



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2007年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2007
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/28239">https://hdl.handle.net/2115/28239</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GraphTheory07_3.pdf, 第3回講義ノート



# グラフ理論 講義ノート #3

井上 純一

北海道大学 大学院情報科学研究科

URL : [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

平成 19 年 5 月 7 日

## 目次

3	様々なグラフの例	34
3.1	空グラフ	34
3.2	完全グラフ	35
3.3	正則グラフ	35
3.4	閉路グラフ	36
3.5	道グラフ	36
3.6	車輪	36
3.7	ピータースン・グラフ	37
3.8	二部グラフ	37
3.9	完全二部グラフ	37
3.10	$k$ -立方体	38
3.11	単純グラフの補グラフ	39
4	グラフにまつわるいくつかのパズル	39
4.1	8つの円の配置問題	39
4.2	4つの立方体パズル	40

### 演習問題 2 の解答例

(1) 次数列  $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$  を持つグラフは次図 32 に与えるピータースン・グラフである。一般的

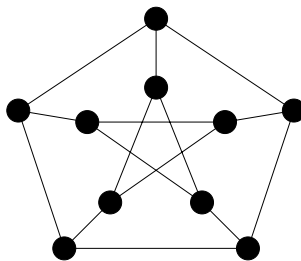


図 32: ピータースン・グラフ.

にグラフが与えられた場合に、その次数列を求めることは簡単であるが、逆に次数列が与えられた際に、それがグラフ的であるか、いかにグラフを描くのか、は難しい課題である。グラフ的であることの系統的な判定方法の考察に関しては今後の演習問題で扱うことにする。

(2)  $K_{3,3}$  に関しては既に述べたので、ここでは、 $K_{4,4}$  を次図 33 のような 2 通りの描き方をした場合の同型性を議論することにしよう。このとき、グラフ  $G_1, G_2$  間の同型写像  $\theta, \phi$  が

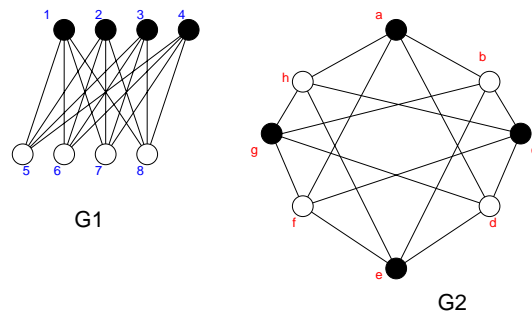


図 33:  $K_{4,4}$  の 2 通りの描き方.

$$\theta(1) = a, \theta(2) = c, \theta(3) = e, \theta(4) = g, \theta(5) = h, \theta(6) = b, \theta(7) = d, \theta(8) = f \quad (54)$$

$$\phi(\overline{15}) = \overline{ah}, \phi(\overline{16}) = \overline{ab}, \phi(\overline{17}) = \overline{ad}, \phi(\overline{18}) = \overline{af} \quad (55)$$

$$\phi(\overline{25}) = \overline{ch}, \phi(\overline{26}) = \overline{cb}, \phi(\overline{27}) = \overline{cd}, \phi(\overline{28}) = \overline{cf} \quad (56)$$

$$\phi(\overline{35}) = \overline{eh}, \phi(\overline{36}) = \overline{eb}, \phi(\overline{37}) = \overline{ed}, \phi(\overline{38}) = \overline{ef} \quad (57)$$

$$\phi(\overline{45}) = \overline{gh}, \phi(\overline{46}) = \overline{gb}, \phi(\overline{47}) = \overline{gd}, \phi(\overline{48}) = \overline{gf} \quad (58)$$

と選べることに注意すれば、確かにこの写像に対し、 $G_1, G_2$  の接続関数を  $\psi_{G_1}, \psi_{G_2}$  とすると

$$\psi_{G_1}(\overline{15}) = 15 \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{15})) = \psi_{G_2}(\overline{ah}) = ah = \theta(1)\theta(5) \quad (59)$$

等が成立するので、確かにグラフ  $G_1, G_2$  は同型である。

### 3 様々なグラフの例

この節では一般的にはグラフ  $G$  を論じるのではなく、様々な (特殊な) グラフを例をとって説明し、個々のグラフの特徴を見てゆくことにしよう。ここでは、後のこの講義で頻出するグラフとその性質を簡単に述べるが、具体的な応用例、及び、詳しい性質に関しては追々見て行くことになる。しかし、ここで出てくる各グラフの名前と大まかな性質を押さえておくと、後の学習がスムーズに進むであろう。

#### 3.1 空グラフ

空グラフ (null graph) : 辺集合が空であるグラフ (「点のみからなるグラフ」あるいは「辺のないグラフ」), 数式で表現するならば、 $n$  点からなる空グラフは  $N_n$  となる。図 34 に  $N_4$  の例を載せる。

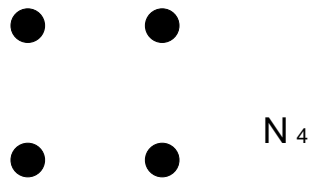


図 34: 空グラフ  $N_4$ .

### 3.2 完全グラフ

完全グラフ (complete graph) : 相異なる 2 つの点が全て隣接している単純グラフ (ループや多重辺を含まないグラフ). ( 難しく言う  $\Rightarrow \forall v, v' \in V(G), v \neq v'$  に対し,  $v, v'$  を両端とする辺が唯一 1 個存在するグラフ.) 式では  $n$  個の点からなる完全グラフは  $K_n$  と表現される.

$n$  個の点からなる完全グラフ  $K_n$  の辺の総数は,  $1, 2, \dots, n$  個の点の中から任意に 2 点選んで結ぶ場合の数, すなわち,  ${}_n C_2 = n(n-1)/2$  個である. 図の例で言うと,  $n = 4$  の場合には 6 本,  $n = 5$  の場合には 10 本であり, これは図 35 より直ちに確認できる (今年度の 演習問題 1 (2) もあわせて参照のこと).

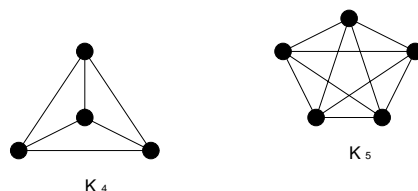


図 35: 完全グラフ  $K_4$  及び  $K_5$ .

### 3.3 正則グラフ

$r$ -正則グラフ (regular graph) : 全ての  $v \in V(G)$  に対して,  $\text{dev}(v) = r$  であるグラフ. 平たく言うと, どの点の次数も全て共通に  $r$  であるグラフ. ( 注: 正則グラフという観点からは,  $N_n$  は 0-正則グラフ,  $C_n$  は 2-正則グラフ,  $K_n$  は  $(n-1)$ -正則グラフということになる.)

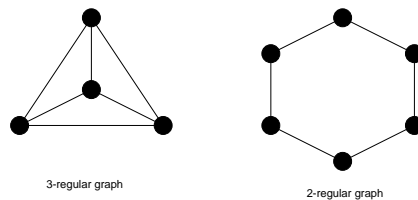


図 36: 次数 3 の正則グラフ (左), 及び, 次数 2 の正則グラフ (右) の例.

### 3.4 閉路グラフ

閉路グラフ (cycle graph) : 次数 2 の正則連結グラフ. 式では  $C_n$  のように表記される.

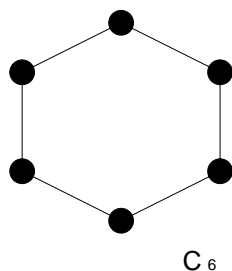


図 37: 閉路グラフ  $C_6$ .

### 3.5 道グラフ

道グラフ (path graph) : 閉路グラフ  $C_n$  から一つの辺を除いて得られるグラフ. 式で表現すると  $P_n$  となる.

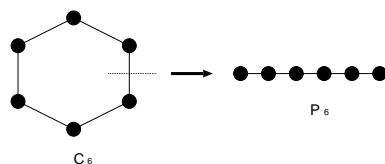


図 38: 閉路グラフ  $C_6$  から次数 6 の道グラフ  $P_6$  を作成する過程.

### 3.6 車輪

車輪 (wheel) :  $C_{n-1}$  に新しい点  $v$  を一つ加え,  $v$  と他の全ての点とを辺 (「スポーク」と呼ばれる) で結んでできるグラフ. 式で表記すると  $W_n$  となる.

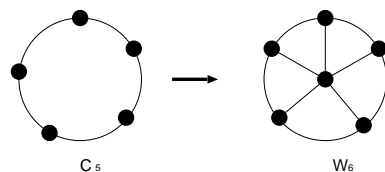


図 39: 閉路グラフ  $C_5$  から次数 6 の車輪  $W_6$  を作成する過程.

### 3.7 ピーターソン・グラフ

ピーターソン・グラフ (Petersen graph) は図のような特殊な形状を持つグラフであるが、前回の演習問題 2 (1) でも見たように、今後の演習問題等でしばしば現れることになる<sup>1</sup>。

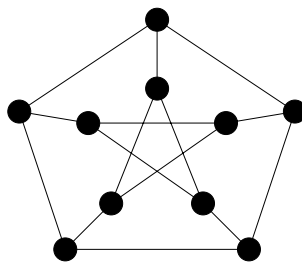


図 40: ピーターソン・グラフ.

### 3.8 二部グラフ

二部グラフ (bipartite graph) : グラフ  $G$  の点集合を 2 つの素な集合  $A, B$  に分割し、 $G$  の全ての辺は  $A$  の点と  $B$  の点を結ぶようにできたとする。このとき、グラフ  $G$  は二部グラフであるという。

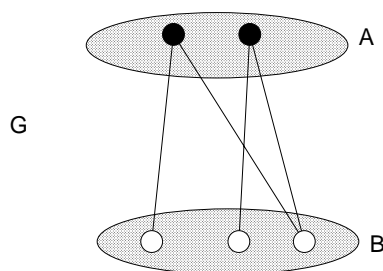


図 41: 二部グラフ  $G$  の例. 全ての辺の端点は黒丸と白丸のペアでなくてはならない.

### 3.9 完全二部グラフ

完全二部グラフ (complete bipartite graph) :  $A$  の各点が  $B$  の各点とちょうど 1 本の辺で結ばれている二部グラフ.

図のように点を黒丸と白丸で 2 つの集合に分けたとき、黒の点  $r$  個、白の点  $s$  個からなる完全二部グラフは  $K_{r,s}$  と表記される。当然であるが、 $K_{r,s}$  には  $(r + s)$  個の点と  $rs$  本の辺がある。

<sup>1</sup> Petersen graph は教科書では「ピーターソン・グラフ」と発音、日本語表記されているが、他の専門書では「ペテルセン・グラフ」と発音、日本語表記されているものが多い(むしろ、こちらの方が多数派である)

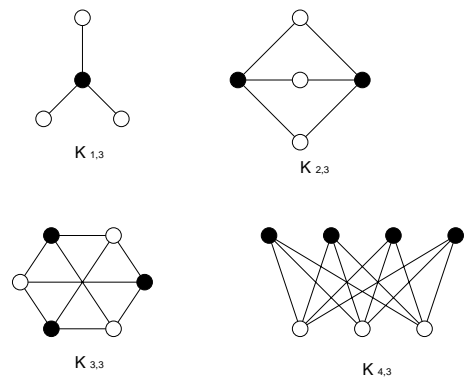


図 42: 完全二部グラフ  $K_{1,3}, K_{2,3}, K_{3,3}, K_{4,3}$ .

### 3.10 $k$ -立方体

$k$ -立方体 ( $k$ -cube) :  $a_i = 0$  or  $1$  であるような 1 つの列 (ベクトル)  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  に一つの点を対応させ、一つだけ異なる成分  $a_i$  を持つ二つのベクトルに対応する二つの点が辺で結ばれるような正則二部グラフ. 式で表記すると  $Q_k$  となる.

$\Rightarrow Q_k$  は  $2^k$  個の点と,  $k2^{k-1}$  本の辺を持つ<sup>2</sup>.

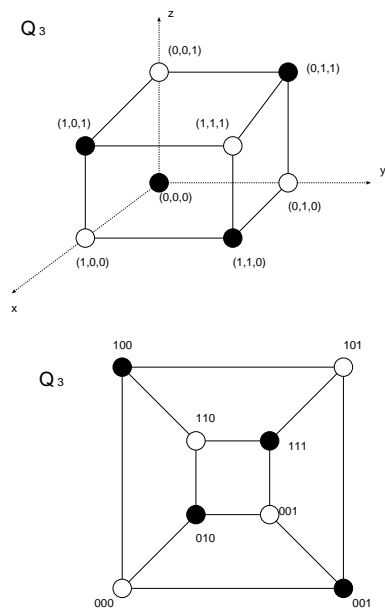


図 43: 3-立方体. 図の  $G_1$  及び  $G_2$  は同形である.

<sup>2</sup>  $(0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots$  の各ベクトルの  $k$  成分のうちどの成分が食い違うかという場合  $k$  通り, 残りの  $k-1$  成分の並び替え  $2^{k-1}$  通りの積で  $k2^{k-1}$  本の辺の数となる.

### 3.11 単純グラフの補グラフ

単純グラフの補グラフ (complement) : 単純グラフ  $G$  の補グラフ  $\overline{G}$  とは, 点集合  $V(G)$  を持ち,  $\overline{G}$  の 2 点が隣接するのは  $G$  におけるそれらの 2 点が隣接していないとき, かつ, そのときに限るような単純グラフを言う.

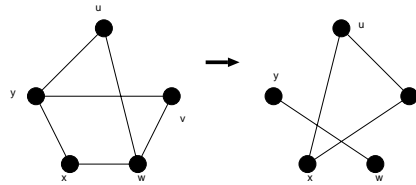


図 44: 単純グラフから, その補グラフを作成する過程.

- 完全グラフの補グラフは空グラフである. (ただし, 逆は言えない).
- 完全二部グラフの補グラフは 2 つの完全グラフの和である.

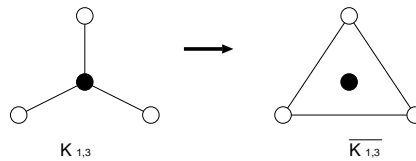


図 45: 完全二部グラフ  $K_{1,3}$  とその補グラフ.

## 4 グラフにまつわるいくつかのパズル

ここでは, グラフを用いて効率的に解くことができる 2 つのパズルを紹介しよう.

### 4.1 8 つの円の配置問題

図 46 のような 8 つの円の中に A, B, C, D, E, F, G, H の 8 つの文字を入れることを考える. ただし, アルファベット順で隣にくる文字は互いに隣接しないように置く. このとき, このとき, 適切な配置の仕方を答えよ. ちなみに, 可能な配置の総数は  $8! = 46320$  通りであるから, 全ての場合をしらみつぶしに試してみる戦略は適切ではないことに注意しよう. (着眼点) :

- A と H の配置の仕方は易しい (片側にしか相手がいないから).
- 図の #1, #2 の円への配置が最も難しい (次数が最大だから).

(解答) :

1. 最も次数が多く難しい, #1, #2 にそれぞれ A, B を配置する.

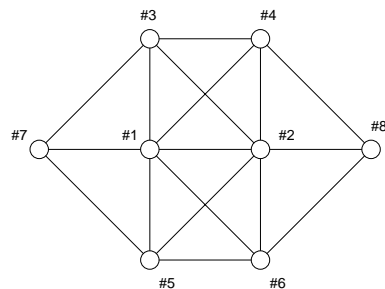


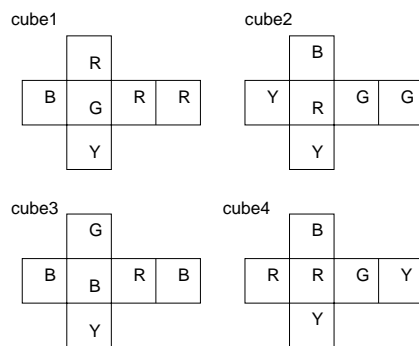
図 46: 8 つの円の配置問題の図.

2. アルファベットで A, H の隣にくる B 及び G をそれぞれ #8, #7 にそれぞれ配置する.
3. 残りの文字をそれぞれがアルファベットで隣り合わないよう配置する. 例えば, #3 = C, #4 = E, #5 = D, #6 = F のように配置すればよい.

## 4.2 4 つの立方体パズル

(問題)

図のような立方体の展開図 : cube1, cube2, cube3, cube4



から立方体を作り, それらを積み上げて, 四角柱を作り, 四角柱の 4 つの側面それぞれに 4 色全てが表れるような四角柱の積み上げ方を見つけない。

以下の問い (1) ~ (3) に答え, このような配置を求めよ.

- (1) 各立方体を 4 点からなるグラフで表し, R, B, G, Y の各点は各色に対応させ, 平行な面に塗られた色に対応する点は辺で結ぶ. このようにして出来上がるグラフを cube1, cube2, cube3, cube4 に対して描け.
- (2) (1) で求めたグラフを重ね合わせたグラフ G を描け.
- (3) G の部分グラフ  $H_1, H_2$  を見つけ出し, 立方体 : cube1, cube2, cube3, cube4 を積み上げて, 四角柱を作り, 四角柱を作ったとき, その四角柱の 4 つの長方形の側面にそれぞれ 4 色全部が現れるような積み上げ方を示せ.

(解答)

(1) まず, cube1, cube2, cube3, cube4 に相当するグラフはそれぞれ図 47 のようになる.

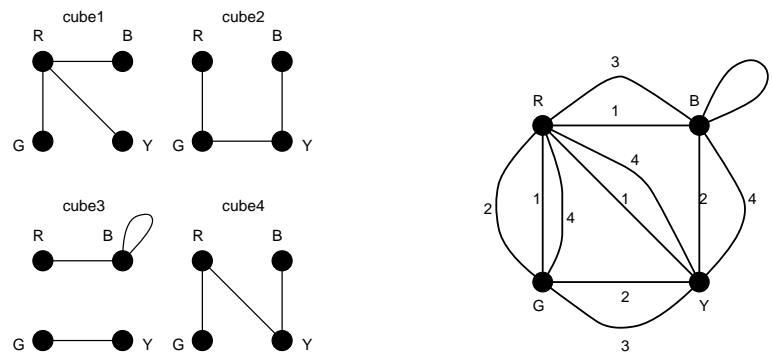


図 47: cube1, cube2, cube3, cube4 にそれぞれ相当するグラフ (左), 及び, それぞれのグラフを重ね合わせるにより得られるグラフ G(右).

- (2) (1) で得られたグラフを重ね合わせると, 図 47(右) の G が得られる.  
 (3) 各 cube の辺をちょうど 1 本ずつ含み, 共通な辺が無く, 次数 2 の正則グラフとしてのグラフ G の部分グラフ  $H_1, H_2$  を選ぶと, 図 48 のようになる. これらの部分グラフ  $H_1 (FB), H_2 (LR)$  を用いて, cube1,

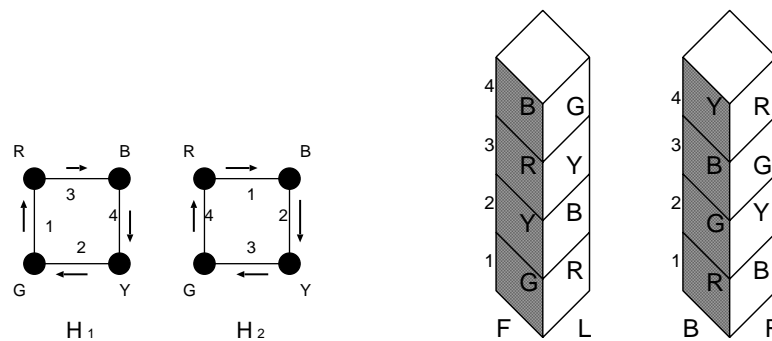
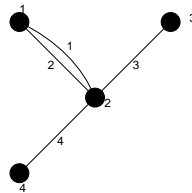


図 48: 求める G の部分グラフ  $H_1, H_2$  (左), 及び, 求める立方体の積み上げ方 (右).

cube2, cube3, cube4 を積み上げると図 48(右) のようになる. これが答えである.

例題 3.1 (2004 年度 演習問題 3)

図に載せるグラフ  $G$  に関して以下の問いに答えよ.



- (1) グラフ  $G$  の接続行列を求めよ.
- (2) 接続行列の各列の要素の和は何を意味しているか?
- (3) 接続行列の各行の要素の和は何を意味しているか?
- (4)  $\epsilon(G)$  をグラフ  $G$  の辺数とすると

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\epsilon(G)$$

が成り立つことを示せ.

(解答例)

- (1) 定義に従って, 問題に与えられたグラフの接続行列  $M$  を書き下すと

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のようになる.

- (2) 例えば, 上記の接続行列の第 1 行目を見てみると, 第 1, 2 列に 1 が立っている. これは点 1, 2 が辺 1 で結ばれていることを表している. 接続行列の定義から, 各列は辺の番号を表し, 各列に 1 が立っている行が該当する辺に接続する点を表しており, 1 つの辺に接続できる点の数は常に 2 つであるから, 接続行列の各列の成分の和は常に 2 であるといえることができる.
- (3) 接続行列の定義から, 各行の成分の和は各点の次数の和を表す.
- (4) (2)(3) の考察より, 次数の和  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  接続行列の各行の成分和を全ての行に対して計算したものに等しく, これは接続行列の全ての成分を足したものである. 一方, 接続行列の各列の要素の和は常に 2 であり, 従って, 接続行列の全ての成分の総和は, 辺の数の 2 倍すなわち  $2\epsilon(G)$  であり, 結局

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\epsilon(G)$$

が成り立つ.

例題 3.2 (2004 年度 演習問題 3)

図 35 に載せた完全グラフ  $K_5$  について以下の問いに答えよ.

- (1) 図 35 の完全グラフ  $K_5$  の 5 つの頂点に, 時計回りに番号  $1, \dots, 5$  を割り当てる. このとき, この完全グラフの隣接行列  $A$  を求めよ.
- (2) 点 1 と点 3 を結ぶ長さ 2 の歩道の数は,  $A^2$  の第  $(1, 3)$ -成分に等しいことを示せ.
- (3) 点 1 と点 3 を結ぶ長さ 3 の歩道の数は,  $A^3$  の第  $(1, 3)$ -成分に等しいことを示せ.
- (4) 一般に, 隣接行列  $A$  を持つ単純グラフ  $G$  の 2 点  $i, j$  を結ぶ長さ  $K$  の歩道の数は,  $A^K$  の第  $(i, j)$ -成分に等しいことを示せ.

(解答例)

- (1) 完全グラフ  $K_5$  の隣接行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように対角成分がゼロであり, 非対角成分に 1 が並んだ行列となる.

- (2) まず, 図の完全グラフ  $K_5$  から考察してみると, 点 1 と 3 を結ぶ長さ 2 の歩道は

- [1]  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
- [2]  $1 \rightarrow 5 \rightarrow 3$
- [3]  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

の 3 つである.

一方, 隣接行列の自乗を計算してみると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

となり, これから直ちに  $A^2$  の第  $(1, 3)$ -成分は 3 であることがわかる. 従って, 題意が示せた.

- (3) (2) と同様に, 少々面倒であるが, まずは問題の完全グラフから点 1, 3 を結ぶ長さ 3 の歩道を数え上げてみると

- [1]  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- [2]  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- [3]  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- [4]  $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- [5]  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

- [6] 1 → 2 → 4 → 3
- [7] 1 → 3 → 2 → 3
- [8] 1 → 3 → 4 → 3
- [9] 1 → 3 → 5 → 3
- [10] 1 → 4 → 2 → 3
- [11] 1 → 4 → 5 → 3
- [12] 1 → 5 → 2 → 3
- [13] 1 → 5 → 4 → 3

のようになり, 計 13 通り存在する.  
 一方,  $A^3$  を計算すると

$$A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 12 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

となり, この第 (1, 3)-成分は 13 となり, 題意が示された.

(4) 一般に  $n$  点からなる単純グラフの隣接行列の  $K$  乗, つまり,  $A^K$  の第  $(i, j)$ -成分は

$$[A^K]_{ij} = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_K=1}^n a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 k_3} \cdots a_{k_{K-1} k_K} a_{k_K j}$$

であり,  $a_{ik_1}$  は点  $i$  と  $k_1$  を結ぶ道の数であることから, 上記の  $[A^K]_{ij}$  は点  $i, j$  を結ぶ道の数に等しいことがわかる.

**例題 3.3** (2004 年度 演習問題 3)

完全三部グラフ  $K_{r,s,t}$  はそれぞれに属する点の個数が  $r, s, t$  である 3 つの点集合からなり, 異なる集合に属する点は全て辺で結ばれているグラフである. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $K_{2,2,2}$  及び  $K_{3,3,2}$  を描け.
- (2)  $K_{r,s,t}$  には全部で何本の辺があるか答えよ.

(解答例)

- (1) 完全三部グラフ  $K_{2,2,2}$  を描くと図 49 のようになる ( $K_{3,3,2}$  も同様にして作図できるが, ここでは省略.).
- (2)  $K_{r,s,t}$  の辺の本数は  $rs + rt + st$  本である.

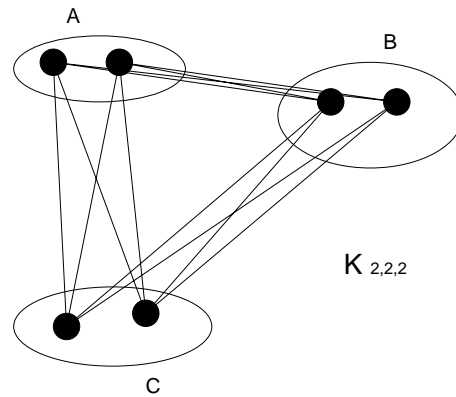


図 49: 完全 3 部グラフ  $K_{2,2,2}$  の作図例.  $K_{3,3,2}$  も同様にして作図できるが, ここでは省略.

**例題 3.4** (2005 年度 演習問題 3)

1. 次の (i) ~ (v) のグラフがある場合にはそれを 1 つ挙げて描け (無い場合には「無し」と書く).
  - (i) 次数 5 の正則グラフであるような二部グラフ.
  - (ii) 二部グラフであるプラトン・グラフ.
  - (iii) 車輪である完全グラフ.
  - (iv) 11 個の点をもつ 3 次グラフ.
  - (v) 次数 4 の正則グラフで  $K_5, K_{4,4}, Q_4$  以外のグラフ.
  
2. それ自身の補グラフと同形な単純グラフは自己補対 (self-complementary) であるという.
 

このとき

  - (1) 4 個, または 5 個の点をもつ自己補対グラフを全て描け.
  - (2) 8 個の点からなる自己補対グラフを見つけよ.

(解答例)

- 1.(i) 次数 5 の正則グラフである二部グラフは図 50 のような完全二部グラフ  $K_{5,5}$  が挙げられる.

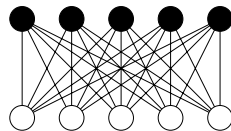


図 50: 次数 5 の正則グラフである二部グラフの例.

- (ii) 二部グラフであるプラトングラフとしては, 図 51 のような立方体が挙げられる.
- (iii) 車輪である完全グラフは図 52 である.
- (iv) まずは, 図 53 に点数が  $n = 4, 6, 8, 10, 12$  の場合の 3 次の正則グラフの例を載せる. ここで問われている問題は自然数列  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (3, 3, \dots, 3)$  がグラフ的であるかどうか, を  $n = 11$  の場合に

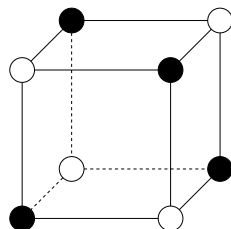


図 51: 二部グラフであるプラトングラフの一例.

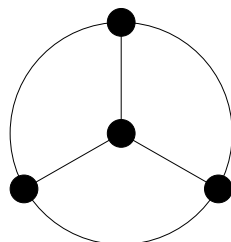


図 52: 車輪である完全グラフ.

確かめ, グラフ的である場合には具体的にその図を描け, と言い直すことができる. この場合, 握手捕題から, 点数  $n$ , 次数 3 のグラフの辺数  $m$  は

$$m = \frac{3n}{2} \tag{60}$$

である. ここで, これを図で確認してみると, 確かに成立していることがわかる. 辺の数は必ず整数でなければならないので, この式が成り立つためには  $n$  は偶数でなければならない. 従って,  $n = 11$  の場合には全ての点の次数が 3 であるような正則グラフは描けないことが結論つけられる.

(v) 次数 4 の正則グラフで  $K_5, K_{4,4}, Q_4$  以外のグラフとしては図 54 のような正 8 面体が挙げられる.

2.

(1) まず, その補グラフが自己補対であることから, そのグラフおよび対応する補グラフの和 (グラフを 2 つ重ね合わせたもの) が完全グラフとなることに着目する. すると, 点数が  $n$  である完全グラフの辺数  $m$  が  $m = n(n-1)/2$  であるから, 求めるグラフの辺数はこの半分, すなわち,  $n(n-1)/4$  であることが必要である. 従って, 辺数は整数でなければならないので, 求めるグラフの点数  $n$  は  $k$  を整数として,  $n = 4k$  あるいは  $n - 1 = 4k$  でなければならない, すなわち, 求めるグラフが自己補対であるためには, 点の数  $n$  が  $n = 4k$  か  $n = 4k + 1$  であることが必要である.  $k = 1$  とした場合,  $n = 4$  または  $n = 5$  となるが, このときの自己補対グラフを具体的に求めよ, というのがここでの問題である. そこで, まず  $n = 4$  の場合について考えてみると, 各点の次数は孤立点が生じてはならないわけであるから, 1, 2 に限られることに注意する. 次数 1 の点の個数を  $L$ , 次数 2 の点の個数を  $M$  とすれば, 正の整数  $L, M$  は次の等式を見たさなければならない.

$$L + 2M = 6 \tag{61}$$

$$L + M = 4 \tag{62}$$

これを満たす組み合わせとしては  $(L, M) = (2, 2)$  であり, 求める自己補対であるグラフの次数列は

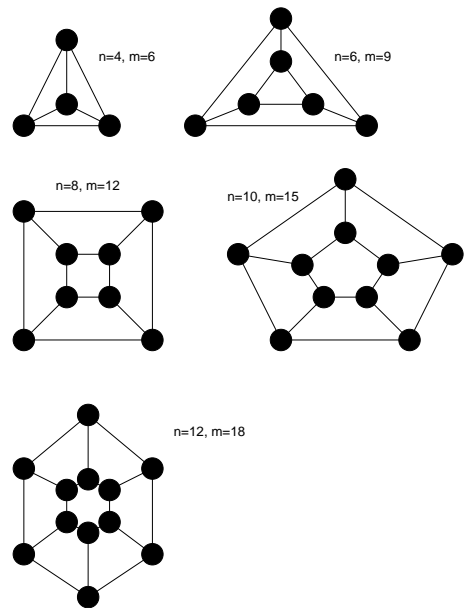


図 53: 点の数が  $n = 4, 6, 8, 10, 12$  の場合の正則グラフ. ちなみに,  $n = 10$  の場合には前に見た「ピータースン・グラフ」も当てはまる. この辺数は  $m = 15$  である.

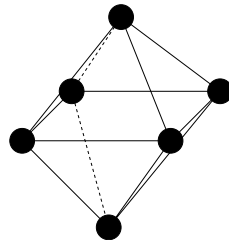


図 54: 次数 4 の正則グラフである正 8 面体.

(1, 1, 2, 2) のみであることがわかる. これを満たすグラフとしては図 55 の左図実線が挙げられる (これのみ).

同様に,  $n = 5$  の場合に対し, 各点の次数は 1, 2 または 3 であるから, このそれぞれの次数を持つ点の数を  $L, M$  及び  $N$  とすれば, 次の等式:

$$L + 2M + 3N = 10 \tag{63}$$

$$L + M + N = 5 \tag{64}$$

が成り立つ. これを満たす解は  $(M, L, N) = (1, 3, 1), (2, 1, 2)$  の 2 つであるので, 可能な自己補対グラフの次数列としては  $(3, 2, 2, 2, 1)$  あるいは  $(3, 3, 2, 1, 1)$  であるが, 前者では自己補対グラフは実際には描けず, 後者に関しては図 55 の右図実線 (これのみ) が対応する.

補足コメント:

$n = 5$  の場合に自己補対グラフを求める問題で, 次数 1, 2, 3 の点の個数を  $L, M, N$  としたとき

$$L + 2M + 3N = 10 \tag{65}$$

$$L + M + N = 5 \tag{66}$$

として, 可能な次数列を  $L, M, N \geq 1$  の範囲内で探しましたが,  $L, M, N$  はゼロも取りうるので, こ

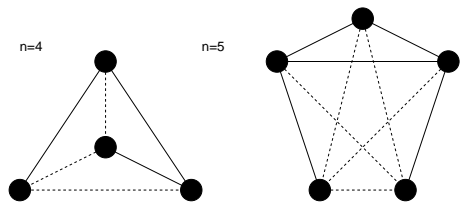


図 55: 点の数が 4, または 5 であるような自己補対グラフ. 点線で描かれたグラフがそれぞれの補グラフを表す.

の範囲内で探せば,  $M = 5, L = N = 0$  も上記方程式を満たします. このときの次数列は  $(2, 2, 2, 2, 2)$  となり, 可能な自己補対グラフとして図 56 のようなものも存在することになります.

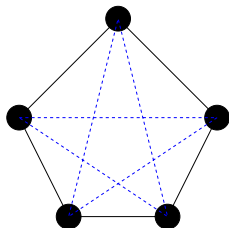


図 56:  $n = 5$  の場合の自己補対グラフのもう一つの可能性. 図の実線と破線がそれぞれ互いに同形となっている.

(2) 前に得た必要条件の式で  $k = 2$  と置くと  $n = 8$  が得られるので, 8 点からなる自己補対グラフを一つ見つけよう. この際, 次のようなアルゴリズム (I)-(IV) を用いて所望のグラフを見つけることにしよう.

(I) 図 57 のように 8 個の点,  $1, \dots, 8$  を時計回りに並べる.

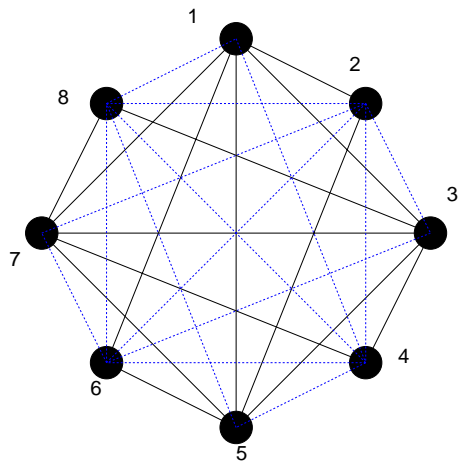


図 57: ここで得られる自己補対グラフ (実線) とその同形グラフ (破線). 自己補対の定義より, 実線と破線を足したものが 8 次の完全グラフ  $K_8$  となることに注意.

(II) 8 個の点の中で奇数番目の点  $(1, 3, 5, 7)$  に関して完全グラフを作る (自分以外の点全てと各々 1 本の辺で結ばれる).

(III) 奇数番目の点のそれぞれと, その点に 1 を加えた偶数番目の点 (例えば, 点 1 ならば点 2, 点 3 ならば点 4) を結ぶ. この時点で辺の数は 10 であり, 8 個の点が全てつながった連結グラフが出来上がる. 従って, 自己補対グラフを作るためにはあと  $14 - 10 = 4$  本の辺を付け足せばよい.

(IV) 最後のステップとして、偶数番目の各点と、その点の番号プラス 3 に相当する番号の点を結ぶ (点 2 と点 5 を、点 8 は  $8 + 3 = 11$  であるが、 $11 - 8 = 2$  であるから、点 8 と点 2 を結ぶことと約束する)。この操作 (I)-(IV) で計 14 本の辺からなるグラフができるが、その作り方から明らかに、これ (図 57 の実線) と奇数番目の点の持つ役割と偶数番目の点の持つ役割を交換してでき上がるグラフ (図 57 の破線図) は互いに同形なので (お互いを足すと完全グラフができ上がる)、これらのグラフ (図 57 の実線、破線) が互いに自己補対となることは明らかである。

**例題 3.5** (2006 年度 演習問題 3)

図 58 のような展開図を持つ 4 つの立方体の問題には解が無いことを示せ。

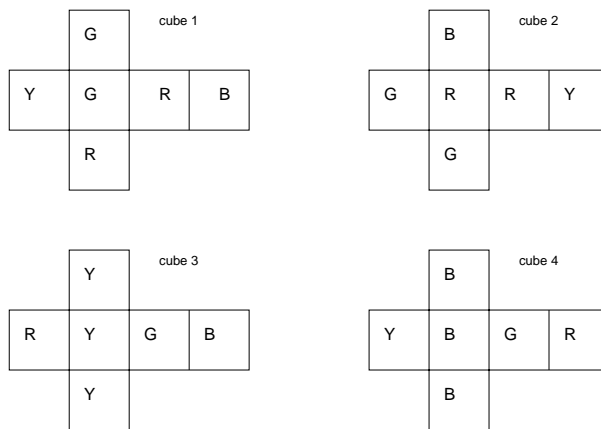


図 58: ここで問題にする 4 つの立方体の展開図.

(解答例)

まず、各立方体の展開図において、それを組み立てたときに向かい合う面とおしを辺で結んでできるグラフはそれぞれ次の図 59 (左) のようになる。従って、これらのグラフを一つのグラフにまとめると図 59 (右) の

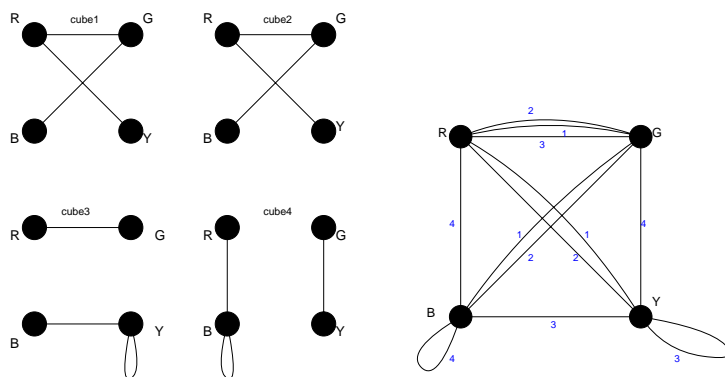


図 59: 各展開図からできるグラフ (左) と 4 つのグラフを一つにまとめてできるグラフ (右).

ようになる。このグラフで辺  $\overline{RB}$ ,  $\overline{GY}$  は全て cube4 からの辺であるから、共通する辺が無い次数 2 の正則グ

ラフは選べないことになる. よって, 与えられた 4 つの立方体を題意のように積み上げることはできない.

**例題 3.6** (2005 年度情報工学演習 II(B) #1)

単純グラフ  $G$  の線グラフ  $L(G)$  (line graph) とは  $G$  の各辺に一対一対応する点を持ち,  $G$  で隣接している 2 本の辺に対応する  $L(G)$  の 2 個の点を必ず結んで得られるグラフのことである. このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $K_3$  と  $K_{1,3}$  の線グラフをそれぞれ描き, 両者は同一のグラフとなることを示せ.
- (2) 正四面体グラフの線グラフは正八面体グラフであることを示せ.
- (3)  $G$  が次数  $k$  の正則グラフであるとき,  $L(G)$  は次数  $2k - 2$  の正則グラフであることを示せ.
- (4)  $G$  の点数をもって,  $L(G)$  の辺数を表す公式を作れ.
- (5)  $L(K_5)$  はピーターソン・グラフの捕グラフであることを示せ.

(解答例)

- (1) 図 60 より,  $K_3$  と  $K_{1,3}$  の線グラフは同一である.

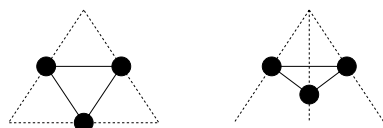


図 60:  $K_3$  の線グラフ (左の実線) と  $K_{1,3}$  の線グラフ.

- (2) 図 61 参照. 出来上がるグラフは正八面体グラフである.

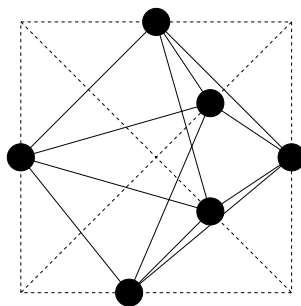


図 61: 正四面体グラフ ( $K_4$ ) の線グラフ (実線).

- (3) 次数  $k$  の正則グラフの各辺に点  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) ( $m$  は辺数) を打つ. 各辺に隣接する辺数は  $(k-1)$  であり, 各点  $v_i$  と結ぶことのできる他点  $v_j$  ( $j \neq i$ ) の数は  $2(k-1)$  であり, これが全ての点  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) に対して当てはまるので, 次数  $k$  の正則グラフの線グラフは次数  $2k - 2$  の正則グラフであることがわかる.
- (4) 辺数を  $m$  で表すと (3) の結果と握手捕題より,  $2(k-1) \times n = 2m$ , 従って

$$m = n(k-1) \tag{67}$$

となる.

(5) (3)(4) の結果から,  $L(K_5)$  の点数  $n$ , 辺数  $m$ , 次数  $d$ (正則グラフであることに注意) は

$$n(L(K_5)) = m(K_5) = 10, \quad m(L(K_5)) = n(k-1) = 5 \times 3 = 15, \quad d(L(K_5)) = 2k - 2 = 6 \quad (68)$$

である. 一方, 10 個の点からなる完全グラフ  $K_{10}$  は

$$n(K_{10}) = 10, \quad m(K_{10}) = 45, \quad d(K_{10}) = 9 \quad (69)$$

である. 題意が正しいのであれば, つまり, 「 $L(K_5)$  はピーターソン・グラフの捕グラフである」ならば, 捕グラフの定義より,  $L(K_5) + \text{ピーターソン・グラフ} = K_{10}$  となるべきであるが, 上の考察より,  $m(K_{10}) - m(L(K_5)) = 45 - 15 = 30 = m(\text{ピーターソン・グラフ})$ ,  $d(K_{10}) - d(L(K_5)) = 9 - 6 = 3 = d(\text{ピーターソン・グラフ})$  であり, 確かにピーターソン・グラフである条件 (点数 10, 辺数 30, 次数 3 の正則グラフ) を満たしている. 従って,  $L(K_5)$  はピーターソン・グラフの捕グラフである.

**例題 3.7** (2003 年度情報工学演習 II(B) #2)

グラフ  $G$  は  $2k$  個の点を持つ単純グラフで, 三角形は無いとする.  $G$  の辺の数  $m(2k)$  は  $k^2$  以下であること, つまり

$$m(2k) \leq k^2 \quad (70)$$

を  $k$  に関する帰納法で示せ. また, この辺の数についての上限  $k^2$  を実現するグラフを一つ作れ.

(解答例)

三角形を含まない連結グラフで辺の数が最大のものは完全二部グラフである.

特に  $K_{k,k}$  は辺の数  $k^2$ , 点の数  $2k$  であるから, この  $K_{k,k}$  に対して

$$m(2k) \leq k^2 \quad (71)$$

を仮定し,  $K_{k,k}$  に点を 2 つ ( $v, w$ ) を足して,  $2k + 2$  個の点から成る三角形を持たないようなグラフが出来上がるように  $v, w$  を  $K_{k,k}$  を結ぶときの辺数の最大値が  $(k + 1)^2$  となることを示せば良い (数学的帰納法). これは, 完全二部グラフ  $K_{k,k}$  の黒丸と  $v$ (白丸) を結んでできる  $k$  本と,  $K_{k,k}$  の白丸と  $w$ (黒丸) を結んで

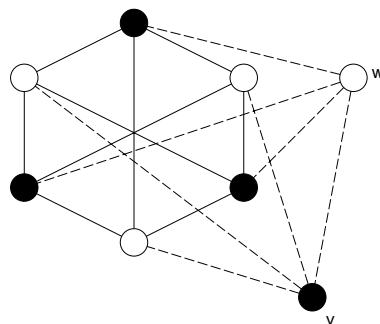


図 62:  $K_{3,3}$  に関する例.  $K_{3,3}$  に点  $v, w$  を加える.

きる  $k$  本, そして,  $v$  と  $w$  を結んでできる 1 本, さらに,  $K_{k,k}$  に元々あった  $k^2$  本の本数の辺から成る完全

二部グラフ  $K_{k+1,k+1}$  の場合に辺数最大であり (図 62 参照), このときの辺数は  $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$  となる. 従って

$$m(2(k + 1)) \leq (k + 1)^2 \tag{72}$$

となり, 数学的帰納法より,  $G$  の辺数  $m(2k)$  は  $k^2$  以下であることが示せた.

**演習問題 3**

例題 3.2 で見たように, 隣接行列の  $k$  乗, すなわち,  $A^k$  の第  $(i, j)$  成分は, 点  $i, j$  を結ぶ長さ  $k$  の歩道の本数に等しい. これをふまえて, 任意のスカラー変数  $x$  に対し, 次の行列:

$$I + xA + x^2A^2 + \dots + x^kA^k + \dots \tag{73}$$

を考えよう ( $I$  は単位行列). 明らかに, この行列 (73) の第  $(i, j)$  成分を  $x$  の冪関数とみなしたとき,  $x^k$  の係数は点  $i, j$  を結ぶ長さ  $k$  の歩道の本数を表す. そこで, スカラー  $a$  に対して次のテーラー展開:

$$(1 - a)^{-1} = 1 + a^2 + a^3 + \dots + a^k + \dots \tag{74}$$

が成り立ったことを思い出せば, 行列  $A$  に対しても同様に

$$(I - xA)^{-1} = I + xA + x^2A^2 + \dots + x^kA^k + \dots \tag{75}$$

の成立が期待できる. このとき, 行列  $(I - xA)^{-1}$  を「歩道生成行列」と名づけることにしよう. つまり, (75) 式の成立より, 行列  $(I - xA)^{-1}$  の第  $(i, j)$  成分を  $x$  の冪関数で表したとき,  $x^k$  の係数を見さえすれば, 点  $i, j$  を結ぶ長さ  $k$  の歩道の本数を知ることができる. このとき, 図 63 に与える 2 つのグラフに対し, 具体的に歩道生成行列  $(I - xA)^{-1}$  を求め, 実際に上記の事実を確かめよ.

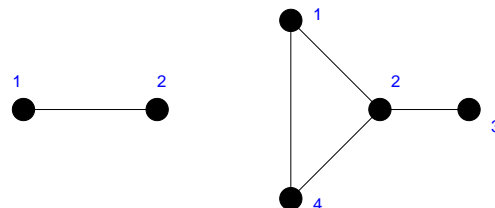


図 63: ここで具体的に歩道生成行列を求める 2 つの単純グラフ.