題 11.1** (2003 年度 レポート課題 #10 問題 2)

図のネットワークで点  $A$  から点  $G$  への最長路を見つけよ.



(解答例)

点  $A$  からの各点  $V$  への最長路の長さを示す数値  $l(V)$  計算すると

- A : 0
- B :  $l(A) + 30 = 30$
- C :  $l(A) + 50 = 50$
- D :  $\max\{l(B) + 6, l(C) + 12\} = \max\{36, 62\} = 62$
- F :  $\max\{l(D) + 23, l(C) + 10\} = \max\{85, 60\} = 85$
- E :  $\max\{l(B) + 40, l(D) + 35, l(F) + 11\} = \max\{70, 97, 96\} = 97$
- G :  $\max\{l(E) + 8, l(F) + 20\} = \max\{105, 105\} = 105$

となるから、最長路の長さは 105 であり、最長路を図 9.212 に載せる.

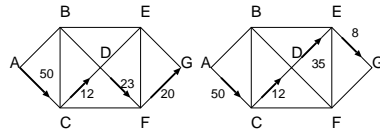


図 9.212: 最長路を与える 2 通りの経路. どちらも最長路の長さは 105 である.

**例題 11.2** (2003 年度 レポート課題 #10 問題 1)

有向グラフ  $D$  の逆  $\bar{D}$  は  $D$  の辺の向きを反転して得られる. 以下の問題に答えよ.

- (1) その逆と同形であるような有向グラフの一例を描け.
- (2)  $D$  と  $\bar{D}$  の隣接行列の間にはどんな関係があるか, 答えよ.

(解答例)

- (1) 互いに同形であるような有向グラフ  $D$  及び, その逆  $\bar{D}$  を図 9.213 に描く.

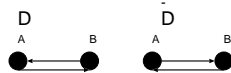


図 9.213: 互いに同形であるような有向グラフ  $D$  及び, その逆  $\bar{D}$  の一例.

- (2) 図 9.214 に載せた基礎グラフ  $G$  に対して有向グラフ  $D$  及び, その逆  $\bar{D}$  を作り, それぞれの隣接行列  $A_G, A_D, A_{\bar{D}}$  を書き下してみると

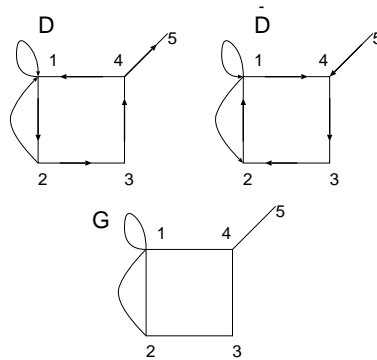


図 9.214: 例として考える基礎グラフ  $G$ , 有向グラフ  $D$  及び, その逆  $\bar{D}$ .

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{\bar{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.391)$$

となる.  $A_D + A_{\bar{D}}$  を作ってみると

$$A_D + A_{\bar{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.392}$$

が得られるが, これは一行一列成分 ( $[A_D + A_{\bar{D}}]_{11}$ ) だけが異なる以外は基礎グラフの隣接行列と一致する. この食い違いが生じた成分は基礎グラフの「ループ」に相当する. 従って, ループが無い基礎グラフに関しては関係式:

$$A_G = A_D + A_{\bar{D}} \tag{9.393}$$

が成立することがわかる. ループを含むグラフに関しても, 非対角成分に限れば上関係式が成り立つ.

ここでは図 9.214 に載せた特定のグラフに関して議論したが, これが一般のグラフに関しても成り立つのは明らかである. グラフの逆は辺の向きを逆転してできるわけであるから, 一方のグラフで弧  $vw$  が存在するならば, その逆のグラフでは  $wv$  は存在しない. 従って, ループが無い場合には関係式 (9.393) の非対角成分に関して  $[A_G]_{vw} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vw}$  が成り立つ. ループがある場合には各隣接行列に対して  $[A_D]_{vv} = [A_{\bar{D}}]_{vv}$  が成り立つわけであるから, 関係式 (9.393) の対角成分に関して  $2[A_G]_{vv} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vv}$  が成り立つ. ループが無い場合には隣接行列の対角成分はゼロであるから, 関係式 (9.393) を成分で書けば全ての場合に関して, 異なる任意の 2 点  $v, w$  に対し

$$[A_G]_{vw} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vw} \tag{9.394}$$

$$2[A_G]_{vv} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vv} \tag{9.395}$$

が成り立つ.

### 9.1.2 オイラー有向グラフとトーナメント

連結有向グラフ  $D$  の全ての弧を含む閉じた小道が存在する場合, その有向連結グラフ  $D$  をオイラーであると言う. 図 9.215 に載せた例は, オイラーではないが, その基礎グラフはオイラーである場合である.

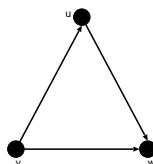


図 9.215: オイラー有向グラフではないが, その基礎グラフはオイラーであるグラフの一例.

出次数 (out-degree)  $\text{outdeg}(v)$  :  $vw$  の形をした有向グラフ  $D$  の弧数.

入次数 (in-degree)  $\text{indeg}(v)$  :  $wv$  の形をした有向グラフ  $D$  の弧数.

**握手有向補題**

有向グラフ  $D$  の全点についての入次数の合計と出次数の合計は等しい。

**定理 23.1**

連結有向グラフ  $D$  がオイラーであるための必要十分条件は、 $D$  の各点で  $\text{outdeg}(v) = \text{indeg}(v)$  が成立することである。

ハミルトン有向グラフ (Hamiltonian digraph) : 全ての点を含む閉路がある有向グラフ。

半ハミルトン有向グラフ (semi-Hamiltonian digraph) : 全ての点を通る道があるグラフ。

**定理 23.2**

$D$  は強連結有向グラフであり、点が  $n$  個あるとする。各点  $v$  に対し、 $\text{outdeg}(v) \geq n/2$ , かつ、 $\text{indeg}(v) \geq n/2$  ならば、 $D$  はハミルトン有向グラフである。

トーナメント (tournament) : 任意の 2 点がちょうど 1 本の弧で結ばれている有向グラフ (図 9.216 参照)。

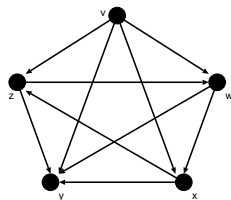


図 9.216: トーナメントの一例。

**定理 23.3**

- (i) ハミルトンでないトーナメントは全て半ハミルトンである。
- (ii) 強連結なトーナメントは全てハミルトンである。

(証明)

(i) 点  $n$  個のトーナメントは全て半ハミルトンであると仮定する。  $T'$  には点が  $n$  個あるので、半ハミルトン道がある (図 9.217 参照)。

- (1)  $vv_1$  が  $T$  の弧ならば、 $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$  が所望の道である。
- (2)  $vv_1$  が  $T$  の弧ではなく、 $v_1v$  が  $T$  の弧であれば、図 9.218 のように点  $v_i$  を選べばよい。
- (3)  $vv_i$  の形をした弧が  $T$  にないのであれば、 $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v$  が所望の道である。(証明終わり)。

最後にトーナメント (「トーナメントが推移的である」という概念) に関する例題を一つ見ておこう。

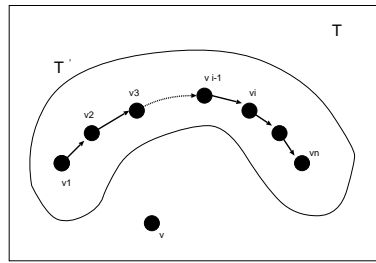


図 9.217:  $T'$  には半ハミルトン道がある.

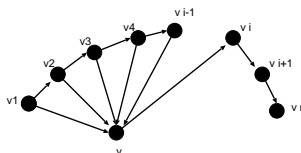


図 9.218:  $vv_1$  が  $T$  の弧ではなく,  $v_1v$  が  $T$  の弧であれば, 図のように点  $v_i$  を選べばよい.

**例題 11.3** (2003 年度 レポート課題 #10 問題 3)

トーナメントが推移的であるというのは, 弧  $uv$  と  $vw$  があれば必ず弧  $uw$  があることである. 以下の問いに答えよ.

- (1) 推移的トーナメントの一例を描け.
- (2) 推移的トーナメントにおいては全てのチームに順位を付けられることを示せ. ただし, どのチームもそれより下位のチーム全てを負かしていなければならないものとする.
- (3) 点が 2 個以上ある推移的トーナメントは強連結になり得ないことを示せ.

(解答例)

- (1) 推移的トーナメントグラフの一例を図 9.219 に載せる.

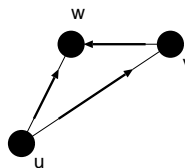


図 9.219: 推移的トーナメントグラフの一例.

- (2) 図 3.47 に示したグラフにおいて, 点  $k = u, v, w$  出次数:  $\text{outdeg}(k)$  及び 入次数:  $\text{indeg}(k)$  と順位の関係を書くと

1 位 ( $u$ ) :  $\text{outdeg}(u) = 2, \text{indeg}(u) = 0$

2 位 ( $v$ ) :  $\text{outdeg}(v) = 1, \text{indeg}(v) = 1$

3 位 ( $w$ ) :  $\text{outdeg}(w) = 0, \text{indeg}(w) = 2$

となる。従って、 $\text{outdeg}$  の多い順 (あるいは  $\text{indeg}$  の少ない順) に 1 位から 3 位への順位が付けられる。また、推移的トーナメントの定義から  $\text{outdeg}$  あるいは  $\text{indeg}$  の数が等しい点が見れることはあり得ないから、全てのチームに順位をつけることができる。

- (3) 点が 2 個以上ある推移的トーナメントのグラフならば、必ず  $\text{outdeg}(k) = 0$  となるような点  $k$  が存在するから、強連結にはなり得ない。

**例題 11.4** (2005 年度 演習問題 11)

以下の問いに答えよ。

- (1) ハミルトン・グラフは全て向き付け可能であることを示せ。
- (2)  $K_n$  ( $n \geq 3$ ), および,  $K_{r,s}$  ( $r, s \geq 2$ ) は向き付け可能であることを、個々のグラフの向き付けを具体的に見つけることにより示せ。
- (3) ピーターソン・グラフの向き付けを見つけよ。

(解答例)

- (1) ハミルトン・グラフには全ての点を一度ずつ通って元に戻るハミルトン閉路が存在するので、この閉路に沿って各辺を向き付けすれば (この閉路に属さない辺への向き付けの仕方は任意), 任意の点  $v$  をスタートし、任意の点  $w$  に到達できる道がこの閉路上にあることは明らか。従って、ハミルトン・グラフは向き付け可能である。
- (2) 完全グラフ  $K_n$  ( $n \geq 3$ ) の場合には任意の点  $v$  の次数が  $\text{deg}(v) = n - 1$  であるから、Dirac の定理より、グラフ内の全ての点  $v$  に対し  $\text{deg}(v) \geq n/2$  が成立するのでハミルトン閉路が存在するハミルトン・グラフである。従って、(1) の結果より、向き付け可能である。具体的にはハミルトン閉路に属する辺をまずその向きに向き付けし、残りの辺に任意に向き付けを行えばよい (図 9.220(左) 参照)。次に完

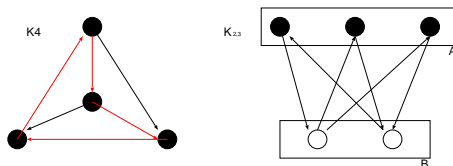


図 9.220:  $K_4$  の向き付け (左) と  $K_{2,3}$  の向き付け (右)。

全二部グラフ  $K_{r,s}$  ( $r, s \geq 2$ ) の場合には、必ず全ての辺が ABAB という長さ 4 の閉路に含まれるので (A, B とはそれぞれの点があるどちらかに含まれる 2 つのグループを指す), 定理 22・1 「連結グラフが向き付け可能であるための必要十分条件は、各辺が少なくとも 1 つの閉路に含まれることである」より、向き付けが可能であり、この順: ABAB に各辺に対し向き付けを行えば良い (図 9.220(右) 参照)。

- (3) 図 9.221 参照。

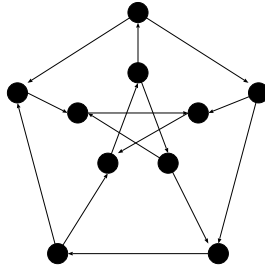


図 9.221: ピーターズン・グラフの向き付け.

**例題 11.5** (2006 年度 演習問題 11)

$v_1, v_2, \dots, v_N$  を有向グラフ  $D$  の点とする. 成分  $a_{ij}$  を始点が  $v_i$ , 終点が  $v_j$  である  $D$  の弧の個数とするような  $N \times N$ - 行列  $A$  を有向グラフ  $D$  の隣接行列とすると,  $A^k$  の  $(i, j)$  成分は  $D$  における長さ  $k$  の有向  $(v_i, v_j)$  歩道の個数となることを示せ.

(解答例)

まずは,  $A^2$  の成分を書き出してみると

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^n a_{1l}a_{l1} & \sum_{l=1}^n a_{1l}a_{l2} & \cdots & \cdots & \sum_{l=1}^n a_{1l}a_{ln} \\ \sum_{l=1}^n a_{2l}a_{l1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{l=1}^n a_{nl}a_{l1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{l=1}^n a_{nl}a_{ln} \end{pmatrix} \tag{9.396}
 \end{aligned}$$

となる. 従って, この第  $(i, j)$  成分は

$$[A^2]_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il}a_{lj} \tag{9.397}$$

であるが, この和の中で,  $a_{il}$  は点  $v_i$  から出発して点  $v_l$  へ至る  $v_i \rightarrow v_l$  の形の弧の個数を表している. また,  $a_{lj}$  は点  $v_l$  から出発して点  $v_j$  へ至る  $v_l \rightarrow v_j$  の形の弧の個数を表している. 従って, これらを掛け合わせた  $a_{il}a_{lj}$  は点  $v_i$  から出発し, 中継点  $v_l$  を経由し, 点  $v_j$  へ至る  $v_i \rightarrow v_l \rightarrow v_j$  の形をした弧の個数に等しい. 従って,  $[A^2]_{ij}$  は全ての可能な中継点に関して和をとったものであるから, 結局, 長さ 2 の  $(v_i, v_j)$  有向歩道の個数を表している.

この議論を  $A^k$  へと拡張することはたやすい.

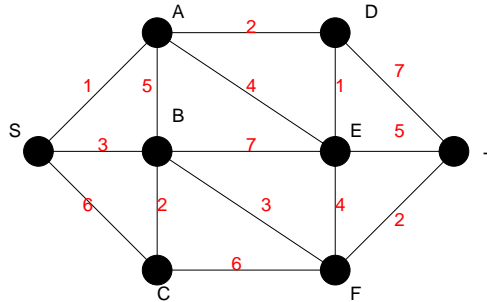
$$[A^k]_{ij} = \sum_{l_1=1}^n \sum_{l_2=1}^n \cdots \sum_{l_{k-1}=1}^n a_{il_1}a_{l_1l_2} \cdots a_{l_{k-2}l_{k-1}}a_{l_{k-1}j} \tag{9.398}$$

であるから,  $a_{il_1}$  は弧  $i \rightarrow l_1$  の個数,  $a_{l_1l_2}$  は弧  $l_2 \rightarrow l_1$  の個数,  $\dots$ ,  $a_{l_{k-1}j}$  は弧  $j \rightarrow l_{k-1}$  の個数なので,  $a_{il_1}a_{l_1l_2} \cdots a_{l_{k-2}l_{k-1}}a_{l_{k-1}j}$  は中継点  $\{v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_{k-1}}\}$  を経由する長さ  $k$  の有向歩道の個数を表すことに

なる。よって、全ての中継点の組み合わせについて和をとった (9.398) 式は長さ  $k$  の  $(v_i, v_j)$  有向歩道の個数を表す。

**例題 11.6** (2007 年度 演習問題 11)

隣接行列 (あるいはグラフを特徴付ける他の行列を使っても良い), および, 始点と終点を与えれば自動的にその最短路と最短路長を出力するようなプログラムを作成し, 具体的に図



に与えたグラフ (始点 S, 終点 T) に対する動作結果を示せ (プログラムを添付すること).

(解答例)

下記にサンプルプログラムを載せる.

```

/*****
/*   Graph Theory 2007 exam.#11 Sample program to find the shortest path   */
/*                                     J. Inoue                               */
*****/
#include<stdio.h>
#define N 8 /* # of points */
/* Main Program */
main()
{
    int flag[N]; /* フラグ (その点への最短経路が確定したら 1, しなれば 0) */
    int distance[N]; /* 各点への最短距離 */
    int root_point[N]; /* 最短経路上の各点の一つ手前の点 */
    int i,j;
    /* 各配列の初期化 */
    for(i=0; i <= N-1; i++){
        flag[i]=0;
        distance[i]=-1;
        root_point[i]=0;
    }
    /* グラフのデータ構造 : 8 x 8 隣接行列 */
    /* 点 i,j を結ぶ辺の長さが<ij>成分 */
    /* 辺が無い点対の成分は便宜上-1 としてあることに注意 */
    int adjacent[N][N]={
        {-1,1,3,6,-1,-1,-1,-1},

```

```
    {1,-1,5,-1,2,4,-1,-1},
    {3,5,-1,2,-1,7,3,-1},
    {6,-1,2,-1,-1,-1,6,-1},
    {-1,2,-1,-1,-1,1,-1,7},
    {-1,4,7,-1,1,-1,4,5},
    {-1,-1,3,6,-1,4,-1,2},
    {-1,-1,-1,-1,7,5,2,-1}
};
/* それぞれの点を表す記号を便宜上数字に対応させておく*/
printf("// Define as S==0,A==1,B==2,C==3,D==4,E==5,F==6,T==7 //\n");
printf("\n");

/* 初期化 */
distance[0]=0; /* 当然点 S への最短距離はゼロ */
flag[0]=1; /* これも当然だが、点 S のフラグに 1 を立てておく*/
int count=0;
int min, min_number;
/* 未訪問の点がなくなるまで以下を繰り返す */
while(count<N){
    min=-1;
    for(i=0; i<=N-1; i++){
        /* フラグが 1 の点から移動先を探す */
        if(flag[i]==1){
            for(j=0; j<=N-1; j++){
                /* 未訪問かつ移動可能な点 */
                if((flag[j]==0) && (adjacent[i][j]!=-1)){
                    /* 最短道であるための条件分岐 */
                    if((distance[i]+adjacent[i][j]<min) || (min==--1)){
                        min=distance[i]+adjacent[i][j];
                        /* 選択道 */
                        min_number=j; }
                }
            }
            /* 各道に対する最短路が新たに見つかったら更新 */
            if((distance[i]+adjacent[i][j]<distance[j]) || (distance[j]==-1)){
                distance[j]=distance[i]+adjacent[i][j];
                root_point[j]=i;
            }
        }
    }
}
/* 距離最小なところは最短経路確定するのでフラグを 1 に */
flag[min_number]=1;
}
count++;
}
```

```
/* 最後に計算データを出力 */
for(i=0; i<=N-1; i++){
    printf("// The shortest distance to point %d is distance[%d]=%d //\n",i,i,distance[i]);
}

    printf("\n");
    printf("// The previous point for each point on the shortest path //\n");
    printf("\n");
for(i=0; i <=N-1; i++){
printf("root_point[%d]=%d\n",i,root_point[i]);
}

    printf("\n");
    printf("// The shortest path //\n");
    printf("\n");

i=7;
    printf("%d",i);
    while(i!=0){
        printf(" <== %d",root_point[i]);
        i=root_point[i];
    }
    printf("\n");
}
```

この実行結果は次のようになる.

```
// Define as S==0,A==1,B==2,C==3,D==4,E==5,F==6,T==7 //

// The shortest distance to point 0 is distance[0]=0 //
// The shortest distance to point 1 is distance[1]=1 //
// The shortest distance to point 2 is distance[2]=3 //
// The shortest distance to point 3 is distance[3]=5 //
// The shortest distance to point 4 is distance[4]=3 //
// The shortest distance to point 5 is distance[5]=4 //
// The shortest distance to point 6 is distance[6]=6 //
// The shortest distance to point 7 is distance[7]=8 //

// The previous point for each point on the shortest path //

root_point[0]=0
root_point[1]=0
root_point[2]=0
root_point[3]=2
root_point[4]=1
root_point[5]=4
root_point[6]=2
root_point[7]=6
```

```
// The shortest path //
```

```
7 <== 6 <== 2 <== 0
```



## 第12回講義

### 9.1.3 マルコフ連鎖

ここでは、自然科学、社会科学、工学等、様々な場面で用いられる「マルコフ連鎖」のグラフを用いた表現法について学ぶ。

1次元酔歩：酔っ払いが各時刻で右左にそれぞれ確率  $1/3, 1/2$  で動き、確率  $1/6$  で現在の位置に留まる。また、 $E_1, E_6$  に到達するとその場を離れないとする (図 9.222 参照)。この場合の酔っ払いの位置  $E_1, \dots, E_6$

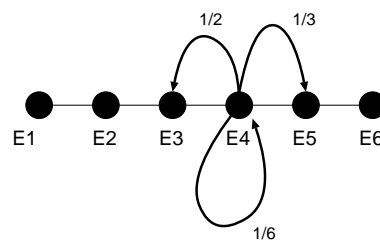


図 9.222: 1次元酔歩の一例.

に滞在する確率をを時間の関数として調べる。

酔っ払いの最初の位置を  $E_4$ 、すなわち、 $x = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$  で酔っ払いの動きを指定する。ここで、ベクトル  $x$  の各成分  $i$  は、位置  $E_i$  に酔っ払いがいる確率を表す。従って、1, 2 分後にはそれぞれこの状態ベクトルは

$$x_1 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad x_2 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{13}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$$

となる。

このような状態ベクトルを算出するために、遷移行列 (transition matrix) :  $P = (P_{ij})$  を導入すると便利である。この行列の  $ij$  成分  $P_{ij}$  は遷移確率 (transition probability) と呼ばれ、ある時刻から 1 分後に、酔っ払いが  $E_i$  から  $E_j$  に移動する確率を表す。従って、上の酔っ払いの例では

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

ここで、酔っ払いのスタート地点での状態ベクトルを  $x_0 = (p_0^1, p_0^2, p_0^3, p_0^4, p_0^5, p_0^6)$  とし、それから 1 分後の状態ベクトルを  $x_1 = (p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_1^5, p_1^6)$  と定めると

$$x_1 = x_0 P \tag{9.399}$$

なる関係が成り立つ。具体的に成分で書き下すと

$$\begin{aligned} (p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_1^5, p_1^6) &= (p_0^1, p_0^2, p_0^3, p_0^4, p_0^5, p_0^6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left( p_0^1 + \frac{p_0^2}{2}, \frac{p_0^2}{6} + \frac{p_0^3}{2}, \frac{p_0^3}{3} + \frac{p_0^4}{6} + \frac{p_0^5}{2}, \frac{p_0^4}{3} + \frac{p_0^5}{6} + \frac{p_0^6}{2}, \frac{p_0^5}{3} + \frac{p_0^6}{6} + \frac{p_0^6}{2}, \frac{p_0^6}{6} + p_0^6 \right) \end{aligned} \tag{9.400}$$

となる。ここで、例えば

$$p_1^1 = p_0^1 + \frac{1}{2} p_0^2 \tag{9.401}$$

は  $t = 0$  に  $E_1$  にいた場合、確率 1 で  $E_1$  にとどまり、 $E_2$  にいた場合、確率  $1/2$  で  $E_1$  に移ることを意味している。

**例題 12.1** (2003 年度 レポート課題 #10 問題 4)

$P$  と  $Q$  が遷移行列ならば、 $PQ$  も遷移行列であることを例を挙げて示せ。また、 $P$  と  $Q$  の関連有効グラフと  $PQ$  の間の関係を例を挙げて説明せよ。

(解答例)

まず、図 9.223 のような状態遷移グラフの遷移行列  $P$  は

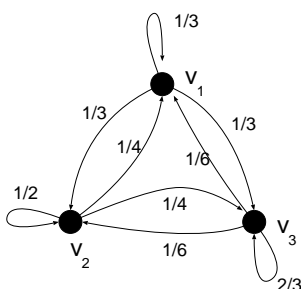


図 9.223: 遷移行列  $P$  で与えられる有向グラフ。

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{9.402}$$

となる。一方、図 9.224 に与えた状態遷移グラフに関する遷移行列  $Q$  は

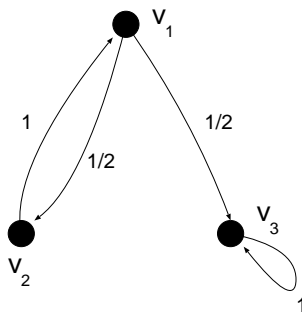


図 9.224: 遷移行列  $Q$  で与えられる有向グラフ.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.403}$$

となる.

例えば, 時刻  $t = 0$  で  $v_1, v_2, v_3$  に「粒子」が居る確率を  $p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)$  とし, これを状態ベクトルとして  $\vec{p}(0) = (p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0))$  と書くことにすると, 次の時刻  $t = 1$  での状態ベクトル  $\vec{p}(1)$  は

$$\begin{aligned} (p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) &= (p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{3}p_{v_1}(0) + \frac{1}{4}p_{v_2}(0) + \frac{1}{6}p_{v_3}(0), \frac{1}{3}p_{v_1}(0) + \frac{1}{2}p_{v_2}(0) + \frac{1}{6}p_{v_3}(0), \frac{1}{3}p_{v_1}(0) + \frac{1}{4}p_{v_2}(0) + \frac{2}{3}p_{v_3}(0) \right) \end{aligned}$$

となり,  $t = 0$  に粒子が  $v_1$  に居たとすれば  $p_{v_1}(0) = 1, p_{v_2}(0) = p_{v_3}(0) = 0$  であり, このとき, 1 秒後にそれぞれの点に粒子が移る確率 (存在確率) は

$$(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \tag{9.404}$$

となる (図 9.223 参照).

ここで, 注意すべきなのは, 遷移行列においては各行の和は 1 になっていなければならないことである. これは各点から 1 秒後には必ず (現在居る点も含めた) 「どこか」に移動しなければならないからである. さて, 行列の積  $PQ$  を計算してみると

$$PQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \tag{9.405}$$

となっており, 確かにこの行列  $PQ$  の各行の和は 1 になっている. 従って,  $PQ$  は遷移行列である. この行列  $PQ$  で表される状態遷移グラフを描くと図 9.225 のようになっている.  $t = 0$  から  $t = 1$  への 1 ステップで状態ベクトルは

$$(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) = (p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

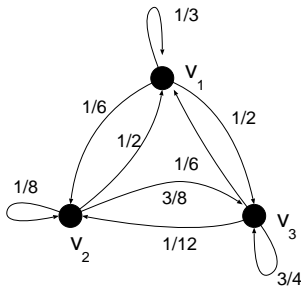


図 9.225: 遷移行列  $PQ$  で与えられる有向グラフ.

$$= \left( \frac{p_{v_1}(0)}{3} + \frac{p_{v_2}(0)}{2} + \frac{p_{v_3}(0)}{6}, \frac{p_{v_1}(0)}{6} + \frac{p_{v_2}(0)}{8} + \frac{p_{v_3}(0)}{12}, \frac{p_{v_1}(0)}{2} + \frac{3p_{v_2}(0)}{8} + \frac{3p_{v_3}(0)}{4} \right) \tag{9.406}$$

となる.

**例題 12.2** (2004 年度 問題 11)

1. 有向グラフ  $D$  の各点が整数の対  $\{11, 12, 21, 22\}$  で表され,  $j = k$  のとき, 点  $ij$  と  $kl$  が弧で結ばれるものとする. このとき,  $D$  を図示し, そのオイラー小道が存在するならばそれを求めよ.

2. マルコフ連鎖と有向グラフに関して以下の問いに答えよ.

(1) その遷移行列  $P$  が

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

で与えられる 3 状態 (a,b,c と名付ける) の状態遷移を表す有向グラフを描け. ただし, 行列の行の増える方向に a,b,c と点に名前を付けること.

(2) 時刻  $t = 0$  で, この酔っ払いが a にいる, つまり, 状態ベクトルが  $x = (1, 0, 0)$  とするとき,  $t = 1, 2$  において, この酔っ払いが a,b,c に居る確率  $(p_a(1), p_b(1), p_c(1))$ , 及び,  $(p_a(2), p_b(2), p_c(2))$  をそれぞれ求めよ.

(3)  $t = n$  で, この酔っ払いが a,b,c に居る確率  $p_a(n), p_b(n), p_c(n)$  をそれぞれ求めよ.

(解答例)

1.  $\{11, 12, 21, 22\}$  において,  $j = k$  が成り立つときのみ, 点  $ij$  と  $kl$  が弧で結ばれることを考えると, 各点から他点へ描くことのできる弧は次のようになる.

$$\begin{aligned} 11 &\rightarrow 12, & 12 &\rightarrow \begin{cases} 21 \\ 22 \end{cases} \\ 21 &\rightarrow \begin{cases} 11 \\ 12 \end{cases}, & 22 &\rightarrow 21 \end{aligned}$$

のようになり、これらの関係をグラフで表すと図 9.226 のようになる。この図 9.226 から、このグラ

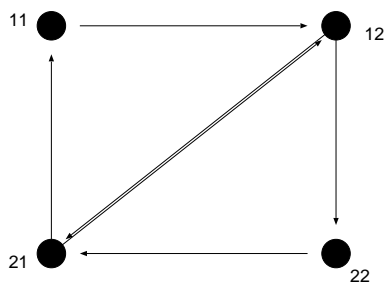


図 9.226:  $\{11, 12, 21, 22\}$  において、「 $j = k$  が成り立つときのみ、点  $ij$  と  $kl$  が弧で結ばれる」規則で出来上がる有向グラフ。

フは連結有向グラフ (これを  $D$  と名付けよう) であり、この連結有向グラフ  $D$  がオイラー・グラフであるための必要十分条件は、 $D$  の各点で入次数と出次数が等しい、つまり、 $D$  の任意の点  $v$  において、 $\text{outdeg}(v) = \text{indeg}(v)$  が成り立つことであるから (前回の定理 23.1 を参照のこと)、図のグラフにおいてこれを調べると

$$\begin{aligned} \text{outdeg}(11) &= 1 = \text{indeg}(11) \\ \text{outdeg}(12) &= 2 = \text{indeg}(12) \\ \text{outdeg}(21) &= 2 = \text{indeg}(21) \\ \text{outdeg}(22) &= 1 = \text{indeg}(22) \end{aligned}$$

となり、確かにこの条件を満たしている。従って、オイラー小道が存在し、それは、 $11 \rightarrow 12 \rightarrow 21 \rightarrow 12 \rightarrow 22 \rightarrow 21 \rightarrow 11$  である。

2. 問題文に与えられた誘導に従う。

- (1) 遷移確率が問題文の  $P$  で与えられるグラフを描くと図 9.227 のようになる。ただし、各弧に付された数字は各状態間の遷移確率を表す。

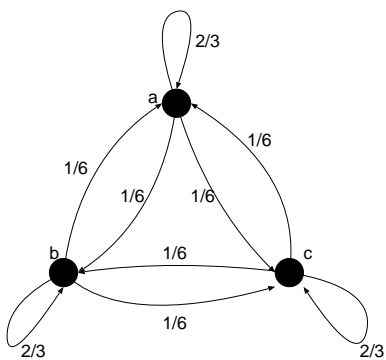


図 9.227: 遷移確率が  $P$  で与えられる 3 状態  $a, b, c$  間遷移の様子を表すグラフ。

- (2)(3) 時刻  $t = n, n + 1$  における状態ベクトル :  $\mathbf{x}^n \equiv (p_a(n), p_b(n), p_c(n)), \mathbf{x}^{n+1} \equiv (p_a(n + 1), p_b(n + 1), p_c(n + 1))$  間には遷移確率  $P$  を介して

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n P \tag{9.407}$$

なる関係, すなわち,

$$(p_a(n+1), p_b(n+1), p_c(n+1)) = (p_a(n), p_b(n), p_c(n)) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (9.408)$$

従って

$$p_a(n+1) = \frac{2}{3} p_a(n) + \frac{1}{6} p_b(n) + \frac{1}{6} p_c(n) \quad (9.409)$$

$$p_b(n+1) = \frac{1}{6} p_a(n) + \frac{2}{3} p_b(n) + \frac{1}{6} p_c(n) \quad (9.410)$$

$$p_c(n+1) = \frac{1}{6} p_a(n) + \frac{1}{6} p_b(n) + \frac{2}{3} p_c(n) \quad (9.411)$$

が成り立つ。後は、これらの確率に関する連立漸化式を解けばよい。どのような解き方でも良いのだが、各時刻  $n$  での確率の規格化条件:  $p_a(n) + p_b(n) + p_c(n) = 1$  (各時刻で酔っ払いは a, b, c のいずれかには必ず居る) から、 $p_c(n) = 1 - p_a(n) - p_b(n)$  を用いて、連立漸化式を書き直すと

$$p_a(n+1) = \frac{1}{2} p_a(n) + \frac{1}{6} \quad (9.412)$$

$$p_b(n+1) = \frac{1}{2} p_b(n) + \frac{1}{6} \quad (9.413)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} p_a(n) \\ p_b(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p_a(0) \\ p_b(0) \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad (9.414)$$

となる。よって、例えば  $p_a(n)$  の一般項は

$$p_a(n) = \frac{1}{2^n} p_a(0) + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} p_a(0) + \frac{1}{6} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} p_a(0) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (9.415)$$

となる。従って、当然、 $p_b(n)$  も

$$p_b(n) = \frac{1}{2^n} p_b(0) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (9.416)$$

であり、このとき  $p_c(n)$  は

$$p_c(n) = 1 - \frac{1}{2^n} (p_a(n) + p_b(n)) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (9.417)$$

となる。

従って、あとは「この酔っ払いは時刻  $t = 0$  で b に居た」という初期条件:  $p_a(0) = 0, p_b(0) = 1, p_c(0) = 0$  を上に得られた一般項に代入して

$$p_a(n) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (9.418)$$

$$p_b(n) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad (9.419)$$

$$p_c(n) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (9.420)$$

が得られる。

例題 12.3 (2005 年度 演習問題 12)

円卓のまわりの 5 人 (A, B, C, D, E さんと名づけ, この順に時計まわりに着席しているとする) が 1 つのサイコロで行うゲームを考える. 各ラウンドでサイコロの 1, 2 の目が出たときには, その左隣りの人が次に振るものとし, 3, 4, 5 が出たときには右隣りの人が次に振るものとし, 6 の目が出たときに限り, 同じ人がもう一度サイコロを振るものとする. このとき

- (1) 遷移行列を書き, 状態遷移図を描け.
- (2) このマルコフ連鎖はエルゴード的か否か, 理由を付して答えよ.
- (3) 始めに A さんがサイコロを振るとき, 5 ラウンド目に再び A さんがサイコロを振ることになる確率を求めよ.

(解答例)

(1) 遷移行列  $P$  は

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{9.421}$$

であり, 対応する状態遷移のグラフ表現は図 9.228 である.

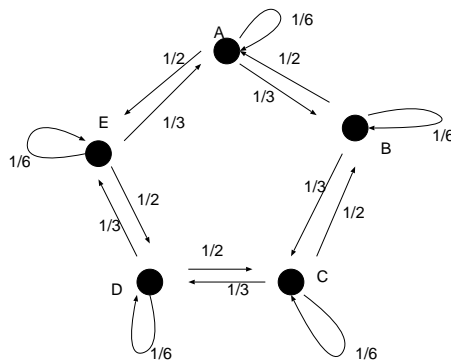


図 9.228: 遷移行列  $P$  に対応する有向グラフ.

(2)  $P^2$  を計算してみると

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} \end{pmatrix} \tag{9.422}$$

となるが, これは全ての行列要素が正の値であるような行列であり, 従って, 任意の  $n(n \geq 2)$  に対しても,  $P^n$  の行列要素は全て正の値を持つ. 従って,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$  の行列要素も全て正であるので, 任意の

状態から任意の状態へ移動することが可能である。従って、各状態は永続的 ( $i$  から  $j$  への道があれば、 $j$  から  $i$  への道がある) かつ非周期的 ( $p_{ii} \neq 0$ ) であるので、このマルコフ連鎖はエルゴード的である。

(3)  $P^5$  を計算すると

$$P^5 = \begin{pmatrix} \frac{1476}{7776} & \frac{1495}{7776} & \frac{1600}{7776} & \frac{1490}{7776} & \frac{1715}{7776} \\ \frac{1715}{7776} & \frac{1476}{7776} & \frac{1495}{7776} & \frac{1600}{7776} & \frac{1490}{7776} \\ \frac{1490}{7776} & \frac{1715}{7776} & \frac{1476}{7776} & \frac{1495}{7776} & \frac{1600}{7776} \\ \frac{1600}{7776} & \frac{1490}{7776} & \frac{1715}{7776} & \frac{1476}{7776} & \frac{1495}{7776} \\ \frac{1495}{7776} & \frac{1600}{7776} & \frac{1490}{7776} & \frac{1715}{7776} & \frac{1476}{7776} \end{pmatrix} \tag{9.423}$$

であるので、状態ベクトルを  $x(t) = (p_A(t), p_B(t), p_C(t), p_D(t), p_E(t))$  とすると、はじめに  $A$  にいたので、 $x(0) = (1, 0, 0, 0, 0)$  に対して

$$x(5) = x(0)P^5 = \left( \frac{1476}{7776}, \frac{1495}{7776}, \frac{1600}{7776}, \frac{1490}{7776}, \frac{1715}{7776} \right) \tag{9.424}$$

となるから、 $t = 5$  に  $A$  さんが再びサイコロを振る確率は  $1476/7776$  である。

**例題 12.4** (2006 年度 演習問題 12)

バー  $E_1, E_2, \dots, E_6$  が 1 次元上に左から右へとこの順に並んでいるものとする。このとき、 $E_2$  から毎時間バーをはしごする酔っ払いが左のバーに立ち寄る確率を  $1/2$ 、右のバーに立ち寄る確率を  $1/3$  とする。また同じ店にとどまる確率を  $1/6$  とする。また、バー  $E_1$  は会員制の気取った店で非会員の酔っ払いは来た時点で追っ払われて店に入れないものとする。このとき、このマルコフ連鎖を有向グラフで表せ。また、6 時間後に酔っ払いが各バーに居る確率  $p_1, p_2, \dots, p_6$  を求めよ。

(解答例)

バー  $E_1$  には入れないので、 $E_1$  から  $E_2$  へは確率 1 で遷移し、 $E_6$  が吸収壁であることに注意すると、この酔っ払いの動きを表す有向グラフは図 9.229 のようになる。また、この酔っ払いの時刻  $n$  での状態ベクトル

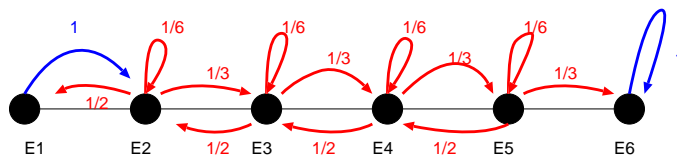


図 9.229: バー  $E_1$  では追っ払われ、バー  $E_6$  には入ったきり帰れない酔っ払いの動きを表す有向グラフ。

を  $x^{(n)} = (p_1(n), p_2(n), p_3(n), p_4(n), p_5(n), p_6(n))$  とすると、 $n$  時間後に各バーにどれくらいの確率で居ることになるのかは遷移行列  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.425}$$

に対して

$$x^n = x^0 A^n \quad (9.426)$$

与えられるので,  $n = 6$ ,  $x^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$  に注意して上式を計算すればよい. 手で計算するのはとても面倒なので, ここでは次のプログラムを用いて計算機に計算させることにする.

```

/*****
/* Calculation of time evolution of probability for */
/* 1-dimensional random walk */
/* J. Inoue */
*****/
#include<stdio.h>
#define tmax 10
main(){
FILE *pt;
double a[6][6],b[6][6];
int i,j,k,t;
for(i=0; i<=5; i++){
for(j=0; j<=5; j++){
b[i][j]=0;
}
/* Definition of transition matrix A (definition of digraph) */
a[0][0] = 0;
a[0][1] = 1.0;
a[0][2] = 0;
a[0][3] = 0;
a[0][4] = 0;
a[0][5] = 0;

a[1][0] = 1.0/2;
a[1][1] = 1.0/6;
a[1][2] = 1.0/3;
a[1][3] = 0;
a[1][4] = 0;
a[1][5] = 0;

a[2][0] = 0;
a[2][1] = 1.0/2;
a[2][2] = 1.0/6;
a[2][3] = 1.0/3;
a[2][4] = 0;
a[2][5] = 0;

a[3][0] = 0;
a[3][1] = 0;
a[3][2] = 1.0/2;

```

```
a[3][3] = 1.0/6;
a[3][4] = 1.0/3;
a[3][5] = 0;

a[4][0] = 0;
a[4][1] = 0;
a[4][2] = 0;
a[4][3] = 1.0/2;
a[4][4] = 1.0/6;
a[4][5] = 1.0/3;

a[5][0] = 0;
a[5][1] = 0;
a[5][2] = 0;
a[5][3] = 0;
a[5][4] = 0;
a[5][5] = 1.0;

/* Calculation of A^{t} */
if((pt=fopen("matprod.txt","wt")) !=NULL){
for(i=0; i<=5; i++){
    for(j=0; j<=5; j++){
        if((i==0) && (j==0)){fprintf(pt,"Time Step=%d\n\n",1);}
        if(j!=5){
fprintf(pt,"A(%d)(%d,%d)=%lf ",t,i+1,j+1,a[i][j]);
            }else{
fprintf(pt,"A(%d)(%d,%d)=%lf\n",t,i+1,j+1,a[i][j]);
            }
        }
    for(i=0; i<=5; i++){
        fprintf(pt,"\n t=%d p(%i)=%lf",1,i+1,a[1][i]);
        //fprintf(pt,"%d %lf ",1, a[1][i]);
    }

    fprintf(pt,"\n %c", '\n');
for(t=1;t<=tmax;t++){
for(i=0; i<=5; i++){
    for(j=0; j<=5; j++){
for(k=0; k<=5; k++){
    b[i][j] = b[i][j] + a[i][k]*a[k][j];
}
}
}
for(i=0; i<=5; i++){
    for(j=0; j<=5; j++){
        if((i==0) && (j==0)){fprintf(pt,"Time Step=%d\n\n",t+1);}
```

```

    if(j!=5){
        fprintf(pt,"A(%d)(%d,%d)=%lf ",t+1,i+1,j+1,b[i][j]);
    }else{
        fprintf(pt,"A(%d)(%d,%d)=%lf\n",t+1,i+1,j+1,b[i][j]);}
}}
for(i=0; i<=5; i++){
    fprintf(pt,"\n t=%d p(%i)=%lf ",t+1,i+1,b[1][i]);
    //fprintf(pt,"%d %lf ",t+1,b[1][i]);
}
fprintf(pt,"\n %c", '\n');
for(i=0; i<=5; i++){
    for(j=0; j<=5; j++){
a[i][j]=b[i][j];
    }
}
for(i=0; i<=5; i++){
    for(j=0; j<=5; j++){
        b[i][j]=0;
    }
}
}
}
fclose(pt);
}

```

結果をグラフにしてプロットしてみると次のようになる。この図 9.230 より、吸収壁である 6 番目のバー以

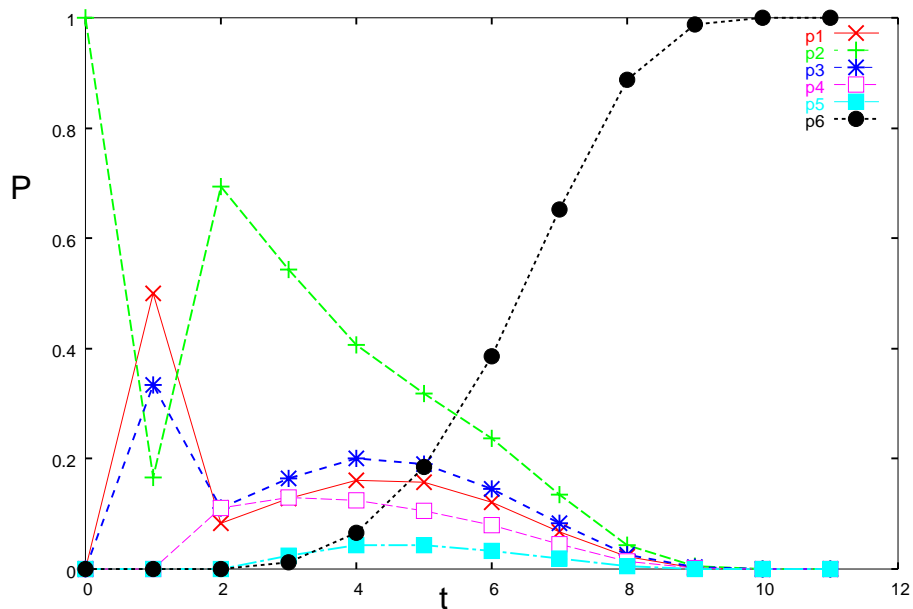


図 9.230: 酔っ払いが各バーに居る確率の時間変化.

外の各バーの滞在確率は時間とともに減少し、ゼロへと向かい、その分の確率がバー 6 に流れて行き、11 時

間後には酔っ払いは確率 1 で 6 番目のバーに居ることになる.

注 : 1 時間後に  $P(1)$  がゼロでないのは不思議に思われるかもしれないが, 例えば 1 時間後には確率  $1/2$  でバー  $E_2$  から  $E_1$  へ向かうことになり, この意味でバー  $E_1$  の前には「居る」ことになる. しかし, 「 $E_1$  に滞在する」というのは「次のステップでも同じバー  $E_1$  に留まる」ことを意味し, ここではそれが許されていない. つまり, 条件つき確率  $P(X^{t+1} = E_1 | X^t = E_1) = 0$  であり, これは遷移行列の  $(1, 1)$  成分がゼロであることに反映しているわけである.

## 第13回講義

### 10.1 マッチング, 結婚, Menger の定理

最終回である今回の講義では, マッチング, ネットワークフローなど, 我々が日常で出くわす具体的な諸問題に取り組む際に特に重要となる概念・方法を学ぶ.

#### 10.1.1 Hall の結婚定理

ここで扱う結婚問題 (marriage problem) とは次のような問題である.

##### 結婚問題

女性の有限集合があり, 各女性は何人かの男性と知り合いであるとする. 全ての女性が知り合いの男性と結婚ができるようにカップルが組めるためにはどのような条件が必要であるか?

ここではいきなり一般論から入るのではなく, 次の表で与えられる具体例をグラフを用いて考察することからはじめよう. この表では女性集合を  $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ , 男性集合を  $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$  とする.

女性	女性と知り合いの男性
$g_1$	$b_1, b_4, b_5$
$g_2$	$b_1$
$g_3$	$b_2, b_3, b_4$
$g_4$	$b_2, b_4$

これをグラフで描いたものが図 10.231 である. さて, 完全二部グラフ  $G(V_1, V_2)$  における, 点  $V_1$  から点  $V_2$

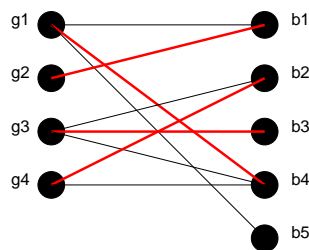


図 10.231: 女性とその知り合いの男性を表すグラフ.

への完全マッチングを「 $V_1$  と  $V_2$  の部分集合の間の一対一対応で, かつ, 対応する点は辺で結ばれているもの」と定義すれば, 上にあげた結婚問題は次のように言い直すことができる.

結婚問題の「完全マッチング」を用いた言い換え

$G = G(V_1, V_2)$  が二部グラフのとき、 $G$  において  $V_1$  から  $V_2$  への完全マッチングがあるのはどのようなときか？

この問題の答えは次の定理によって与えられる。

**Hall の定理**

結婚問題に解があるための必要十分条件は、どの  $k$  人の女性も合わせて  $k$  人以上の男性と知り合いであることである。

(証明)

[必要性] :  $k$  人の女性の誰かと知り合いの男性が合計  $k$  人未満であれば女性が余ってしまうので明らか。

[十分性] : 帰納法により証明する。

「女性が  $m$  人未満であれば定理が成立する」と仮定する。このとき、 $m = 1$  であれば、 $k = 1$  人の女性は 1 人の男性と知り合いなので、その男性と結婚すれば良い。従って、成立。  $m$  人の女性がいる場合には次のような 2 つの場合に分けて考える。

- (i)  $k < m$  なる、どの  $k$  人の女性をとっても、合わせて  $k + 1$  人の男性と知り合いのとき  
女性 1 人を選び、知り合いの任意の男性と結婚させれば、残り  $m - 1$  人 ( $m - 1 < m$ ) の女性は合わせて  $m - 1$  人の男性と知り合いである。従って、帰納法の仮定から証明終わり。
- (ii)  $k (< m)$  人の女性が合わせてちょうど  $k$  人の男性と知り合いのとき  
帰納法により、 $k$  人の女性は結婚可能。残りは  $m - k$  人である。 ( $m - k$ ) 人の中のどの  $h$  人 ( $h \leq m - k$ ) も残りの  $h$  人以上の男性と知り合いである ( $(h + k)$  人の女性は  $(h + k)$  人以上の男性と知り合いであるべきなので)。従って、 $m - k$  人の女性に対して条件成立。

以上により証明終わり。

### 10.1.2 横断理論

まず、次のように定義しておこう。

$E$  : 空でない有限集合。

$F = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  :  $E$  の空でない部分集合の族。

$F$  の横断 : 各集合  $S_i$  から 1 つ選んだ  $E$  の相異なる  $m$  個の元の集合。

(例)

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$ ,  $S_3 = S_4 = \{2, 3\}$ ,  $S_5 = \{1, 4, 5, 6\}$  とする。このとき、族  $F = (S_1, S_2, \dots, S_5)$  に横断は無い。一方、 $F' = (S_1, S_2, S_3, S_5)$  には  $\{1, 2, 3, 4\}$  の横断 (部分横断) がある。

### 10.1.3 横断と結婚問題、及び、Hall の定理との関係

男性の集合を  $E = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  とする。

一方、女性の集合を  $F = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$  とし、

$$S_1 = \{1, 2\}$$

$$S_2 = \{1, 2\}$$

$$S_3 = \{2, 3\}$$

$$S_4 = \{2, 3\}$$

$$S_5 = \{1, 4, 5, 6\}$$

とすれば (図 10.232 も合わせて参照), 与えられた集合族  $F$  が横断を持つための必要十分条件が Hall の定理である.

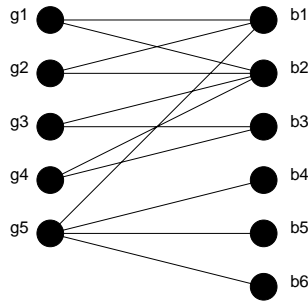


図 10.232: ここで横断と Hall の定理の関係を考える, 女性とその知り合いの男性を表すグラフ.

### 10.1.4 Hall の定理の応用例 : ラテン方阵

#### ラテン長方形

$m \times n$  ( $m \leq n$ ) ラテン長方形: 次の性質を持つ  $m \times n$  行列  $M$

- (i) 任意の行列要素は  $1 \leq m_{ij} \leq n$  を満たす.
- (ii) どの行, 及び, どの列にも同じ要素はない.

(例)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{10.427}$$

はラテン長方形である.

$m = n$  であるようなラテン長方形をラテン方阵と呼ぶが, ラテン長方形からラテン方阵への拡大可能性は次の定理で与えられる.

#### 定理 27.1

$M$  は  $m < n$  からなる  $m \times n$  ラテン長方形であるとする. このとき,  $M$  に  $n - m$  本の新しい行を付け加えてラテン方阵に拡張することができる.

(具体的な作り方)

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  を与えられたラテン長方形  $M$  の行要素の集合であるとする.  $F = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$  とし,  $M$  の第  $i$  列に現れない  $E$  の要素の集合が  $S_i$  であるとする. (10.427) 式で与えられたラテン長方形を例にとれば  $S_1, S_2, \dots$ , は

$$S_1 = \{4, 5\}$$

$$S_2 = \{1, 3\}$$

$$S_3 = \{4, 5\}$$

$$S_4 = \{2, 3\}$$

$$S_5 = \{1, 2\}$$

となり,  $F$  から横断を見つけて  $(4, 3, 5, 2, 1), (5, 1, 4, 3, 2)$  が得られるので, これをラテン長方形に付け加えて

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 5 & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \quad (10.428)$$

となる (付け加えた部分は太字で表されている).

### 10.1.5 Menger の定理

まずは各種定義から

辺素な道 (edge-disjoint path) : 共通な辺を持たない  $v$  から  $w$  への道.

点素な道 (vertex-disjoint path) : 共通な点を持たない  $v$  から  $w$  への道.

$vw$ -非連結化集合 : グラフ  $G$  の辺集合  $E$  で,  $v$  から  $w$  への任意の道は必ず  $E$  の辺を含むもの.

(例) : 図 10.233 において  $E_1 = \{ps, qs, ty, tz\}, E_2 = \{uw, xw, yw, zw\}$ .

$vw$ -分離集合 :  $G$  の点の集合  $V$  で,  $v$  から  $w$  への任意の道は必ず  $V$  の点を通るという性質を持つ  $V$ .

(例) : 図 10.233 において  $V_1 = \{s, t\}, V_2 = \{p, q, y, z\}$ .

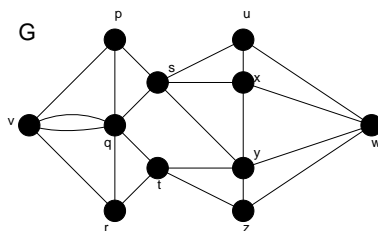


図 10.233: 点素な道が 2 本あるグラフ  $G$ . (それらの道は  $v \rightarrow p \rightarrow u \rightarrow w$ , 及び,  $v \rightarrow r \rightarrow t \rightarrow y \rightarrow w$ )

「 $v$  から  $w$  への辺素な道の本数は何本か?」という問いに対する答え Menger の定理 I

#### Menger の定理 I

連結グラフ  $G$  の異なる 2 点  $v$  と  $w$  を結ぶ辺素な道数の最大値は,  $vw$ -非連結化集合の辺数の最小値に等しい.

「 $v$  から  $w$  への点素な道の本数は何本か?」という問いに対する答え Menger の定理 II

**Menger の定理 II**  
 連結グラフ  $G$  の隣接していない 2 点  $v$  と  $w$  を結ぶ点素な道数の最大値は,  $vw$ -分離集合の辺数の最小値に等しい.

(例)

図 10.234 のグラフ  $G$  に対して,  $vw$ -非連結化集合は  $E_1 = \{vp, vq\}, E_2 = \{pr, qr, qs\}, E_3 = \{rw, sw\}$  であるから, 辺素な道数の最小値は 2 である. 一方,  $vw$ -分離集合は  $V_1 = \{p, q\}, V_2 = \{r, q\}, V_3 = \{r, s\}$  であるから, 点素な道数の最大値は 2 である.

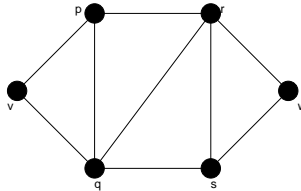


図 10.234: Menger の定理を確認する例として用いるグラフ  $G$ .

## 10.2 ネットワークフロー

図 10.235 のような有向グラフを考える. 点  $v$  は「会社」であり, 点  $w$  は「販売店」とする. 各辺に記された数字は, そのルート (弧) を通過できる荷物の最大量 (例えば「箱の個数」と言い換えても良い) であるとする. このとき, 我々の問題は

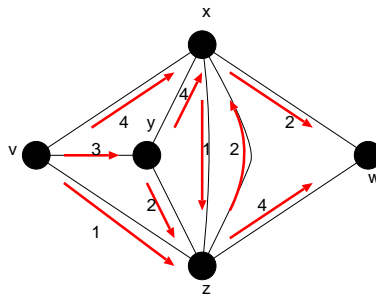


図 10.235: ここで考える有向グラフ.  $v$  は「会社」で  $w$  が「販売店」を表すものとする. 各弧に記された数字は「容量」である.

**問題**  
 各ルートの許容量を超えないようにして会社から販売店に送ることのできる箱の個数はいくつか?

この問題に答える前にいくつかの定義をしておこう.

ネットワーク  $N$  : 重みつき有向グラフ.

容量  $\Psi(a)$  : 各弧  $a$  に割り当てられた非負実数.

$\text{outdeg}(x)$  :  $xz$  の形をした弧の容量の総和.

$\text{indeg}(x)$  :  $x$  の形をした弧の容量の総和<sup>17</sup>.

従って、ネットワークの全点についての出次数の総和は入次数の総和に等しい。

**フロー (flow)**

各弧  $a$  に対し非負実数  $\phi(a)$  を割り当てる関数  $\phi$  のことであり、次の 2 つの条件を満たさなければならない。

- (i) 各弧  $a$  に対して  $\phi(a) \leq \Psi(a)$ .
- (ii)  $v$  と  $w$  以外の各点において、出次数と入次数が等しい。

(例)

握手有向補題により、図 10.236 において

$$\begin{aligned} (\text{入口 } v \text{ から出る弧のフローの総和}) &= (\text{出口 } w \text{ へ入る弧のフローの総和}) \\ &= \text{フローの値} = 6 \quad (\text{図 10.236 の場合には最大フローになっている}) \end{aligned}$$

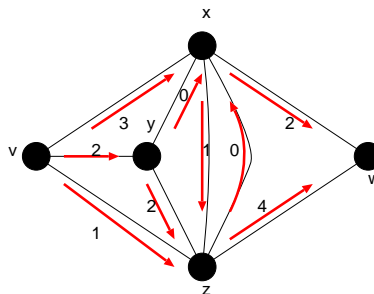


図 10.236: 図 10.235 の各弧に記された容量を超えないように、かつ、 $v, w$  を除く各点において入次数と出次数を等しくするように各弧に数字を振るとこうなる。

**カット (cut)** : 有向グラフ  $D$  の  $vw$ -非連結化集合。

カットの容量 : カットの弧の容量の総和。

図 10.235 のグラフにおいて、最小カット (容量ができるだけ小さいカット) は  $\{xw, xz, yz, vz\}$ ,  $\{xw, zw\}$  であり、その容量は 6 である。

**最大フロー-最小カット定理**  
 任意のネットワークにおいて、最大フローの値は最小カットの容量に等しい。

証明略。

ここで例として扱った図 10.235, 図 10.236 に関しては、上記の議論から、(最大フロー) = (最小カット) = 6 となっており、この定理が成り立っていることが確かめられる。

<sup>17</sup> 以前,  $\text{indeg}$ ,  $\text{outdeg}$  をそれぞれ入次数, 出次数として定義したが、ここでは辺に記された数字による「重み付き」の入次数, 出次数であることに注意されたい。

### 10.2.1 最大フローの逐次構成法

最後に最大フローを具体的に求めるためのアルゴリズムを一つ挙げておく。

ネットワークにおいて入口  $v$  と出口  $w$  を結ぶ道  $p$  を考え、この道を点列  $: v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, w$  で特定する (図 10.237 参照)。また、この道を辺で特定する際には辺の向きをも考慮し、 $e_i = (v_{i-1}, v_i)$  のとき、 $e_i$  は

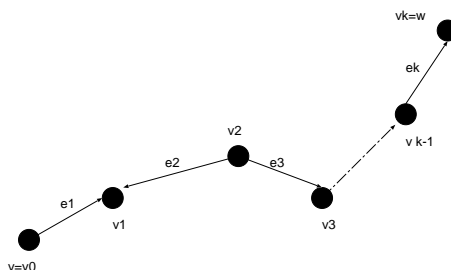


図 10.237: ネットワークにおける一つの道  $p$ . この道において、 $e_1$  は「正順」であり、 $e_2$  は逆順である。

点  $v_i, v_{i-1}$  をこの順に矢印で結ぶ。この場合を道  $p$  において  $e_i$  は正順であるという。一方、 $e_i = (v_i, v_{i-1})$  のときには  $e_i$  が点  $v_{i-1}, v_i$  をこの順に矢印で結ぶことになるが、この場合を逆順と呼ぶ。図 10.237 の例で言えば、 $e_1$  が正順、 $e_2$  が逆順ということになる。

さて、このとき各辺  $e_i$  に対し、余剰 (residual) と呼ばれる量 (注目する辺に沿って着目する方向へまだ増やすことのできるフロー) を各辺の容量  $\Psi(e_i)$ 、及び、現時点でのフロー  $\phi(e_i)$  を用いて次のように定義する。

$$g(e_i) = \begin{cases} \Psi(e_i) - \phi(e_i) & (e_i \text{ が正順}) \\ \phi(e_i) & (e_i \text{ が逆順}) \end{cases} \tag{10.429}$$

次いでこの  $g(e_i)$  を用いて各道  $p$  に対しての余剰  $g(p)$  を

$$g(p) = \min_{1 \leq i \leq k} g(e_i) \tag{10.430}$$

で定義する。そこで各辺に対して規則：

$$\phi(e_i) \leftarrow \phi(e_i) + g(p) \quad (e_i \text{ が正順}) \tag{10.431}$$

$$\phi(e_i) \leftarrow \phi(e_i) - g(p) \quad (e_i \text{ が逆順}) \tag{10.432}$$

適用することにより、現時点でのフロー  $\phi$  を  $g(p)$  だけ大きな新しいフローに変更することができる。つまり、 $e_i$  が正順であるのであれば、辺  $e_i$  の容量と現時点でのフローの道  $p$  に関する最小値  $g(p)$  の分だけ各辺のフローを増加することができるし、逆に、辺  $e_i$  が逆順であれば、現在の向きのフローの最小値  $g(p)$  の分だけ、各辺のフローの値から差し引くことにより、所望の向きへのフローを増加させることができる。

以上をまとめると次のようになる。

**最大フロー逐次構成アルゴリズム**

1. 全ての辺  $e$  に対して  $\phi(e) = 0$  と置く。
2.  $v$  から  $w$  への道  $p$  で正の余剰  $g(p) > 0$  を持つものを探し、なければ終了。あれば次の 3. へ。
3. 規則 (10.431)(10.432) に従って現在のフロー  $\phi$  を変更し、2. へ

### 10.2.2 最大マッチングへの適用

ここで学んだ最大フローの逐次構成法を用いて、前出の最大マッチングを求めることができる。ここではそれを簡単に述べておきたい。図 10.238 のようなネットワークを考える。ここで求めるマッチングは集合

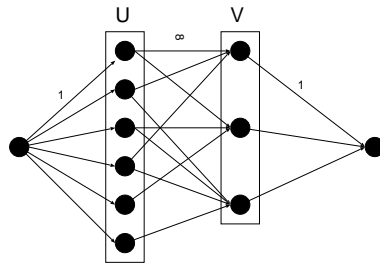


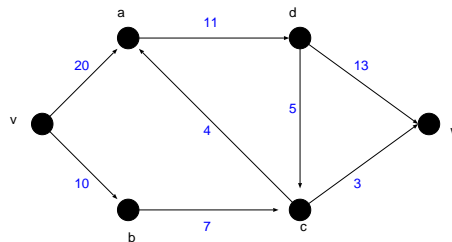
図 10.238: U と V の間の最大マッチングを求めるためのネットワーク。

U と V の間の最大マッチングである。

つまり、入口  $v$  と集合  $U$  に属する点を結ぶ辺の全てに容量 1 を、マッチングをとるべき集合  $U$  と集合  $V$  を結ぶ全ての辺に容量  $\infty$  を、そして最後に集合  $V$  と出口  $w$  を結ぶ全ての辺に容量 1 を割り振り、このネットワークに対して逐次構成法を適用する。最終的に得られるマッチングが最大であること、及び、このネットワークで逐次構成法を用いることで所望の最大マッチングが得られる理由は各自が考えてみる。

**例題 13.1** (2004 年度 **演習問題 13**)

図のような有向グラフに関して以下の問いに答えよ。



- (1) 逐次構成法を用いて図の入口  $v$  から出口  $w$  へ至るネットワークの最大フローを求めよ。
- (2) 図のネットワークにおける最小カットを求め、(1) の結果と比較することにより、最大フロー最小カット定理が成立しているか否かを確かめよ。

(解答例)

- (1) まずは道  $p_1$  として問題文中の図における  $v \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow w$  を選ぶ。逐次構成法のアルゴリズムより、最初のステップでは全ての辺のフローをゼロに設定するので

$$\phi(v, a) = \phi(a, d) = \phi(d, w) = 0 \tag{10.433}$$

とする。このとき、 $p_1$  上の全ての辺は正順であり

$$\begin{aligned} g(v, a) &= \Psi(v, a) - \phi(v, a) = 20 - 0 = 20 \\ g(a, d) &= \Psi(a, d) - \phi(a, d) = 11 - 0 = 11 \\ g(d, w) &= \Psi(d, w) - \phi(d, w) = 13 - 0 = 13 \end{aligned}$$

なので、道  $p_1$  の余裕は

$$g(p_1) = \min_{k=(v,a),(a,d),(d,w)} g(k) = 11 \quad (10.434)$$

となる。従って、次ステップでの各辺のフローは (10.433)(10.434) より

$$\begin{aligned} \phi(v, a) &= 0 + g(p_1) = 11 \\ \phi(a, d) &= 0 + g(p_1) = 11 \\ \phi(d, w) &= 0 + g(p_1) = 11 \end{aligned}$$

である。

次の道  $p_2$  として  $v \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow w$  を選ぶ。この  $p_2$  上の全ての辺のフローも初めはゼロに設定されているべきであるから

$$\phi(v, b) = \phi(b, c) = \phi(c, w) = 0 \quad (10.435)$$

である。これらの辺は全て正順であるので

$$\begin{aligned} g(v, b) &= \Psi(v, b) - \phi(v, b) = 10 - 0 = 10 \\ g(b, c) &= \Psi(b, c) - \phi(b, c) = 7 - 0 = 7 \\ g(c, w) &= \Psi(c, w) - \phi(c, w) = 3 - 0 = 3 \end{aligned}$$

となり、従って道  $p_2$  の余裕は

$$g(p_2) = \min_{k=(v,b),(b,c),(c,w)} g(k) = 3 \quad (10.436)$$

である。従って、次ステップでの各辺のフローは (10.435)(10.436) から

$$\begin{aligned} \phi(v, b) &= 0 + g(p_2) = 3 \\ \phi(b, c) &= 0 + g(p_2) = 3 \\ \phi(c, w) &= 0 + g(p_2) = 3 \end{aligned}$$

である。

この時点で各辺のフローを見てみると、辺  $(a, d)$ 、及び、 $(c, w)$  のフローの値が容量いっぱいになっている。従って、この 2 つの辺を含むような道に関しては正の余裕を持たせることはできず、従って、その容量も増やすことはできない。このことを考慮に入れ、かつ、入口  $v$  から出口  $w$  に至る道を選ぶとなるとそれは  $v \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow w$ 、及び、 $v \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow w$  しかない。前者を  $p_3$ 、後者を  $p_4$  としよう。まず  $p_3$  に対して、この時点での各辺のフローは

$$\begin{aligned} \phi(v, a) &= 11 \\ \phi(a, c) &= 0 \\ \phi(c, d) &= 0 \\ \phi(d, w) &= 11 \end{aligned}$$

である。 $(a, c)$ 、 $(c, d)$  は逆順であることに注意して

$$\begin{aligned} g(v, a) &= \Psi(v, a) - \phi(v, a) = 20 - 11 = 9 \\ g(a, c) &= \phi(a, c) = 0 \\ g(c, d) &= \phi(c, d) = 0 \\ g(d, w) &= \Psi(d, w) - \phi(d, w) = 13 - 11 = 2 \end{aligned}$$

となるので, この道  $p_3$  の余裕は

$$g(p_3) = \min_{k=(v,a),(a,c),(c,d),(d,w)} g(k) = 0$$

従って, 各辺のフローはこの操作の前後で変わらず

$$\begin{aligned}\phi(v, a) &= 11 \\ \phi(a, c) &= 0 \\ \phi(c, d) &= 0 \\ \phi(d, w) &= 11\end{aligned}$$

である.

最後に道  $p_4$  について. この時点での各辺のフロー値は

$$\begin{aligned}\phi(v, b) &= 3 \\ \phi(b, c) &= 3 \\ \phi(c, d) &= 0 \\ \phi(d, w) &= 11\end{aligned}$$

であり,  $(c, d)$  が逆順であることを考慮すると

$$\begin{aligned}g(v, b) &= \Psi(v, b) - \phi(v, b) = 10 - 3 = 7 \\ g(b, c) &= \Psi(b, c) - \phi(b, c) = 7 - 3 = 4 \\ g(c, d) &= \phi(c, d) = 0 \\ g(d, w) &= \Psi(d, w) - \phi(d, w) = 13 - 11 = 2\end{aligned}$$

となる. よって道  $p_4$  の余裕は

$$g(p_4) = \min_{k=(v,b),(b,c),(c,d),(d,w)} g(k) = 0$$

なので, この操作で各辺のフローは変化せず

$$\begin{aligned}\phi(v, b) &= 3 \\ \phi(b, c) &= 3 \\ \phi(c, d) &= 0 \\ \phi(d, w) &= 11\end{aligned}$$

のままである. 以上をまとめると, 最終的に得られる最大フローの値は  $11 + 3 = 14$  であり, そのときの各辺のフローは図 10.239 のようになる.

- (2) 図 10.239 の太い矢印のようなカットを考えると, このカットで  $v$  と  $w$  は分離し, カット容量は  $11 - 4 + 7 = 14$  となり, これは (1) で求めた最大フローの値と一致する. 従って, 確かに最大フロー最小カット定理を満たしている.

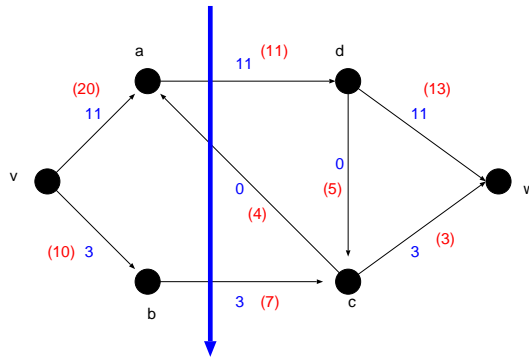
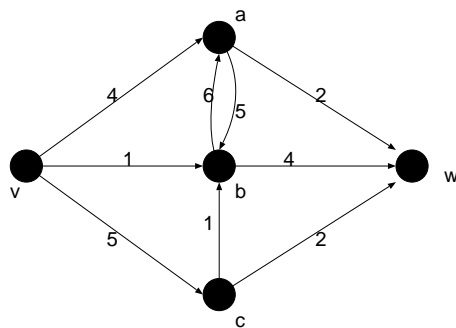


図 10.239: 逐次構成法を適用した結果, 各辺に割り当てられたフローの値. 括弧内は各辺の容量を表す. 太い矢印で記されたカットの容量は最小であり,  $11 - 4 + 7 = 14$  であり, これはもちろん最大フロー  $11 + 3 = 14$  と一致する.

**例題 13.2** (2005, 2006 年度 演習問題 13)

図のネットワークを考える.



- (1) このネットワークのカットを全て列挙し, 最小カットを見つけよ.
- (2) 最大フローを見つけて, 最大フロー最小カット定理を確認せよ.

(解答例)

- (1) 与えられたネットワークのカットおよびその容量を列挙し, 最小カットを求めると

- {aw,bw,cw} 容量 8 ( 最小カット)
- {cv,bc,cw} 容量 8 ( 最小カット)
- {av,bv,cv} 容量 10
- {av,ab,aw} 容量 17
- {av,bv,bc,cw} 容量 8 ( 最小カット)
- {aw,bw,bc,cv} 容量 12
- {ab,bv,bc,bw} 容量 17
- {aw,ab,bv,cv} 容量 19
- {av,ab,bw,cw} 容量 21
- {av,bv,bc,bw,aw} 容量 12
- {aw,ab,bv,bc,cw} 容量 17
- {cv,bv,ab,bw,cw} 容量 23

$\{av, ab, bw, bc, cv\}$  容量 25

となる.

- (2) 逐次構成法により求めてみる. まずは  $p_1$  として  $v \rightarrow a \rightarrow w$  を選ぶと, はじめ全ての辺のフローをゼロにするので

$$\phi(v, a) = \phi(a, w) = 0 \quad (10.437)$$

となる. このとき,  $p_1$  上の全ての辺は正順なので, 各辺の容量を  $\Phi(u, v)$  とすると

$$g(v, a) = \Phi(v, a) - \phi(v, a) = 4 - 0 = 4 \quad (10.438)$$

$$g(a, w) = \Phi(a, w) - \phi(a, w) = 2 - 0 = 2 \quad (10.439)$$

となるので, 道  $p_1$  の余裕  $g(p_1)$  は

$$g(p_1) = \min_{k=(v,a),(a,w)} g(k) = 2 \quad (10.440)$$

となる. 従って, 各辺のフローは

$$\phi(sfv, a) = 0 + g(p_1) = 2 \quad (10.441)$$

$$\phi(a, w) = 0 + g(p_1) = 2 \quad (10.442)$$

と更新される. 同様にして, 道  $p_2, p_3$  に  $v \rightarrow b \rightarrow w, v \rightarrow c \rightarrow w$  を選ぶと,  $p_2, p_3$  上の全ての辺は正順なので, それぞれの道の余裕は  $g(p_1) = 1, g(p_2) = 2$  となり, 各辺のフローは

$$\phi(v, b) = 0 + g(p_2) = 1 \quad (10.443)$$

$$\phi(b, w) = 0 + g(p_2) = 1 \quad (10.444)$$

$$\phi(v, c) = 0 + g(p_3) = 2 \quad (10.445)$$

$$\phi(c, w) = 0 + g(p_3) = 2 \quad (10.446)$$

となる. この時点で辺  $vb, aw, cw$  のフローは容量いっぱいであり, この3辺を含む道に関してはフローの値を増やすことができない. また, 道に辺  $aw$  を含められないことから, 辺  $ba$  を正順に遡ることができず, 逆順にしか遡れない. しかし, 辺  $ba$  のフローの値はゼロであり, 逆順に遡ってもやはりフローの値を増やすことはできないので, 辺  $ba$  も道に含まないことにする. そうすると考えられる道は  $v \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow w, v \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow w$  である. それぞれを  $p_4, p_5$  としよう. まず, 道  $p_4$  に関して, 各辺は正順なので

$$g(v, a) = \Phi(v, a) - \phi(v, a) = 4 - 2 = 2 \quad (10.447)$$

$$g(a, b) = \Phi(a, b) - \phi(a, b) = 5 - 0 = 5 \quad (10.448)$$

$$g(b, w) = \Phi(b, w) - \phi(b, w) = 4 - 1 = 3 \quad (10.449)$$

であり, 道  $p_4$  の余裕は

$$g(p_4) = \min_{k=(v,a),(a,b),(b,w)} g(k) = 2 \quad (10.450)$$

である. 従って, 各辺のフローは

$$\phi(v, a) = 2 + g(p_4) = 4 \quad (10.451)$$

$$\phi(a, b) = 0 + g(p_4) = 2 \quad (10.452)$$

$$\phi(b, w) = 1 + g(p_4) = 3 \quad (10.453)$$

と更新される. 次に道  $p_5$  に関しては各辺が正順なので

$$g(v, c) = \Phi(v, c) - \phi(v, c) = 5 - 2 = 3 \quad (10.454)$$

$$g(c, b) = \Phi(c, b) - \phi(c, b) = 1 - 0 = 1 \quad (10.455)$$

$$g(b, w) = \Phi(b, w) - \phi(b, w) = 4 - 3 = 1 \quad (10.456)$$

であり, 道  $p_5$  の余裕は

$$g(p_5) = \min_{k=(v,c),(c,b),(b,w)} g(k) = 1 \quad (10.457)$$

となる. 従って, 各辺のフローは

$$\phi(v, c) = 2 + g(p_5) = 3 \quad (10.458)$$

$$\phi(c, b) = 0 + g(p_5) = 1 \quad (10.459)$$

$$\phi(b, w) = 3 + g(p_5) = 4 \quad (10.460)$$

と更新される. 最終的な各辺のフローは図のようになり, 最大フローの値は  $4 + 1 + 3 = 8$  であり, (1) の結果と併せると確かに最大フロー最小カット定理を満たしている.



図 10.240: 例年 7 月は井上出張のため 1 回休講が入りました。2007 年はイタリア。

# 2004年度 期末試験 (情報工学科 3 年生/電子工学科 4 年生)

## 平成 16 年度 グラフ理論 期末試験問題 (9/13 実施 出題者: 井上 純一)

注意事項: 問題用紙は 2 ページあり, 大問計 4 題である (50 点満点). 解答用紙, 計算 (下書き) 用紙は各 1 枚配布する. 解答用紙には氏名, 学科学番号を記入し, 裏面を使う際には「裏に続く」と記入すること. 試験開始後 30 分間は退室できない. また, 一度退室した場合には再入室できないので注意するように.

### 問題 1 (配点 10 点) (キーワード: 隣接行列, 接続行列)

(1) 図 11.241 に与えたグラフの隣接行列  $A$ , 及び, 接続行列  $M$  を求めよ (4 点).

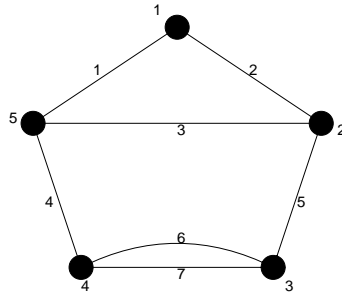


図 11.241: 問題 1 (1) のグラフ.

(2) 隣接行列が

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフを図示せよ (3 点).

(3) グラフ  $G$  にループが無いとき, 次のことに関してわかることを簡潔に述べよ (3 点).

- (i)  $G$  の隣接行列の任意の行, または, 列の要素の和
- (ii)  $G$  の接続行列の任意の行の要素の和
- (iii)  $G$  の接続行列の任意の列の要素の和

### 問題 2 (配点 10 点) (キーワード: オイラー・グラフ, ハミルトン・グラフ, 完全グラフ, 完全二部グラフ)

- (1) オイラー・グラフ, 半オイラー・グラフとはどのようなグラフか, それぞれ簡潔に説明せよ. また, 完全グラフ  $K_5$  はオイラー・グラフ, 半オイラー・グラフ, そのどちらでもないグラフのうちのどれであるか, 理由とともに答えよ (5 点).
- (2) ハミルトン・グラフ, 半ハミルトン・グラフとはどのようなグラフか, 簡潔に説明せよ. また, 完全二部グラフ  $K_{2,3}$  はハミルトン・グラフ, 半ハミルトン・グラフ, そのどちらでもないグラフのうちのどれであるか, 理由とともに答えよ (5 点).

**問題 3** (配点 10 点) (キーワード: ラベル付き木, 木の数え上げ, ケイリーの定理)

ある定められた点の次数が  $k$  であるような  $n$  個の点からなるラベル付き木の総数  $T(n, k)$  は

$$T(n, k) = {}_{n-2}C_{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

で与えられるという. このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $n$  個の点からなる木で, 与えられた点が端点になっているものの総数を求めよ (5 点).
- (2)  $n$  個の点からなる木の, 与えられた点が端点となる確率は  $n$  が大きくなるにつれ, ある極限值に近づくという. この極限值を求めよ (5 点).

**問題 4** (配点 20 点) (キーワード: 点彩色, 彩色多項式, 辺の縮約, 数学的帰納法)

$G$  を単純グラフとし,  $G$  から辺  $e$  を除去して得られるグラフを  $G-e$ , 縮約して得られるグラフを  $G \setminus e$  とすると,  $G$  の彩色多項式  $P_G(k)$  は次のように書くことができる.

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k)$$

このことをふまえて以下の問いに答えよ.

- (1) 図 11.242 のグラフ  $G$  に対して,  $G-e$ ,  $G \setminus e$  をそれぞれ図示せよ (5 点).

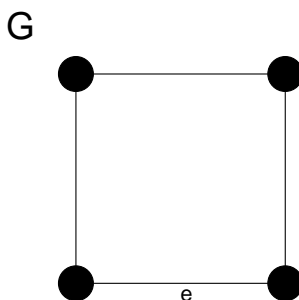


図 11.242: 問題 4 (1)(2) のグラフ  $G$ .

- (2) グラフ  $G$  の彩色多項式を  $k$  の関数として求めよ (5 点).
- (3) 点数  $n$ , 辺数  $m$  の単純グラフ  $G$  に対し (注: これは図 2.21 のグラフ  $G$  に限らず, 一般の単純グラフ  $G$  に対して, という意味である), 辺数  $m$  に関する数学的帰納法により,  $P_G(k)$  の  $k^{n-1}$  の係数は  $-m$  であることを証明せよ (10 点).

# 2004年度 期末試験解答 (情報工学科3年生/電子工学科4年生)

## 平成16年度 グラフ理論 期末試験解答 (9/13 実施 解答作成：井上 純一)

採点基準：各問題の配点は問題用紙に記した通り。以下では太字で書かれた点数のうち、「プラス (+) 何点」と書かれたものが部分点、「マイナス (-) 何点」と書かれたものが減点である。これら太字での記入が無いものはすべて完全な正解のみ有効。なお、これ以外にも部分点を与える場合がある。

### 問題 1 (配点 10 点)

(1) 隣接行列  $A$ , 接続行列  $M$  は以下の通り (各 2 点)。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 問題文に与えられた隣接行列を持つグラフを描くと図 12.243 のようになる (注：このグラフと完全に一致しなくても同形なグラフであれば正解)。

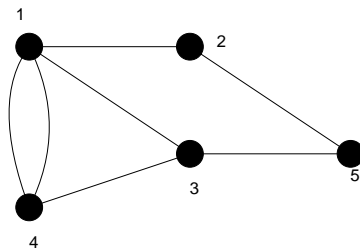


図 12.243: 問題 1 (2) の正解グラフ。

- (3)(i) 「隣接行列の第  $i$  行, あるいは, 第  $i$  列の要素和は点  $i$  に接続する辺の数を表す。」 (1 点)  
 (ii) 「接続行列の第  $i$  行の要素和は点  $i$  に接続する辺の本数を表す。」 (1 点)  
 (iii) 「接続行列の第  $i$  列の要素和は辺  $i$  の両端の点の数を表し, 必ず 2 となる。」 (1 点)

### 問題 2 (配点 10 点)

- (1) オイラー・グラフ：各辺をちょうど 1 回ずつ通る閉じた小道があるグラフ (1 点).  
 半オイラー・グラフ：各辺をちょうど 1 回ずつ通る小道があるグラフ (1 点).

また、完全グラフ  $K_5$  の全ての点の次数は 4 で偶数であるので、オイラーの定理から  $K_5$  はオイラー・グラフであると結論づけられる。(注：または、図 12.244 のように具体的に閉じたオイラー小道を示しても正解) (3 点、完全グラフ  $K_5$  がどのようなグラフであるか、が書けていれば +1 点)。

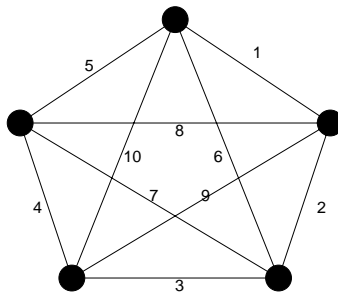


図 12.244: 完全グラフ  $K_5$ . 番号順に回れば、閉じたオイラー小道が得られる。

(2) ハミルトン・グラフ：各点をちょうど 1 回ずつ通る閉じた小道があるグラフ (1 点)。

半ハミルトン・グラフ：各点をちょうど 1 回ずつ通る小道のあるグラフ (1 点)。

また、完全 2 部グラフ  $K_{2,3}$  は例えば、図 12.245 のような点の順で回れば全ての点を 1 回ずつ通るが、必ず出発点以外の点で終わるので半ハミルトン・グラフである (3 点、完全 2 部グラフ  $K_{2,3}$  がどのようなグラフであるか、が書けていれば +1 点)。

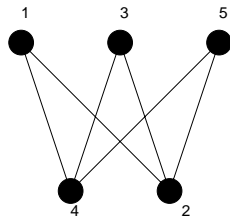


図 12.245: 完全 2 部グラフ  $K_{2,3}$ . 番号順に回れば、ハミルトン小道が得られるが、これは閉じない。

**問題 3 (配点 10 点)**

(1) 端点であれば、 $k = 1$  であるから (これに気づけて +1 点)、求める総数は

$$T(n, 1) = {}_{n-2}C_0 (n-1)^{n-2} = (n-1)^{n-2}$$

である。

(2)  $n$  個のラベル付きグラフの総数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} T(n, k) &= \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{k-1} (n-1)^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{k-1} (n-1)^{(n-2)-(k-1)} \\ &= \sum_{K=0}^{n-2} {}_{n-2}C_K (n-1)^{(n-2)-K} \cdot 1^K = (n-1+1)^{n-2} = n^{n-2} \end{aligned}$$

であるから (注: 「ケイリーの定理より  $n^{n-2}$ 」としてもよい), 与えられた点が端点となる確率は

$$\frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} \rightarrow \frac{1}{e} \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるので, 求める極限値は  $e^{-1}$  である. ただし,  $e$  は自然対数の底である.

**問題 4** (配点 20 点)

(1)  $G-e$  (2 点),  $G \setminus e$  (3 点) を描くと図 12.246 のようになる.

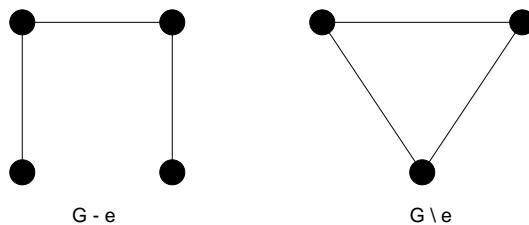


図 12.246: 問題文に与えられたグラフ  $G$  に関するグラフ  $G-e$  とグラフ  $G \setminus e$ .

(2) 問題文に与えられた関係式, 及び, (1) の結果を用いると

$$\begin{aligned} P_G(k) &= P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k) \\ &= k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k^4 - 4k^3 + 7k^2 - 3k \end{aligned}$$

が得られる.

(3) まず, 辺数が 1 のとき ( $n = 2$ ), 彩色多項式は直ちに,  $P_G(k) = k(k-1) = k^2 - k$  となるから,  $k^{n-1} = k^{2-1} = k$  の係数は  $-m = -1$  となり, 確かに題意が成立. 従って, 自然数  $m, n$  に対して「点数  $n$ , 辺数  $m$  のとき彩色多項式  $P_G(k)$  の  $k^{n-1}$  の係数が  $-m$  である (\*)」と仮定する ( $m = 1$  のときの吟味, 及び, この仮定が書けていて +3 点).

このとき,  $G$  の辺数を 1 本増やして  $m+1$ , 点数は  $n$  で与えられる場合の  $G-e$ , 及び,  $G \setminus e$  の辺数と点数の関係を表にしてみると

グラフ	$G$	$G-e$	$G \setminus e$
辺数	$m+1$	$m$	$m$
点数	$n$	$n$	$n-1$

が得られる (この種の対応表が書けていて +2 点).

いかなる  $n-1$  点からなるグラフに関しても, その最大次数項  $k^{n-1}$  の係数は常に 1 であることと, 問題文に与えられた関係式, 及び, 帰納法の仮定 (\*) を用いると, 点数  $n$ , 辺数  $m$  の単純グラフ  $G$  の彩色多項式における  $k^{n-1}$  の項は上の表に基づき

$$-m k^{n-1} (G-e \text{ からの寄与}) - k^{n-1} (G \setminus e \text{ からの寄与}) = -(m+1) k^{n-1}$$

となるので  $m+1$  のときにも題意成立. 従って, 任意の  $m \geq 1$  の整数  $m$  に対して題意が成り立つことが言える (証明終わり).

# 注: 問題文には「 $m$  に関する帰納法を用いて」と明示したが, 帰納法以外での証明を試みた場合, それが論理的に正しい場合に限り, それ相応の部分点を与える場合がある.



# 2005年度 期末試験 (情報工学科3年生/電子工学科4年生)

## 平成17年度 グラフ理論 期末試験問題 (9/16 実施 出題者：井上 純一)

注意事項：問題用紙は2ページあり、大問計4題である(50点満点)。解答用紙、計算(下書き)用紙は各1枚配布する。解答用紙には氏名、学科学生番号を記入し、裏面を使う際には「裏に続く」と記入すること。試験開始後30分間は退室できない。また、一度退室した場合には再入室できないので注意するように。

### 問題1 (配点10点) (キーワード：隣接行列, 接続行列)

(1) 図13.247に与えたグラフの隣接行列  $A$ , 及び, 接続行列  $M$  を求めよ(4点)。

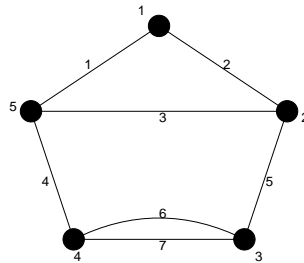


図13.247: 問題1(1)のグラフ。

(2) 隣接行列が

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフを図示せよ(3点)。

(3) グラフ  $G$  にループが無いとき、次のことに関してわかることを簡潔に述べよ(3点)。

- (i)  $G$  の隣接行列の任意の行, または, 列の要素の和
- (ii)  $G$  の接続行列の任意の行の要素の和
- (iii)  $G$  の接続行列の任意の列の要素の和

### 問題2 (配点10点) (キーワード：木とその数え上げ)

図 13.248 のように 1 点から  $k$  本の枝を出し, その  $k$  本の枝からさらに  $k$  本の枝を出すという操作を  $n$  回繰り返してできる木を  $T_k(n)$  と名付けよう. (注:  $n$  と言うと普通はグラフの点の数を示しますが, ここでは「操作」の回数であることを注意. 図 13.248 の例は  $T_3(2)$  である.) このとき次の問いに答えよ.

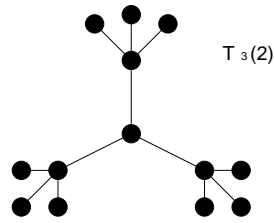


図 13.248: ここで述べた「操作」によって作られた木  $T_3(2)$ .

- (1)  $T_3(n)$  に含まれる点の総数  $S_3(n)$  を求めよ. また,  $T_3(n)$  の端点の総数を  $Q_3(n)$  を求め, 比  $P_3(n) = Q_3(n)/S_3(n)$  に対し, 極限值:

$$p_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_3(n)$$

を計算せよ (5 点).

- (2) (1) を参考にして, 任意の自然数  $K$  に対して  $P_K(n)$  を計算し,  $n$  に関する極限值:

$$p_K = \lim_{n \rightarrow \infty} P_K(n)$$

を求め, さらに  $K$  に関する極限值:  $p_\infty = \lim_{K \rightarrow \infty} p_K$  を計算せよ (5 点).

**問題 3** (配点 15 点) (キーワード: 平面グラフ, オイラーの公式)

グラフ  $G$  (点の数:  $n \geq 4$ ) を三角形のみを含む平面グラフであるとする.  $G$  に含まれる次数  $k$  の点の個数を  $n_k$  とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $G$  の辺数  $m$  が  $m = 3n - 6$  で与えられることを示せ (5 点).
- (2) 次の関係式:  $3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \dots = 12$  が成り立つことを示せ (5 点).
- (3)  $G$  は次数 5 以下の点を 4 つ以上含むことを示せ (5 点).

**問題 4** (配点 15 点) (キーワード: ピーターソン・グラフ, 辺彩色と彩色指数, ハミルトン・グラフ)

- (1) ピーターソン・グラフを描け (2 点).
- (2) (1) で求めたピーターソン・グラフの辺彩色を考えると, その彩色指数を求めよ (3 点).
- (3) 任意のグラフ  $G$  が 3 次のハミルトン・グラフであれば, その彩色指数は 3 であることを示せ (5 点).
- (4) (2)(3) の結果を用いることにより, ピーターソン・グラフはハミルトン・グラフか否かを判定せよ (判定理由も明記すること) (5 点).

## 2005年度 期末試験解答 (情報工学科3年生/電子工学科4年生)

### 平成17年度 グラフ理論 期末試験解答 (9/16 実施 解答作成: 井上 純一)

採点基準: 各問題の配点は問題用紙に記した通り. 以下では太字で書かれた点数のうち, 「プラス (+) 何点」と書かれたものが部分点, 「マイナス (-) 何点」と書かれたものが減点である. これら太字での記入が無いものはすべて完全な正解のみ有効. なお, これ以外にも部分点を与える場合がある.

#### 問題 1 (配点 10 点)

(1) 隣接行列  $A$ , 接続行列  $M$  は以下の通り (各 2 点).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 問題文に与えられた隣接行列を持つグラフを描くと図 14.249 のようになる (注: このグラフと完全に一致しなくても同形なグラフであれば正解).

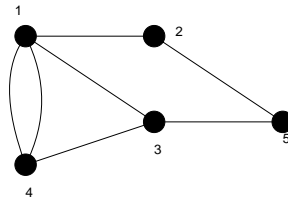


図 14.249: 問題 1 (2) の正解グラフ.

- (3)(i) 「隣接行列の第  $i$  行, あるいは, 第  $i$  列の要素和は点  $i$  に接続する辺の数を表す。」 (1 点)  
 (ii) 「接続行列の第  $i$  行の要素和は点  $i$  に接続する辺の本数を表す。」 (1 点)  
 (iii) 「接続行列の第  $i$  列の要素和は辺  $i$  の両端の点の数を表し, 必ず 2 となる。」 (1 点)

#### 問題 2 (配点 10 点)

(1) 明らかに,  $S_3(n)$  は初項 1, 公比 3 の等比数列の第  $n$  項までの和であるから

$$S_3(n) = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{3} \quad (14.461)$$

である. 一方,  $T_3(n)$  の端点の総数  $Q_3(n)$  は  $T_3(n)$  の作り方から明らかに  $Q_3(n) = 3^n$  であるので, これらの比  $P_3(n) = Q_3(n)/S_3(n)$  は

$$P_3(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{3^{n+1} - 1} \tag{14.462}$$

であり, 問題の極限值は

$$p_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_3(n) = \frac{2}{3} \tag{14.463}$$

と求まる ( $S_3(n), Q_3(n)$  のいずれか一方だけ正解で +1 点).

(2)  $k = K$  の場合には

$$S_K(n) = \frac{K^{n+1} - 1}{K - 1}, \quad Q_K(n) = K^n, \quad P_K(n) = \frac{(K - 1)K^n}{K^{n+1} - 1} \tag{14.464}$$

となるので ( $S_K(n), Q_K(n)$  のいずれか一方だけ正解で +1 点),  $P_K(n)$  に関して  $n \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$p_K = \lim_{n \rightarrow \infty} P_K(n) = \frac{K - 1}{K} \tag{14.465}$$

が得られる. さらに, この確率で  $K \rightarrow \infty$  の極限をとれば  $p_{K \rightarrow \infty} = 1$  となる (この極限値を忘れていたら -1 点).

**問題 3** (配点 15 点)

(1) 全ての辺は 3 本の辺で囲まれており, 全ての辺は 2 つの面の境界となっているので, 面数  $f$ , 辺数  $m$  の間には

$$3f = 2m \tag{14.466}$$

が成り立つ (この関係に気づいて +1 点). これとオイラーの公式 :  $n - m + f = 2$  から面数  $f$  を消去すれば (この公式が書けて +1 点)

$$m = 3n - 6 \tag{14.467}$$

が得られる.

(2) (14.467) を 2 倍したものに

$$n = \sum_{k=3} n_k, \quad 2m = \sum_{k=3} kn_k \tag{14.468}$$

を代入すれば (これら 2 つの関係のうち, 1 つについて気がつけて +1 点, 2 つとも気づけて +3 点)

$$\sum_{k=3} kn_k = 6 \sum_{k=3} n_k - 12 \tag{14.469}$$

が得られるが, 和の中のはじめの数項を書き出してみると

$$3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 + 7n_7 + 8n_8 + \dots = 6(n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + \dots) - 12 \tag{14.470}$$

すなわち

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \dots = 12 \tag{14.471}$$

が成り立つ.

(3) (2) で得られた関係式から

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \dots - 12 = 0 \leq 3n_3 + 2n_4 + n_5 - 12 \quad (14.472)$$

であるから

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 \quad (14.473)$$

である. また, 明らかに  $(3n_3 + 3n_4 + 3n_5) \geq 3n_3 + 2n_4 + n_5$  であるから, これらの不等式から直ちに

$$n_3 + n_4 + n_5 \geq \frac{1}{3}(3n_3 + 2n_4 + n_5) \geq \frac{1}{3} \times 12 = 4 \quad (14.474)$$

従って, グラフ G には次数が 5 以下の点が 4 つ以上含まれることが示せた.

**問題 4 (配点 15 点)**

(1)(2) ピータースン・グラフは図 14.250 で与えられる連結グラフであり, 図に示したように辺彩色できるので, その彩色指数は 4 である (ピータースン・グラフが描けて +2 点).

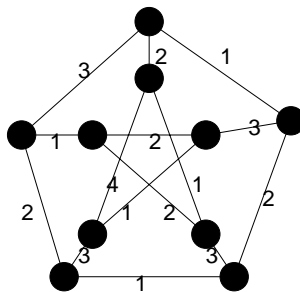


図 14.250: ピータースン・グラフの彩色. 辺に付された数字が各色を表す.

- (3) まず, G が 3 次のハミルトン・グラフなのであるから, 各点でハミルトン閉路に属する 2 辺をハミルトン閉路に沿って互い違いに 2 色 (色 1 と 2 としよう) で  $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$  のように辺彩色する. 各点で残りの 1 辺を 1, 2 と異なる色 3 で彩色すれば, G の 3 彩色が完成する. よって G の彩色指数は 3 である.
- (4) (2) より, 3 次のグラフであるピータースン・グラフの彩色指数は 4 であり, これは (3) で示した 3 次のグラフがハミルトン・グラフであるための必要条件である「彩色指数が 3」を満たさない. 従って, ピータースン・グラフはハミルトン・グラフではない.



## 2005年度 期末試験総評 (情報工学科3年生/電子工学科4年生)

### 平成17年度 グラフ理論 期末試験 総評 (9/16 実施)

グラフ理論の期末試験の採点をしました。受験者数 92 人, 欠席数 8 人, 最高点 50 点 (50 点満点), 最低点 17 点, 平均点 35.47 点であり, 得点分布は下記になりました。

15-19	***
20-24	****
25-29	*****
30-34	*****
35-39	*****
40-44	*****
45-49	*****
50	*****

**問題 1** と **問題 2** はとても簡単な問題であり, 皆さんの出来も良かったです。ただし, **問題 2** の等比級数和の計算でミスをしたために減点された答案が多数見受けられました。この大問 2 題ができなかった場合, 今回のテストで点数を取るのには難しかったようです。

**問題 3** の小問 (1) は試験中にも言いましたが, 問題文に与えられたグラフ  $G$  の定義に従うと, 成立すべきなのは等式ではなく,  $m \leq 3n - 6$  という不等式になります。これを示してもらえれば正解としました。なお, この条件を問題文に与えた等式:  $m = 3n - 6$  にするには, グラフ  $G$  に対してさらに「(\*) どの隣接しない 2 点を結んでも平面グラフとならない」という条件を課す必要があります。この条件を考慮すれば,  $m = 3n - 6$  を満たさない図 15.251 のようなグラフは  $G$  から除外されることとなります。この条件文 (\*) の欠落はこち

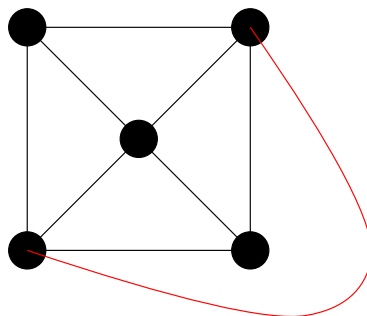


図 15.251: この黒線で結ばれた平面グラフは問題文の条件は満たすが, 赤線を 1 本加えても依然として平面グラフであり, ここに挙げた条件 (\*) は満たさない。黒線の平面グラフに対し, 等式  $m = 3n - 6$  が成り立たず ( $m = 8, 3n - 6 = 9$ ), 極大平面グラフではない。 ( $m \leq 3n - 6$  は満たす)。

らのミスですが、小問 (2)(3) 以降は (これも試験中に言いましたが)、小問 (1) の等式 :  $m = 3n - 6$  の成立を仮定すれば独立に示すことができるので、特に甘めに点数をつけるということはありませんでした。なお、条件 (\*) を満たすような平面グラフを極大平面グラフと呼んでいます (つまり、非隣接点間に 1 本でも辺を追加すると平面グラフとなくなってしまうという意味で「極大」であるというわけである)。

**問題 4** に関しては、ピーターソン・グラフが描けなかった者が数名いました。このグラフは講義でも、レポート問題でも何度も出てきたグラフなので、描けなければいけません。このグラフが描けない時点でこの問題のほとんどが不正解となりますが、唯一小問 (3) だけが独立しているので、この問題だけ正解の者も複数名いました。

なお、解答の作り方によっては、小問 (2)(3) ができなくても小問 (4) は示せてしまえそうですが、この小問 (4) の判定理由が正当性をもつためには (2)(3) の正解が不可欠なので、厳しいようですが、この小問 (2)(3) の正解を前提として小問 (4) を採点してあります (つまり、小問 (2)(3) が間違っている場合には小問 (4) は無条件に不正解)。

レポート課題および出席点も考慮した総合成績は今週中に出し、不合格者のみを学籍番号にて掲示します。また、レポートをそれなりに出しているが、テストを欠席した者が数名います。その者も同時に掲示しますので、病気等、テストを受けられなかった正当な理由がある場合のみ追加課題を考えたいと思います。

平成 17 年 9 月 27 日 井上純一

## 2006年度 期末試験 (情報工学科3年生/電子工学科4年生)

### 平成18年度 グラフ理論 期末試験問題 (9/20 実施 出題者：井上 純一)

注意事項：問題用紙はこの表紙を入れて2ページあり、**問題1** ~ **問題4**の大問計4題である(50点満点)。解答用紙、計算(下書き)用紙は各1枚配布する。解答用紙には氏名、学科学生番号を記入し、裏面を使う際には「裏に続く」と記入すること。試験開始後30分間は退室できない。また、一度退室した場合には再入室できないので注意するように。どの問題から解いてもよいが、必ず該当する問題番号を明記してから答案を作成すること。制限時間90分。

**『解答始め』の合図があるまで問題冊子を開かないこと**

解答を終え、退室する際には必ず解答用紙を提出し、解答例を1部持ち帰ること。

成績分布・採点基準などは明日以降、できるだけ早い時期に講義HP上にて公開する。自分自身の成績の知りたい者は10/2以降に情報科学研究科棟8-13まで来るように。

**問題 1** (配点 10 点) (キーワード : 完全グラフ, 完全二部グラフ, 車輪, オイラー・グラフの判別)

オイラー・グラフに関して以下の問いに答えよ. 問い (1) ~ (3) に答えよ.

- (1) 完全グラフ  $K_n$  がオイラー・グラフとなるために点数  $n$  が満たすべき条件を求めよ.
- (2) 完全二部グラフ  $K_{s,t}$  がオイラー・グラフとなるために,  $s, t$  が満たすべき条件を求めよ.
- (3) どのような  $n$  に対して車輪  $W_n$  はオイラー・グラフとなるか? 理由と併せて答えよ.

**問題 2** (配点 10 点) (キーワード :  $k$ -成分からなる単純グラフの辺数の下限, 数学的帰納法)

グラフ  $G$  は  $n$  個の点からなるグラフであるとする.  $G$  には成分が  $k$  個あるとすると,  $G$  の辺数  $m$  の下限は  $n - k$  であること, すなわち, 次の不等式 :

$$m \geq n - k$$

が成り立つことを辺数  $m$  に関する数学的帰納法により示せ.

**問題 3** (配点 10 点) (キーワード : 隣接行列, 全域木とその総数, 行列木定理)

- (1) 隣接行列  $A$  が

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフ  $G$  を図示し, このグラフ  $G$  の全域木を全て描け (3 点).

- (2) 完全グラフ  $K_4$  の点行列を書け. また, 行列木定理より完全グラフ  $K_4$  の全域木の総数を求めよ (7 点).

**問題 4** (配点 20 点) (キーワード : 点彩色, 彩色多項式, 辺の除去と縮約)

$G$  を単純グラフとし,  $G$  から任意の 1 辺  $e$  を除去して得られるグラフを  $G-e$ , 縮約して得られるグラフを  $G \setminus e$  とすると,  $G$  の彩色多項式  $P_G(k)$  は

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k)$$

のように分解することができる.

- (1) 4 角形  $G$  に対して,  $G-e$ ,  $G \setminus e$  をそれぞれ図示せよ (5 点).
- (2) 4 角形  $G$  の彩色多項式を  $k$  の関数として求めよ (5 点).
- (3) 点数 4 の一般連結グラフ  $G$ , 木  $T_4$ , 完全グラフ  $K_4$  の彩色多項式の間には次の不等式が成り立つことを示せ (10 点).

$$P_{K_4}(k) \leq P_G(k) \leq P_{T_4}(k)$$

## 2006年度 期末試験解答 (情報工学科3年生/電子工学科4年生)

### 平成18年度 グラフ理論 期末試験解答 (9/20 実施 解答作成：井上 純一)

各問題/小問の配点は問題用紙に記した通り。これ以外にも部分点を与える場合がある。

#### 問題1 (配点10点)

- (1) 完全グラフ  $K_n$  の任意の1点の次数は  $n-1$  であるから、オイラーの定理より  $n-1 =$  偶数の場合に限り、 $K_n$  はオイラー・グラフとなる。よって、 $n = 2m + 1$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) が答え。
- (2) 点数  $t, s$  が偶数であれば、黒、白で色分けされた2グループの点をそれぞれ交互に経由してもとに戻るオイラー小道を作ることは常に可能である。よって、 $t, s$  ともに偶数が答え。
- (3) 車輪は全ての  $n$  に対して、サイクル  $C_{n-1}$  と1点との結合部の次数は3 (奇数) であるから、オイラーの定理より オイラー・グラフとはならない。

#### 問題2 (配点10点)

空グラフ  $m = 0$  のときは自明であり、 $n = k$  より、 $0 \leq 0 - 0 = 0$  で成立する。辺数が  $m_0 - 1$  のときに不等式の成立を仮定する。このとき、単純グラフ  $G$  から任意の辺を1本削除した場合、成分数、点数、辺数はどのように変化するかを考察すると

$$\text{成分数} : k \rightarrow k + 1$$

$$\text{点数} : n \rightarrow n$$

$$\text{辺数} : m_0 \rightarrow m_0 - 1$$

となるから、上の矢印の右側のそれぞれの量  $(k + 1, n, m_0 - 1)$  に関して不等式を作ると

$$m_0 - 1 \geq n - (k - 1)$$

が成立する。従って、この辺数  $m_0 - 1$  に関する不等式の成立を仮定し、これから辺数  $m_0$  についての不等式の成立を導けばよい。これは上不等式を書き直せば直ちに

$$m_0 \geq n - k$$

が得られ、 $m_0$  に関して成立。以上より、全ての  $m$  に対して  $m \geq n - k$  の成立する。(証明終わり)

#### 問題3 (配点10点)

- (1) 隣接行列  $A$  を持つグラフ  $G$  : 図 17.252 (左) とその全域木 (右) となる。
- (2) 完全グラフ  $K_4$  の点行列  $D$  は、その定義から

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

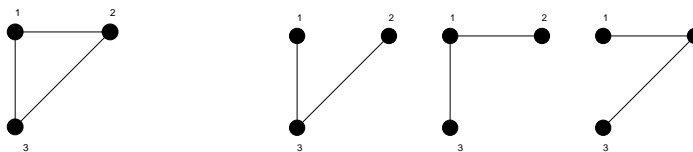


図 17.252: 隣接行列 で与えられるグラフ G (左) とその 3 つの全域木 (右).

であり, その  $i = j = 4$  での余因子が, 完全グラフ  $K_4$  の全域木の総数  $\tau(K_4)$  を与えるので, 計算すると

$$\tau(K_4) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 24 - 4 - 4 = 16 \text{ (個)}$$

**問題 4 (配点 20 点)**

(1) 4 角形に関して  $G-e$ ,  $G \setminus e$  を描くと, それぞれ図 17.253 のようになる.

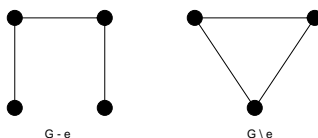


図 17.253: 4 角形 G に関する  $G-e$  と  $G \setminus e$ .

(2) 問題文に与えられた関係式, 及び, (1) の結果を用いると, 次の彩色多項式が得られる.

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k$$

(3) 点数が 4 の完全グラフ  $K_4$  から辺を 1 本ずつ削減していった場合, 彩色多項式はどのように振舞うのかを 図 17.254 に載せる. 辺を 1 本ずつ削除していくことにより, 彩色多項式は  $k(k-1)(k-2)(k-3) \rightarrow$

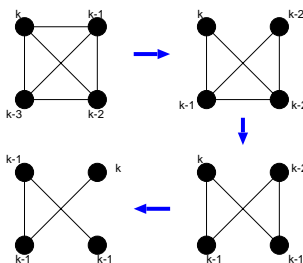


図 17.254: 完全グラフから辺を 1 本ずつ削除していくと最後には木が得られる.

$k(k-1)(k-2)^2 \rightarrow k(k-1)^2(k-2) \rightarrow k(k-3)^3$  のように単調に増加し, 最終的に得られるグラフは点数 4 からなる木  $T_4$  である. また, 完全グラフは全ての点が互いにつながっているので, 点彩色においては全ての点の色を他のどの全ての点の色とも異なる色で彩色しなければならず, 従って, 明らかに与えられた色の数  $k$  に対し, 完全グラフの点彩色の仕方の数は連結グラフ中で最も少ない. 点数が 4 の一般の連結グラフはこの完全グラフと木の間にいるので, これらの彩色多項式の間には

$$P_{K_4}(k) \leq P_G(k) \leq P_{T_4}(k)$$

が成り立つ.



## 2006年度 期末試験総評 (情報工学科3年生/電子工学科4年生)

### 平成18年度 グラフ理論 期末試験 総評 (9/20 実施)

昨日行ったグラフ理論の期末試験の採点をしました。受験者数 95 人, 欠席数 13 人, 最高点 50 点 (50 点満点), 最低点 8 点, 平均点 37.09 点であり, 得点分布は下記のようになりました。

0-9 \*  
 10-14 \*\*\*  
 15-19 \*\*\*\*\*  
 20-24 \*\*\*\*\*  
 25-29 \*\*\*\*\*  
 30-34 \*\*\*\*\*  
 35-39 \*\*\*\*\*  
 40-44 \*\*\*\*\*  
 45-50 \*\*\*\*\*

全ての問題が講義で扱った演習問題であったこともあり, 上の得点分布からもわかるように, レポート課題をコンスタントに出していた受講生にはとても簡単な問題だったことと思います。

**問題 2** は解答例の他に様々な示し方があるとは思いますが, 辺の本数の下限ですから, 各成分が木であるという前提の下で議論しても良いです。 **問題 3** の (2) はこちらの思うほどできなかったため, 配点を当初の 7 点から 5 点に下げました。行列式の単純な計算ミスはマイナス 2 点。完全グラフ  $K_n$  の全域木の個数の公式  $n^{n-2}$  を用いて計算した解答がありましたが, 「点行列から行列木定理」という問題の意図からすると途中経過を飛ばして, この結果の部分  $n^{n-2}$  のみを用いて答え 16 を出した場合には完全な正解とするわけにはいかず, マイナス 3 点としてあります。 **問題 4** の (3) は具体的に全てのグラフ  $G$  を列記し, その彩色多項式を求め, それが木と完全グラフの間の値をとることを具体的に示してもらっても OK。グラフ  $G$  として一般的なグラフではなく, 特定のグラフ, 特に 4 角形に対してのみ示した解答に関しては配点の半分の 5 点を与えるにとどめました (これでもかなり甘め)。

レポート課題の成績, 出席点を考慮した最終成績は 28 日までに出しますので, 成績の気になる方は 10 月 2 日以降に情報科学研究科棟 8-13 室までお越しください。

また, 卒業単位に関して深刻な影響があると思われる電子工学科 4 年の学生 10 名 (学内掲示板に発表済み) に対しては追加課題を出しますので, 講義 HP の [連絡 5] を参照して対応してください。

平成 18 年 9 月 21 日 井上純一



## 2007年度 期末試験 (電子工学科 4 年生)

### 平成 19 年度 グラフ理論 期末試験問題 (9/3 実施 出題者：井上 純一)

注意事項：問題用紙はこの表紙を入れて 2 ページあり、**問題 1** ~ **問題 4** の大問計 4 題である (50 点満点)。解答用紙, 計算 (下書き) 用紙は各 1 枚配布する。解答用紙には氏名, 学科学番号を記入し, 裏面を使う際には「裏に続く」と記入すること。試験開始後 30 分間は退室できない。また, 一度退室した場合には再入室できないので注意するように。どの問題から解いてもよいが, 必ず該当する問題番号を明記してから答案を作成すること。制限時間 90 分。

**『解答始め』の合図があるまで問題冊子を開かないこと**

解答を終え, 退室する際には必ず解答用紙を提出し, 解答例を 1 部持ち帰ること。

成績分布・採点基準などは明日以降, できるだけ早い時期に講義 HP 上にて公開する。自分自身の成績の知りたい者は 9/10 以降に情報科学研究科棟 8-13 まで来るように。

**問題 1** (配点 10 点) (キーワード: 完全三部グラフ, 辺数, 隣接行列)

オイラー・グラフに関して以下の問い (1) ~ (3) に答えよ.

- (1) 完全三部グラフ  $K_{2,2,2}$  を描け (5 点).
- (2) 完全三部グラフ  $K_{r,s,t}$  の辺数を  $r, s, t$  のうちから必要なものを用いて表せ (3 点).
- (3) (1) で描いた完全三部グラフ  $K_{2,2,2}$  の隣接行列を求めよ. ただし, 各点の番号を明記してから答えること (2 点).

**問題 2** (配点 10 点) (キーワード: オイラー・グラフ, ハミルトン・グラフ, 完全グラフ, 完全二部グラフ)

- (1) オイラー・グラフ, 半オイラー・グラフとはどのようなグラフか, それぞれ簡潔に説明せよ. また, 完全グラフ  $K_5$  はオイラー・グラフ, 半オイラー・グラフ, そのどちらでもないグラフのうちのどれであるか, 理由とともに答えよ (5 点).
- (2) ハミルトン・グラフ, 半ハミルトン・グラフとはどのようなグラフか, 簡潔に説明せよ. また, 完全二部グラフ  $K_{2,3}$  はハミルトン・グラフ, 半ハミルトン・グラフ, そのどちらでもないグラフのうちのどれであるか, 理由とともに答えよ (5 点).

**問題 3** (配点 10 点)

1. (キーワード: 完全グラフ, 連結グラフ, ネットワークのつながり方と信頼度)

完全グラフ  $K_3$  に関し, その各点がサーバに対応し,  $K_3$  のつながり方をした「ネットワーク」をなしているものとする. このネットワークの各辺が確率  $q$  で断線する場合, ラベル付きグラフが依然として連結グラフである場合に限り, このネットワークは正常に機能することがわかっている. このとき, このネットワークが正常である確率 (ネットワークの信頼度)  $R$  を  $q$  の関数として求め, 図示せよ (3 点).

2. (キーワード: 点行列, 行列木定理, 全域木とその総数)

隣接行列  $A$  が

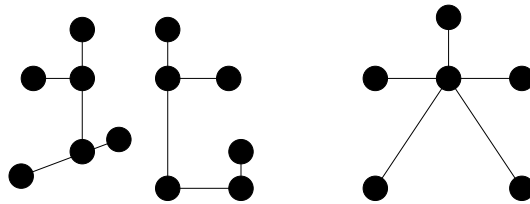
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフ  $G$  に関する行列木定理について以下の問いに答えよ.

- (1) グラフ  $G$  の点行列  $D$  を求めよ (2 点).
- (2) 行列木定理により, グラフ  $G$  の全域木の総数  $\tau(G)$  を求めよ (3 点).
- (3) (2) で得られた個数だけ存在する全域木を具体的に全て図示せよ (2 点).

**問題 4** (配点 20 点) (キーワード: 点彩色, 彩色多項式, 辺の除去と縮約)

1. 図の「北大」を表す非連結グラフを隣同士の点と同じ色にならないように「赤」「青」「黄」の三色で彩色する場合の数の数を求めよ (7 点).



2.  $G$  は点数  $n$ , 辺数  $m$  の単純グラフであるものとする. このとき, 彩色多項式:  $P_G(k)$  の

- (i) 主要項は  $k^n$  である (3 点).
- (ii)  $k^{n-1}$  の係数は  $-m$  である (5 点).
- (iii) 各係数の符号は正負が交互に表れる (5 点).

をそれぞれ辺数  $m$  に関する数学的帰納法によりそれぞれ証明せよ.



## 2007年度 期末試験解答 (電子工学科4年生)

### 平成19年度 グラフ理論 期末試験解答 (9/3実施 解答作成: 井上 純一)

各問題/小問の配点は問題用紙に記した通り. これ以外にも部分点を与える場合がある.

#### 問題1 (配点10点)

- (1) 完全三部グラフ  $K_{2,2,2}$  を描くと図 20.255 のようになる.

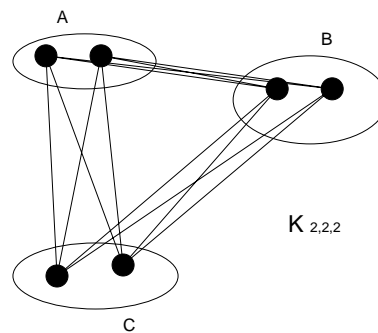


図 20.255: 完全三部グラフ  $K_{2,2,2}$  の作図例.

- (2)  $K_{r,s,t}$  の辺の本数は  $rs + rt + st$  本である.  
 (3) 図 3.49 のグループ A に属する左側の点から時計周りに  $1, \dots, 6$  と各点へと番号を割り振ると隣接行列  $A$  は以下の通り.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20.475)$$

#### 問題2 (配点10点)

- (1) オイラー・グラフ: 各辺をちょうど1回ずつ通る閉じた小道があるグラフ.  
 半オイラー・グラフ: 各辺をちょうど1回ずつ通る小道があるグラフ.  
 また, 完全グラフ  $K_5$  の全ての点の次数は4で偶数であるので, オイラーの定理から  $K_5$  はオイラー・グラフであると結論づけられる. (注: または, 図 20.256 のように具体的に閉じたオイラー小道を示しても正解).

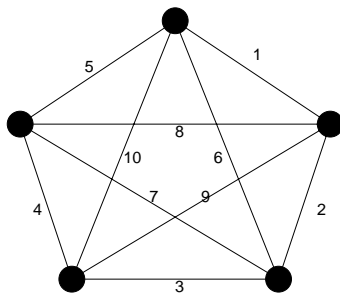


図 20.256: 完全グラフ  $K_5$ . 番号順に回れば, 閉じたオイラー小道が得られる.

(2) ハミルトン・グラフ: 各点をちょうど 1 回ずつ通る閉じた小道があるグラフ.

半ハミルトン・グラフ: 各点をちょうど 1 回ずつ通る小道のあるグラフ.

また, 完全 2 部グラフ  $K_{2,3}$  は例えば, 図 20.257 のような点の順で回れば全ての点を 1 回ずつ通るが, 必ず出発点以外の点で終わるので半ハミルトン・グラフである.

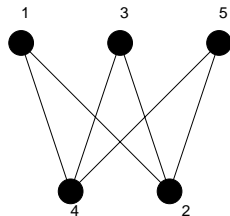


図 20.257: 完全二部グラフ  $K_{2,3}$ . 番号順に回れば, ハミルトン小道が得られるが, これは閉じない.

**問題 3** (配点 10 点)

- 完全グラフ及び, 辺が 1 本断線したグラフ (3 種類), 辺が 2 本断線したグラフ (3 種類), 辺が全て断線したグラフ (1 種類) のそれぞれのグラフを図 20.258 に示す. ここで注意すべきなのは, 各点がネットワークのサーバに対応するので, 「完全グラフの場合」, 及び, 「辺が 1 本だけ断線する場合」に限り, このネットワークは正常に機能する. それぞれの確率は  $(1 - q)^3$ ,  $3q(1 - q)^2$  である. 従って, ネットワークの信頼度  $R$  はこれら両者の和で与えられるので,  $q$  の関数としての  $R$  は

$$R(q) = (1 - q)^3 + 3q(1 - q)^2 \tag{20.476}$$

となる. これを図 20.259 に描く.

2.

- (1) 隣接行列  $A$  により与えられるグラフ  $G$  は図 20.260 のようになる. 従って, 求める点行列  $D$  は

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{20.477}$$

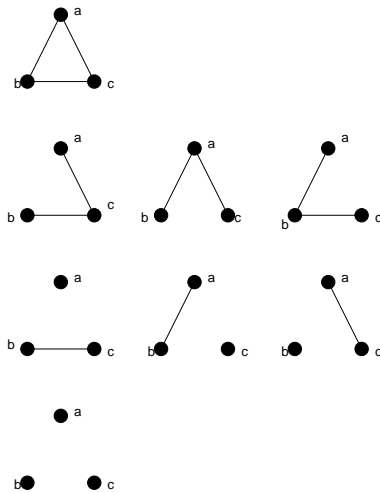


図 20.258: ここで考えられるネットワークの状態. 上から, 断線ゼロ, 1 本断線, 2 本断線, 全部断線のグラフ. ネットワークとして正常であるのは, 断線ゼロ, 及び, 1 本断線の場合のみ.

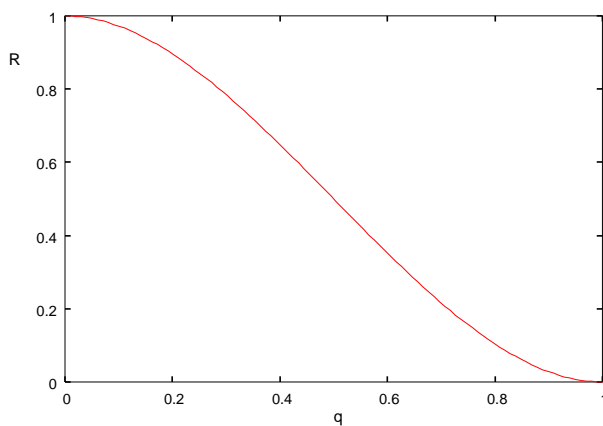


図 20.259: ネットワークの信頼度  $R$  の各辺の断線確率  $q$  依存性.

である.

(2)  $i = j = 4$  で余因子展開することにより, グラフ  $G$  の全域木の個数  $\tau(G)$  は

$$\tau(G) = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 \cdot 3 = 7 \text{ (個)}$$

(20.478)

となる.

(3) グラフ  $G$  の 7 通りの全域木を図示すると図 20.261 になる.

**問題 4 (配点 20 点)**

- 非連結グラフ「北大」を構成する全ての成分は点数が 6 の「木」であること, 点数  $n$  の木の彩色多項式が  $k(k-1)^{n-1}$  で与えられること, 非連結グラフの個々の成分は他の成分とは独立に彩色できること

G

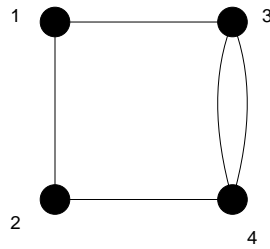


図 20.260: 隣接行列 A によって定義されるグラフ G.

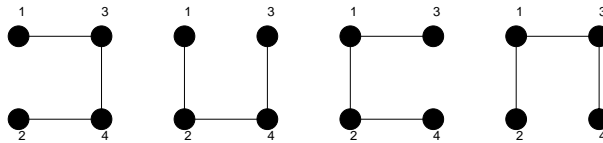


図 20.261: 隣接行列 A によって定義されるグラフ G の全域木. ただし, 辺  $3 \rightarrow 4$  を削除するか, 辺  $4 \rightarrow 3$  を削除するかにより, これら 4 つのグラフの中で辺 34 があるグラフにはそれぞれ 1 つずつ異なるグラフが存在するので, 計 7 つの全域木が得られる.

に注意すると

$$P_{\text{北大}}(k) = k(k-1)^{n-1} \times k(k-1)^{n-1} \times k(k-1)^{n-1} = k^3(k-1)^{3n-3} \quad (20.479)$$

従って, 求める場合の数は  $n = 6, k = 3$  の場合であるから

$$P_{\text{北大}}(3) = 3^3 \times 2^{15} = 884736 \quad (20.480)$$

となる.

2. 分解公式:

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \quad (20.481)$$

を用いて各事実を証明する. ただし, ここでは辺数  $m$  についての帰納法を行うため, 辺数  $m$ , 点数  $n$  のグラフ  $G$  に対する彩色多項式を  $P_G^{(m,n)}(k)$  のように書くことにしよう. このとき, グラフ  $G - e$  の辺数は  $m - 1$ , 点数が  $n$ , グラフ  $G/e$  の辺数  $m - 1$ , 点数  $n - 1$  であるから, この定義のもとで分解公式は

$$P_G^{(m,n)}(k) = P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) - P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) \quad (20.482)$$

となる. 以下でこの公式 (20.482) を用いて証明を試みる.

- (i)  $m = 1$  のとき, グラフ  $G$  は任意の 2 点が 1 本の辺で結ばれており, 残り  $n - 2$  点は孤立点であるべきなので, この場合の彩色多項式は係数も含めて陽に求めることができ

$$P_G^{(1,n)}(k) = k(k-1) \times k^{n-2} = k^n - k^{n-1} \quad (20.483)$$

となる. 従って, 明らかに題意を満たしていることがわかる. 次に辺数  $m - 1$  の場合に題意の成立を仮定しよう. つまり, 彩色多項式で書けば

$$P_{G'}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i k^{n-i} \quad (20.484)$$

を辺数  $m$ , 点数  $n$  の任意のグラフ  $G'$  に対して仮定する. このとき, グラフ  $G$  から任意の辺  $e$  を削除したグラフ  $G - e$  の彩色多項式は, グラフ  $G - e$  が辺数  $m - 1$ , 点数  $n$  であることから, 上のグラフ

$G'$  のカテゴリーに入ることを考えて

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i k^{n-i} \tag{20.485}$$

となる. 一方,  $G$  の辺  $e$  を縮約することにより出来上がるグラフ  $G/e$  に関する彩色多項式は, 縮約操作によって点数が  $n-1$  になっていることに注意して

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) = k^{n-1} + \sum_{i=2}^n \beta_i k^{n-i} \tag{20.486}$$

である. 従って, 分解公式 (20.482) から, 辺数  $m$ , 点数  $n$  のグラフ  $G$  の彩色多項式は

$$P_G^{(m,n)}(k) = k^n - (1 - \alpha_1)k^{n-1} + (k^{n-2} \text{ 以下の項}) \tag{20.487}$$

となる. 従って, 辺数  $m$  の場合にも題意が成立する. 従って, 任意の自然数  $m$  に対して題意が成立する.

(ii)  $m = 1$  のとき, 既に求めているように

$$P_G^{(1,n)}(k) = k^n - k^{n-1} \tag{20.488}$$

であるから題意の成立は明らかである. そこで辺数  $m-1$  のときに題意の成立を仮定する. つまり, 辺数  $m-1$ , 点数  $n$  のグラフ  $G'$  に対して

$$P_{G'}^{(m-1,n)}(k) = k^n - (m-1)k^{n-1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i k^{n-i} \tag{20.489}$$

としよう. このとき (i) と同様の考察により

$$P_{G'-e}^{(m-1,n)}(k) = k^n - (m-1)k^{n-1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i k^{n-i} \tag{20.490}$$

$$P_{G'/e}^{(m-1,n-1)}(k) = k^{n-1} + \sum_{i=2}^n \beta_i k^{n-i} \tag{20.491}$$

が得られる. 従って, 分解公式 (20.482) を用いると辺数  $m$ , 点数  $n$  のグラフ  $G$  の彩色多項式は

$$\begin{aligned} P_G^{(m,n)}(k) &= k^n - (m-1)k^{n-1} - k^{n-1} + (k^{n-2} \text{ 以下の項}) \\ &= k^n - mk^{n-1} + (k^{n-2} \text{ 以下の項}) \end{aligned} \tag{20.492}$$

となり, 辺数  $m$  の場合にも題意が成立する. 従って, 任意の自然数  $m$  に対して題意が成立する.

(iii)  $m = 1$  の場合には

$$P_G^{(1,n)}(k) = k^n - k^{n-1} \tag{20.493}$$

より題意は成立する. (この場合には 2 つの項のみであることに注意.) そこで, 辺数  $m-1$  の場合に題意の成立を仮定する. つまり, 彩色多項式で書けば

$$P_{G'}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha_i k^{n-i} \tag{20.494}$$

を辺数  $m$ , 点数  $n$  の任意のグラフ  $G'$  に対して仮定する. ただし, 項ごとの符号をファクタ:  $(-1)^i$  で導入した関係で, 全てのインデックス  $i$  に対して  $\alpha_i > 0$  であるとして以下の議論を進めなくてはな

らないことに注意しよう. すると, (i)(ii) と同様の考察により

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha_i k^{n-i} \quad (20.495)$$

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) = k^{n-1} - \sum_{i=2}^n (-1)^i \beta_i k^{n-i} \quad (20.496)$$

が得られる.  $\alpha_i$  と同様の理由で, 全ての  $i$  に対して  $\beta_i > 0$  である. 従って, 分解公式 (20.482) を用いると辺数  $m$ , 点数  $n$  のグラフ  $G$  の彩色多項式は

$$\begin{aligned} P_G^{(m,n)}(k) &= k^n - k^{n-1} + (-1)\alpha_1 k^{n-1} + \sum_{i=2}^n (-1)^i (\alpha_i + \beta_i) k^{n-i} \\ &= k^n - m k^{n-1} + \sum_{i=2}^n (-1)^i (\alpha_i + \beta_i) k^{n-i} \end{aligned} \quad (20.497)$$

となる. ここで (ii) で示された事実:  $\alpha_1 = m - 1$  を用いた.  $\alpha_i + \beta_i > 0$  より,  $m$  のときの題意の成立が示せたので, 任意の自然数  $m$  に対して題意が成立する.

## 2007年度 期末試験総評 (電子工学科4年生)

### 平成19年度 グラフ理論 期末試験 総評 (9/3 実施)

本で行ったグラフ理論の期末試験の採点をしました。

受験者数 34 人, 欠席数 13 人, 最高点 50 点 (50 点満点), 最低点 16 点, 平均点 32.09 点であり, 得点分布は下記のようにになりました。

0-14  
 15-19 \*\*  
 20-24 \*\*\*\*\*  
 25-29 \*\*\*\*  
 30-34 \*\*\*\*\*  
 35-39 \*\*\*\*\*  
 40-44 \*\*\*  
 45-49 \*\*  
 50 \*\*

問題は **問題 4** を除いて当講義で既に例題 \*.\* として扱った問題でした。 **問題 4** の 2. は試験日当日に回収したレポートの問題だったので, この演習問題にまじめに取り組んだ人は, この問題も難なくできたと思われます。配点は解答例に記したままで, 採点後にバランスを考えて配点を修正することはしませんでした (というか, そうする必要がなかった)。

以下, 答案を採点していて気づいた点などを個々の問題に対して列記します。

**問題 1** はほとんどの人ができてましたが, 見落としなのか,  $K_{2,2,2}$  ではなく,  $K_{3,3,3}$  に対するグラフを描き, その隣接行列を書いてくれた人がいました。これは正解のみが意味を持つような簡単な問題ですので, やや厳しいかもしれませんが, 部分点等は一切なしです。

**問題 2** は良くできてましたが, 「半オイラー」の定義を「オイラーであり, かつ, 完全グラフである」と誤解して覚えている人も見受けられました。もう一度解答を見るなりして確認してみてください。この (1)(2) の細かな部分点ですが, それぞれ, 「オイラー」「半オイラー」「ハミルトン」「半ハミルトン」の定義が書けていて, それぞれ 2 点。 (1)(2) に挙げた個別のグラフ ( $K_5, K_{2,3}$ ) に対する判定が正しくできていればそれぞれ 1 点としてあります。

**問題 3** の 1. はこちらが思うほどできていませんでした。信頼度を解答例にあるように直接求めるのではなく, その余事象の確率を求めても, もちろん, 正解です。なお, 「信頼度  $R$  の  $q$  の関数としての図示」が無い場合には 1 点減点としてあります。また, 問題の 2. ですが, 点行列が書けてなくても, グラフ  $G$  が図示できていれば 1 点加点。 (3) は行列木定理を用いなくても, 7 つの全域木を実際に描いて数え上げればよいので, (2) が答えられなくても (3) だけの正解で 2 点あげています (つまり, (2)(3) の採点における相関は無し)。

問題 4 の 1. は非連結グラフ「北大」の全ての成分が木であることに気づいて、それに関する言及が答案にあれば 2 点の部分点。正解にたどり着かなくても、 $\{k(k-1)^5\}^3$  と記号で正しく評価できていれば減点せずに正解としてあります (つまり、単純な計算ミスに関しては減点してありません)。ちなみに、どうでも良いことかもしれませんが、所謂「旧七帝国大学」の略称をみても「北大」「東北大」「東大」「名大」「阪大」「京大」「九大」と全ての成分が「木」だけで書けるのは、「北大」と「九大」だけです (「阪大」は微妙です。「阪」の字の「交差点」をどう解釈するかによるので)。また、問題 2. は試験開始前に回収したレポート課題でしたが、割と良くできていました。しかし、「木」「完全グラフ」のような特殊なグラフに対して証明を試みた人が何人も居ます。これは問題の指示と異なるので部分点として 5 点を加えるにとどめてあります。

レポート課題の成績、出席点を考慮した最終成績は今週金曜日 (9/7) までに出しますので、成績の気になる方は情報科学研究科棟 8-13 室までお越しください。

また、重要な点として、この試験の総合成績に対する配点は 50 パーセントでしたから、期末試験を受けなかった学生さんは自動的に不合格となります。止むを得ない理由で試験を欠席した者は速やかに申し出てください。(申し出なければ、当講義は「必修科目」ではないため、「既に卒業に必要な単位を揃えているので受験しなかった」と勝手に解釈することにします。)

平成 19 年 9 月 3 日 井上純一